Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Sexta Aula de Cálculo Numérico

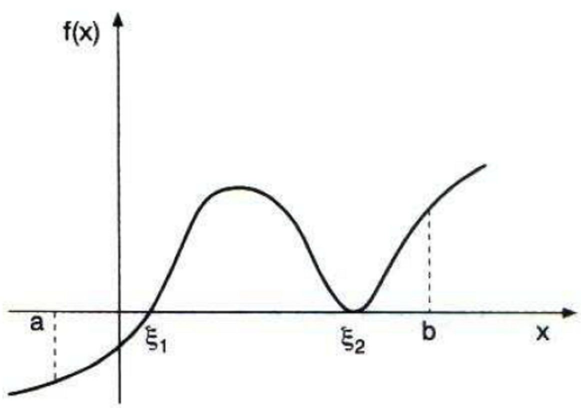
Métodos de Zero de Funções

Professor da Disciplina

Wagner Pimentel

Métodos de Zero de Funções

Sabemos que, para algumas equações, como as equações polinomiais de segundo grau, existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função de seus coeficientes. No entanto, no caso de polinômios de grau mais elevado e no caso de funções mais complexas é praticamente impossível se achar os zeros de $f(x)$, exatamente. Um zero da função $f(x)$, ou uma raiz da equação $f(x) = 0$, é um escalar $\xi \in \Re$ tal que $f(\xi) = 0$. Nesta figura, considerando o intervalo $[a, b]$, existem duas raízes, ξ_1 e ξ_2, da função f.



- ξ_1 e ξ_2 são raízes da função f.
- ξ_1 é uma raiz simples de f, pois $f'(\xi_1) \neq 0$.
- ξ_2 é uma raiz múltipla de f, pois $f'(\xi_2) = 0$.

Nesta seção estudaremos os métodos de zero de funções, ou seja, métodos numéricos que determinam de forma aproximativa os zeros da equação não linear, $f(x) = 0$. Estudaremos os métodos: o método da bisseção, o método da falsa posição e o método de Newton-Raphson.

Os dois primeiros métodos se aplicam apenas as raízes simples, já o método de Newton-Raphson se aplica a raízes simples e múltiplas.

A idéia central desses métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz da função $f(x)$ e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo. Assim, esses métodos consistem de duas fases:

- Fase 1: Isolamento da raiz, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz;

- Fase 2: Refinamento, que consiste de aproximações sucessivas da raiz, utilizando um método númerico iterativo (o método da bisseção, o método da falsa posição ou o método de Newton-Raphson), até que um critério de parada seja satisfeito.

Fase 1:

Teorema de Bolzano: Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Se $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = \xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$. E mais, se $f'(x)$ existir e preservar o seu sinal $\forall x \in (a, b)$, então este zero, ξ, é unico.

Nesta fase de localização das raízes de $f(x) = 0$, podemos aplicar dois procedimentos:

i) transforme o problema de zero de função, $f(x) = 0$, em um problema equivalente de interseção de funções, $g(x) = h(x)$, tais que: se $f(\xi) = 0 \equiv g(\xi) = h(\xi)$, ou seja, os pontos onde as funções $g(x)$ e $h(x)$ se interceptam são os pontos que são zeros do problema $f(x) = 0$;

i) discretize do domínio da função f e analise as mudanças de sinal de $f(x)$. Analise, também, o sinal da derivada nos intervalos de mudança de sinal da função.

Aplicação

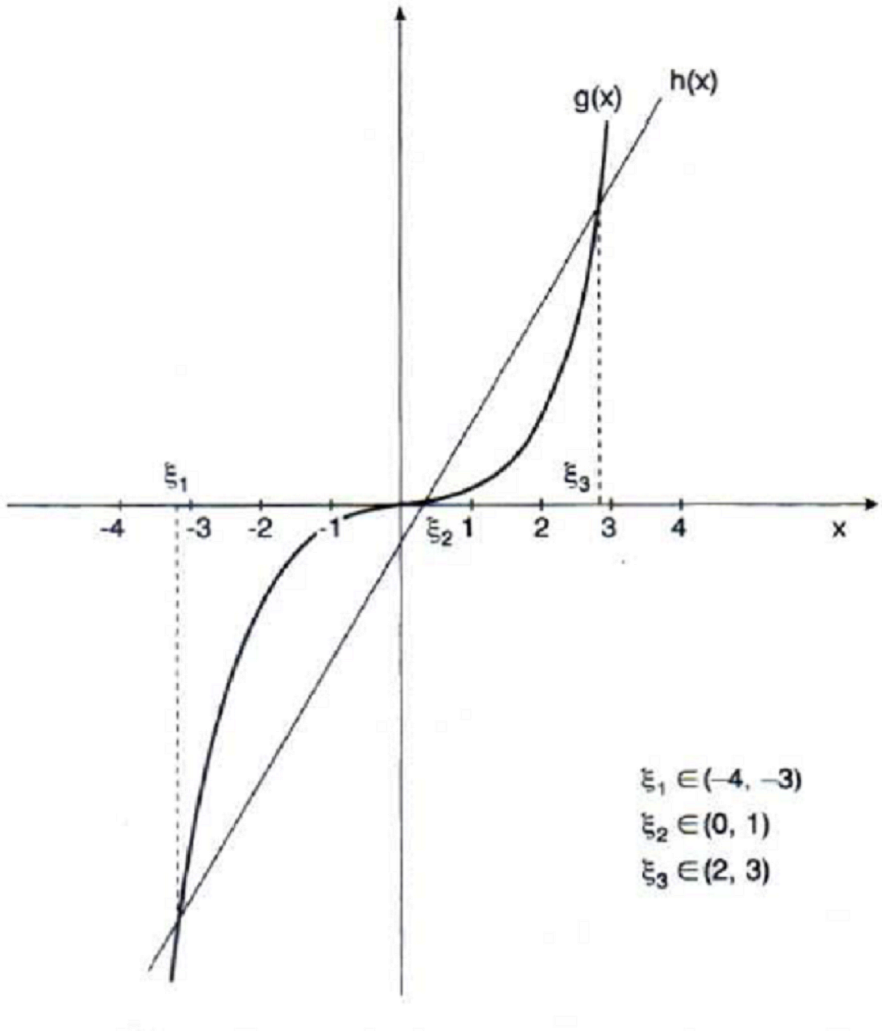
Considere a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ e o problema de zero de funções $f(x) = 0$.

Assim, fazer $f(x) = 0 \equiv x^3 - 9x + 3 = 0 \equiv x^3 = 9x - 3$, então considere $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$, de forma que $f(x) = 0 \equiv g(x) = h(x)$. A figura abaixo ilustra esta proposição.

Construindo uma tabela de valores para $f(x)$ e considerando apenas os sinais, temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-4	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Pela variação de sinal podemos concluir que existem três intervalos contendo as raízes de $f(x) = 0$: $I_1 = [-4, -3]$, $I_2 = [0, 1]$ e $I_1 = [2, 3]$. Como $f(x)$ é um polinômio de grau 3, podemos afirmar que cada intervalo contém um único zero de $f(x)$.

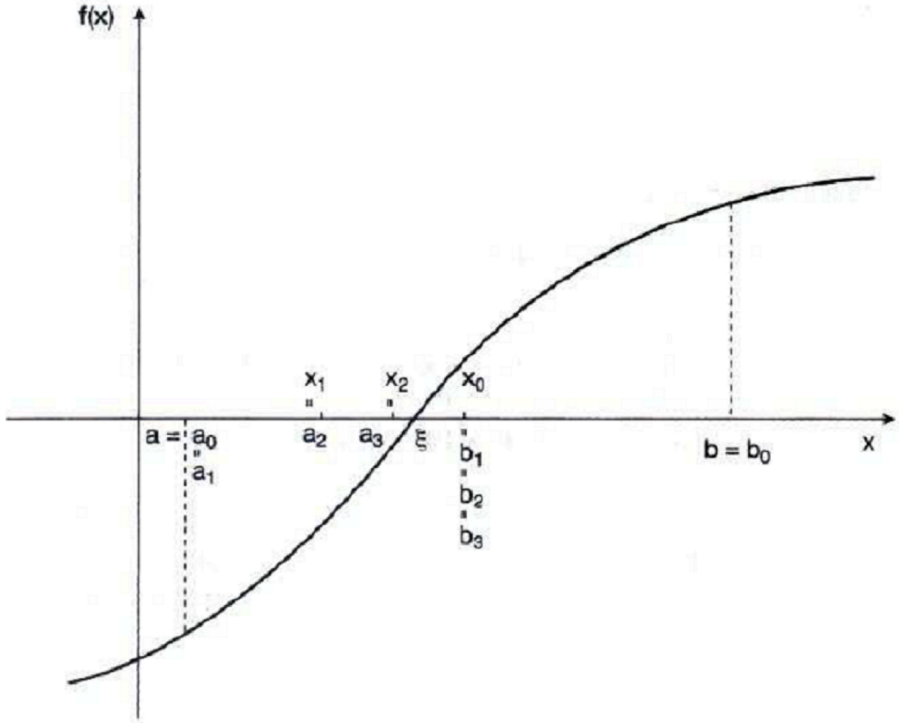


Método de Bisseção

Este método numérico é um método iterativo que consiste de: dado um intervalo $[a, b]$ contendo uma raiz simples de uma função $f(x)$, encontrar uma aproximação $\bar{\xi}$ através de sucessivas subdivisões do intervalo inicial tal que $f(\bar{\xi}) = 0$. Este método pode ser representado como:

1. Determine um intervalo $[a, b]$, tal que $f(a).f(b) < 0$ e que $f'(x)$ preserve o seu sinal em $[a, b]$;
2. Faça: $i = 0$ e $x_i = \dfrac{(a+b)}{2}$;
3. Se o sinal de $f(x_i)$ é igual ao sinal de $f(a)$, então faça: $a \leftarrow x_i$; senão, faça: $b \leftarrow x_i$;
4. $i \leftarrow (i + 1)$ e volte ao passo 2.

A figura abaixo descreve a dinâmica do método:



Critério de Parada

Existem dois tipos de critérios de parada aplicáveis aos métodos de zero de funções. Critérios de parada por precisão, são eles:

- I) Se $|f(\bar{\xi})| < \epsilon$, o método é finalizado;
- II) Se $|b - a| < \epsilon$, o método é finalizado;

Obs.: Na prática devemos utilizar os dois critérios em conjuntos e se um deles for satisfeito o método de zero de funções será finalizado.

Aplicação

Calculemos os zeros da função de $f(x) = x^3 - x - 2$

De início temos de achar valores para a e para b tais que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários.

$a = 1$ e $b = 2$ respeitam esta condição, pois $f(1) = -2$ e $f(2) = +4$.

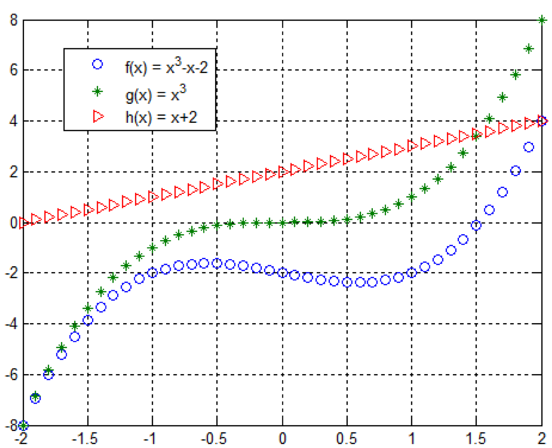
Como a função é contínua, sabemos que existe um $\bar{\xi}$ no intervalo $[1, 2]$ A primeira iteração gera $x_1 = 1.5$, e $f(1.5) = -0.125$. Como $f(x_i)$ é negativo, mesmo sinal de $f(a)$, então x_1 se tornará nosso novo a para que continuemos tendo $f(a)$ e $f(b)$ com sinais opostos, e com isso saber que a raiz se encontra em $[1.5, 2]$. Repetindo esses passos, teremos intervalos cada vez menores até que o valor de x_i convirja para o zero de nossa equação.

Veja os valores demonstrados na tabela abaixo:

i	a	b	x_i	$f(x_i)$
1	1,0000	2,0000	1,5000	-0,1250
2	1,5000	2,0000	1,7500	1,6094
3	1,5000	1,7500	1,6250	0,6660
4	1,5000	1,6250	1,5625	0,2522
5	1,5000	1,5625	1,5313	0,0591
6	1,5000	1,5313	1,5156	-0,0341
7	1,5156	1,5313	1,5234	0,0123
8	1,5156	1,5234	1,5195	-0,0110
9	1,5195	1,5234	1,5215	0,0006

Como podemos ver, na nona iteração o valor de x_i já tem 3 dígitos significativos corretos. Sabemos que $\xi = 1.5214$.

A figura abaixo descreve as funções: $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

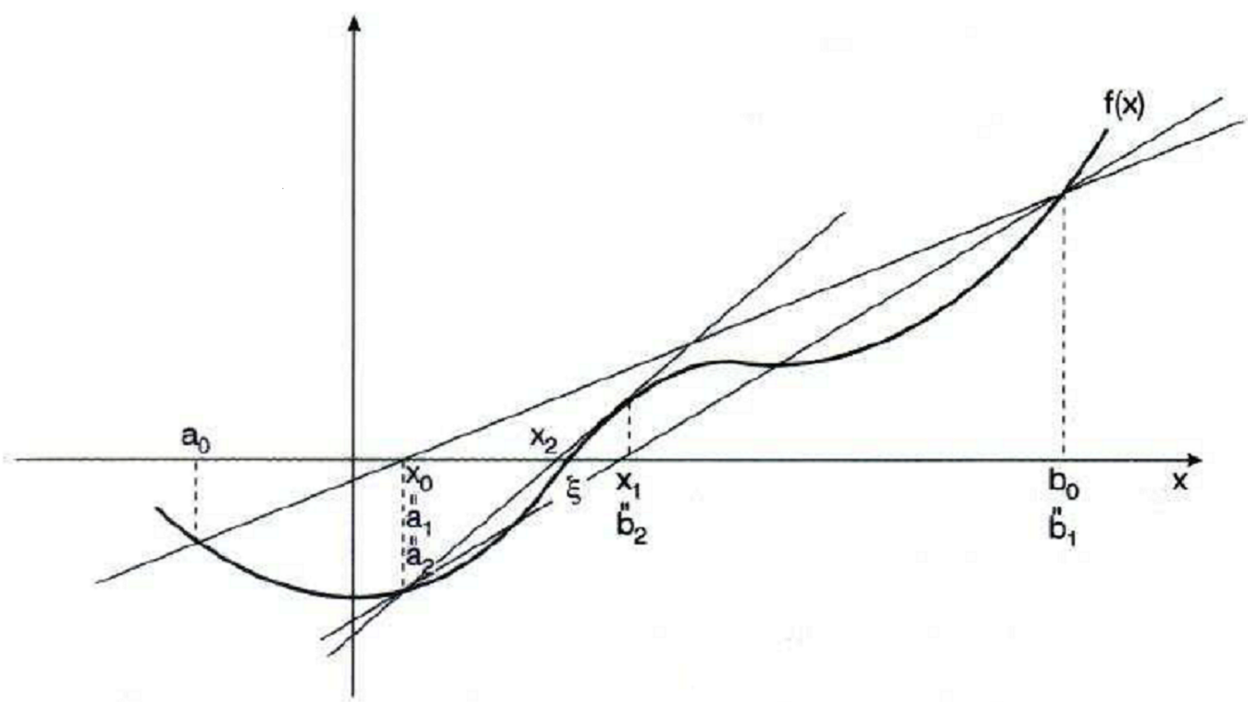


Método da Falsa Posição

Este método numérico é um método iterativo, assim como o método da bisseção, que consiste de: dado um intervalo $[a, b]$ contendo uma raiz simples de uma função $f(x)$, encontrar uma aproximação $\bar{\xi}$ através de sucessivas redução do intervalo inicial tal que $f(\bar{\xi}) = 0$. Este método pode ser representado como:

1. Determine um intervalo $[a, b]$, tal que $f(a).f(b) < 0$ e que $f'(x)$ preserve o seu sinal em $[a, b]$;
2. Faça: $i = 0$ e $x_i = \dfrac{f(a)b - f(b)a}{f(a) - f(b)}$;
3. Se o sinal de $f(x_i)$ é igual ao sinal de $f(a)$, então faça: $a \leftarrow x_i$; senão, faça: $b \leftarrow x_i$;
4. $i \leftarrow (i + 1)$ e volte ao passo 2.

A figura abaixo descreve a dinâmica do método:



Aplicação

Calculemos os zeros da função de $f(x) = x^3 - x - 2$

De início temos de achar valores para a e para b tais que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários.

$a = 1$ e $b = 2$ respeitam esta condição, pois $f(1) = -2$ e $f(2) = +4$.

Como a função é contínua, sabemos que existe um $\bar{\xi}$ no intervalo $[1, 2]$ A primeira iteração gera $x_1 = 1.3333$, e $f(1.3333) = -0.9630$. Como $f(x_i)$ é negativo, mesmo sinal de $f(a)$, então x_1 se tornará nosso novo a para que continuemos tendo $f(a)$ e $f(b)$ com sinais opostos, e com isso saber que a raiz se encontra em $[1.3333, 2]$. Repetindo esses passos, teremos intervalos cada vez menores até que o valor de

x_i convirja para o zero do problema.

Veja os valores demonstrados na tabela abaixo:

i	a	b	x_i	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$
1	1.0000	2.0000	1.3333	-2.0000	4.0000	-0.9630
2	1.3333	2.0000	1.4627	-0.9630	4.0000	-0.3333
3	1.4627	2.0000	1.5040	-0.3333	4.0000	-0.1018
4	1.5040	2.0000	1.5163	-0.1018	4.0000	-0.0299
5	1.5163	2.0000	1.5199	-0.0299	4.0000	-0.0087

Se comparado com o método anterior, este converge em menos passos para a solução aproximada com $\epsilon = 0.01$.

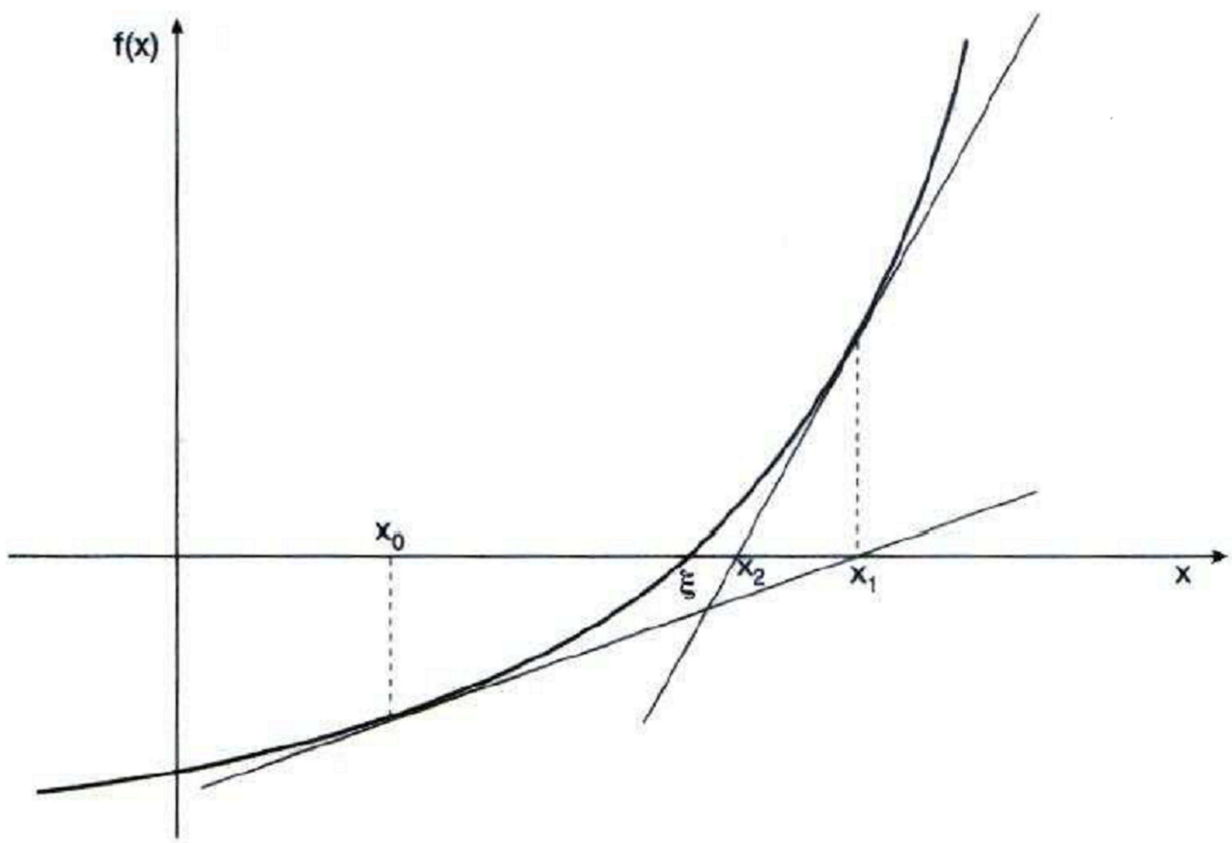
Método de Newton-Raphson

Este método numérico é um método iterativo de ponto fixo que, dado um ponto inicial x_0, descreve uma sequência que converge para ξ, raiz do problema de zero de funções $f(x) = 0$, por retas tangentes.

Por série de Taylor, considere a reta tangente à função $f = f(x)$ em x_0, dada por: $L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ que aproxima $f(x)$ na vizinhança de x_0. Seja x_1 o ponto de interseção entre a reta tangente e o eixo $\overrightarrow{Ox}$, então, $L_0(x_1) = 0$. Logo, $L_0(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$, então $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
Repetindo este processo para $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ podemos determinar $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ que aproxima ξ, solução do problema de zero de funções, após k passos do método.

Resultado: Sejam $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ contínuas em $[a, b]$, e seja $\xi \in [a, b]$, raiz do problema $f(x) = 0$. Suponha que $f'(x) \neq 0$. Então existe um intervalo $I \subset [a, b]$ tal que $\xi \in I$ e se $x_0 \in I$, a sequência $\{x_i\}$ gerada pelo método converge para ξ.

A figura abaixo descreve a dinâmica do método:



Aplicação

Calculemos os zeros da função de $f(x) = x^3 - x - 2$

Sabemos que ξ está no intervalo $[1, 2]$. Fazendo $x_0 = 2$, na primeira iteração geramos $x_1 = 1.6364$, e $f(1.6364) = 0.7453$. E já na última iteração obtemos $x_3 = 1.5214$, uma aproximação para a raiz, ξ, do problema de zero de funções, dado que $f(1.5214) = 0.0004$.

Veja os valores demonstrados na tabela abaixo:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$
0	2.0000	4.0000	11.0000	1.6364	0.7453
1	1.6364	0.7453	7.0331	1.5304	0.0539
2	1.5304	0.0539	6.0263	1.5214	0.0004