矩阵分析与应用

第十二讲　矩阵分解之一

信息与通信工程学院

吕旌阳

本讲主要内容

- 三角分解
- Givens变换
- HouseHolder变换
- QR分解

[引入]在线性代数中应用Gauss消去法求解n元

线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$

其中： $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}, x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T, b=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^T$

Gauss消去法将系数矩阵化为上三角形矩阵，或将增广矩阵化为上阶梯形矩阵，而后回代求解。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$x_n = b_n^{(n)} \Big/ a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right) \Big/ a_{ii}^{(i)}$$

$$(i = n\text{-}1, \ldots, 1)$$

定义4.1 如果*n*阶矩阵A能够分解为一个下三角矩阵***L***和一个上三角矩阵***U***的乘积，则称其为三角分解或***LU***分解。如果方阵A可分解成***A=LDU***,其中***L***为一个单位下三角矩阵，***D***为对角矩阵，则称A可作***LDU***分解。

定理4.1 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的分解式唯一的充要条件为A的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$ 。***A=LDU***，其中***L***是单位下三角矩阵，***U***是单位上三角矩阵，***D***是对角矩阵，并且

$$D=\operatorname{diag}\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right),d_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}},k=1,2,\cdots,n \quad \left(\Delta_0=1\right)$$

推论 设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{A}$有三角分解$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，

的充要条件是A的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0 \quad k = 1, 2, \cdots, n$

分解原理：以n=4为例

$$\Delta_1(A)=a_{11}:a_{11}\neq 0 \quad \Rightarrow c_{i1}=\frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i=2,3,4)$$

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ c_{31} & 0 & 1 & \\ c_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -c_{21} & 1 & & \\ -c_{31} & 0 & 1 & \\ -c_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}=A^{(1)}$$

（2）$\Delta_2(A)=\Delta_2(A^{(1)})=a_{11}a_{22}^{(1)}$： $a_{22}^{(1)}\neq 0$

$$\Rightarrow c_{i2}=\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (i=3,4)$$

$$L_2=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & c_{32} & 1 & \\ 0 & c_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -c_{32} & 1 & \\ 0 & -c_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2^{-1}A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix}=A^{(2)}$$

（3）$\Delta_3(A)=\Delta_3(A^{(2)})=a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)} : a_{33}^{(2)}\neq 0$

$$\Rightarrow c_{43}=\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

$$L_3=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\0&0&c_{43}&1\end{bmatrix},L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\0&0&-c_{43}&1\end{bmatrix}$$

$$L_3^{-1}A^{(2)}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\&&a_{33}^{(2)}&a_{34}^{(2)}\\&&&a_{44}^{(3)}\end{bmatrix}=A^{(3)}$$

即： $L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}A = A^{(3)} \Rightarrow A = L_1L_2L_3A^{(3)}$

令 $L = L_1L_2L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix}$ 则 $A = LA^{(3)}$

分解 $A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22}^{(1)} & & \\ & & a_{33}^{(2)} & \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} = DU$

则 $A = LDU$

二、紧凑格式算法： $A = LDU = \tilde{L}U$ (Crout分解)

$$L = \tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

二、紧凑格式算法： $A = LDU = \tilde{L}U$ (Crout分解)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$(i,1)$元： $a_{i1} = l_{i1} \bullet 1 \quad \Rightarrow l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, \cdots, n)$

$(1,j)$元： $a_{1j} = l_{11} \bullet u_{1j} \Rightarrow u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n)$

(i,k)元： $a_{ik} = l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} + l_{ik} \bullet 1 \quad (i \geq k)$

$$\Rightarrow l_{ik} = a_{ik} - \left(l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} \right)$$

(k,j)元： $a_{kj} = l_{k1} \bullet u_{1,j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} + l_{kk} \bullet u_{kj} \quad (j > k)$

$$\Rightarrow u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \left(l_{k1} \bullet u_{1j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} \right) \right]$$

计算框图:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \cdots & \text{第1框} \\
l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} & \cdots & \text{第2框} \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} & \cdots & \text{第3框} \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \cdots & \text{第4框} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots
\end{array}
$$

$$l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \left(l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} \right) \qquad (i \geq k)$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \left(l_{k1} \bullet u_{1j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} \right) \right] \qquad (j \leq k)$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算框图：

5	2/5	−4/5	0
2	1/5	−2	5
−4	−2/5	1	2
0	1	2	−7

$$l_{i1}=a_{i1}\quad (i=1,\cdots,n)$$

$$u_{1j}=\frac{a_{1j}}{l_{11}}\quad (j=2,\cdots,n)$$

$$l_{ik}=a_{ik}-\left(l_{i1}\bullet u_{1k}+\cdots+l_{i,k-1}\bullet u_{k-1,k}\right)\qquad (i\geq k)$$

$$u_{kj}=\frac{1}{l_{kk}}\left[a_{kj}-\left(l_{k1}\bullet u_{1j}+\cdots+l_{k,k-1}\bullet u_{k-1,j}\right)\right]\qquad (j\leq k)$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算框图：

$$\begin{array}{c|c|c|c} 5 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ \hline 2 & 1/5 & -2 & 5 \\ \hline -4 & -2/5 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}$$

$$\widetilde{L}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/5 & 0 & 0 \\ -4 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2/5 & 1 & & \\ -4/5 & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 1/5 & & \\ & & 1 & \\ & & & -7 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad A=\widetilde{L}U=LDU$$

QR分解

目的： 将分解为正交矩阵与上三角矩阵之积.

约定：本节涉及的矩阵为实矩阵，向量为实向量，数为实数.

一、Givens矩阵

$$
T_{ij}(c,s) \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array}
$$

$$c^2 + s^2 = 1$$

性质：

$$(1)\ T_{ij}^T T_{ij} = I, \left[T_{ij}(c,s)\right]^{-1} = \left[T_{ij}(c,s)\right]^T = T_{ij}(c,-s), \quad \left|T_{ij}\right| = 1$$

$$(2) \quad x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad T_{ij}x \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \eta_i = c\xi_i + s\xi_j \\ \eta_j = -s\xi_i + c\xi_j \\ \eta_k = \xi_k \left(k \neq i, j\right) \end{cases}$$

若 $\xi_i^2 + \xi_j^2 \neq 0,$ ，取 $c = \dfrac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2}}, s = \dfrac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2}}$

则 $\eta_i = \sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2} > 0, \quad \eta_j = 0$

定理3：$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists$ 有限个G-矩阵之积$\boldsymbol{T}$，st． $\boldsymbol{Tx} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$

推论：设非零列向量$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$及单位列向量 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$，

则存在有限个Givens矩阵之积，记作$\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{Tx} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}$$

例： $x=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ 求G-矩阵之积T,使得 $Tx=|x|e_1$

解： $T_{12}(c,s)$ 中，$c=\frac{3}{5},s=\frac{4}{5}.$ $T_{12}x=\begin{bmatrix}5\\0\\5\end{bmatrix}$

$T_{13}(c,s)$ 中，$c=\frac{1}{\sqrt{2}},s=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ $T_{13}(T_{12}x)=\begin{bmatrix}5\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}=|x|e_1$

$$T=T_{13}T_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&4&0\\-4&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3&4&5\\-4\sqrt{2}&3\sqrt{2}&0\\-3&-4&5\end{bmatrix}$$ $Tx=5\sqrt{2}e_1$

Householder矩阵

在平面 R^2 中，将向量 x 映射为关于 e_1 对称的向量y的变换，称为是关于e_1轴的镜像(反射)变换

设 $x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$ ，有

$$y=\begin{bmatrix}\xi_1\\ -\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\left(I-2e_2e_2^T\right)x=Hx$$

其中， $e_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$ ，H是正交矩阵，且 $|H|=-1$

Householder矩阵

将向量 x 映射为关于“与单位向量u正交的直线”对称的向量y的变换， $x-y=2u\left(u^{T}x\right)$

$$y=x-2u\left(u^{T}x\right)=\left(I-2uu^{T}\right)x=Hx$$

显然，H是正交矩阵

$$\begin{aligned}H^{T}H&=\left(I-2uu^{T}\right)^{T}\left(I-2uu^{T}\right)\\&=\left(I-2uu^{T}\right)\left(I-2uu^{T}\right)\\&=I+4u\color{red}{u^{T}u}u^{T}-4uu^{T}\\&=I+4uu^{T}-4uu^{T}=I\end{aligned}$$

Householder矩阵

将向量 x 映射为关于“与单位向量u正交的直线”对称的向量y的变换， $x - y = 2u\left(u^T x\right)$

$$y = x - 2u\left(u^T x\right) = \left(I - 2uu^T\right)x = Hx$$

显然，H是正交矩阵

定义：设单位列向量 $u \in R^n$ ，称 $H = I - 2uu^T$ 为**Householder**矩阵(初等反射矩阵)，由**H**矩阵确定的线性变换称为**Householder**变换。

Householder矩阵

$$H_u = I_n - 2uu^T \qquad (\ u \in R^n$$ 是单位列向量)

(1) $H = H^T$ 对称　　(2) $H^T H = I$ 正交

(3) $H^2 = I$ 对合　　(4) $H^{-1} = H$ 自逆

(5) $\det H = -1$ 自逆

验证(5)：

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -u^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 2u \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I-2uu^T & 0 \\ u^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -u^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 2u \\ u^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2u \\ 0^T & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I-2uu^T & 0 \\ u^T & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 2u \\ 0^T & -1 \end{vmatrix} = -1$$

定理4: R^n 中 $(n>1), \forall x \neq 0, \forall$ 单位列向量 z

$$\Rightarrow \exists H_u, \text{st } H_u x = |x| z$$

证明：$(1)\ x = |x| z : n > 1$ 时，取单位向量u使得 $u \perp x$,

于是 $H_u = I - 2uu^T : H_u x = Ix - 2uu^T x = x = |x| z$

$(2)\quad x \neq |x| z$： 取 $u = \dfrac{x - |x| z}{\left| x - |x| z \right|}$， 有

$$H_u x = \left[I - 2\frac{(x - |x|z)(x - |x|z)^T}{\left| x - |x|z \right|^2} \right] x = x - \frac{2(x - |x|z, x)}{\left| x - |x|z \right|^2}(x - |x|z)$$

$$(x - |x|z, x) = |x|^2 - |x|(z, x) \qquad \left| x - |x|z \right|^2 = (x - |x|z, x - |x|z) = 2|x|^2 - 2|x|(z, x)$$

定理4: R^n 中 $(n>1), \forall x \neq 0, \forall$ 单位列向量 z

$$\Rightarrow \exists H_u, \text{st } H_u x = |x| z$$

证明：(1) $x = |x| z : n > 1$ 时，取单位向量u使得 $u \perp x$,

于是 $H_u = I - 2uu^T : H_u x = Ix - 2uu^T x = x = |x| z$

(2) $x \neq |x| z$： 取 $u = \dfrac{x - |x| z}{|x - |x| z|}$， 有

$$H_u x = \left[I - 2\frac{(x - |x| z)(x - |x| z)^T}{|x - |x| z|^2} \right] x = x - \frac{2(x - |x| z, x)}{|x - |x| z|^2} (x - |x| z)$$

$$= x - 1 \times (x - |x| z) = |x| z$$

例2：$x=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，求H-矩阵$H$ 使得 $Hx=|x|e_1$

解：$|x|=3, x-|x|e_1=\begin{bmatrix}-2\\2\\2\end{bmatrix}$，$u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$H=I-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$$

$$Hx=3e_1$$

G矩阵与H-矩阵的关系

定理5: G-矩阵 $T_{ij}(c,s) \Rightarrow \exists$H-矩阵$H_u$与$H_v$,st $T_{ij} = H_u H_v$

证明: $c^2+s^2=1 \Rightarrow$ 取 $\theta = \arctan\frac{s}{c}$, 则 $\cos\theta = c, \sin\theta = s$

$$T_{ij}(c,s) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta & \\ & & I & & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array}$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sin\frac{\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 & \cos\frac{\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$
H_v = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & 1 & & & \\ & & I & & \\ & & & 1 & \\ & & & & I \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} O & & & & \\ & \sin^2\dfrac{\theta}{4} & & \sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4} & \\ & & O & & \\ & \sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4} & & \cos^2\dfrac{\theta}{4} & \\ & & & & O \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\dfrac{\theta}{2} & & -\sin\dfrac{\theta}{2} & \\ & & I & & \\ & -\sin\dfrac{\theta}{2} & & -\cos\dfrac{\theta}{2} & \\ & & & & I \end{bmatrix}
$$

$$u=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \sin\frac{3\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 & \cos\frac{3\theta}{4} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$$

$$H_u=\begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\frac{3\theta}{2} & & -\sin\frac{3\theta}{2} & \\ & & I & & \\ & -\sin\frac{3\theta}{2} & & -\cos\frac{3\theta}{2} & \\ & & & & I\end{bmatrix},$$

$$T_{ij}(c,s)=H_uH_v \qquad \#$$

[注] H-矩阵不能由若干个G矩阵的乘积来表示。

因为 $\det H=-1,$ 而 $\det G=1$

例3：G-矩阵 $T_{ij}(0,1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 中，$c=0, s=1 \Rightarrow \theta=\pi/2$

$$H_u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, H_v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_uH_v=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

四、QR分解

1. Schmidt正交化方法

定理6： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵Q，可逆上三角矩阵R，使得$A=QR$。

证明：$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 可逆 $\Rightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关，

正交化后可得：

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - k_{21}b_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ b_n = a_n - k_{n,n-1}b_{n-1} - \cdots - k_{n1}b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = k_{21}b_1 + b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_n = k_{n1}b_1 + \cdots + k_{n,n-1}b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = k_{21}b_1 + b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_n = k_{n1}b_1 + \cdots + k_{n,n-1}b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)K$$

$$= (q_1, q_2, \cdots, q_n)\begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

令 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n), R = \begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

则A=QR，其中 $q_i = \dfrac{b_i}{|b_i|} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

例4：求 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 的QR分解。

解：$b_1=a_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, b_2=a_2-1\times b_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, b_3=a_3-\frac{1}{3}b_2-\frac{7}{6}b_1=\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{bmatrix}$

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{3}&\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{7}{6}\\&1&\frac{1}{3}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{6}&\frac{7}{\sqrt{6}}\\&\sqrt{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

定理7：$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 列满秩 $\Rightarrow \exists$ 矩阵 $\boldsymbol{Q}_{m\times n}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$,

可逆上三角矩阵 $\boldsymbol{R}_{n\times n}$ ，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$。

证明：同定理6