矩阵分析与应用

第三讲 线性变换之一

信息与通信工程学院
吕旌阳

本讲主要内容

- 集合的映射
- 线性变换
- 线性变换的简单性质
- 线性变换的运算

映射

设S、S'是给定的两个非空集合，如果有 一个对应法则σ，通过这个法则σ对于S中的每一个元素a，都有S'中一个唯一确定的元素a'与它对应，则称 σ为S到S'的一个**映射**，记作：$\sigma: S \to S'$ 或 $S \xrightarrow{\sigma} S'$

称 a' 为 a 在映射σ下的**象**，而 a 称为a'在映射σ下的**原象**，记作$\sigma(a)=a'$ 或 $\sigma: a \mapsto a'$.

- S到S自身的映射，也称为S到S的变换

- 关于S到S'的映射σ

  1）S与S'可以相同，也可以不同

  2）对于S中每个元素a，需要有S'中一个唯一确定的元素a'与它对应

  3）一般，S'中元素不一定都是S中元素的像

  4）S中不相同元素的像可能相同

  5）两个集合之间可以建立多个映射

- 若$\forall a \neq a' \in S$，都有$\sigma(a) \neq \sigma(a')$，则称为**单射**

- 若$\forall b \in S'$,都存在$a \in S$,使得$\sigma(a) = b$,则称为**满射**

- 如果既是单射又是满射，则称为**双射**，或称**一一对应**

例 判断下列M到M'对应法则是否为映射

1）$M=\{a, b, c\}$、$M'=\{1, 2, 3, 4\}$

σ：$\sigma(a)=1$，$\sigma(b)=1$，$\sigma(c)=2$ （是）

δ：$\delta(a)=1, \delta(b)=2, \delta(c)=3, \delta(c)=4$ （不是）

τ：$\tau(b)=2$，$\tau(c)=4$ （不是）

2）$M=Z$，$M'=Z^{+}$，

σ：$\sigma(n)=|n|, \quad \forall n\in Z$ （不是）

τ：$\tau(n)=|n|+1, \quad \forall n\in Z$ （是）

3）$S = R^{n\times n}$，$S' = K$，（K为数域）

σ：$\sigma(A) = |A|$，　$\forall A \in R^{n\times n}$　（是）

4）$S = K$，$S' = R^{n\times n}$，（K为数域）

τ：$\tau(a) = aE$，　$\forall a \in K$（E为n级单位矩阵）（是）

5）S、S' 为任意两个非空集合，a_0是S' 中的一个固定元素.

σ：$\sigma(a) = a_0$，　$\forall a \in M$　（是）

6）$S = S' = P[x]$

σ：$\sigma(f(x)) = f'(x)$，　$\forall f(x) \in P[x]$　（是）

- 设$\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$都是集合S到集合S'的两个映射，若对S的每个元素a都有$\boldsymbol{\sigma}_1(a)=\boldsymbol{\sigma}_2(a)$

  则称它们相等，记作$\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}_2$

- 设$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$是集合S到S_1，集合S_1到S_2的映射，映射的乘积 $\tau\sigma$ 定义为

$$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a)),\quad a\in S$$

- 设$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\mu}$是集合S到S_1, S_1到S_2, S_2到S_3的映射，则映射的乘积满足结合律，但不满足交换律

$$(\tau\sigma)\mu=\tau(\sigma\mu) \qquad\qquad \tau\sigma\neq\sigma\tau$$

- 设$\boldsymbol{\sigma}$都是集合S到集合S'的一一对应映射，

1.若 $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}, \exists \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{S}'; \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{S}', \exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}, \text{st.} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$

2.若 $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{S}$,且 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ 有 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})$

或者 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})$,就有 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

就称$\boldsymbol{\sigma}$是集合S到集合S'的同构映射，且称集合S到集合S'是同构的

- 由不高于n次的实系数多项式构成的空间与实数域上n+1维的全体向量构成的空间同构，比如

$$\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{x}^3 \leftrightarrow (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$$

- 设V为数域K上的线性空间，若变换 $T:V\to V$

满足： $\forall x,y\in V$， $k\in K$

$$T(x+y)=T(x)+T(y)$$

$$T(kx)=kT(x)$$

或者

$$T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)$$

事实上， $\forall x,y\in V$， $\forall k,m\in K$,

$$K(x+y)=k(x+y)=kx+ky=K(x)+K(y),$$

$$K(mx)=kmx=mkx=mK(x).$$

由数k决定的**数乘变换**：$K:V\to V$， $x\mapsto kx$， $\forall x\in V$

例1. $V=R^2$(实数域上二维向量空间)，把V中每一向量绕坐标原点旋转 θ 角，就是一个线性变换，用 T_θ 表示，即

$$T_\theta: R^2 \to R^2,\ \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}$$

这里，$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$

易验证：$\forall x, y\in R^2, \forall k\in R$

$$T_\theta(x+y)=T_\theta(x)+T_\theta(y)$$

$$T_\theta(kx)=kT_\theta(x)$$

例2. $V=R^3$，$\alpha\in V$为一固定非零向量，把V中每一个向量ξ 变成它在α上的内射影是V上的一个线性变换. 用$\prod_\alpha$ 表示，即

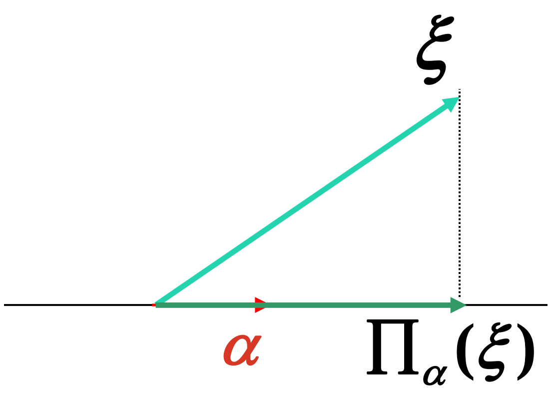
$$\prod\nolimits_\alpha : R^3 \to R^3,\ \xi \mapsto \frac{(\alpha,\xi)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\ \ \forall \xi\in R^3$$

这里 $(\alpha,\xi),(\alpha,\alpha)$ 表示内积.

易验证： $\forall \xi,\eta \in R^3, \forall k\in R$

$$\prod\nolimits_\alpha(\xi+\eta)=\prod\nolimits_\alpha(\xi)+\prod\nolimits_\alpha(\eta)$$

$$\prod\nolimits_\alpha(k\xi)=k\prod\nolimits_\alpha(\xi)$$



例3．线性空间 P_n 中，求微分是一个 线性变换，用D表示，即

$$D:V\to V,\quad D(f(x))=f'(x),\ \forall f(x)\in P_n$$

证明：$\forall f\left(x\right),g\left(x\right)\in P_n$ 和 $\forall k\in \boldsymbol{R}$ 有

$$D\big(f(x)+g(x)\big)=\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$$

$$=D\big(f(x)\big)+D\big(g(x)\big)$$

$$D\big(kf(x)\big)=\big(kf(x)\big)'=kf'(x)=kD\big(f(x)\big)$$

因此D是一个线性变换.

例4. 闭区间 $[a,b]$上的全体连续函数构成的线性空间 $C(a,b)$ 上的变换

$$J: C(a,b) \to C(a,b),\quad J\left(f(x)\right) = \int_a^x f(t)dt$$

是一个线性变换.

证明：$\forall f(x), g(x) \in C(a,b)$ 和 $\forall k, l \in R$ 有

$$
\begin{aligned}
J\left(kf(x) + lg(x)\right) &= \int_a^x \left(kf(t) + lg(t)\right)dt \\
&= k\int_a^x f(t)dt + l\int_a^x g(t)dt \\
&= kJ\left(f(x)\right) + lJ\left(g(x)\right)
\end{aligned}
$$

因此J是一个线性变换.

线性变换的简单性质

1．T 为V的线性变换，则

$$T(0)=0,\ \ T(-x)=-T(x).$$

2．线性变换保持线性组合及关系式不变，即

若 $x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r,$

则 $T(x)=k_1T(x_1)+k_2T(x_2)+\cdots+k_rT(x_r).$

3．线性变换把线性相关的向量组的变成线性相关的向量组. 即

若 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性相关，则 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_r)$ 也线性相关.

事实上，若有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_r x_r = 0$$

则由2即有，$k_1 T(x_1) + k_2 T(x_2) + \cdots + k_r T(x_r) = 0.$

注意： 3的逆不成立，即 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_r)$ 线性相关，$x_1, x_2, \cdots, x_r$ 未必线性相关.

事实上，线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组. 如零变换.

练习: 下列变换中，哪些是线性变换？

1．在 R^3中，$T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,x_2,x_2-x_3)$. √

2．在 $P_n[x]$中，$T(f(x))=f^2(x)$. ×

3．在线性空间V中，$T(\xi)=\xi+\alpha$，$\alpha\in V$ 非零固定. ×

4．在 $C^{n\times n}$中，$T(X)=AX$，$A\in C^{n\times n}$固定. √

5．复数域C看成是自身上的线性空间，$T(x)=\overline{x}$. ×

6．C看成是实数域R上的线性空间，$T(x)=\overline{x}$. √

线性变换的运算

一、线性变换的和

二、线性变换的数量乘法

三、线性变换的乘积

四、线性变换的逆

五、线性变换的多项式

1. 线性变换的和

设T_1,T_2 为线性空间V的两个线性变换，定义它们

的**和** T_1+T_2为: $\left(T_1+T_2\right)\left(x\right)=T_1x+T_2x,\forall x\in V$

则 T_1+T_2 也是V的线性变换.

事实上，$(T_1+T_2)(x+y) = T_1(x+y)+T_2(x+y)$

$$=T_1x+T_1y+T_2x+T_2y=(T_1+T_2)x+(T_1+T_2)y$$

$$(T_1+T_2)(kx)=T_1(kx)+T_2(kx) = k(T_1x)+k(T_2x)$$

$$=k(T_1x+T_2x) \quad =k(T_1+T_2)x$$

负变换

设 T 为线性空间V的线性变换，定义变换 $-T$ 为:

$$(-T)(x) = -T(x), \qquad \forall x \in V$$

则 $-T$ 也为V的线性变换，称之为 T 的**负变换**.

线性变换和的基本性质

（1）满足交换律：$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

（2）满足结合律：$(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

（3） $T_0 + T_1 = T_1$ ， T_0 为零变换.

（4） $(-T) + T = T_0$

线性变换的数量乘法

设 T 为线性空间V的线性变换，$k \in K$，定义 k 与 T 的**数量乘积** kT 为：

$$(kT)(x) = kT(x), \quad \forall x \in V$$

则 kT 也是V的线性变换.

线性变换数量乘法的基本性质

(1) $k(T_1+T_2)=kT_1+kT_2$

(2) $(k+l)T=kT+lT$

(3) $(kl)T=k(lT)$

(4) $1T=T$

注： 线性空间V上的全体线性变换所成集合对于线性变换的加法与数量乘法构成数域K上的一个线性空间，记作 $\mathrm{Hom}(V,V)\triangleq$ {T|T是数域K上线性空间V的线性变换}

线性变换的乘积

设 T_1, T_2 为线性空间V的两个线性变换，定义它们的**乘积** T_1T_2 为： $(T_1T_2)(x)=T_1(T_2x), \quad \forall x\in V$

则 T_1T_2 也是V的线性变换.

事实上，$(T_1T_2)(x+y)=T_1(T_2(x+y))=T_1(T_2(x)+T_2(y))$

$$=T_1(T_2x)+T_1(T_2y)=(T_1T_2)x+(T_1T_2)y$$

$$(T_1T_2)(kx)=T_1\big(T_2(kx)\big)=T_1\big(k(T_2x)\big)$$

$$=k\big(T_1(T_2x)\big)=k\big(T_1T_2\big)x$$

线性变换乘积的基本性质

（1）满足结合律：$(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$

（2） $T_eT = TT_e = T$ ，T_e 为单位变换

（3）交换律一般不成立，即一般地，

$$T_1T_2 \neq T_2T_1$$

（4）乘法对加法满足左、右分配律：

$$T_1(T_2+T_3) = T_1T_2 + T_1T_3$$

$$(T_1+T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$$

例1. 线性空间 $R[x]$中，线性变换

$$D(f(x)) = f'(x)$$

$$J(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$$

$$(DJ)(f(x)) = D\left(\int_0^x f(t)dt\right) = f(x),$$ 即 $DJ = T_e$

而，

$$(JD)(f(x)) = J(f'(x)) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

$\therefore\ DJ \neq JD.$

例2. 设A、$B\in R^{n\times n}$ 为两个取定的矩阵，定义变换

$$T_1(X)=AX,\qquad \forall X\in R^{n\times n}$$

$$T_2(X)=XB,$$

则T_1,T_2皆为$R^{n\times n}$的线性变换，且对$\forall X\in R^{n\times n}$，有

$$T_1T_2(X)=T_1\big(T_2(X)\big)=T_1(XB)=A(XB)=AXB,$$

$$T_2T_1(X)=T_2\big(T_1(X)\big)=T_2(AX)=(AX)B=AXB,$$

$$\therefore\quad T_1T_2=T_2T_1$$

线性变换的逆

设 T 为线性空间V的线性变换，若有V的变换 S 使

$$ST = TS = T_e$$

则称 T 为可逆变换，称 S 为 T 的逆变换，记作 T^{-1}.

2．基本性质

(1) 可逆变换 T 的逆变换 T^{-1} 也是V的线性变换.

证：对 $\forall x,y\in V$，$\forall k\in K$,

$$T^{-1}(x+y)=T^{-1}\left(\left(TT^{-1}\right)(x)+\left(TT^{-1}\right)(y)\right)$$

$$=T^{-1}\left(T\left(T^{-1}(x)+T^{-1}(y)\right)\right)$$

$$=\left(T^{-1}T\right)\left(T^{-1}(x)+T^{-1}(y)\right)$$

$$=T^{-1}(x)+T^{-1}(y)$$

$$T^{-1}(kx)=T^{-1}\left(k\left(TT^{-1}\right)(x)\right)=T^{-1}\left(k\left(T\left(T^{-1}(x)\right)\right)\right)$$

$$=T^{-1}\left(T\left(k\left(T^{-1}(x)\right)\right)\right)=k\left(T^{-1}(x)\right)=kT^{-1}(x)$$

$\therefore$ T^{-1} 是V的线性变换.

(2) 线性变换 T 可逆 $\Leftrightarrow$ 线性变换 T 是一一对应.

证："$\Rightarrow$" 设 T 为线性空间V上可逆线性变换.

任取 $x, y \in V$，若 $T(x)=T(y)$，则有

$$x=(T^{-1}T)(x)=T^{-1}(T(x))=T^{-1}(T(y))$$

$$=(T^{-1}T)(y)=y \qquad \therefore\ T \text{ 为单射.}$$

其次，对 $\forall y \in V$, 令 $x=T^{-1}(y)$，则 $x \in V$,且

$T(x)=T(T^{-1}(y))=TT^{-1}(y)=y$. $\therefore\ T$ 为满射.

故 T 为一一对应.

"$\Leftarrow$" 若 T 为一一对应，易证 T 的逆映射 S 也为V的线性变换，且 $TS=ST=T_e$ 故 T 可逆，$S=T^{-1}$.

(3) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性空间V的一组基，T 为V的线性变换，则 T 可逆当且仅当 $T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n)$ 线性无关.

证："$\Rightarrow$" 设 $k_1T(x_1)+k_2T(x_2)+\cdots+k_nT(x_n)=0.$

于是 $T(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)=0$

因为 T 可逆，由(2)，T 为单射，又 $T(0)=0,$

$$\therefore \quad k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0$$

而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，所以 $k_i = 0, \ i = 1,2,\cdots,n.$

故 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$ 线性无关.

"$\Leftarrow$" 若 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$ 线性无关，则它

也为V的一组基. 因而，对 $\forall y \in V$, 有

$$y = k_1T(x_1) + k_2T(x_2) + \cdots + k_nT(x_n),$$

即有 $T(k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n) = y$

$\therefore$ T 为满射.

其次，任取 $x, y \in V$，设 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$， $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$，

若 $T(x) = T(y)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i T(x_i),$$

$\because$ $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$ 线性无关

$\therefore$ $a_i = b_i$， $i = 1, 2, \cdots, n$， 即 $x = y$.

从而，T 为单射. 故 T 为一一对应.

由(2)， T 为可逆变换.

(4) 可逆线性变换把线性无关的向量组变成线性无关的向量组.

证：设 T 为线性空间V的可逆变换，$x_1, x_2, \cdots, x_r \in V$ 线性无关. 若 $k_1T(x_1)+k_2T(x_2)+\cdots+k_rT(x_r)=0.$

则有， $T(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r)=0$

又 T 可逆，于是 T 是一一对应，且 $T(0)=0$

$\therefore \quad k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0$

由 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性无关，有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0.$

故 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_r)$ 线性无关.

五、线性变换的多项式

1. 线性变换的幂

设 T 为线性空间V的线性变换，n为自然数，定义

$$T^n = \underbrace{T \cdots T}_{n},$$

称之为 T 的**n次幂**.

当 $n=0$ 时，规定 $T^0 = T_e$（单位变换）.

注：

① 易证 $T^{m+n}=T^mT^n,\ \left(T^m\right)^n=T^{mn},\qquad m,n\geq 0$

② 当 T 为可逆变换时，定义 T 的负整数幂为

$$T^{-n}=\left(T^{-1}\right)^n$$

③ 一般地，$(TS)^n\neq T^nS^n.$

2. 线性变换的多项式

设 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0 \in P[x]$,

T 为V的一个线性变换，则

$$f(T)=a_m T^m+\cdots+a_1 T+a_0 T_e$$

也是V的一个线性变换，称 $f(T)$为线性变换T 的**多项式**.

注： ① 在 $P[x]$ 中，若

$$h(x)=f(x)+g(x),\quad p(x)=f(x)g(x)$$

则有，$h(T)=f(T)+g(T),$

$$p(T)=f(T)g(T)$$

② 对 $\forall f(x),g(x)\in P[x]$, 有

$$f(T)+g(T)=g(T)+f(T)$$

$$f(T)g(T)=g(T)f(T)$$

即线性变换的多项式满足加法和乘法交换律.

练习: 设 T,S 为线性变换，若 $TS-ST=T_e$，

证明： $T^kS-ST^k=kT^{k-1}$，　$k>1.$

证：对k作数学归纳法.

当k=2时，若 $TS-ST=T_e$　　①

对①两端左乘 T，得　$T^2S-TST=T$，

对①两端右乘 T，得　$TST-ST^2=T$

上两式相加，即得　$T^2S-ST^2=2T=2T^{2-1}.$

假设命题对 $k-1$ 时成立，即

$$T^{k-1}S-ST^{k-1}=(k-1)T^{k-2}. \qquad ②$$

对②两端左乘 T，得

$$T^{k}S-TST^{k-1}=(k-1)T^{k-1}, \qquad ③$$

对①两端右乘 T^{k-1}, 得

$$TST^{k-1}-ST^{k}=T^{k-1}, \qquad ④$$

③+④，得 $T^{k}S-ST^{k}=kT^{k-1}.$

由归纳原理，命题成立 #