矩阵分析与应用

第八讲 范数理论及其应用之一

信息与通信工程学院

吕旌阳

本讲主要内容

- **向量范数及l_p范数**

定义：如果V是数域K上的线性空间，且对于V的任一向量x，对应一个实数值$\|x\|$，满足以下三个条件

1) 非负性： $\|x\| \geq 0$， 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) 齐次性： $\|kx\| = |k| \bullet \|x\|$， $\forall k \in K$

3) 三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称$\|x\|$为V上向量x的范数，简称为向量范数。

注意：2)中 $|k|$ 当K为实数时为绝对值，

当K为复数域时为复数的模。

向量的范数具有下列简单性质：

(1) 当 $\|x\| \neq 0$ 时，$\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$ $\quad \because \left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$

(2) $\forall x \in V$，$\|-x\| = \|x\|$ $\quad \because \|-x\| = |-1| \|x\| = \|x\|$

(3) $\forall x, y \in V$，$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$

$\because \|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$

(4) $\forall x, y \in V$，$\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x - y\|$

$\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

同样 $\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

例1：线性空间C^n，设 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in C^n$

1： $\|x\|_1=\sum|x_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2： $\|x\|_2=\sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，**记2-范数**

3: $\|x\|_\infty=\max\limits_i|x_i|$是一种向量范数,记为 **∞ -范数**

4： $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad(1\le p<\infty)$

是一种向量范数，记为*p*-**范数**或 l_p **范数**

证明：向量p-范数 $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1\le p<\infty)$

证：性质（1）、（2）显然是满足的

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ ，则

$$p=1:\|x+y\|_1=\sum|\xi_i+\eta_i|\le\sum|\xi_i|+|\eta_i|=\|x\|_1+\|y\|_1$$

$p>1: x+y=\theta$ 时,结论成立; $x+y\ne\theta$ 时,应用Holder不等式

$$\sum|a_ib_i|\le\left(\sum|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\ (p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$$

（利用 $(p-1)q=p\Rightarrow\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$ ）

$$\left(\|x+y\|_p\right)^p=\sum_{i=1}^n|\xi_i+\eta_i|^p=\sum_{i=1}^n\left(|\xi_i+\eta_i|\bullet|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\right)$$

$$\le\sum_{i=1}^n|\xi_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^n|\eta_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1}$$

$$\sum|a_ib_i|\le\left(\sum|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^P\right)^{1/P}\left(\sum\left(|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^n|\eta_i|^P\right)^{1/P}\left(\sum\left(|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}$$

$$=\|x\|_p\left(\sum|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/q}+\|y\|_p\left(\sum|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/q}$$

$$\because (p-1)q=p$$

$$\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$$

$$=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\left(\|x+y\|_p\right)^{p-1}$$

因此： $\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\ge\|x+y\|_p$

所以 $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1\le p<\infty)$ 是向量 x 的范数

例2：线性空间V^n中，任取它的一组基 $x_1,\cdots,x_n$

则对于任意向量x,它可以表示为

$$x=\xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n$$

与 $\alpha=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$ 是同构的

所以 $\|x\|_p=\|\alpha\|_p$ 是V^n中元素x的p一范数

例3: $C[a,b]$为闭区间 $[a,b]$上的所有实连续函数所成线性空间，可以验证以下定义式均满足范数条件

$$\|f(x)\|_1=\int_a^b|f(x)|dx \qquad \|f(x)\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

$$\|f(x)\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},1<p<\infty$$

例4：设A为n阶实对称正定矩阵，对 $x \in R^n$ ，

定义 $\|x\|_A = \left(x^T A x\right)^{1/2}$ 称为加权范数或椭圆范数

由正定矩阵定义可知 $\|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = 0;\quad \|x\|_A \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

对任意数 $\alpha \in R$ ，有

$$\|\alpha x\|_A = \sqrt{(\alpha x)^T A \alpha x} = \sqrt{\alpha^2 x^T A x} = |\alpha| \sqrt{x^T A x} = |\alpha| \|x\|_A$$

由 A正定且实对称 $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵Q，使得

$$Q^T A Q = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$$

定义 $B = diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) Q^T$ 可得 $A = B^T B$

$$\because \|x\|_A = \left(x^T B^T B x\right)^{1/2} = \left[(Bx)^T (Bx)\right]^{1/2} = \|Bx\|_2$$

$$\therefore \|x+y\|_A = \|B(x+y)\|_2 \leq \|Bx\|_2 + \|By\|_2 = \|x\|_A + \|y\|_A$$

例5：设$\|y\|_\alpha$ 是 C^m中的一个向量范数，给定矩阵 $A\in C^{m\times n}$ ，它的n个列向量线性无关。对于 C^n 中的一个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，规定 $\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha$ 则 $\|x\|_\beta$ 也是 C^n 中的一个向量范数。

证：1）设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，由假设知$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关。

当 $x\neq 0$ $\quad Ax=(a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\neq 0$

又因为$\|y\|_\alpha$是C^m 中的一个向量范数，有 $\|Ax\|_\alpha>0$

即 $\|x\|_\beta>0$

当 $x=0$ 时，$Ax=0$ ，所以 $\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha=0$

2）$\forall k\in C,\quad \|kx\|_\beta=\|A(kx)\|_\alpha=\|kAx\|_\alpha=|k|\|Ax\|_\alpha=|k|\|x\|_\beta$

3）$\forall x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T, y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^T\in C^n$ 有

$$\|x+y\|_\beta=\|A(x+y)\|_\alpha=\|Ax+Ay\|_\alpha\le\|Ax\|_\alpha+\|Ay\|_\alpha=\|x\|_\beta+\|y\|_\beta$$

所以，$\|x\|_\beta$ 是 C^n 中的一个向量范数。

由此可知，当给定列满秩矩阵 $A\in C^{m\times n}$ 时，可以由 C^m 中的一个向量范数确定 C^n 中的一个向量范数。

三、范数等价

定义：有限维线性空间 V^n 中任意两个向量范数 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$，如果存在着正常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \quad (\forall x \in V^n)$

则称范数 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 等价

（1）自反性： $1\bullet\|x\|_\alpha \le \|x\|_\alpha \le 1\bullet\|x\|_\alpha, \forall x \in V^n$

（2）对称性： $\frac{1}{c_2}\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le \frac{1}{c_1}\|x\|_\alpha, \forall x \in V^n$

（3）传递性： $\left.\begin{array}{l} c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \\ c_3\|x\|_\gamma \le \|x\|_\beta \le c_4\|x\|_\gamma \end{array}\right\} \quad \forall x \in V^n$

$$\Rightarrow c_5\|x\|_\gamma \le \|x\|_\alpha \le c_6\|x\|_\gamma$$

例6： 向量空间 V^n 中，对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ ，有

（1） $\|x\|_1=\sum|\xi_i|\le n\bullet\max_i|\xi_i|=n\|x\|_\infty$ $\|x\|_1\ge\max_i|\xi_i|=1\bullet\|x\|_\infty$

$\therefore 1\bullet\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\bullet\|x\|_\infty$

（2） $\|x\|_2=\left(\sum|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(n\bullet\max_i|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}\|x\|_\infty$

$\|x\|_2\ge\left(\max_i|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1\bullet\|x\|_\infty$ $\therefore 1\bullet\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\bullet\|x\|_\infty$

（3） $\frac{1}{\sqrt{n}}\bullet\|x\|_2\le\|x\|_1\le n\bullet\|x\|_2$

定理：**有限维线性空间中任意两个向量范数都等价。**

证明: 只需任一范数 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_2$ 等价即可

给定V^n的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，对任意 $x \in V^n$，有

$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$ 唯一 $\quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

C^n的子集 $S = \left\{ (\xi_1, \cdots, \xi_n) \,\middle|\, |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 = 1 \right\}$ 是闭区域

$$f(\xi_1, \cdots, \xi_n) \triangleq \|x\|_\alpha = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n\|_\alpha$$

在S上连续，故f 在S上取得最值 $\min f = c_1, \max f = c_2$

$$\forall (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in S \Rightarrow x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n \neq 0$$

$$\Rightarrow f(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \|x\|_\alpha > 0 \qquad \Rightarrow c_1 > 0$$

$$\forall(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in S \Rightarrow x=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\cdots+\xi_n x_n \neq 0$$

$$\Rightarrow f(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\|x\|_\alpha>0 \qquad \Rightarrow c_1>0$$

对 $\forall x\in V^n$， 当 $x\neq 0$ 时，

$$y=\frac{x}{\|x\|_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{\|x\|_2}x_i=\sum_{i=1}^{n}\eta_i x_i \qquad \text{其中 } \eta_i=\frac{\xi_i}{\|x\|_2}$$

$$|\eta_1|^2+\cdots+|\eta_n|^2=1\Rightarrow(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in S$$

故 $0<c_1\leq f(\eta_1,\cdots,\eta_n)\leq c_2\Rightarrow 0<c_1\leq\|y\|_\alpha\leq c_2$

$$\Rightarrow c_1\|x\|_2\leq\|x\|_\alpha\leq c_2\|x\|_2$$

当 $x=0$ 时，上式显然成立。

定义：若$\left\{x^{(k)}\right\}(k=1,2,\cdots)$ 是线性空间V^n 中的向量序列，$x^{(k)}=\left(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\right)$，如果每一个分量 $\xi_i^{(k)}$ 当 $k\to\infty$ 时，都有极限 ξ_i ，即

$$\lim_{k\to+\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i\quad\left(i=1,2,3,\cdots\right)$$

记$x=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)$，则称向量序列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 有极限 x ，或称向量序列 $x^{(k)}$ 收敛于 x ，简称$\left\{x^{(k)}\right\}$收敛，记为

$$\lim_{k\to+\infty}x^{(k)}=x\quad \text{或}\quad x^{(k)}\to x$$

不收敛的序列称为是发散的

定义：若$\left\{x^{(k)}\right\}(k=1,2,\cdots)$ 是线性空间V^n 中的向量序列，如果存在 $\forall x \in V^n$ ，使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|_\alpha=0$

则称序列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 按 $\alpha-$ 范数收敛于 x

定理：向量空间C^n 中，

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \forall \|x\|, \lim_{k\to+\infty} \left\|x^{(k)} - x\right\| = 0$$

证明：只需对 $\|x\| = \|x\|_1$ 证明即可。

$$x^k \to x \Leftrightarrow \xi_i^{(k)} \to \xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Leftrightarrow \left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| \to 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| \to 0$$

$$\Leftrightarrow \left\|x^{(k)} - x\right\|_1 \to 0$$

作业

- P121：1
- P122：4、5