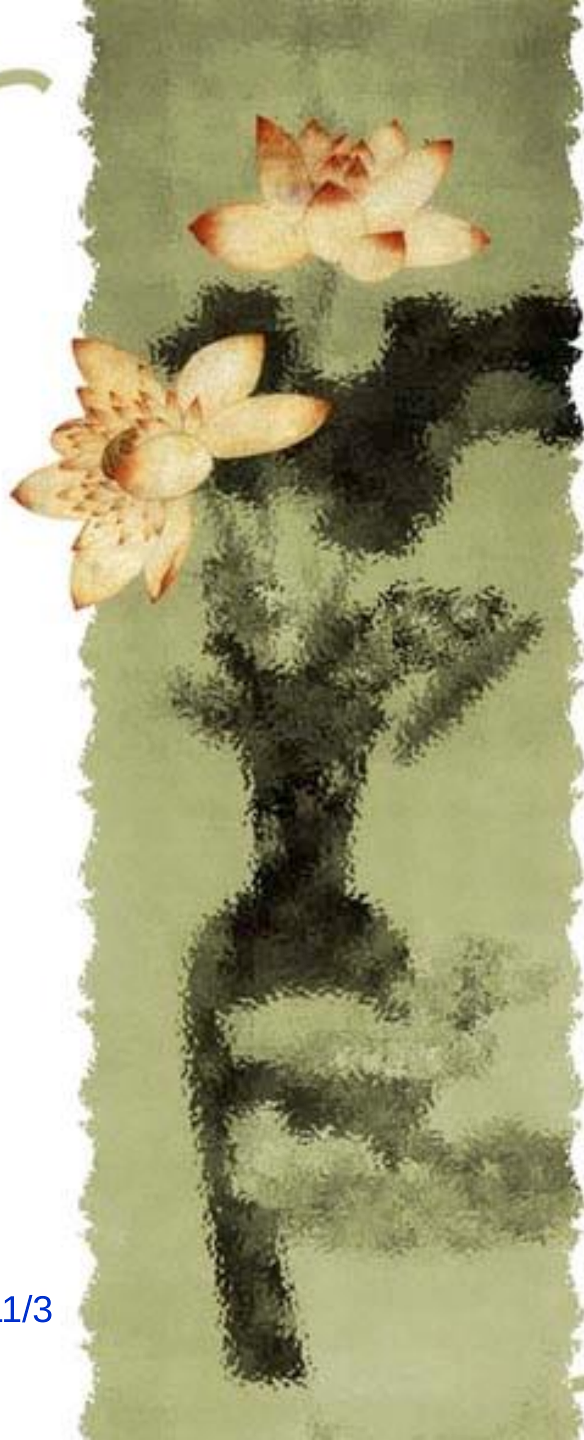

矩阵分析与应用

第一讲　线性空间

吕旌阳

2015/11/3

Why the matrix analysis

1. 从数学分析引申得到的线性代数的论题
   - ✓多元微积分、复变量、微分方程、最优化和逼近理论等
2. 解决实的复的线性代数的方法
   - ✓极限、连续和、幂级数等
3. 离散信号分析的最有效的数学工具

本课程的主要内容

1. 矩阵理论：如线性空间、线性变换、内积空间、正交投影、Jordan标准型、范数理论等；
2. 矩阵分析方法：如矩阵函数的微积分、广义逆矩阵、矩阵分解、特征值和奇异值估计、矩阵直积运算等；
3. 特殊矩阵：介绍信号处理中常用的特殊矩阵如Toeplitz矩阵、Hankel矩阵、Hilbert矩阵等
4. 矩阵分析方法在信号处理中的应用

矩阵分析与应用

- 参考书：
  - 《矩阵论》第三版 程云鹏主编 西北工业大学出版社 2006年9月
  - 《矩阵分析与应用》 张贤达 清华大学出版社 2004年9月
  - “Matrix Analysis”, Roger A. Horn 机械工业出版社影印版
  - 《矩阵计算》，G.H.戈卢布等，科学出版社
- 编程工具
  - Matlab、C

矩阵分析与应用

- 成绩分配
  - 论文1篇，30%
  - 期末考试成绩，70%
- 联系方式：
  - Phone：62283456(o),13671071619(m)
  - Email：lvjingyang@gmail.com
- 课件下载
  - bupt888@163.com 口令：bupt123456

线性空间

- 线性空间
- 线性变换与矩阵
- 线性子空间

集合与元素

集合:是指一些对象的总体

元素:这些对象称为集合的元素

- 整数集
- 线性方程组的解集
- 由某个平面上所有的点构成的点集

用S表示集合,a是S的元素

$$a \in S$$

a不是S的元素

$$a \notin S$$

集合的表示

1.列举全部元素

如 $N=\{1,3,5,7,9\}$

2.给出集合中的元素的性质

M是具有某些性质的全部元素所组成的集合

$M=\{a|a$所具有的性质$\}$

单位圆上的所有点 $N=\{(a,b)\,|\,a^2+b^2=1\}$

所有正整数 $N_0=\{n\,|\,n \text{ is integral}\}$

空集 $\varnothing$

集合的运算

- 子集 $\forall a \in A, \exists a \in B \Rightarrow A \subseteq B$ or $B \supseteq A$
- 真子集 $A \subset B$ $A \supset B$
- 相等 $A = B$
- 交 $A \bigcap B = \{x \mid x \in A, 且 x \in B\}$
- 并 $A \bigcup B = \{x \mid x \in A, 或 x \in B\}$
- 和集 $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$

数环和数域

数环：设Z是一个非空数集，且其中任意两个数的和、差和积仍属于Z，则称Z是一个数环

- ✓任何数环都含有0元素，零环是最小的数环
- ✓若 $\forall a \in Z, \exists -a \in Z$

数域：关于四则运算封闭的数的集合

- ✓任何数域都含有元素0和元素1
- ✓若 $\forall a \in P, \exists 1/a \in P$
- ✓典型数域:复数域C;实数域R;有理数域Q
- ✓任意数域K都包括有理数域Q

设非空集合V，一个数域K，如果V满足：

I 在V中定义一个封闭的加法 $x, y, z \in V$， $k, l \in K$

加法交换率 $x + y = y + x$

加法结合率 $x + (y + z) = (x + y) + z$

零元素 $x + 0 = x$

负元素 $x + (-x) = 0$

II 在V中定义一个封闭的数乘运算

数对元素分配率 $k(x + y) = kx + ky$

元素对数分配率 $(k + l)x = kx + lx$

数因子结合率 $k(lx) = (kl)x$

单位系数 $1x = x$

则称V是数域K上的**线性空间**，当K是实数域时，称V为**实线性空间**；当K是复数域时，称V为**复线性空间**

设非空集合V，一个数域K，如果V满足：

I 在V中定义一个封闭的加法 $x, y, z \in V$， $k, l \in K$

加法交换率 $x + y = y + x$

加法……合率 x …… $z) =$ …… $) + z$

零元……

II 在V……

数对元素……

元素对数分配率

数因子结合率 …… $= (k$ ……

单位系数 1 …… x

V中满足8条性质，且为封闭的加法和数乘运算，统称**线性运算**

则称V是数域K上的**线性空间**，当K是实数域时，称V为实线性空间；当K是复数域时，称V为复线性空间

例1 实系数，次数不超过n的一元多项式的集合

$$P_n[x]=\{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$$

例2 常系数二阶齐次线性微分方程的解集

$$y''-3y'+2y=0$$

$$Y=\{ae^{2x}+be^{x} \mid a,b\in\boldsymbol{R}\}$$

例3 所有n阶实矩阵的集合 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$

线性空间的基本性质

1. 零元素是唯一的

假设有零元素 $\mathbf{0}_1$和 $\mathbf{0}_2$ ， 有 $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2$

2. 任一元素的负元素是唯一的

假设$\boldsymbol{x}$有负元素x_1 和 x_2 ， 有

$$x_1=x_1+\mathbf{0}=x_1+(x+x_2)=(x_1+x)+x_2$$

$$=(x+x_1)+x_2=\mathbf{0}+x_2=x_2$$

线性空间的基本性质

1. 零元素是唯一的
2. 任一元素的负元素是唯一的
3. 设 $k,0,1 \in K$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{0},-\boldsymbol{x} \in V$，有

① $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

② $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$

③ $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

④ 若 $k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 。

定义： 如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\,(r\geq 1)$ 是线性空间V中的一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是数域$\boldsymbol{K}$中的数，那么向量 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r$

称 $\boldsymbol{x}$ 为是向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 的线性组合，或者称向量 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 的线性表示

如果 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零，且使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性相关，否则称为线性无关

线性无关向量的最大个数称为向量组的维数

例4：在 $\mathbf{R}^n$ 中，有两个向量组

$$\begin{cases} \varepsilon_1=(1,0,\cdots,0), \\ \varepsilon_2=(0,1,\cdots,0), \\ \quad\vdots \\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,1). \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1'=(1,1,\cdots,1,1), \\ \varepsilon_2'=(0,1,\cdots,1,1), \\ \quad\vdots \\ \varepsilon_n'=(0,0,\cdots,0,1). \end{cases}$$

分别考察

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=\mathbf{0} \qquad k_1\varepsilon_1'+k_2\varepsilon_2'+\cdots+k_n\varepsilon_n'=\mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

两个方程的系数行列式均不为零，因此方程只有零解

所以两个向量组均为线性无关组

例5：讨论下列 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的矩阵组的线性相关性

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

设有一组数 k_1, k_2, k_3, k_4 使

$$k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3+k_4\boldsymbol{A}_4=\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} ak_1+k_2+k_3+k_4&=0 \\ k_1+ak_2+k_3+k_4&=0 \\ k_1+k_2+ak_3+k_4&=0 \\ k_1+k_2+k_3+ak_4&=0 \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^3(a+3)$$

当 $a\neq 1, a\neq -3$ 线性无关，否则线性相关

设V是**R**上全体实函数构成的线性空间,讨论V中元素组 t, e^t, e^{2t} 的线性相关性

设有一组数 k_1, k_2, k_3 使元素组的线性组合以及一阶和二阶导数为零

$$
\begin{aligned}
tk_1 + e^t k_2 + e^{2t} k_3 &= 0 \\
k_1 + e^t k_2 + 2e^{2t} k_3 &= 0 \\
0 + e^t k_2 + 4e^{2t} k_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} t & e^t & e^{2t} \\ 1 & e^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 4e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t}(2t-3) \neq 0
$$

因此 t, e^t, e^{2t} 线性无关

1. 单个向量$\boldsymbol{x}$线性相关的充要条件是$\boldsymbol{x}$=0。两个以上的向量线性相关的充要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合。

2. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关，而且可以被向量组 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ 线性表出，那么 $r \le s$

- ✓两个等价的线性无关的向量组，必含有相同数量的向量

3. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关，但向量组$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r, y$ 线性相关，那么$\boldsymbol{y}$可以由 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性表出，而且表示法唯一

定义： 线性空间V中线性无关向量组所含向量最大个数n称为V的维数，记做 $\dim V = n$

- 维数为n的线性空间称为数域K上的n维线性空间，记为 V^n。

- 当 $n \to \infty$ ，称为无限维线性空间

定义：数域K上的线性空间V， $x_1,\cdots,x_r\,(r\geq 1)$ 是属于V的任意r个向量，如果满足

1. $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 线性无关
2. V中的任一向量x都是 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的线性组合

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是V的一个基或基底，并称 $x_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ 为基向量。

✓线性空间的维数就是基中所含基向量个数

称线性空间V^n的一个基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为V^n的一个坐标系，设向量 $x\in V^n$，在该基下的线性表示为 $x=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n$

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是x在该坐标系下的坐标或分量，记为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$

定理:设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$是V^n 的一个基,$x \in V^n$,则x可以唯一的表示为$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合

- 线性空间的维数与所考虑的数域有关

✓如果把复数域K 看作是自身上的线性空间，那么它是一维的，数1 就是基；

✓把复数域K看作是实数域上的线性空间，那么就是二维的，数1 与i 就是一组基.

基变换与坐标变换

- 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是V^n的旧基，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 是新基。新基可以用旧基表示出来

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = c_{11}\boldsymbol{x}_1 + c_{21}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{y}_2 = c_{12}\boldsymbol{x}_1 + c_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{x}_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ \boldsymbol{y}_n = c_{1n}\boldsymbol{x}_1 + c_{2n}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{x}_n \end{cases}$$

基变换与坐标变换

- 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是$\boldsymbol{V}^n$的旧基，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 是新基。新基可以用旧基表示出来

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{C}$$

称C为由旧基改变为新基的过渡矩阵

过渡矩阵的性质

1）过渡矩阵都是可逆矩阵；反过来，任一可逆矩阵都可看成是两组基之间的过渡矩阵.

证明：若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$； $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为V的两组基，

且由基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的过渡矩阵为C，

即 $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$ ①

又由基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$到$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 也有一个过渡矩阵，

设为B，即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)B$ ②

比较① 、②两个等式，有

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)BC$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)CB$$

$\because$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 都是线性无关的,

$\therefore$ $CB = BC = I$. 即，C是可逆矩阵, 且$C^{-1} = B$.

反过来，设 $C = (c_{ij})_{n\times n}$ 为K上任一可逆矩阵,

任取V的一组基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

令$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i$， $j = 1, 2, \cdots, n$

于是有， $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$

由C可逆，有 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)C^{-1}$

即，$x_1,x_2,\cdots,x_n$也可由 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性表出.

$\therefore$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$与$y_1,y_2,\cdots,y_n$等价.

故 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性无关，从而也为V的一组基.

并且C就是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$到$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的过渡矩阵.

2）若由基$x_1,x_2,\cdots,x_n$到基$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 过渡矩阵为C,

则由基 $y_1,y_2,\cdots,y_n$到基$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 过渡矩阵为C^{-1}.

3）若由基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 过渡矩阵为 C,

由基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到基 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 过渡矩阵为 B，则

由基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到基 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 过渡矩阵为 CB.

事实上, 若 $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)B$$

则有，$(z_1, z_2, \cdots, z_n) = ((x_1, x_2, \cdots, x_n)C)B$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)CB$$

定义：V为数域K上n维线性空间 $x_1, x_2, \cdots, x_n$;

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为V中的两组基，且

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $x \in V$ 且x在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$

下的坐标分别为$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$与 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$，

即,

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} \text{与} \quad x=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix} \qquad (*)$$

或 $$\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} \qquad (**)$$

称(*)或(**)为向量x在基变换C下的**坐标变换公式**.

例：在V^n中，求由基$x_1,x_2,\cdots,x_n$到基$y_1,y_2,\cdots,y_n$的过渡矩阵及由基$y_1,y_2,\cdots,y_n$到基$x_1,x_2,\cdots,x_n$的过渡矩阵．其中

$$x_1=(1,0,\cdots,0),x_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,x_n=(0,\cdots,0,1)$$

$$y_1=(1,1,\cdots,1),y_2=(0,1,\cdots,1),\cdots,y_n=(0,\cdots,0,1)$$

并求向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在基$y_1,y_2,\cdots,y_n$下的坐标.

解：$\because \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ y_2 = \qquad\ \ x_2 + \cdots + x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\quad x_n \end{cases}$

$$\because (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

而，$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

故，由基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$下的坐标就是

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$$

设α在基 $y_1,y_2,\cdots,y_n$下的坐标为 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2-a_1 \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

所以α在基$y_1,y_2,\cdots,y_n$下的坐标为

$$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1})^T$$

例： 在V^4中，求由基 y_1, y_2, y_3, y_4 到基 x_1, x_2, x_3, x_4 的过渡矩阵，其中

$$y_1 = (1, 2, -1, 0) \qquad x_1 = (2, 1, 0, 1)$$

$$y_2 = (1, -1, 1, 1) \qquad x_2 = (0, 1, 2, 2)$$

$$y_3 = (-1, 2, 1, 1) \qquad x_3 = (-2, 1, 1, 2)$$

$$y_4 = (-1, -1, 0, 1) \qquad x_4 = (1, 3, 1, 2)$$

解：设 $e_1=(1,0,0,0),\ \ e_2=(0,1,0,0),$

$$e_3=(0,0,1,0),\ \ e_4=(0,0,0,1)$$

则有

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

或

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)=(y_1,y_2,y_3,y_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1},$$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

从而有

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left((y_1,y_2,y_3,y_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\right)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$=(y_1,y_2,y_3,y_4)\left(\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}\right)$$

$$=(y_1,y_2,y_3,y_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 由基 y_1,y_2,y_3,y_4 到基 x_1,x_2,x_3,x_4 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

例： 已知 $R^{2\times2}$的两组基：

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$$

$$F_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},F_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},F_{21}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},F_{22}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

求由基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$到$F_{11},F_{12},F_{21},F_{22}$ 的过渡矩阵，

并求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3&5\\4&2\end{pmatrix}$在基 $F_{11},F_{12},F_{21},F_{22}$下的坐标.

解:

$$\because \begin{cases} F_{11} = E_{11} \\ F_{12} = E_{11} + E_{12} \\ F_{21} = E_{11} + E_{12} + E_{21} \\ F_{22} = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

$$\therefore \quad (F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

又 $A = -3E_{11} + 5E_{12} + 4E_{21} + 2E_{22}$

设A在基 $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$下的坐标为$(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$,

则
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

即A在基 $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$下的坐标为 $(-8, 1, 2, 2)^T$.

作业

- P26: 9、11、12