矩阵分析与应用

第九讲 范数理论及其应用之二

信息与通信工程学院

吕旌阳

本讲主要内容

- 矩阵范数
- 从属范数
- 范数的应用

定义：矩阵空间 $C^{m\times n}$ 中， $\forall A\in C^{m\times n}$ ，

定义实数值$\|A\|$，且满足以下条件

1)正定条件： $\|A\|\geq 0$，且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0_{m\times n}$

2)齐次条件： $\|kA\|=|k|\bullet\|A\|$， $\forall k\in K$

3)三角不等式：$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$， $B\in C^{m\times n}$

则称$\|A\|$为A的广义范数。

若对于$C^{m\times n}, C^{n\times l}$ 及 $C^{m\times l}$ 上的同类广义矩阵范数有

4)相容条件： $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$， $B\in C^{n\times l}$

则称$\|A\|$为A的范数。

定义：设 $C^{m\times n}$ 的矩阵范数 $\|A\|_M, C^m$ 与 C^n 中的

同类范数 $\|x\|_V$ ，若 $\|Ax\|_V \le \|A\|_M \|x\|_V$

则称矩阵范数 $\|A\|_M$ 与向量范数 $\|x\|_V$ 相容

例1、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m1}=\sum_{i,j}|a_{ij}|$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_1$ 相容

证明：（1）～（3）显然成立，

$$
\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{m}|a_{i1}\xi_1+\cdots+a_{in}\xi_n| \le \sum_{i=1}^{m}\left(|a_{i1}||\xi_1|+\cdots+|a_{in}||\xi_n|\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{m}\left[\left(|a_{i1}|+\cdots+|a_{in}|\right)\left(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|\right)\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m}\left(|a_{i1}|+\cdots+|a_{in}|\right)\right]\left(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|\right) = \|A\|_{m1}\|x\|_1
\end{aligned}
$$

因此，$\|A\|_{m1}$ 与 $\|x\|_1$ 相容。

（4）证明相容性

划分 $B_{n\times l}=\left(b_1,\cdots b_l\right)$ ，则 $AB=\left(Ab_1,\cdots,Ab_l\right)$，且有

$$
\begin{aligned}
\|AB\|_{m1} &= \|Ab_1\|_1+\cdots+\|Ab_l\|_1 \\
&\le \|A\|_{m1}\|b_1\|_1+\cdots+\|A\|_{m1}\|b_l\|_1 \\
&= \|A\|_{m1}\left(\|b_1\|_1+\cdots+\|b_l\|_1\right) \\
&= \|A\|_{m1}\|B\|_{m1}
\end{aligned}
$$

因此，$\|A\|_{m1}=\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_1$ 相容

例2、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m\infty}=n\bullet\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right|$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_\infty$相容

证明：（1）～（3）成立，设 $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times l}$ ，则

$$\|AB\|_{m\infty}=l\bullet\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right| \le l\bullet\max_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)$$

$$\le l\bullet n\bullet\max_{i,j}\left(\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)\le\left(n\bullet\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|\right)\bullet\left(l\bullet\max_{i,j}\left|b_{ij}\right|\right)=\|A\|_{m\infty}\|B\|_{m\infty}$$

$$\|Ax\|_\infty=\max_i\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k\right|\le\max_i\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|\xi_k\right|$$

$$\le\max_i\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\bullet\max_i\left|\xi_i\right|\le\left(n\bullet\max_i\left|a_{ik}\right|\right)\bullet\max_i\left|\xi_i\right|=\|A\|_{m\infty}\|x\|_\infty$$

预备知识：设

$$\alpha=\left(\left|a_1\right|,\left|a_2\right|,\cdots,\left|a_n\right|\right),\beta=\left(\left|b_1\right|,\left|b_2\right|,\cdots,\left|b_n\right|\right)$$

由柯西一布涅柯夫斯基不等式

$$\left|(\alpha,\beta)\right|\le\left|\alpha\right|\left|\beta\right|$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|\left|b_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|b_i\right|^2}$$

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_2$ 相容

证明：（1）～（2）成立，

设 $B_{m\times n}$,划分 $A=\left(a_1,\cdots,a_n\right), B=\left(b_1,\cdots,b_n\right)$ ，则有

$$\|A+B\|_{m2}^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2$$

$$\le\left(\|a_1\|_2+\|b_1\|_2\right)^2+\cdots+\left(\|a_n\|_2+\|b_n\|_2\right)^2$$

$$\le\|A\|_{m2}^2+2\left(\|a_1\|_2\|b_1\|_2+\cdots+\|a_n\|_2\|b_n\|_2\right)+\|B\|_{m2}^2$$

$$\le\|A\|_{m2}^2+2\left(\sum\|a_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\|b_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|B\|_{m2}^2=\left(\|A\|_{m2}+\|B\|_{m2}\right)^2$$

设 $B_{n\times l}$， $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$ ，则有

$$\|AB\|_{m2}^{2}=\sum_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^{2}\le\sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^{2}$$

$$\le\sum_{i,j}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^{2}\right)\bullet\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^{2}\right)\right]=\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^{2}\right)\bullet\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^{2}\right)\right]$$

$$=\left(\sum_{i,k}|a_{ik}|^{2}\right)\bullet\left(\sum_{k,j}|b_{kj}|^{2}\right)=\|A\|_{m2}^{2}\bullet\|B\|_{m2}^{2}$$

特别的，取 $B=x\in C^{n\times 1}$ ，则有

$$\|Ax\|_{2}=\|AB\|_{m2}\le\|A\|_{m2}\bullet\|B\|_{m2}=\|A\|_{m2}\bullet\|x\|_{2}$$

注：

1. $\|A\|_{m2}=\left[\operatorname{tr}\left(A^{H}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\operatorname{tr}\left(AA^{H}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ 称为矩阵的Frobenius范数，记做 $\|A\|_{F}$

2. $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数等价：对于任意的两种矩阵范数 $\|A\|_{\alpha}$ 和 $\|A\|_{\beta}$，存在 $0\le c_1\le c_2$，使得

$$c_1\|A\|_{\beta}\le\|A\|_{\alpha}\le c_2\|A\|_{\beta}\quad \forall A_{m\times n}$$

3. $C^{m\times n}$ 中，$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A\Leftrightarrow\forall\|A\|,\lim\limits_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$

定理3：设 $A_{m\times n}$ 及酉矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$，有

$$\|PA\|_F=\|A\|_F=\|AQ\|_F$$

证明：
$$\|PA\|_F^2=\mathrm{tr}\left((PA)^H(PA)\right)=\mathrm{tr}\left(A^HP^HPA\right)$$
$$=\mathrm{tr}\left(A^HA\right)$$

$$\|AQ\|_F^2=\mathrm{tr}\left((AQ)^H(AQ)\right)\quad=\mathrm{tr}\left(Q^HA^HAQ\right)$$

$$=\mathrm{tr}\left(QQ^HA^HA\right)\quad=\mathrm{tr}\left(A^HA\right)$$

推论：酉（正交）相似的矩阵的*F*-范数相等

引理：对 $C^{m\times n}$ 的矩阵范数 $\|A\|$，存在向量范数 $\|x\|_V$

使得 $\|Ax\|_V \le \|A\| \bullet \|x\|_V$

例7：对$C^{m\times n}$的矩阵范数$\|A\|$,任取非零列向量 $y \in C^n$

（1） $\|x\|_V = \|xy^{\mathrm{H}}\|$ 是 C^n 的向量范数；

（2） $\|A\|$ 与 $\|x\|_V$ 相容。

证明：（1）略；（2）

$$\|Ax\|_V = \left\|(Ax)y^H\right\| = \left\|A\left(xy^H\right)\right\| \le \|A\| \bullet \left\|xy^H\right\| = \|A\| \bullet \|x\|_V$$

三、从属范数

定理：对 C^m 与 C^n 上的同类向量范数 $\|x\|_V$，定义

$$\|A\| = \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V \qquad \left(\forall A_{m\times n}, x \in C^n\right)$$

则 $\|A\|$ 是 $C^{m\times n}$ 中矩阵A 的范数，且 $\|A\|$与 $\|x\|_V$ 相容

$\|A\|$称为由 $\|x\|_V$导出的矩阵范数（或称为从属范数）

等价定义： $$\max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V = \max_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}$$

证明:(1) $A\neq 0:\exists x_0$ 满足 $\|x_0\|_V=1,\text{st } Ax_0\neq\theta$ 从而

$$\|A\|\geq\|Ax_0\|_V>0$$

$$A=0:\|A\|=\max_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V=\max_{\|x\|_V=1}\|0\|_V=0$$

(2) 略

(3) 对 $A+B:\exists x_1,\|x_1\|_V=1,\text{st}\max_{\|x\|_V=1}\|(A+B)x\|_V=\|(A+B)x_1\|_V$

$$\|A+B\|=\|Ax_1+Bx_1\|_V\leq\|Ax_1\|_V+\|Bx_1\|_V\leq\|A\|+\|B\|$$

(4) 先证 $\|Ay\|_V\leq\|A\|\|y\|_V \quad \left(y\in C^n\right)$

$y=\theta$ ：显然成立。

$y \neq \theta$: 定义 $y_0 = \dfrac{y}{\|y\|_V}$ 满足

$$\|y_0\|_V = 1 \Rightarrow \|Ay_0\|_V \le \max_{\|y\|_V=1} \|Ay\|_V = \|A\|$$

故 $\|Ay\|_V = \left\| A\left(\|y\|_V\, y_0\right) \right\|_V = \|Ay_0\|_V \|y\|_V \le \|A\| \bullet \|y\|_V$

对 $AB: \exists\, x_2, \|x_2\|_V = 1, \text{st} \max\limits_{\|x\|_V=1} \left\|(AB)x\right\|_V = \left\|(AB)x_2\right\|_V$

$$\|AB\| = \left\|(AB)x_2\right\|_V = \left\|A\left(Bx_2\right)\right\|_V \le \|A\| \bullet \|Bx_2\|_V \le \|A\| \bullet \|B\|$$

故定理成立。

注：

（1）一般的矩阵范数：$\because \boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\bullet\boldsymbol{I}$

$$\|\boldsymbol{I}\| \le \|\boldsymbol{I}\|\bullet\|\boldsymbol{I}\| \qquad \therefore \|\boldsymbol{I}\| \ge 1$$

例如：$\|\boldsymbol{I}\|_{m1}=n, \quad \|\boldsymbol{I}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{n}$

（2）矩阵的从属范数：$\|\boldsymbol{I}\|=\max\limits_{\|x\|_V=1}\|\boldsymbol{I}x\|_V=1$

（3）常用的从属范数：

$$\|x\|_V \qquad \|x\|_1 \qquad \|x\|_2 \qquad \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_M \qquad \|A\|_1 \qquad \|A\|_2 \qquad \|A\|_\infty$$

定理： 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ，则

（1）列和范数： $\|A\|_1=\max\limits_j\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$

（2）谱范数： $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1},\lambda_1=\max\left\{\lambda\left(A^H A\right)\right\}$

（3）行和范数： $\|A\|_\infty=\max\limits_i\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$

证明列和范数：$\|A\|_1=\max_j\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$

证明：（1）记 $t=\max_j\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$，

如果 $x\in C^n$ 满足 $\|x\|_1=1$ ，则

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\bullet|\xi_j|=\sum_{j=1}^{n}\left[|\xi_j|\bullet\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)\right]$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor|\xi_j|t\right\rfloor\le t\bullet\|x\|_1=t\qquad\therefore\|A\|_1\le t$$

选k 使得 $t=\max\limits_{j}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}=\sum\limits_{i=1}^{m}\left|a_{ik}\right|$ ，令

$e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ 则 $\left\|e_k\right\|_1=1$ ，而且

$$\left\|A\right\|_1 \geq \left\|Ae_k\right\|_1=\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ik}\right| =\max_{j}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}=t$$

所以 $\left\|A\right\|_1=\max\limits_{j}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}$

范数的应用

定理6：设 $A \in C^{n\times n}$ ，且对 $C^{n\times n}$ 的矩阵范数 $\|\bullet\|$ ，满足 $\|A\|<1$ ，则矩阵 $I-A$ 非奇异，且有

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

证明：选取向量范数 $\|x\|_v$，使得 $\|A\|$ 与 $\|x\|_v$ 相容。

如果 $\det(I-A)=0$ ，则 $(I-A)x=0$ 有非零解 x_0

$$x_0 = Ax_0 \Rightarrow \|x_0\|_V = \|Ax_0\|_V \le \|A\|\bullet\|x_0\|_V < \|x_0\|_V$$

产生了矛盾，故 $\det(I-A)\neq 0$， $I-A$ 可逆。

因为 $\det(I-A)\neq 0$ ，$I-A$ 可逆

$$(I-A)^{-1}(I-A)=I$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A$$

$$\Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\|I\|+\left\|(I-A)^{-1}A\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\|I\|+\left\|(I-A)^{-1}\right\|\|A\|$$

$$\Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

定理7：设 $A\in C^{n\times n}$ ，且对 $C^{n\times n}$ 的矩阵范数 $\|\bullet\|$ ，满足 $\|A\|<1$ ，则矩阵 $I-A$ 非奇异，且有

$$\left\|I-(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\|A\|}{1-\|A\|}$$

证明：已证 $\|A\|<1$，则 $I-A$ 可逆。

恒等式： $$(I-A)-I=-A$$

右乘 $(I-A)^{-1}$ ： $I-(I-A)^{-1}=-A(I-A)^{-1}$

左乘 A ： $A-A(I-A)^{-1}=-A^2(I-A)^{-1}$

左乘 A： $A-A(I-A)^{-1}=-A^2(I-A)^{-1}$

$$\Rightarrow A(I-A)^{-1}=A+AA(I-A)^{-1}$$

$$\Rightarrow \left\|A(I-A)^{-1}\right\|\le\|A\|+\|A\|\bullet\left\|A(I-A)^{-1}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|A(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\|A\|}{1-\|A\|}$$

$$\Rightarrow \left\|I-(I-A)^{-1}\right\|=\left\|-A(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\|A\|}{1-\|A\|}$$

右乘 $(I-A)^{-1}$ ：$I-(I-A)^{-1}=-A(I-A)^{-1}$

定理8：设$A,B\in C^{n\times n}$，A可逆，且满足$\left\|A^{-1}B\right\|<1$

(1) $A+B$ 可逆

(2) $F=I-\left(I-A^{-1}B\right)^{-1}$：$\left\|F\right\|\le\dfrac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1-\left\|A^{-1}B\right\|}$

(3) $$\frac{\left\|A^{-1}-\left(A+B\right)^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|}\le\frac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1-\left\|A^{-1}B\right\|}$$

证明：利用定理6和定理7可证明

矩阵条件数： $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\bullet\|A^{-1}\|$

谱半径： 对 $\forall A\in C^{n\times n}$，谱半径为 $\rho(A)=\max\limits_{i}|\lambda_i|$

定理9： $\forall A\in C^{n\times n},\forall\|\bullet\|_M$，有 $\rho(A)\le\|A\|_M$

证明：对矩阵范数 $\|\bullet\|_M$，存在向量范数 $\|\bullet\|_V$，使得 $\|Ax\|_V\le\|A\|_M\bullet\|x\|_V$

设 $Ax_i=\lambda_i x_i\quad(x_i\ne\theta)$，则有 $\|A\|_M$

$$|\lambda_i|\bullet\|x_i\|_V=\|\lambda_i x_i\|_V=\|Ax_i\|_V\le\|A\|_M\bullet\|x_i\|_V$$

$$|\lambda_i|\le\|A\|_M\qquad\Rightarrow\rho(A)\le\|A\|_M$$

引理： $S_{n\times n}$ 可逆，$\|\cdot\|_M$是$C^{n\times n}$中的矩阵范数，则

$$\|B\| = \|S^{-1}BS\|_M \quad \left(B \in C^{n\times n}\right)$$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数

证明：(1)、(2)显然成立

(3) $$\|A+B\| = \|S^{-1}(A+B)S\|_M = \|S^{-1}AS + S^{-1}BS\|_M$$

$$\le \|S^{-1}AS\|_M + \|S^{-1}BS\|_M \quad = \|A\| + \|B\|$$

(4) $$\|AB\| = \|S^{-1}ABS\|_M = \|(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)\|_M$$

$$\le \|S^{-1}AS\|_M \cdot \|S^{-1}BS\|_M \quad = \|A\| \cdot \|B\|$$

定理10: $\forall A \in C^{n\times n}$，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$矩阵范数$\|\bullet\|_M$ 使得 $\|A\|_M \le \rho(A)+\varepsilon$

证明：根据Jordan标准型理论：存在可逆矩阵$P_{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP = J = \Lambda + \tilde{I}$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n), \tilde{I} = \mathrm{diag}([\delta_1,\cdots,\delta_{n-1}],1)$$

其中 δ_i 等于0或1，于是有

$$D = \mathrm{diag}(1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1}) \qquad D^{-1} = \mathrm{diag}(1,\varepsilon^{-1},\cdots,\varepsilon^{1-n})$$

$$(PD)^{-1}APD = D^{-1}JD = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & \varepsilon & & \varepsilon^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \\ \varepsilon^{1-n} \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \Lambda + \varepsilon\tilde{I}$$

令$S=PD$可逆，那么

$$\left\|S^{-1}AS\right\|_1=\left\|\Lambda+\varepsilon\tilde{I}\right\|_1\le\rho(A)+\varepsilon$$

已知 $\|B\|_M=\left\|S^{-1}BS\right\|_1\quad\left(B\in C^{n\times n}\right)$ 是$C^{n\times n}$中的矩阵范数

于是有 $\|A\|_M=\left\|S^{-1}AS\right\|_1\le\rho(A)+\varepsilon$

注意：因为$\|\bullet\|_M$与给定的矩阵A有关，所以当$A\ne B$，针对 A构造的矩阵范数$\|\bullet\|_M$，不等式

$\|B\|_M=\left\|S^{-1}BS\right\|_1\le\rho(B)+\varepsilon$ 不一定成立！

讨论:

(1) $\|A\|_{M1},\|A\|_{M2}$ 可与同一种 $\|x\|_V$ 相容?

(2) $\|A\|_M$ 可与不同的 $\|x\|_{V1},\|x\|_{V2}$ 相容?

(3) $\forall\|A\|_M$ 与 $\forall\|x\|_V$ 不一定相容?

分析: (1) $\|A\|_{m1},\|A\|_1$ 与 $\|x\|_1$ 相容

(2) $\|A\|_{m1}$ 与 $\|x\|_p\,(p\geq 1)$ 相容

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T, E_{ij}x=(0,\cdots,0,\xi_i,0,\cdots,)^T \Rightarrow \|E_{ij}x\|_p\leq\|x\|_p$$

$$Ax = \left(\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}\right) x = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} x$$

$$\|Ax\|_p \le \sum_{i,j} |a_{ij}| \|E_{ij} x\|_p \le \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|\right) \bullet \|x\|_p = \|A\|_{m1} \bullet \|x\|_p$$

(3) $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}|\right)$ 与 $\|x\|_\infty = \max_i \left(|\xi_i|\right)$ 不相容

$$n > 1: A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, A_0 x_0 = \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|A_0\|_1 = 1, \qquad \|x_0\|_\infty = 1, \qquad \|A_0 x_0\|_\infty = n$$

$$\|A_0 x_0\|_\infty = n > 1 = \|A_0\|_1 \bullet \|x_0\|_\infty$$

范数构造方法:

(1) 由向量范数构造新的向量范数

$S_{m\times n}$ 列满秩, $\|x\|=\|Sx\|_V$ 是 C^n 中的向量范数

(2) 由矩阵范数构造向量范数

非零列向量 $y_0\in C^n$, $\|x\|=\|xy_0^T\|_M$ 是 C^m 中的向量范数

(3) 由向量范数构造矩阵范数

$\|A\|=\max\limits_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V$ 是 $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数

(4) 由矩阵范数构造新的矩阵范数

$S_{n\times n}$ 可逆, $\|A\|=\|S^{-1}AS\|_M$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数

作业

- P132：1、4
- P138：1、2