# 矩阵分析与应用

## 第十四讲 特殊矩阵、常用公式

信息与通信工程学院
吕旌阳

# 本讲主要内容

- 正定矩阵
- 非负矩阵
- 常用公式

# 正定矩阵

定义：令A是n阶Hermite矩阵,若对任意复n维列向量 $x \neq 0$ ，都有 $x^H A x \geq 0$

则称A为**Hermite非负定矩阵**，简称为**非负定矩阵**。对任意复n维列向量 $x \neq 0$ ，都有

$$x^H A x > 0$$

称为**Hermite正定矩阵**，简称为**正定矩阵**

性质**(1)**：若$A$正定，且$k$为正常数，则$kA$正定

性质**(2)**：若$A$、$B$正定，则$A+B$正定

性质**(3)**：若$A$正定，则 $A^{-1}$ 正定

# 正定矩阵判断准则

Hermite矩阵$A$是正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A$的特征值都为正数

因为如果 $Ax=\lambda x$ ，则有

$$0<x^H Ax = x^H \lambda x = \lambda x^H x = \lambda \|x\|^2$$

一定有 $\lambda>0$。反之，必然存在酉矩阵$U$，使得

$$\Lambda = UAU^H,\quad \Lambda = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

因为$\lambda_i>0$，且对任意 $x\neq 0$ 有 $Ux=y\neq 0$

从而$x^H Ax = \left(U^H y\right)^H A\left(U^H y\right) = y^H UAU^H y = y^H \Lambda y > 0$

所以$A$是正定的

Hermite矩阵$A$是非负定矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A$的特征值都为非负数

# 正定矩阵判断准则

Hermite矩阵***A***是正定矩阵（非负定）

⟺ ***A***的特征值都为正数（非负数）

⟺ $\mathbf{tr}\,A > \lambda_i(A), \quad (or\ \mathbf{tr}\,A \geq \lambda_i(A)) \quad i = 1,\cdots,n$

⟺ $A = P^H P$ ***P***是n阶非奇异矩阵(矩阵)

⟺ $A = B^2$ ***B***是n阶正定矩阵(非负定矩阵)

⟺ $A = C^H BC$ ***C***是n×m 列满秩矩阵，***B***正定

⟺ ***A***的n个顺序主子式为正数(非负数)

证明：Hermite矩阵$A$是正定矩阵

$\Leftrightarrow$ $A = P^H P$　　$P$是n阶非奇异矩阵

$\Leftrightarrow$ $A = B^2$　　$B$是n阶正定矩阵

如果$A$正定，则存在酉矩阵$U$，使得

$$
\begin{aligned}
A &= U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H \\
&= U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U^H \\
&= U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U^H U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U^H
\end{aligned}
$$

令　$P = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U^H$　　即有 $A = P^H P$

令　$B = U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U^H$　即有 $A = B^2$

# 正定矩阵判断准则

- $A$，$C$是正定矩阵，且$AC=CA$，则$AC$为正定矩阵

$$\because (AC)^H = C^H A^H = CA = AC$$

$AC$是Hermite矩阵，因为$A$正定，所以有 $A=B^2$，$B$正定

$$B^{-1}(AC)B = BCB$$

即 $AC$ 和 $BCB$ 有相同特征值，而且

$$BCB = B^H CB$$

$BCB$ 的特征值全部为正数，所以$AC$为正定矩阵

- $A$是正定矩阵，$C$是非负定矩阵，且$AC=CA$，则$AC$为非负定矩阵

# 正定矩阵的常用不等式

- ***A***，***B***是n阶Hermite矩阵，若***A-B***为正定矩阵(非负定矩阵)，则称***A***大于***B***，记为***A>B***.(***A***不小于***B***记 $A \geq B$ )

也可记为***B<A***.( $B \leq A$ )

$A \geq B$ 的充要条件是，对任意复n维列向量x都有

$$x^H A x \geq x^H B x$$

对***A***，***B***是实对角阵时，$A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则有 $a_i \geq b_i$

# 矩阵不等式的性质

1\. 传递性 $A \geq B, B \geq C \Rightarrow A \geq C$

2\. 线性性 $A \geq B, k > 0 \Rightarrow kA \geq kB$

$$A_1 \geq B_1, A_2 \geq B_2 \Rightarrow A_1 + A_2 \geq B_1 + B_2$$

3\. n阶Hermite矩阵A，B有 $A \geq B$ ,且 $P \in C^{n\times m}$

则 $P^H AP \geq P^H BP$

4\. 若矩阵A为非负定矩阵，则 $A \leq (\mathrm{tr}\, A)I$

# 矩阵不等式的性质

5. 若矩阵$A$，$B$为$n$阶正定矩阵，且 $AB=BA, A\ge B$

则 $A^2\ge B^2$

6. 若$A$,$B$都为正定矩阵，则 $A>B \Leftrightarrow B^{-1}>A^{-1}$

证明:由于$A$为正定，从而 $A^{-1}$正定，存在可逆矩阵$C$

使得 $A^{-1}=CC^H$ $A=\left(CC^H\right)^{-1}=\left(C^H\right)^{-1}C^{-1}$

因此由$A$–$B$正定可得 $I-C^HBC$ 正定，推得 $C^HBC$的特征值都小于1，从而$\left(C^HBC\right)^{-1}$ 的特征值都大于1，

即 $\left(C^HBC\right)^{-1}-I$ 的特征值都大于0，

从而$\left(C^HBC\right)^{-1}-I$ 正定，即 $C^{-1}B^{-1}\left(C^H\right)^{-1}-I$ 正定

$B^{-1}-CC^H$ 正定。反之亦然

# 矩阵不等式的性质

7. $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}$为正定矩阵,且$\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵

证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}$ 为投影矩阵，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}$ 为正定矩阵。

# 非负矩阵

定义：若n阶实矩阵**A**=($a_{ij}$)满足$a_{ij}\geq 0$，则**A**为非负矩阵；

若$a_{ij}$>0 ,则**A**为正矩阵。

定义：若存在置换矩阵***P***使得 $PAP^T=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$

则称A为可约矩阵；否则为不可约矩阵

**定理7.1：**若$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$为非负不可约矩阵，则

1). 谱半径ρ(**A**)为**A**的特征值；

2). 存在属于ρ(**A**)的正特征向量；

3). **A**的任意元素增加时，ρ(**A**)不减少。

**推论：**若**A**为正矩阵，则

1). 谱半径ρ(**A**)为**A**的特征值；

2). 存在属于ρ(**A**)的正特征向量；

3). **A**的任意元素增加时，ρ(**A**)不减少。

**定理7.2** 若$\mathbf{A}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$为非负矩阵，则

1). 谱半径ρ(**A**)为**A**的特征值；

2). 存在属于ρ(**A**)的非负特征向量；

3). **A**的任意元素增加时，ρ(**A**)不减少。

例：$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0.1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

ρ(**A**)=**3,** ρ(**B**)=**3.0365**

# Toeplitz矩阵

定义：$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$ 称为Toeplitz矩阵

可简记为 $A=\left(a_{i-j}\right)_{i,j=1}^{n}$

# Hilbert矩阵 (条件数差的典型例子)

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n}$$

行列式： $$\det H=\frac{\left[1!2!\cdots(n-1)!\right]^3}{n!(n+1)!\cdots(2n-1)!}$$

$$\left(H^{-1}\right)_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)![(i-1)!(j-1)!]^2(n-i)!(n-j)!}$$

$$i,j=1,2,\ldots,n;$$

# Hadamard矩阵

- 如果$n$阶矩阵H的元素为+1或–1，且满足

$$HH^T = nI$$

则称H为Hadamard矩阵.

性质：若$n$>2且$n$阶Hadamard矩阵存在, 则$n$为4的倍数。

猜想：若$n$为4的倍数，则$n$阶Hadamard矩阵存在.

$$H_1 = [1] \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2^k} = \begin{bmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{bmatrix} = H_2 \otimes H_{2^{k-1}}$$ 即Sylvester方法

# 矩阵的直和

**定义：**若$A \in C^{m\times m}$，$B\in C^{n\times n}$，则$A$ 与$B$的直和记为

$$A\oplus B\in C^{(m+n)\times(m+n)}$$

，定义为

$$A\oplus B=\begin{bmatrix} A & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & B \end{bmatrix}$$

类似的，有

$$B=\bigoplus_{i=0}^{N-1} A_i = A_0\oplus A_1\oplus\cdots\oplus A_{N-1}=diag(A_0,A_1,\cdots,A_{N-1})$$

# Hadamard积

定义：若 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ , $\boldsymbol{B}=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ ，则$\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$的 Hadamard积记为$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，定义为

$$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\left[a_{ij}b_{ij}\right]$$

也称为Schur积或者elementwise product

定理：若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$ 是正定的(半正定的)，则其 Hadamard积也是正定的(半正定的)

**定理**：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in C^{m\times n}$ 矩阵，且$\mathbf{1}=\left[1,1,\cdots,1\right]^T$

是求和向量，$\boldsymbol{D}=diag(d_1,d_2,\cdots,d_m)$ ，

其中 $d_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ ，则有

$$\mathrm{tr}\left(A^T\left(B\odot C\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\left(A^T\odot B^T\right)C\right)$$

$$\mathbf{1}^T A^T\left(B\odot C\right)\mathbf{1}=\mathrm{tr}\left(B^T DC\right)$$

# Hadamard积的性质

1. 若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$，则

$$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T\odot\boldsymbol{B}^T$$
$$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})^H=\boldsymbol{A}^H\odot\boldsymbol{B}^H$$
$$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*\odot\boldsymbol{B}^*$$

2. 若$\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$，则 $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}\odot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$

3. 若$c$为常数，则 $c(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})=(c\boldsymbol{A})\odot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\odot(c\boldsymbol{B})$

4. 若$\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$，则 $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{I}_m\odot\boldsymbol{A}=diag(\boldsymbol{A})$

$$=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

5. 若$A$，$B$，$C$，$\mathbf{D}\in C^{m\times m}$，则

$$A\odot B\odot C=A\odot(B\odot C)=(A\odot B)\odot C$$

$$(A\pm B)\odot C=A\odot C\pm B\odot C$$

$$(A+B)\odot(C+D)=A\odot C+A\odot D+B\odot C+B\odot D$$

**6.** 若$A$，$C\in C^{m\times m}$，$B$，$D\in C^{n\times \mathrm{n}}$则

$$(A\oplus B)\odot(C\oplus D)=(A\odot C)\oplus(B\odot D)$$

**7.** $$\mathbf{tr}\left(A^{T}(B\odot C)\right)=\mathbf{tr}\left(\left(A^{T}\odot B^{T}\right)C\right)$$

# Kronecker积

定义：若 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{p\times q}$，则$A$ 与$B$的右Kronecker积 $A\otimes B$ 定义为

$$A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

定义：若 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{p\times q}$，则$A$ 与$B$的左Kronecker积 $A\otimes B$ 定义为

$$A\otimes B=\left[Bb_{ij}\right]=\begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1q} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ab_{p1} & Ab_{p2} & \cdots & Ab_{pq} \end{bmatrix}$$

# Kronecker积的性质

1. $(\lambda A)\otimes(\mu B)=\lambda\mu(A\otimes B)$ ，其中 $\lambda, \mu\in C$

2. $(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$

   $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$

3. $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$

4. $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$ $(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

5. $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$

6. 如果$A$，$B$均为非奇异矩阵

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$$

# 谢谢！