矩阵分析与应用

第十一讲　矩阵分解之一

信息与通信工程学院

吕旋阳

2012/12/12

本讲主要内容

- 三角分解
- Givens变换
- HouseHolder变换
- QR分解

2012/12/12

[引入]在线性代数中应用Gauss消去法求解n元

线性方程组 $\boldsymbol{Ax = b}$

其中： $\boldsymbol{A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}, x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T, b = \left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right)^T}$

Gauss消去法将系数矩阵化为上三角形矩阵，或将

增广矩阵化为上阶梯形矩阵，而后回代求解。

定义**4.1** 如果***n***阶矩阵A能够分解为一个下三角矩阵***L***和一个上三角矩阵***U***的乘积，则称其为三角分解或***LU***分解。如果方阵A可分解成***A=LDU***,其中***L***为一个单位下三角矩阵，***D***为对角矩阵，则称A可作***LDU***分解。

定理**4.1** 矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ 的分解式唯一的充要条件为A的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$ 。 $A=LDU$ ，其中***L***是单位下三角矩阵，***U***是单位上三角矩阵，***D***是对角矩阵，并且

$$D = \mathbf{diag}\left(d_1, d_2, \cdots, d_n\right), d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k = 1, 2, \cdots, n \quad \left(\Delta_0 = 1\right)$$

推论 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，A 有三角分解 $A=LU$，

的充要条件是 A 的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0 \quad k=1,2,\cdots,n$

分解原理：以n=4为例

$$\Delta_1(A) = a_{11} : a_{11} \neq 0 \quad \Rightarrow c_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i = 2,3,4)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ c_{31} & 0 & 1 & \\ c_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -c_{21} & 1 & & \\ -c_{31} & 0 & 1 & \\ -c_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

（2）$\Delta_2(A) = \Delta_2(A^{(1)}) = a_{11}a_{22}^{(1)}: \quad a_{22}^{(1)} \neq 0$

$$\Rightarrow c_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (i = 3, 4)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & c_{32} & 1 & \\ 0 & c_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -c_{32} & 1 & \\ 0 & -c_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2^{-1}A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

$$(3)\ \Delta_3(A) = \Delta_3(A^{(2)}) = a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)} : a_{33}^{(2)} \neq 0$$

$$\Rightarrow c_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & c_{43} & 1 \end{bmatrix}, L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -c_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3^{-1}A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} = A^{(3)}$$

即： $L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}A = A^{(3)} \Rightarrow A = L_1L_2L_3A^{(3)}$

令 $L = L_1L_2L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix}$ 则 $A = LA^{(3)}$

分解 $A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22}^{(1)} & & \\ & & a_{33}^{(2)} & \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} = DU$

则 $A = LDU$

二、紧凑格式算法： $A = LDU = \tilde{L}U$ （**Crout**分解）

$$L = \tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$(i,1)$元： $a_{i1} = l_{i1} \bullet 1 \quad \Rightarrow l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, \cdots, n)$

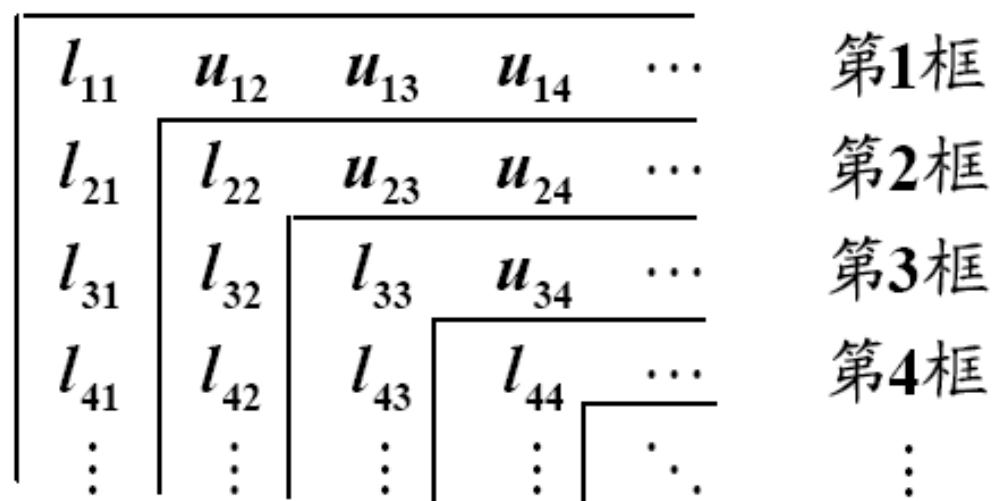$(1,j)$元： $a_{1j} = l_{11} \bullet u_{1j} \Rightarrow u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n)$

(i,k)元： $a_{ik} = l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} + l_{ik} \bullet 1 \quad (i \geq k)$

$$\Rightarrow l_{ik} = a_{ik} - \left(l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} \right)$$

(k,j)元： $a_{kj} = l_{k1} \bullet u_{1,j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} + l_{kk} \bullet u_{kj} \quad (j > k)$

$$\Rightarrow u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \left(l_{k1} \bullet u_{1,j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} \right) \right]$$

计算框图：

$$\begin{array}{|cccccl}
l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \cdots & \text{第1框} \\
l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} & \cdots & \text{第2框} \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} & \cdots & \text{第3框} \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \cdots & \text{第4框} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots
\end{array}$$

$$l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \left(l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} \right) \quad (i \geq k)$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \left(l_{k1} \bullet u_{1j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} \right) \right] \quad (j \leq k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算框图：

5	2/5	-4/5	0
2	1/5	-2	5
-4	-2/5	1	2
0	1	2	-7

$$l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n)$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \left(l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} \right) \quad (i \geq k)$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \left(l_{k1} \bullet u_{1j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} \right) \right] \quad (j \leq k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算框图：

$$\begin{array}{c|c|c|c} 5 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ 2 & 1/5 & -2 & 5 \\ -4 & -2/5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/5 & 0 & 0 \\ -4 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2/5 & 1 & & \\ -4/5 & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 1/5 & & \\ & & 1 & \\ & & & -7 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \tilde{L}U = LDU$$

2012/12/12

QR分解

目的：将分解为正交矩阵与上三角矩阵之积.

约定：本节涉及的矩阵为实矩阵，向量为实向量，数为实数.

一、Givens矩阵

$$T_{ij}(c,s) \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \end{matrix} \qquad c^2 + s^2 = 1$$

性质：

(1) $T_{ij}^T T_{ij} = I, \left[T_{ij}(c,s) \right]^{-1} = \left[T_{ij}(c,s) \right]^T = T_{ij}(c,-s), \quad \left| T_{ij} \right| = 1$

(2) $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad T_{ij}x \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \eta_i = c\xi_i + s\xi_j \\ \eta_j = -s\xi_i + c\xi_j \\ \eta_k = \xi_k \ (k \neq i, j) \end{cases}$

若 $\xi_i^2 + \xi_j^2 \neq 0$，，取 $c = \dfrac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2}}, s = \dfrac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2}}$

则 $\eta_i = \sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2} > 0, \quad \eta_j = 0$

定理3：$x \neq 0 \Rightarrow \exists$ 有限个**G-**矩阵之积$\boldsymbol{T}$, **st**. $\boldsymbol{Tx} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e_1}$

推论：设非零列向量$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$ 及单位列向量 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R^n}$，

则存在有限个Givens矩阵之积，记作$\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{Tx} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}$$

例： $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 求**G-**矩阵之积T,使得 $Tx = |x|e_1$

解： $T_{12}(c,s)$ 中，$c = \dfrac{3}{5}, s = \dfrac{4}{5}.$ $T_{12}x = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$T_{13}(c,s)$ 中，$c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ $T_{13}(T_{12}x) = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |x|e_1$

$T = T_{13}T_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ $Tx = 5\sqrt{2}e_1$

Householder矩阵

在平面 R^2 中，将向量 x 映射为关于 e_1 对称的
向量 y 的变换，称为是关于 e_1 轴的镜像(反射)变换

设 $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ ，有

$$y = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \left(I - 2e_2 e_2^T \right) x = Hx$$

其中， $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ，H 是正交矩阵，且 $|H| = -1$

Householder矩阵

将向量 x 映射为关于"与单位向量u正交的直线"对称的向量y的变换， $x - y = 2u\left(u^T x\right)$

$$y = x - 2u\left(u^T x\right) = \left(I - 2uu^T\right)x = Hx$$

显然，H是正交矩阵

定义：设单位列向量 $u \in R^n$ ，称 $H = I - 2uu^T$

为**Householder**矩阵(初等反射矩阵)，由**H**矩阵确定

的线性变换称为**Householder**变换。

Householder矩阵

$$H_u = I_n - 2uu^T \qquad (\ u \in R^n \ \text{是单位列向量})$$

(1) $H = H^T$ 对称   (2) $H^T H = I$ 正交

(3) $H^2 = I$ 对合   (4) $H^{-1} = H$ 自逆

(5) $\det H = -1$ 自逆

验证(**5**)：

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -u^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 2u \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - 2uu^T & 0 \\ u^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -u^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 2u \\ u^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2u \\ 0^T & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I - 2uu^T & 0 \\ u^T & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 2u \\ 0^T & -1 \end{vmatrix} = -1$$

定理4: R^n 中 $(n>1), \forall x \neq 0, \forall$ 单位列向量 z

$$\Rightarrow \exists H_u, \text{st } H_u x = |x|z$$

证明：(1)$x = |x|z : n > 1$ 时，取单位向量u使得 $u \perp x$,

于是 $H_u = I - 2uu^T : H_u x = Ix - 2uu^T x = x = |x|z$

(2) $x \neq |x|z :$ 取 $u = \dfrac{x - |x|z}{|x - |x|z|}$, 有

$$H_u x = \left[I - 2\frac{(x-|x|z)(x-|x|z)^T}{|x-|x|z|^2} \right] x = x - \frac{2(x-|x|z, x)}{|x-|x|z|^2}(x-|x|z)$$

$(x-|x|z, x) = |x|^2 - |x|(z, x)$ $|x-|x|z|^2 = (x-|x|z, x-|x|z) = 2|x|^2 - 2|x|(z, x)$

定理4: R^n 中 $(n > 1), \forall x \neq 0, \forall$ 单位列向量 z

$$\Rightarrow \exists H_u, \text{st } H_u x = |x| z$$

证明：$(1) x = |x| z : n > 1$ 时，取单位向量 u 使得 $u \perp x$,

于是 $H_u = I - 2uu^T : H_u x = Ix - 2uu^T x = x = |x| z$

$(2) \quad x \neq |x| z :$ 取 $u = \dfrac{x - |x| z}{|x - |x| z|}$, 有

$$H_u x = \left[I - 2\frac{(x - |x| z)(x - |x| z)^T}{|x - |x| z|^2} \right] x = x - \frac{2(x - |x| z, x)}{|x - |x| z|^2}(x - |x| z)$$

$$= x - 1 \times (x - |x| z) = |x| z$$

例2：$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，求H-矩阵$H$ 使得 $Hx = |x|e_1$

解：$|x| = 3, \quad x - |x|e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H = I - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Hx = 3e_1$$

G矩阵与H-矩阵的关系

定理5： G-矩阵 $T_{ij}(c,s) \Rightarrow \exists$H-矩阵$H_u$与$H_v$, st$T_{ij} = H_u H_v$

证明: $c^2 + s^2 = 1 \Rightarrow$ 取 $\theta = \arctan\dfrac{s}{c}$, 则 $\cos\theta = c, \sin\theta = s$

$$T_{ij}(c,s) = \begin{bmatrix} I & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta \\ & & I & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \end{matrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sin\dfrac{\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 & \cos\dfrac{\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$H_v = \begin{bmatrix} I & & & \\ & 1 & & \\ & & I & \\ & & & 1 \\ & & & & I \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} O & & & \\ & \sin^2\dfrac{\theta}{4} & & \sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4} \\ & & O & \\ & \sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4} & & \cos^2\dfrac{\theta}{4} \\ & & & & O \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & & & \\ & \cos\dfrac{\theta}{2} & & -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ & & I & \\ & -\sin\dfrac{\theta}{2} & & -\cos\dfrac{\theta}{2} \\ & & & & I \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sin\dfrac{3\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 & \cos\dfrac{3\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$H_u = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\dfrac{3\theta}{2} & & -\sin\dfrac{3\theta}{2} & \\ & & I & & \\ & -\sin\dfrac{3\theta}{2} & & -\cos\dfrac{3\theta}{2} & \\ & & & & I \end{bmatrix},$$

$$T_{ij}(c,s) = H_u H_v \qquad\qquad \#$$

[注] **H-**矩阵不能由若干个**G**矩阵的乘积来表示。

因为 $\det H = -1,$ 而 $\det G = 1$

例3： G-矩阵 $T_{ij}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 中, $c = 0, s = 1 \Rightarrow \theta = \pi/2$

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, H_v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_u H_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

四、QR分解

1. Schmidt正交化方法

定理6： $A_{n \times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵Q，可逆上三角矩阵R，使得$A=QR$。

证明：$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可逆 $\Rightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关，正交化后可得：

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - k_{21}b_1 \\ \quad \cdots\cdots \\ b_n = a_n - k_{n,n-1}b_{n-1} - \cdots - k_{n1}b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = k_{21}b_1 + b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_n = k_{n1}b_1 + \cdots + k_{n,n-1}b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)K$$

$$= (q_1, q_2, \cdots, q_n) \begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$令 \quad Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n), R = \begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

则$A = QR$，其中 $q_i = \dfrac{b_i}{|b_i|} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

例4：求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的QR分解。

解：$b_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = a_2 - 1 \times b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = a_3 - \dfrac{1}{3} b_2 - \dfrac{7}{6} b_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dfrac{7}{6} \\ & 1 & \dfrac{1}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \dfrac{7}{\sqrt{6}} \\ & \sqrt{3} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ & & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

定理7： $A_{m\times n}$ 列满秩 $\Rightarrow \exists$ 矩阵 $Q_{m\times n}$ 满足 $Q^H Q = I$，

可逆上三角矩阵 $R_{n\times n}$ ，使得$A=QR$。

证明：同定理6

2. G-变换方法

定理8：$A_{n×n}$ 可逆 $\Rightarrow$ ∃ 有限个G-矩阵之积T，使得TA

为可逆上三角矩阵。

证明：略

2. H-变换方法

定理10：$A_{n \times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 有限个H-矩阵之积S，

使得SA为可逆上三角矩阵。

证明：略