矩阵分析与应用

第七讲 欧氏空间、酉空间

信息与通信工程学院

吕旌阳

问题的引入：

1、线性空间中，向量之间的基本运算为线性运算，其具体模型为几何空间 R^2、R^3，但几何空间的度量性质(如长度、夹角)等在一般线性空间中没有涉及.

2、在解析几何中，向量的长度，夹角等度量性质都可以通过内积反映出来：

长度： $|x| = \sqrt{x \cdot x}$

夹角 $<x, y>$ ： $\cos <x, y> = \dfrac{x \cdot y}{|x||y|}$

3、几何空间中向量的内积具有比较明显的代数性质.

定义： 设V是实数域 R上的线性空间，对V中任意

两个向量x　y,定义一个二元实函数，记 (x,y) ,

(x,y) 满足性质：　$\forall x,y,z\in V$，　$\forall k\in R$

(1) $(x,y)=(y,x)$　　（交换率）

(2) $(kx,y)=k(x,y)$　　（齐次性）

(3) $(x+y,z)=\left(x,z\right)+(y,z)$　　（分配率）

(4) $(x,x)\geq 0$,当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$.　（正定性）

则称 (x,y)为x和 y 的**内积**，并称这种定义了内积的实数域 R上的线性空间V为**欧氏空间**.

注： 欧氏空间 V是特殊的线性空间

① V为实数域 R上的线性空间;

② V除向量的线性运算外，还有“内积”运算;

③ $(x, y) \in R.$

例1．在 R^n 中，对于向量

$$x=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right),\quad y=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$$

1）定义 $$(x,y)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \qquad（1）$$

易证 (x,y) 满足定义中的性质 (1)～(4).

所以，(x,y) 为内积.

这样 R^n 对于内积 (x,y) 就成为一个欧氏空间.

（ 当 $n=3$ 时，1）即为几何空间 R^3 中内积在直角坐标系下的表达式． (x,y) 即 $x\cdot y$． ）

2）定义

$$(x,y)' = a_1b_1 + 2a_2b_2 + \cdots + ka_kb_k + \cdots + na_nb_n$$

易证$(x,y)'$满足定义中的性质(1)～(4).

所以$(x,y)'$也为内积.

从而R^n对于内积$(x,y)'$也构成一个欧氏空间.

注意： 由于对 $\forall x, y \in V$，未必有 $(x,y) = (x,y)'$

所以1），2）是两种不同的内积.

从而R^n对于这两种内积就构成了不同的欧氏空间.

例2. 在 $R^{m\times n}$ 中： $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$， $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

2）定义 $$(A,B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=tr(AB^T) \qquad （2）$$

易证(A,B)满足定义中的性质 (1)～(4).

所以，(A,B)为内积.

这样 $R^{m\times n}$对于内积(A,B)就成为一个欧氏空间.

例3． $C[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数所成线性空间，对于函数 $f(x), g(x)$ ，定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad （3）$$

则 $C[a,b]$ 对于（3）作成一个欧氏空间.

证：$\forall f(x), g(x), h(x)\in C(a,b),\quad \forall k\in R$

(1) $\quad (f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=(g,f)$

(2) $\quad (kf,g)=\int_a^b kf(x)g(x)\,dx=k\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$$=k(f,g)$$

(3) $(f+g,h)=\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx$

$$=\int_a^b f(x)h(x)\,dx+\int_a^b g(x)h(x)\,dx$$

$$=(f,h)+(g,h)$$

(4) $(f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx$

$\because\ f^2(x)\geq 0,\qquad \therefore\ (f,f)\geq 0.$

且若 $f(x)\neq 0$，则 $f^2(x)>0$，从而 $(f,f)>0.$

故 $(f,f)=0 \Leftrightarrow f(x)=0.$

因此，(f,g) 为内积， $C[a,b]$为欧氏空间.

2. 内积的简单性质

V为欧氏空间， $\forall x, y, z \in V, \forall k \in R$

1) $(x, ky) = k(x, y), \quad (kx, ky) = k^2(x, y)$

2) $(0, y) = (x, 0) = 0$

3) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

推广： $\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \eta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j (x_i, y_j)$

3. n 维欧氏空间中内积的矩阵表示

设V为欧氏空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组基，对V中任意两个向量

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

$$y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \eta_j (x_i, x_j) \qquad （4）$$

令 $a_{ij} = (x_i, x_j), \quad i, j = 1, 2, \cdots n.$

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\quad X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \tag{5}$$

则 $$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j=X'AY \tag{6}$$

定义：矩阵 $A=\begin{pmatrix}(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots & (x_1,x_n)\\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \cdots & (x_2,x_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \cdots & (x_n,x_n)\end{pmatrix}$

称为基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**度量矩阵**.

注:

① 度量矩阵A是实对称矩阵.

② 由内积的正定性，度量矩阵A还是正定矩阵.

事实上，对 $\forall x \in V, x \neq 0$，即 $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \neq 0$

有 $(x, x) = X'AX > 0$

$\therefore$ A为正定矩阵.

③对同一内积而言，不同基的度量矩阵是合同的.

$$B = C^T AC$$

证：设$x_1, x_2, \cdots, x_n$；$y_1, y_2, \cdots, y_n$为欧氏空间V的两组基，它们的度量矩阵分别为A、B，且

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$$

设 $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n} = \left(C_1, C_2, \cdots, C_n\right),$

则 $y_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} x_k, i = 1,2,\cdots,n$

于是

$$(y_i,y_j)=(\sum_{k=1}^{n}c_{ki}x_k,\sum_{l=1}^{n}c_{lj}x_l)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(x_k,x_l)c_{ki}c_{lj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}c_{ki}c_{lj}=C_i'AC_j$$

$$\therefore \quad B=\left((y_i,y_j)\right)=\left(C_i'AC_j\right)$$

$$=\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix}A\left(C_1,C_2,\cdots,C_n\right)=C'AC$$

④向量的内积由度量矩阵A完全确定,与基的选择无关

$\forall x, y \in V^n$

$$x=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\cdots+\xi_n x_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n) X_1$$

$$x=\eta_1 y_1+\eta_2 y_2+\cdots+\eta_n y_n=(y_1, y_2, \cdots, y_n) X_2$$

$$=(x_1, x_2, \cdots, x_n) C X_2 \qquad \Rightarrow X_1=C X_2$$

$$y=(x_1, x_2, \cdots, x_n) Y_1$$

$$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n) Y_2=(x_1, x_2, \cdots, x_n) C Y_2 \qquad \Rightarrow Y_1=C Y_2$$

基（I）下： $(x, y)=X_1^T A Y_1$

基（II）下： $(x, y)=X_2^T B Y_2=X_2^T C^T A C Y_2=X_1^T A Y_1$

3. 欧氏空间中向量的长度

(1) 引入长度概念的可能性

1）在 R^3 向量 x 的长度（模）$|x|=\sqrt{x\cdot x}$.

2) 欧氏空间V中，$\forall x\in V$， $(x,x)\geq 0$

使得 $\sqrt{x\cdot x}$ 有意义.

2. 向量长度的定义

$\forall x\in V$， $|x|=\sqrt{(x,x)}$ 称为向量 x 的**长度（模）**.

特别地，当 $|x|=1$ 时，称 x 为**单位向量**.

3. 向量长度的简单性质

1) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $|kx| = |k||x|$

3）非零向量 x 的单位化：$\dfrac{1}{|x|}x$.

4. 欧氏空间中向量的夹角

（1） 引入夹角概念的可能性与困难

1）在 R^3 中向量 x 与 y 的夹角

$$<x, y> = \arccos \frac{x \cdot y}{|x||y|} \qquad (*)$$

2）在一般欧氏空间中推广（*）的形式，首先

应证明不等式： $\left| \frac{(x, y)}{|x||y|} \right| \le 1$

此即,

2. 柯西－布涅柯夫斯基不等式

对欧氏空间V中任意两个向量 x、y，有

$$|(x,y)| \le |x||y| \qquad (**)$$

当且仅当 x、y 线性相关时等号成立.

证：当 $y=0$时，$(x,0)=0,\quad |y|=0$

$\therefore\quad (x,y)=|x||y|=0.$ 结论成立.

当 $y\neq 0$ 时，作向量 $z=x+ty,\qquad t\in R$

由内积的正定性，对 $\forall t \in R$，皆有

$$(z,z)=(x+ty,x+ty)$$

$$=(x,x)+2(x,y)t+(y,y)t^2 \geq 0 \qquad （1）$$

取 $t=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ 代入（1）式，得

$$(x,x)-2(x,y)\frac{(x,y)}{(y,y)}+(y,y)\frac{(x,y)^2}{(y,y)^2} \geq 0$$

即 $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

两边开方，即得 $\left|(x,y)\right| \leq |x||y|.$

当 x、y 线性相关时，不妨设 $x = ky$

于是，$|(x,y)| = |(ky,y)| = |k(y,y)| = |k||y|^2$.

$$|x||y| = |ky||y| = |k||y|^2$$

$\therefore\ |(x,y)| = |x||y|$. (**)式等号成立.

反之，若（**）式等号成立，由以上证明过程知

或者 $y=0$，或者 $x - \dfrac{(x,y)}{(y,y)}y = 0$

也即 x、y 线性相关.

3. 柯西－布涅柯夫斯基不等式的应用

柯西
不等式

1）$$\left|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right|$$

$$\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

施瓦兹
不等式

$$a_i,\, b_i\in R,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

2）$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

证：在 $C(a,b)$ 中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积定义为

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

由柯西－布涅柯夫斯基不等式有

$$\left|(f(x),g(x))\right|\le\left|f(x)\right|\left|g(x)\right|$$ 从而得证.

3）

三角不等式

对欧氏空间中的任意两个向量 x、y，有

$$|x+y| \le |x|+|y| \qquad （*）$$

证：$|x+y|^2 = (x+y, x+y)$

$$= (x,x)+2(x,y)+(y,y)$$

$$\le |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = \left(|x|+|y|\right)^2$$

两边开方，即得（*）成立.

欧氏空间中两非零向量的夹角

定义1：设V为欧氏空间，x、y 为V中任意两非零向量，x、y 的**夹角**定义为

$$\langle x, y\rangle = arc\cos\frac{(x, y)}{|x||y|}$$

$$\left(\ 0 \le \langle x, y\rangle \le \pi\ \right)$$

定义2：设 x、y 为欧氏空间中两个向量，若内积

$$(x,y)=0$$

则称 x 与 y **正交**或**互相垂直**，记作 $x\perp y$.

注：

① 零向量与任意向量正交.

② $x\perp y \Longleftrightarrow \langle x,y\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle x,y\rangle=0$.

勾股定理 设V为欧氏空间， $\forall x,y\in V$

$$x\perp y \Longleftrightarrow |x+y|^2=|x|^2+|y|^2$$

证： $\because$ $$|x+y|^2=(x+y,x+y)$$

$$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)$$

$\therefore$ $$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2 \Longleftrightarrow (x,y)=0$$

$$\Longleftrightarrow x\perp y.$$

定理： 若欧氏空间V中向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 两两正交，

即 $$(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m$$

则 $$|x_1 + x_2 + \cdots + x_m|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_m|^2.$$

证：若 $(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j$

则 $$|x_1 + x_2 + \cdots + x_m|^2 = (\sum_{i=1}^{m} x_i, \sum_{j=1}^{m} x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i, x_i) + \sum_{i \neq j} (x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i, x_i) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_m|^2$$

注： 欧氏空间V中两两正交的非零向量的个数不超过n

定理： 若欧氏空间V中非零向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$

两两正交，则向量组线性无关。

证：令 $k_1 x_1 + \cdots + k_m x_m = 0$

上式用 x_i 计算内积，得

$$k_i (x_i, x_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

由于 $x_i \neq 0$，故 $(x_i, x_i) \neq 0$

从而 $k_i = 0, \left(i = 1, \cdots, m \right)$，向量组线性无关

注： 欧氏空间V^n中n个两两正交的非零向量构成**正交基**

单位向量组成的**正交基**称为**标准正交基**

例： 已知 $x=(2,1,3,2)$， $y=(1,2,-2,1)$

在通常的内积定义下，求 $|x|,(x,y),\langle x,y\rangle,|x-y|$.

解：$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$(x,y)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0 \quad \therefore \ \langle x,y\rangle=\dfrac{\pi}{2}$

又 $x-y=(1,-1,5,1)$

$\therefore \ |x-y|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

通常称 $|x-y|$ 为 x 与 y 的距离，记作 $d(x,y)$.

定理：欧式空间 $V^n(n>1)$ 存在标准正交基

证：对 V^n 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 进行正交化，可得正交基

$$y_1,y_2,\cdots,y_n \qquad (y_i,y_j)=0,\quad i\neq j$$

再进行单位化，可得单位正交基

$$z_1,z_2,\cdots,z_n \qquad z_j=\frac{y_j}{|y_j|}$$

例：标准正交基的特征：欧式空间V^n的标准正交基

$$x_1,x_2,\cdots,x_n$$

且$x=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n,y=\eta_1x_1+\eta_2x_2+\cdots+\eta_nx_n$

（1）基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的度量矩阵$A=I$

（2） $\xi_i=(x,x_i),\eta_j=(y,x_j)$

（3）$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i=X^TY$

$$X=[\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n]^T,Y=[\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n]^T$$

五：欧氏空间的子空间

欧氏空间V的子空间在V中所定义的内积之下也是一个欧氏空间，称之为V的**欧氏子空间**.

欧氏空间V的子空间 V_1 ,给定 $y \in V$，若 $\forall x \in V_1$ 都有 $y \perp x$ ，则称y 正交于V_1 ，记做 $y \perp V_1$

欧氏空间 V^n，子空间 V_1，则 $V_1^{\perp}=\{y \mid y \in V, y \perp V_1\}$

是V^n的子空间

证明： $\theta \in V_1^{\perp} \Rightarrow V_1^{\perp}$非空。$\forall y, z \in V_1^{\perp}, \forall x \in V_1, \forall k \in R$

$$(y+z, x)=(y, x)+(z, x)=0 \Rightarrow (y+z) \perp V_1 \ :(y+z) \in V_1^{\perp}$$

$$(ky, x)=k(y, x)=0 \Rightarrow (ky) \perp V_1 \ :(ky) \in V_1^{\perp}$$

所以 $V_1^{\perp}$是 V^n的子空间。（称$V_1^{\perp}$为是V_1 的正交补)

定理：设欧氏空间 V^n，子空间 V_1，则

$$V^n=V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

定理：设欧氏空间 V^n，子空间 V_1，则

$$V^n = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

证明：若 $V_1=\{\theta\}$,则 $V_1^{\perp}=V^n \quad \Rightarrow V^n=\{\theta\}\oplus V^n=V_1\oplus V_1^{\perp}$

若$V_1 \neq \{\theta\}$,记 $\dim V_1=m \leq n$，设V_1 的标准正交基为

$$x_1,\cdots,x_m$$

(1)先证 $V^n=V_1+V_1^{\perp}$，只需证明 $V^n \subset V_1+V_1^{\perp}$

$\forall x \in V^n$，记 $a_i=(x_i,x), i=1,2,\cdots,m,$

$$y \triangleq a_1x_1+\cdots+a_mx_m \quad \in V_1$$

因为$\left(x-y,x_i\right)=\left(x,x_i\right)-\left(y,x_i\right)=a_i-a_i=0$

$$x-y\perp V_1 \qquad \Rightarrow z\triangleq x-y\in V_1^{\perp}$$

所以 $x=y+z,y\in V_1\ ,z\in V_1^{\perp}$ ， 即 $x\in V_1\ +V_1^{\perp}$

(2)再证 $V_1\ \cap V_1^{\perp}=\{\theta\}$

$\forall x\in V_1\ \cap V_1^{\perp}$ ， 可得 $\begin{cases} x\in V_1 \\ x\in V_1^{\perp} \end{cases}$

即有 $\left(x,x\right)=0$

也就是 $x=\theta$

从而有 $V^n=V_1\ \oplus V_1^{\perp}$

定理：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in R^{m\times n}$ ，则

(1) $\left[R(A)\right]^{\perp}=N(A^T)$, 且 $R(A)\oplus N(A^T)=R^m$

(2) $\left[R(A^T)\right]^{\perp}=N(A)$, 且 $R(A^T)\oplus N(A)=R^n$

证明：划分 $A=\left[A_1,\cdots,A_n\right]\in R^m$

$$V_1\triangleq R(A)=L(A_1,\cdots,A_n)\subset R^m$$

$$V_1^{\perp}=\left\{y\middle|y\in R^m,y\perp(k_1A_1+\cdots+k_nA_n)\right\}\subset R^m$$

$$=\left\{y\middle|y\in R^m,y\perp A_j,j=1,2,\cdots,n\right\}$$

$$=\left\{y\middle|y\in R^m,A_j^{\mathrm{T}}y=0,j=1,2,\cdots,n\right\}$$

$$=\left\{y\middle|y\in R^m,A^{\mathrm{T}}y=0\right\}=N\left(A^{\mathrm{T}}\right)$$

从而有 $R^m=V_1\oplus V_1^{\perp}=R(A)\oplus N(A^T)$

三、欧氏空间中的正交变换

1. 定义

欧氏空间V的线性变换 T 如果保持向量的内积不变，

即，　$\big(T(x),T(y)\big)=(x,y),\quad \forall x,y\in V$

则称 T 为**正交变换**.

注: 欧氏空间中的正交变换是几何空间中保持长度不变的正交变换的推广.

2. 欧氏空间中的正交变换

定理： 设 T 是欧氏空间V的一个线性变换.

下述命题是等价的：

1）T 是正交变换；

2）T 保持向量长度不变，即

$$|T(x)| = |x|, \qquad \forall x \in V;$$

3）T 保持向量间的距离不变，即

$$d\big(T(x),T(y)\big) = d\big(x,y\big), \qquad \forall x,y \in V$$

证明：首先证明1)与2)等价.

1) $\Rightarrow$ 2)：若 T 是正交变换，则

$$\big(T(x),T(x)\big)=(x,x),\quad \forall x\in V$$

即，$$|T(x)|^2=|x|^2$$

两边开方得，$$|T(x)|=|x|,\quad \forall x\in V,$$

2) $\Rightarrow$ 1)：若 T 保持向量长度不变，则对 $\forall x,y\in V$

有，$$\big(T(x),T(x)\big)=(x,x), \tag{1}$$

$$\big(T(y),T(y)\big)=(y,y), \tag{2}$$

$$\big(T(x+y),T(x+y)\big)=(x+y,x+y), \qquad (3)$$

把(3)展开得，

$$\big(T(x),T(x)\big)+2\big(T(x),T(y)\big)+\big(T(y),T(y)\big)$$

$$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)$$

再由(1)(2)即得，

$$\big(T(x),T(y)\big)=(x,y)$$

$\therefore\ T$ 是正交变换.

再证明2)与3)等价.

$2) \Rightarrow 3)$:　$\because \quad T(x)-T(y)=T(x-y),$

$$\therefore \quad d\big(T(x),T(y)\big)=|T(x)-T(y)|$$

$$=|T(x-y)|=|x-y| \quad (\text{根据 2）})$$

$$=d(x,y)$$

故 3）成立.

$3) \Rightarrow 2)$：若　$d\big(T(x),T(y)\big)=d(x,y),\quad \forall x,y\in V$

则有，　$d\big(T(x),T(0)\big)=d(x,0),\quad \forall x\in V$

即，　$|T(x)|=|x|,\quad \forall x\in V.$　　　故 2）成立.

1. n 维欧氏空间中的正交变换是保持标准正交基不变的线性变换.

1). 若 T 是 n 维欧氏空间V的正交变换，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是V的标准正交基，则 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$ 也是V的标准正交基.

事实上，由正交变换的定义及标准正交基的性质即有，

$$\left(T(x_i), T(x_j)\right) = (x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2). 若线性变换 T 使V的标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 变成标准正交基 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$，则 T 为V的正交变换.

证明：任取 $x, y \in V$，设

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots \xi_n x_n$$

$$y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots \eta_n x_n,$$

由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为标准正交基，有

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

又 $T(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i T(x_i),\qquad T(y)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j T(x_j)$

由于$T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n)$为标准正交基，得

$$\left(T(x),T(y)\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$$

$\therefore\quad \left(T(x),T(y)\right)=(x,y)$

故 T 是正交变换.

定义：如果 $Q\in R^{n\times n}$ ，且 $Q^TQ=I,Q^{-1}=Q^T$

则称Q为正交矩阵

注：（1）正交矩阵的充要条件是列向量为两两正交的单位向量。 $Q=[q_1,\cdots q_n],Q^TQ=\left[q_i^Tq_j\right]=I$

（2）正交矩阵是非奇异矩阵 $\det Q=\pm 1$

（3）正交矩阵的逆矩阵仍为正交矩阵

$$\left(Q^{-1}\right)^TQ^{-1}=\left(Q^T\right)^{-1}Q^{-1}=\left(QQ^T\right)^{-1}=I$$

（4）正交矩阵的乘积仍为正交矩阵

$$\left(Q_1Q_2\right)^TQ_1Q_2=Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2=Q_2^TQ_2=I$$

例：如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是欧式空间V^n的标准正交基，过渡矩阵为C，则C为正交矩阵

证明:（1）由标准正交基有

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij} \qquad (y_i,y_j)=\delta_{ij}$$

矩阵C的各列是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}x_j \quad i=1,2,\cdots,n$$

则有 $$\left(y_i,y_j\right)=\sum_{l=1}^{n}c_{li}c_{lj}=\delta_{ij} \quad i,j=1,2,\cdots,n$$

即C矩阵的各列是单位正交向量，C是正交矩阵.

2. n维欧氏空间V中的线性变换 T是正交变换

$\Longleftrightarrow$ T在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明："$\Rightarrow$" 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的标准正交基，且

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n)$$
$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) A$$

当 T 是正交变换时，由**1**知，$Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 也是V的标准正交基， 而由标准正交基$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到标准正交基$Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$的过渡矩阵是正交矩阵.

所以，A是正交矩阵.

"$\Leftarrow$" 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为V的标准正交基，且

$$T\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)A$$

即，$\left(Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)A$

由于当A是正交矩阵时，$Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n$ 也是V的

标准正交基，再由1即得 T为正交变换.

3. n 维欧氏空间中正交变换的分类：

设 n 维欧氏空间V中的线性变换 T 在标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的矩阵是正交矩阵A，则 $|A| = \pm 1$.

1）如果 $|A| = 1$，则称 T 为**第一类的**（**旋转**）；

2）如果 $|A| = -1$，则称 T 为**第二类的**.

例、在欧氏空间中任取一组标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

定义线性变换 T 为:

$$Tx_1 = -x_1$$

$$Tx_i = x_i, \qquad i = 2,3,\cdots n.$$

则 T 为第二类的正交变换，也称之为镜面反射.

四、实对称矩阵的一些性质

定理： 设A是实对称矩阵，则A的特征值皆为实数.

证：设 $Ax=\lambda x,(x\neq\theta)$，则

$$x^H Ax=\begin{cases} x^H(Ax) & =\lambda\left(x^H x\right) \\ (Ax)^H x & =\bar{\lambda}\left(x^H x\right) \end{cases}$$

$$\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)\left(x^H x\right)=0 \quad \Rightarrow \lambda=\bar{\lambda} \qquad \text{即} \quad \lambda\in R$$

[注] 因为 $(\lambda I-A)x=0$ 是实系数齐次线性方程组，其非零解向量 $x\in R$ 。对应的特征向量为实向量

定理： 设 A 是实对称矩阵，在 n 维欧氏空间 R^n 上定义一个线性变换 T 如下：

$$T(x) = Ax, \qquad \forall x \in R^n$$

则对任意 $x, y \in R^n$，有

$$\big(T(x), y\big) = \big(x, T(y)\big),$$

或

$$y^T(Ax) = x^T(Ay).$$

证：取 R^n 的一组标准正交基，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 T 在基 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 下的矩阵为A，即

$$T(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)A$$

任取 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n,$

即 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \overset{\triangle}{=} (e_1, e_2, \ldots, e_n)X,$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \overset{\triangle}{=} (e_1, e_2, \ldots, e_n)Y,$$

于是

$$T(x)=T(e_1,e_2,\ldots,e_n)X=(e_1,e_2,\ldots,e_n)AX,$$

$$T(y)=T(e_1,e_2,\ldots,e_n)Y=(e_1,e_2,\ldots,e_n)AY,$$

又 $e_1,e_2,\ldots,e_n$是标准正交基,

$$\therefore\quad \big(T(x),y\big)=(AX)'Y\ =(X'A')Y\ =X'AY$$

$$=X'(AY)=\big(x,T(y)\big)$$

又注意到在R^n中 $x=X,\quad y=Y,$

即有 $y^T(Ax)=\big(y,T(x)\big)=\big(T(x),y\big)$

$$=\big(x,T(y)\big)=x^T(Ay).$$

四、对称变换

1. 定义

设 T 为欧氏空间V中的线性变换，如果满足

$$\big(T(x),y\big)=\big(x,T(y)\big),\qquad \forall x,y\in V,$$

则称 T 为**对称变换**.

1）n维欧氏空间V的对称变换与n级实对称矩阵在标准正交基下是相互确定的：

① 实对称矩阵可确定一个对称变换.

事实上，设 $A \in R^{n\times n}, A' = A,\quad x_1, x_2, ..., x_n$ 为V的一组标准正交基. 定义V的线性变换 T：

$$T(x_1, ...x_n) = (x_1, ...x_n)A$$

$$\forall x \in V^n \Rightarrow x = (x_1, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, Tx = (x_1, \cdots, x_n)A\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\forall y \in V^n \Rightarrow y = (x_1, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, Ty = (x_1, \cdots, x_n)A\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}, Tx=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

$$y=(x_1,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}, Ty=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}$$

$$(Tx, y)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A^T\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=(x, Ty)$$

则 T 即为V的对称变换.

② 对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

事实上，设 T为n维欧氏空间V上的对称变换，

$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组标准正交基， $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

为 T 在这组基下的矩阵，即

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)A$$

或

$$T(x_i)=a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+\cdots+a_{ni}x_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}x_k, \qquad i=1,2,\cdots,n$$

于是 $\left(T(x_i),x_j\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}x_k,\ x_j\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(x_k,x_j)$

$$=a_{ji}(x_j,x_j)=a_{ji}$$

$$\left(x_i,T(x_j)\right)=\left(\ x_i,\sum_{k=1}^{n}a_{kj}x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(x_i,x_k)$$

$$=a_{ij}(x_i,x_i)=a_{ij}$$

由 T 是对称变换，有 $\left(T(x_i),x_j\right)=\left(x_i,T(x_j)\right)$

即 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji},\qquad i,j=1,2,\cdots n,$

所以A为对称矩阵.

定理：

设实对称矩阵A的特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，对应的特征向量

为 x_1 和 x_2 ，则 $\left(x_1, x_2\right) = 0$

证明： $\left.\begin{array}{l} Ax_1 = \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^T A x_2 = \begin{cases} x_1^T\left(Ax_2\right) = \lambda_2\left(x_1^T x_2\right) \\ \left(Ax_1\right)^T x_2 = \lambda_1\left(x_1^T x_2\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(x_1^T x_2\right) = 0 \qquad \Rightarrow x_1^T x_2 = 0$$

即： $\left(x_1, x_2\right) = 0$

五、酉空间简介

定义： 线性空间V，复数域K，对 $\forall x, y \in V$ 定义一个复数(x, y)，且满足

(1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ （交换率）

(2) $(kx, y) = k(x, y)$ （齐次性）

(3) $(x + y, z) = \left(x, z\right) + (y, z)$, $\forall z \in V$ （分配率）

(4) $(x, x) \geq 0$,当且仅当 $x = 0$ 时 $(x, x) = 0$. （正定性）

则称 (x, y)为x和 y 的**复内积**，并称V为**酉空间**.

酉空间性质

(1) $(x,ky)=\overline{k}(x,y)$

(2) 基的度量矩阵为Hermite正定矩阵

(3) $(x,y)=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)A\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right)^H$

(4) 酉变换：$(Tx,Tx)=(x,x)\quad \forall x\in V$ $\qquad A^H A=I$

T是酉变换 $\Longleftrightarrow$ T在标准正交基下的矩阵A是酉矩阵

(5) Hermite变换：$(Tx,y)=(x,Ty)\quad \forall x,y\in V$

T是Hermite变换 $\Longleftrightarrow$ T在标准正交基下的矩阵A

是Hermite矩阵 $\quad A^H=A$

定理:

(1)设 $A_{n\times n}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,存在酉矩阵 $P_{n\times n}$,

使得
$$P^H AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(2)设 $A\in R^{n\times n}$ 且 $\lambda_A \in R$,则存在正交矩阵 $Q_{n\times n}$,使得

$Q^H AQ$ 为上三角矩阵

在归纳法证明“实矩阵 $A_{n\times n}$ 与上三角矩阵相似”将“扩充 x_1 为 C^k 的基”改为“标准正交基”

定义： 正规矩阵：指 $A_{n\times n}$ ，满足 $A^H A = AA^H$

如 $A \in C^{n\times n}$

(1) $A^H = A \Rightarrow A$ 正规　　(2) $A^H A = I \Rightarrow A$ 正规

如 $A \in R^{n\times n}$

(1) $A^T = A \Rightarrow A$ 正规　　(2) $A^T A = I \Rightarrow A$ 正规

$$B = \begin{bmatrix} 5+4j & 1+6j \\ 1+6j & 5+4j \end{bmatrix}, \qquad B^H B = \begin{bmatrix} 78 & 58 \\ 58 & 78 \end{bmatrix} = BB^H$$

可得 B是正规矩阵，但 $B^H \neq B, B^H B \neq I$

定理：(1)正规矩阵 $A \in C^{n\times n}$

$\Longleftrightarrow$ 存在酉矩阵 $P_{n\times n}$，使得 $P^H AP = \Lambda$

(2)正规矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 且 $\lambda_A \in R$

$\Longleftrightarrow$ 存在正交矩阵 $Q_{n\times n}$，使得 $Q^T AQ=\Lambda$

证明：(1)充分性 $A = P\Lambda P^H, A^H = P\bar{\Lambda}P^H$

$$A^H A = P\bar{\Lambda}\Lambda P^H = P\Lambda\bar{\Lambda}P^H = P\Lambda P^H P\bar{\Lambda}P^H = AA^H$$

(2)必要性 $A^H A = AA^H$ ，可以找到酉矩阵P

$$P^H AP = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} \triangleq B \qquad b_{ii} = \lambda_i, i = 1,\cdots,n$$

$$B^H B = P^H A^H A P = P^H A A^H P = B B^H$$

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & & & \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{b}_{1n} & \bar{b}_{2n} & \cdots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \ddots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \ddots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & & & \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{b}_{1n} & \bar{b}_{2n} & \cdots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix}$$

比较矩阵乘积的第一行和第一列，可得

$$|b_{11}|^2 = |b_{11}|^2 + |b_{12}|^2 + \cdots + |b_{1n}|^2 \qquad \Rightarrow b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0$$

一般地，有

$$\left.\begin{array}{l} i=1: b_{12}=b_{13}=\cdots=b_{1n}=0 \\ i=2: \quad b_{23}=\cdots=b_{2n}=0 \\ \qquad\quad \cdots\cdots \\ i=n-1: \qquad b_{n-1,n}=0 \end{array}\right\} \qquad \begin{aligned} \Rightarrow B &= diag(b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}) \\ &= diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \end{aligned}$$

推论1： $A_{n\times n}$ 实对称，则存在正交矩阵 $Q_{n\times n}$ ，使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$$

推论2： 欧式空间 V^n ，对称变换 T，则在 V^n 中存在标准正交基 $y_1,\cdots y_n$ ，使 T 在该基下矩阵为对角阵

推论3： $A_{n\times n}$ 实对称，则 A 有 n 个线性无关的实特征向量

推论4： 欧式空间 V^n 的对称变换 T，则有 n 个线性无关特征向量

定义： $A_{n\times n}$ 是Hermite矩阵，则存在酉矩阵 $P_{n\times n}$ ，

使得 $A=P\Lambda P^H$ ，划分 $P=\left[p_1,p_2,\cdots,p_n\right]$

$$A=\left[p_1,p_2,\cdots,p_n\right]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1^H \\ \vdots \\ p_n^H\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1\left(p_1p_1^H\right)+\cdots+\lambda_n\left(p_np_n^H\right) \qquad (*)$$

（1）矩阵组 $B_1=p_1p_1^H,\cdots,B_n=p_np_n^H$ 线性无关

（2）$\operatorname{rank} B_j=1, j=1,2,\cdots,n$

称(*)式为矩阵A的谱分解。

作业

- P78：6、7、10、11
- P79：13、14、15、19
- P106：1
- P107：3、4、6、10、11