



矩阵分析与应用

第二讲 线性子空间

2014/12/16

本讲主要内容

- 线性子空间的定义
- 线性子空间的性质
- 线性子空间的交
- 线性子空间的和
- 子空间交与和的有关性质

线性子空间

设 V_1 是数域 K 上的线性空间 V 上一个非空子集合，且对已有的线性运算满足以下条件：

1. 如果 $x, y \in V_1$ ，则 $x + y \in V_1$ ；
2. 如果 $x \in V_1, k \in K$ ， $kx \in V_1$

则称 V_1 是 V 的**线性子空间或子空间**

- 线性子空间也是线性空间
- 非零线性空间的平凡子空间：线性空间自身以及零空间
- 线性子空间的维数小于等于线性空间的维数

线性子空间 V_1 也是线性空间

证明：必要性由定义直接得出

充分性：各运算律已在 V 中定义，我们只需证明

$$\exists 0 \in V_1 \quad \forall x \in V_1, \exists -x \in V_1$$

实际上， $0 = 0 \cdot x \in V_1$

$$\forall x \in V_1, -1 \in K \quad -x = (-1)x \in V_1$$

所以线性子空间 V_1 也是线性空间

V_1 是数域 K 上的线性空间 V 上一个非空子空间

$$\iff \forall x, y \in V_1, \forall k, l \in K \text{ 有 } \exists kx + ly \in V_1$$

■充分性: 设 $k=l=1, \forall x, y \in V_1 \Rightarrow x + y \in V_1$

取 $l=0, \forall x \in V_1, \forall k \in K \Rightarrow kx \in V_1$

■必要性: $\forall x \in V_1, \forall k \in K \Rightarrow kx \in V_1$ (数乘封闭)

$\forall y \in V_1, \forall l \in K \Rightarrow ly \in V_1$ (数乘封闭)

故 $kx + ly \in V_1$ (加法封闭)

#

n元齐次线性方程组

[illegible]

的全部解向量所成集合 V 对于通常的向量加法和数量乘法构成的线性空间是 n 维向量空间 R^n 的一个子空间，称 V 为方程组的解空间

- 方程组的解空间 V 的维数 $= n - \text{秩}(A)$,
- 方程组的一个基础解系就是解空间 V 的一组基

n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_{2,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n \end{cases}$$

变形后，用n-s组数表示自由未知量 x_{s+1}, \dots, x_n

$$(1, 0, \dots, 0) \quad (0, 1, \dots, 0) \quad \dots \quad (0, 0, \dots, 1)$$

得到n-s个解向量

$$(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1s} \mathbf{1}, 0, \dots, 0) \cdots (\gamma_{s1}, \gamma_{s2}, \dots, \gamma_{ss}, 0, 0, \dots, 1)$$

这个解向量组就是方程组的解空间的基

判断 \mathbf{R}^n 的下列子集合哪些是子空间:

$$V_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, x_i \in R\}$$

$$V_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_i \in R\}$$

$$V_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

若为 \mathbf{R}^n 的子空间, 求出其维数与一组基.

解: V_1 、 V_3 是 \mathbf{R}^n 的子空间, V_2 不是 \mathbf{R}^n 的子空间.

事实上, V_1 是 n 元齐次线性方程组

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad \text{①}$$

的解空间. 所以, 维 $V_1 = n-1$, ①的一个基础解系

$\eta_1 = (1, -1, 0, \dots, 0), \eta_2 = (1, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, \eta_{n-1} = (1, 0, \dots, 0, -1)$ 就是 V_1 的一组基.

而在 V_2 中任取两个向量 x, y , 设

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

则 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

但是 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n)$

$$= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 1 + 1 = 2$$

$\therefore x + y \notin V_2$, 故 V_2 不是 \mathbb{R}^n 的子空间.

下证 V_3 是 \mathbf{R}^n 的子空间.

首先 $0 = (0, 0, \dots, 0) \in V_3, \therefore V_3 \neq \emptyset$

其次, $\forall x, y \in V_3, \forall k \in K,$

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0)$

则有 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_{n-1} + y_{n-1}, 0) \in V_3$

$kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_{n-1}, 0) \in V_3$

故, V_3 为 \mathbf{R}^n 的一个子空间, 且维 $V_3 = n-1$,

$\varepsilon_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0), i = 1, 2, \dots, n-1$

就是 V_3 的一组基.

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是数域 K 上的线性空间 V 的一组向量, 所有可能的线性组合的集合

$$V_1 = \{k_1 x_1 + \dots + k_n x_n\} \quad k_i \in K, i = 1, 2, \dots, n$$

称为由 x_1, x_2, \dots, x_n 生成(或张成)的子空间, 记为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{k_1 x_1 + \dots + k_n x_n\}$$

如果 x_1, x_2, \dots, x_m $m \leq n$ 是最大线性无关组,

则 x_1, x_2, \dots, x_m 是生成的子空间的基

零子空间就是零元素生成的子空间

例：设 V 为数域 K 上的线性空间， $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$

$$V_1 = \{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m \mid k_i \in K, i = 1, 2, \dots, m\}$$

则 V_1 关于 V 的运算作成 V 的一个子空间.

证： $\forall x \in V_1 \Rightarrow x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m$

即 x_1, x_2, \dots, x_m 的一切线性组合所成集合.

$$\forall k, l \in K, \dots, (k_1 + l_1)x_1 + \dots + (kk_m + ll_m)x_m$$

$$\therefore kx + ly \in V_1$$

因此， V_1 关于 V 的运算作成 V 的一个子空间

扩基定理

定理：设 V_1 为 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间， x_1, x_2, \dots, x_m 为 V_1 的一组基，则这组向量必定可扩充为 V 的一组基。即在 V 中必定可找到 $n-m$ 个向量 $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ，使 x_1, x_2, \dots, x_n 为 V 的一组基。

证明：对 $n-m$ 作数学归纳法。

当 $n-m=0$ 时，即 $n=m$ ，

x_1, x_2, \dots, x_m 就是 V 的一组基。定理成立。

假设当 $n-m=k$ 时结论成立。

下面我们考虑 $n-m=k+1$ 的情形.

既然 x_1, x_2, \dots, x_m 还不是 V 的一组基, 它又是线性无关的, 那么在 V^n 中必定有一个向量 x_{m+1} 不能被 x_1, x_2, \dots, x_m 线性表出, 把它添加进去, 则

$x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$ 必定是线性无关的.

由定理, 子空间 $L(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的.

因 $n-(m+1) = (n-m) - 1 = (k+1) - 1 = k$,

由归纳假设, $L(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$ 的基 $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$

可以扩充为整个空间 V^n 的一组基. 由归纳原理得证.

■矩阵的值域

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 的 n 个列向量为 a_1, a_2, \dots, a_n 则

$$R(A) = L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{ y \mid y = Ax, x \in \mathbb{C}^n \}$$

是 \mathbb{C}^m 的子空间，称为矩阵 A 的值域，或列空间

■矩阵的零空间（核空间）

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 的 n 个列向量为 a_1, a_2, \dots, a_n 则

$$N(A) = \{ x \mid Ax = 0, x \in \mathbb{C}^n \}$$

是 \mathbb{C}^n 的子空间，称为矩阵 A 的零空间，其维数为 A 的零度，记为 $n(A)$

■ 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 求 \mathbf{A} 的秩和零度
显然 \mathbf{A} 的秩为 2, 即 $\text{rank } \mathbf{A} = 2$

又由 $\mathbf{A} \mathbf{x} = 0$, 可以解得

可以得到 $\mathbf{x} = (1 \ 1 \ -1)^T t \quad n(\mathbf{A}) = 1$

同样可以得到 $\text{rank } \mathbf{A}^T = 2, \quad n(\mathbf{A}^T) = 0$

■ 若 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 有

$$\text{rank } \mathbf{A} + n(\mathbf{A}) = n \quad n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{A}^T) = n - m$$

定理： 设 V_1 、 V_2 为线性空间 V 的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 = \{a \mid a \in V_1 \text{ 且 } a \in V_2\}$$

也为 V 的子空间，称之为 V_1 与 V_2 的**交空间**.

事实上， $\because 0 \in V_1, 0 \in V_2, \therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

任取 $x, y \in V_1 \cap V_2$, 即 $x, y \in V_1$, 且 $x, y \in V_2$,

则有 $x + y \in V_1, x + y \in V_2, \therefore x + y \in V_1 \cap V_2$

同时有 $kx \in V_1, kx \in V_2, \therefore kx \in V_1 \cap V_2, \forall k \in K$

故 $V_1 \cap V_2$ 为 V 的子空间.

定理： 设 V_1 、 V_2 为线性空间 V 的子空间，则集合

$$V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

也为 V 的子空间，称之为 V_1 与 V_2 的**和空间**。

事实上， $\because 0 \in V_1, 0 \in V_2, \therefore 0 = 0 + 0 \in V_1 + V_2 \neq \emptyset$

任取 $x, y \in V_1 + V_2$ ， 设 $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ ，

其中， $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$ ， 则有

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in V_1 + V_2$$

$$kx = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 \in V_1 + V_2, \quad \forall k \in K$$

❖ 子空间的交满足交换率与结合率

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1,$$

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$$

❖ 子空间的和满足交换率与结合率

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1,$$

$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$$

注意:

V 的两子空间的并集未必为 V 的子空间. 例如

$$V_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in R\}, \quad V_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in R\}$$

皆为 R^3 的子空间, 但是它们的并集

$$\begin{aligned} V_1 \cup V_2 &= \{(a, 0, 0), (0, b, 0) \mid a, b \in R\} \\ &= \{(a, b, 0) \mid a, b \in R \text{ 且 } a, b \text{ 中至少有一是 } 0\} \end{aligned}$$

并不是 R^3 的子空间. 因为它对 R^3 的运算不封闭, 如

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in V_1 \cup V_2$$

$$\text{但是 } (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin V_1 \cup V_2$$

子空间的交与和的有关性

包含在 V_1 和 V_2 中的最大的子空间

1、 设 V_1, V_2, W 为线性空间 V 的子空间

1) 若 $W \subseteq V_1, W \subseteq V_2$, 则 $W \subseteq V_1 \cap V_2$.

2) 若 $V_1 \subseteq W, V_2 \subseteq W$, 则 $V_1 + V_2 \subseteq W$.

2、 设 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间 则以下三个条件等价:

1) $V_1 \subseteq V_2$

2) $V_1 \cap V_2 = V_1$

3) $V_1 + V_2 = V_2$

包含 V_1 和 V_2 中的最小的子空间

3、 $x_1, x_2, \cdots, x_s; y_1, y_2, \cdots, y_t$ 为线性空间 V 中两组向量，则

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \cdots, x_s) + L(y_1, y_2, \cdots, y_t) \\ &= L(x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, y_2, \cdots, y_t) \end{aligned}$$

4、维数公式（定理1.6）

设 V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间，则

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim (V_1 + V_2) + \dim (V_1 \cap V_2)$$

或
$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)$$

证：设 $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$, $\dim (V_1 \cap V_2) = m$

取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 x_1, x_2, \dots, x_m

由扩基定理，它可扩充为 V_1 的一组基

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-m}$$

它也可扩充为 V_2 的一组基

$$x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m}$$

$$\text{即有 } V_1 = L(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-m})$$

$$V_2 = L(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m})$$

所以, 有

$$V_1 + V_2 = L(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-m}, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m})$$

下证 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-m}, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m}$

线性无关. 假设有等式

$$k_1 x_1 + \dots + k_m x_m + p_1 y_1 + \dots + p_{n_1-m} y_{n_1-m} \\ + q_1 z_1 + \dots + q_{n_2-m} z_{n_2-m} = 0$$

$$\text{令 } x = k_1 x_1 + \dots + k_m x_m + p_1 y_1 + \dots + p_{n_1-m} y_{n_1-m} \\ = -q_1 z_1 - \dots - q_{n_2-m} z_{n_2-m}$$

则有 $x \in V_1$ 且 $x \in V_2$, 于是 $x \in V_1 \cap V_2$,

即 x 可被 x_1, x_2, \dots, x_m 线性表出

$$\text{令 } x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m,$$

$$\text{则 } l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m = -q_1 z_1 - \dots - q_{n_2-m} z_{n_2-m}$$

$$\text{即 } l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m + q_1 z_1 + \dots + q_{n_2-m} z_{n_2-m} = 0$$

由于 $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-m}$ 线性无关, 得

$$l_1 = l_2 = \dots = l_m = q_1 = \dots = q_{n_2-m} = 0,$$

因而 $x = 0$ 从而有

$$k_1 x_1 + \cdots + k_m x_m + p_1 y_1 + \cdots + p_{n_1-m} y_{n_1-m} = 0$$

由于 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-m}$ 线性无关, 得

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0$$

所以, $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-m}, z_1, z_2, \cdots, z_{n_2-m}$

线性无关. 因而它是 $V_1 + V_2$ 的一组基.

$$\therefore \dim(V_1 + V_2) = m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$$

$$= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

#

注意：从维数公式中可以看到，子空间的和的维数往往比子空间的维数的和要小.

例如，在 \mathbf{R}^3 中，设子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

其中， $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$

则， $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$

但， $V_1 + V_2 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + L(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathbf{R}^3$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3$$

由此还可得到， $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, $V_1 \cap V_2$ 是一直线.

推论： 设 V_1, V_2 为 n 维线性空间 V 的两个子空间，
若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ ，则 V_1, V_2 必含非零的公共
向量. 即 $V_1 \cap V_2$ 中必含有非零向量.

证：由维数公式有

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)$$

又 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间， $\therefore \dim(V_1 + V_2) \leq n$

若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ ，则 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

故 $V_1 \cap V_2$ 中含有非零向量.

例1、在 R^n 中，用 V_1, V_2 分别表示齐次线性方程组

[illegible]

$$\text{与} \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

的解空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次线性方程组③

③

证：设方程组①,②,③分别为

$$AX = 0, \quad BX = 0, \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$$

设 V 为③的解空间, 任取 $X_0 \in V$, 有

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0, \quad \text{从而} \quad \begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{即}$$

$$AX_0 = BX_0 = 0. \quad \therefore X_0 \in V_1 \cap V_2$$

反之, 任取, $X_0 \in V_1 \cap V_2$, 则有

$$AX_0 = BX_0 = 0, \quad \text{从而} \quad \begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0,$$

$$\therefore X_0 \in V$$

$$\text{故} \quad V = V_1 \cap V_2.$$

例2、设 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的两个子空间为

$$V_1 = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

$$V_2 = L(B_1, B_2), B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求

1. 将 $V_1 + V_2$ 表示成生成子空间
2. 求 $V_1 + V_2$ 的基和维数
3. 求 $V_1 \cap V_2$ 的基和维数

解：先将 V_1 表示为生成子空间

齐次线性方程 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 的基础解系

$$\alpha_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad \alpha_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T \quad \alpha_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$$

所以 V_1 的一个基为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是 $V_1 = L(A_1, A_2, A_3)$ ，从而有

$$V_1 + V_2 = L(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2)$$

矩阵组 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 在简单基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的坐标依次为

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 = [1 \ 0 \ 2 \ 3]^T, \beta_2 = [1 \ -1 \ 0 \ 1]^T$$

该向量组的一个最大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$

矩阵组的一个最大无关组为 A_1, A_2, A_3, B_2

构成了 $V_1 + V_2$ 的一个基, 且 $\dim(V_1 + V_2) = 4$

设 $A \in V_1 \cap V_2$ 则有数 k_1, k_2, k_3 , 与数 l_1, l_2 , 使得

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = l_1 B_1 + l_2 B_2$$

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 - l_1 B_1 - l_2 B_2 = 0$$

比较上式等号两端矩阵的对应元素的值

$$k_1 - l_1 - l_2 = 0 \quad k_1 + k_2 + l_2 = 0$$

$$k_2 + k_3 - 2l_1 = 0 \quad k_3 - 3l_1 - l_2 = 0$$

方程组的通解为 $(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2)^T = k(1, -1, 3, 1, 0)^T$

可得 $A = l_1 B_1 + l_2 B_2 = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

所以 $V_1 \cap V_2$ 的基为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 且维数为1

设 V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间，由维数公式

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

有两种情形：

1) $\dim(V_1 + V_2) < \dim V_1 + \dim V_2$

此时 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$,

即, $V_1 \cap V_2$ 必含非零向量.

2) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

此时 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$,

$V_1 \cap V_2$ 不含非零向量, 即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

定义 设 V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间, 若和

$V_1 + V_2$ 中每个向量 x 的分解式

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$$

是唯一的, 和 $V_1 + V_2$ 就称为**直和**, 记作 $V_1 \oplus V_2$.

① 分解式 $x = x_1 + x_2$ 唯一的, 意即

若有 $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$

则 $x_1 = y_1, x_2 = y_2$.

② 分解式唯一的, 不是在任意两个子空间的和中都成立.

例如, \mathbb{R}^3 的子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad V_3 = L(\varepsilon_3)$$

这里, $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$

在和 $V_1 + V_2$ 中, 向量的分解式不唯一, 如

$$(2, 2, 2) = (2, 3, 0) + (0, -1, 2) = (2, 1, 0) + (0, 1, 2)$$

所以和 $V_1 + V_2$ 不是直和.

而在和 $V_1 + V_3$ 中, 向量 $(2, 2, 2)$ 的分解式是唯一的,

$$(2, 2, 2) = (2, 2, 0) + (0, 0, 2)$$

事实上, 对 $\forall \alpha = (a_1, a_2, a_3) \in V_1 + V_3$,

都只有唯一分解式: $\alpha = (a_1, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$.

故 $V_1 + V_3$ 是直和.

直和判断定理： $V_1 + V_2$ 是直和的充要条件是

$$V_1 \cap V_2 = L(0)$$

证：“ \Leftarrow ” 若 $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$.

则有 $x_1 = -x_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\therefore x_1 = x_2 = 0$, 即 $V_1 + V_2$ 是直和.

“ \Rightarrow ” 任取 $x \in V_1 \cap V_2$,

$$0 = x + (-x), \quad x \in V_1, \quad -x \in V_2.$$

由于 $V_1 + V_2$ 是直和, 零向量分解式唯一,

$\therefore x = -x = 0$. 故 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

推论：和 $V_1 + V_2$ 是直和

$$\Leftrightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

证：由维数公式

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

有， $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$$\Leftrightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow V_1 + V_2 \text{ 是直和.}$$

总之，设 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间，则下面四个条件等价：

- 1) $V_1 + V_2$ 是直和
- 2) 零向量分解式唯一
- 3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
- 4) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

设 $x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_s$ 分别是线性子空间 V_1, V_2 的一组基, 则

$V_1 + V_2$ 是直和 $\Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ 线性无关.

证: 由题设, $V_1 = L(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $\dim V_1 = r$

$$V_2 = L(y_1, y_2, \dots, y_s), \quad \dim V_2 = s$$

$$\therefore V_1 + V_2 = L(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s).$$

若 $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ 线性无关,

则它是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 从而有

$$\dim(V_1 + V_2) = r + s = \dim V_1 + \dim V_2$$

$\therefore V_1 + V_2$ 是直和.

反之, 若 $V_1 + V_2$ 直和, 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = r + s$$

从而 $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ 的秩为 $r + s$.

所以 $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ 线性无关.

定义：

V_1, V_2, \dots, V_s 都是线性空间 V 的子空间，若和

$\sum_{i=1}^s V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 中每个向量 x 的分解式

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_s, \quad x_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, s$$

是唯一的，则和 $\sum_{i=1}^s V_i$ 就称为直和，记作

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

判定方法:

设 V_1, V_2, \dots, V_s 都是线性空间 V 的子空间, 则下面四个条件等价:

1) $W = \sum_{i=1}^s V_i$ 是直和

2) 零向量分解式唯一, 即

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0, \quad x_i \in V_i, \quad \text{必有} \quad x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

3) $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}, i = 1, 2, \dots, s$

4) $\dim W = \sum_{i=1}^s \dim V_i$

作业

■ P26: 10、11、12