矩阵分析与应用

第十二讲 矩阵分解之二

信息与通信工程学院

吕旌阳

本讲主要内容

- 矩阵的QR分解
- 矩阵的满秩分解
- 矩阵的奇异值分解

2. G-变换方法

定理8： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 有限个G-矩阵之积T，使得TA为可逆上三角矩阵。

证明：以n=4为例

$$|A| \neq 0 \qquad \beta^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$有限个G-矩阵之积 T_0 ，使得

$$T_0\beta^{(0)} = \begin{bmatrix} |\beta^{(0)}| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_{11}^{(1)} = |\beta^{(0)}| > 0$$

$$T_0 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

$\left|A^{(1)}\right| \neq 0,\ \beta^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists$有限个G-矩阵之积 T_1,使得

$$T_1 \beta^{(1)} = \begin{bmatrix} \left|\beta^{(1)}\right| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_{22}^{(2)} = \left|\beta^{(1)}\right| > 0$$

$$T_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\left|A^{(2)}\right| \neq 0,\ \beta^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} \end{bmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \exists$$ G-矩阵 T_2 ,使得

$$T_2 \beta^{(2)} = \begin{bmatrix} \left|\beta^{(2)}\right| \\ 0 \end{bmatrix}, a_{33}^{(3)} = \left|\beta^{(2)}\right| > 0 \qquad T_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_1 \end{bmatrix} T_0 \qquad TA = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \triangleq R$$

2. G-变换方法

定理8： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 有限个G-矩阵之积T，使得TA为可逆上三角矩阵。

[注]： $\det T = 1 \Rightarrow \det A = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{n-1,n-1}^{(n-1)} a_{n,n}^{(n-1)}$

因此 $a_{n,n}^{(n-1)}$ 与 $\det A$ 同符号

当$A_{n,n}$ 不可逆时，仍可得$TA = R$ ， 但R是不可逆矩阵

例5:用G变换法求$A=\begin{bmatrix}3&5&5\\0&3&4\\4&0&5\end{bmatrix}$, 的QR分解

解 (1) $\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$: $T_{13}(c,s)$中$c=\dfrac{3}{5}, s=\dfrac{4}{5}$. $T_{13}\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}$

$$T_0\overset{\Delta}{=}T_{13}=\begin{bmatrix}3/5&0&4/5\\0&1&0\\-4/5&0&3/5\end{bmatrix},\quad T_0A=\left[\begin{array}{c:cc}5&3&7\\ \hdashline 0&3&4\\0&-4&-1\end{array}\right]$$

(2) $A^{(1)}=\begin{bmatrix}3&4\\-4&-1\end{bmatrix}, \beta^{(1)}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$

$T_{12}(c,s)$中$c=\dfrac{3}{5}, s=-\dfrac{4}{5}$. $T_{12}\beta^{(1)}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$

$$T_1 \overset{\Delta}{=} T_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad T_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 16/5 \\ 0 & 13/5 \end{bmatrix}$$

令 $$T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_1 \end{bmatrix} T_0 = \frac{1}{5}\left[\begin{array}{c:cc} 5 & & \\ \hdashline & 3 & -4 \\ & 4 & 3 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15 & 0 & 20 \\ 16 & 15 & -12 \\ -12 & 20 & 9 \end{bmatrix}$$

则 $$Q = T^{-1} = T^{\mathrm{T}}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ & 5 & 16/5 \\ & & 13/5 \end{bmatrix}: \quad A = QR$$

例 6 用 Givens 变换求 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&4&2&3\\1&1&2&4\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

(1) $\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，构造 $T_{13}(c,s),\ c=0,\ s=1$，则

$$T_{13}\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad T_0=T_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad T_0A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&2&4\\0&4&3&2\\ \hdashline 0&0&-1&-3\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

(2) $A^{(2)}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $\beta^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$, 构造 $T_{12}(c,s)$, $c=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, $s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 则

$$T_{12}\beta^{(2)}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix},\ T_2=T_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\ T_2A^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

令 $$T=\begin{bmatrix}I_2 & O\\ O & T_2\end{bmatrix}T_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cc:cc}\sqrt{2} & 0 & & \\ 0 & \sqrt{2} & & \\ \hdashline & & -1 & 1\\ & & -1 & -1\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

则 $Q=T^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ & 4 & 3 & 2 \\ & & \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \\ & & & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$A=QR$$

3. H-变换方法

定理10：$A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 有限个H-矩阵之积S，

使得SA为可逆上三角矩阵。

证明：以n=4为例

(1) $|A|\neq 0$： $\beta^{(0)}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}\neq 0 \Rightarrow \exists$H-矩阵 H_0，使得 $H_0\beta^{(0)}=\begin{bmatrix} |\beta^{(0)}| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$a_{11}^{(1)}=|\beta^{(0)}|>0 \quad H_0A=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right], \quad A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \left|A^{(1)}\right| \neq 0: \quad \beta^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{H-矩阵}\, H_1，\ \text{使得}\, H_1\beta^{(1)} = \begin{bmatrix} \left|\beta^{(1)}\right| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^{(2)} = \left|\beta^{(1)}\right| > 0 \qquad H_1 A^{(1)} = \left[\begin{array}{c:cc} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ \hdashline 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{array}\right], \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$(3)\ \left|A^{(2)}\right| \neq 0: \quad \beta^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{H-矩阵}\, H_2，\ \text{使得}\, H_2\beta^{(2)} = \begin{bmatrix} \left|\beta^{(2)}\right| \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{33}^{(3)} = \left|\beta^{(2)}\right| > 0, \quad H_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\text{令} \quad S = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & H_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_1 \end{bmatrix} \cdot H_0 \qquad SA = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} R$$

例 7 用 H-变换求 $A=\begin{bmatrix}3 & 14 & 9\\ 6 & 43 & 3\\ 6 & 22 & 15\end{bmatrix}$ 的 QR 分解

解 (1) $\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix}$, $\beta^{(0)}-\left|\beta^{(0)}\right|e_1=\begin{bmatrix}-6\\6\\6\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$H_0=I-2uu^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad H_0A=\begin{bmatrix}9 & 48 & 15\\ 0 & 9 & -3\\ 0 & -12 & 9\end{bmatrix}$$

(2) $A^{(1)}=\begin{bmatrix}9 & -3\\ -12 & 9\end{bmatrix}$, $\beta^{(1)}=\begin{bmatrix}9\\-12\end{bmatrix}$

$$\beta^{(1)}-\left|\beta^{(1)}\right|e_1=\begin{bmatrix}-6\\-12\end{bmatrix}=(-6)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad u=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$H_1 = I - 2uu^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad H_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

令 $$S = \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_1 \end{bmatrix} H_0$$

则 $$Q = S^{-1} = S^{\mathrm{T}} = H_0 \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -14 \\ 10 & 11 & 2 \\ 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 9 & 48 & 15 \\ & 15 & -9 \\ & & -3 \end{bmatrix}; \quad A = QR$$

五、化方阵与Hessenberg矩阵相似

上 Hessenberg 矩阵：$F_{上}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$

定理11： $A_{n\times n}$，则存在有限个**G**-矩阵之积Q，使得

$$QAQ^{\mathrm{T}}=F_{上}$$

定理12： $A_{n\times n}$，则存在有限个**H**-矩阵之积Q，使得

$$QAQ^{\mathrm{T}}=F_{上}$$

推论： $A_{n\times n}$ 实对称 $\Rightarrow\exists$存在有限个**H**-矩阵(**G**-矩阵)之积Q，使得 $QAQ^{\mathrm{T}}=$“实对称三对角矩阵”

定理11： $A_{n\times n}$ ，则存在有限个G-矩阵之积Q，使得

$$QAQ^{\mathrm{T}} = F_{上}$$

证明:（1）对A：如果 $\beta^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \neq 0$ ，则存在有限个

G矩阵之积T_0 ，使得 $T_0\beta^{(0)} = \left|\beta^{(0)}\right| e_1 = a_{21}^{(1)} e_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & T_0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A^{(1)} & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

如果$\beta^{(0)} = 0$ ，转入（2）

（2）对$\boldsymbol{A}^{(1)}$：如果 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{32}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)} \end{bmatrix}\neq \mathbf{0}$，则存在有限个G矩阵

之积 $\boldsymbol{T}_1$ ，使得 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\left|\boldsymbol{\beta}^{(1)}\right|\boldsymbol{e}_1=a_{32}^{(2)}\boldsymbol{e}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \boldsymbol{T}_1 \end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{(1)}\begin{bmatrix} 1 & \\ & \boldsymbol{T}_1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \boldsymbol{A}^{(2)} & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

如果$\boldsymbol{\beta}^{(1)}=\mathbf{0}$ ，转入（3）

（3）对$\boldsymbol{A}^{(2)}$：……，直到$\boldsymbol{n}$-2步结束

令 $$Q=\begin{bmatrix} I_{n-2} & \\ & T_{n-3} \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_2 & \\ & T_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & T_0 \end{bmatrix}$$

则 $$QAQ^T=F_{上}$$

例8: 用H-变换化 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 正交相似于“三对角矩阵”

解: $\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}:\beta^{(0)}-\left|\beta^{(0)}\right|e_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$$H_0=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad Q\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix}1&\\&H_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$QA=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix},QAQ^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$$

满秩分解

目的： 对$A\in C_r^{m\times n}(n\geq 1)$，求$F\in C_r^{m\times r}$，及$G\in C_r^{r\times n}$使$A=FG$

分解原理：

$$\mathrm{rank}A=r\Rightarrow A\xrightarrow{\text{行}}\text{阶梯形}\,B=\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}:\quad G\in C_r^{r\times n}$$

$$\Rightarrow\exists\text{有限个初等矩阵之积}\,P_{m\times m},\mathrm{st.}PA=B$$

$$\Rightarrow A=P^{-1}B=\left(F_{m\times r}\,\middle|\,S_{m\times(m-r)}\right)\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}=FG:\quad F\in C_r^{m\times r}$$

例9: $A=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\1&2&-1&1\\2&2&-2&-1\end{bmatrix}$, 求$A=FG$

解（1）$(A|I)=\left[\begin{array}{cccc|ccc}-1&0&1&2&1&&\\1&2&-1&1&&1&\\2&2&-2&-1&&&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}-1&0&1&2&1&&\\0&2&0&3&1&1&\\0&0&0&0&1&-1&1\end{array}\right]$

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\-2&1\end{bmatrix}$$

$G=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\0&2&0&3\end{bmatrix}$ 满秩分解为$A=FG$

例9: $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$, 求$A=FG$

解（2） $$(A|I)=\left[\begin{array}{cccc|ccc}-1 & 0 & 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & -1 & 1 & & 1 & \\ 2 & 2 & -2 & -1 & & & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1 & 0 & -1 & -2 & -1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$A=P^{-1}B=(F\mid S)\begin{pmatrix}I_2 & B_{12}\\ O & O\end{pmatrix}=(F\mid FB_{12})$$

故 $F=$ “A 的前 2 列” $=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 3/2\end{bmatrix}$

奇异值分解(SVD)

一、预备知识

(1) $\forall A_{m\times n}$, $\left(A^{\mathrm{H}}A\right)_{n\times n}$ 是 Hermite（半）正定矩阵.

$$\forall x \neq 0,\ x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Ax = (Ax)^{\mathrm{H}}(Ax) = |Ax|^2 \geq 0$$

(2) 齐次方程组 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{H}}Ax=0$ 同解

若 $Ax=0$，则 $A^{\mathrm{H}}Ax=0$；

反之， $A^{\mathrm{H}}Ax=0 \Rightarrow |Ax|^2 = (Ax)^{\mathrm{H}}(Ax) = x^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}Ax) = 0$

$\Rightarrow Ax=0$

(3) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{H}}A)$

$$S_1 = \{x \mid Ax = 0\}, \quad S_2 = \{x \mid A^{\mathrm{H}}Ax = 0\}$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \dim S_1 = \dim S_2 \quad \Rightarrow n - r_A = n - r_{A^{\mathrm{H}}A}$$

$$\Rightarrow r_A = r_{A^{\mathrm{H}}A}$$

(4) $A = O_{m\times n} \Leftrightarrow A^{\mathrm{H}}A = O_{n\times n}$

必要性．左乘 A^{H} 即得；

充分性 $\quad r_A = r_{A^{\mathrm{H}}A} = 0 \Rightarrow A = O$

二、正交对角分解

定理15： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 酉矩阵 $U_{n\times n}, V_{n\times n}$ ，使得

$$U^{\mathrm{H}}AV=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{bmatrix}\overset{\Delta}{=}D \quad (\sigma_i>0)$$

证：$A^H A$是Hermite正定矩阵，$\exists$酉矩阵 $V_{n\times n}$ 使得

$$V^{\mathrm{H}}\left(A^{\mathrm{H}}A\right)V=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)\overset{\Delta}{=}\Lambda \quad (\lambda_i>0)$$

改写为 $D^{-1}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}\cdot AVD^{-1}=I \quad (\sigma_i=\sqrt{\lambda_i})$

令 $U=AVD^{-1}$，则有 $U^HU=I$，从而U是酉矩阵。

由此可得 $U^HAV=U^HUD=D$

三、奇异值分解

$A_{m\times n}\in C_r^{m\times n}(r\geq 1)\Rightarrow A^H A\in C_r^{n\times n}$ 半正定

$A^H A$ 的特征值：$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r\geq\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$

A的奇异值：$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$， $i=1,2,\cdots n$

特点：（1）A的奇异值个数等于A的列数

（2）A的非零奇异值个数等于 $\mathrm{rank}\,A$

定理16： $A_{m\times n}\in C_r^{m\times n}(r\geq 1),\Sigma_r=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$

存在酉矩阵 $U_{m\times m}$ 及 $V_{n\times n}$，使得 $U^H AV=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}\triangleq D$

证明： 对于Hermite半正定矩阵 $A^H A$，存在酉矩阵 $V_{n\times n}$

$$V^H\left(A^H A\right)V=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{n\times n}\qquad \sigma_i=\sqrt{\lambda_i},\quad i=1,\cdots,r$$

划分$V=\begin{bmatrix}V_1 & V_2\end{bmatrix}$，$V_1$是$V$的前$r$列，$V_2$是后$n$-$r$列

$$\left(A^H A\right)V=V\begin{bmatrix}\Sigma^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{n\times n}\Rightarrow\left[\left(A^H A\right)V_1 \mid \left(A^H A\right)V_2\right]=\left[V_1\Sigma^2 \mid 0\right]$$

(1) $\left(A^H A\right)V_1=V_1\Sigma^2 \qquad \Rightarrow V_1^H\left(A^H A\right)V_1=\Sigma^2$

$\Rightarrow \Sigma_r^{-1}V_1^H A^H AV_1\Sigma_r^{-1}=I_r \qquad \Rightarrow\left(AV_1\Sigma^{-1}\right)^H\left(AV_1\Sigma^{-1}\right)=I_r$

(2) $\left(A^H A\right)V_2 = 0 \qquad \Rightarrow V_2^H\left(A^H A\right)V_2 = 0$

$$\Rightarrow \left(AV_2\right)^H\left(AV_2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \left(AV_2\right) = 0$$

令 $U_1 \triangleq AV_1\Sigma^{-1}$ ，有 $U_1^H U_1 = I_r$ $\because \left(AV_1\Sigma^{-1}\right)^H\left(AV_1\Sigma^{-1}\right) = I_r$

设 U_1 的列为 $u_1,\cdots,u_r$ ，扩充为C^m 的基$u_1,\cdots,u_r,u_{r+1},\cdots,u_m$

则$U_2 = \left(u_{r+1},\cdots,u_m\right)$ 满足$U_2^H U_1 = 0_{(m-r)\times r}$。记 $U = \left(U_1 \ \ U_2\right)$

$$U^H AV = U^H\left(AV_1 \ \ AV_2\right) = \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix}\left(U_1\Sigma_r \ \ 0\right)$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^H U_1\Sigma_r & 0 \\ U_2^H U_1\Sigma_r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

定理16：$A_{m\times n}\in C_r^{m\times n}(r\geq 1),\Sigma_r=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$,

存在酉矩阵 $U_{m\times m}$ 及 $V_{n\times n}$ ，使得 $U^HAV=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}\triangleq D$

[注]：称 $A=UDV^H$ 为A的奇异值分解

(1) U与V不唯一；

(2) U的列为AA^H 的特征向量，V的列为 A^HA的特征向量

(3) 称U的列为A的左奇异向量，称V的列为A的右奇异向量.

例10：称 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，求 $A=UDV^T$

解：$AA^T=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}=B, |\lambda I-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

$$\lambda_1=3:\quad 3I-B=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}, \xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1:\quad 1I-B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}, \xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0: \quad 0I - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_A = 2: \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = AV_1\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}，取 U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 则 U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{\mathrm{T}}AV = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D, \quad A = UDV^{\mathrm{T}}$$

定理17： $A\in C_r^{m\times n}(r\geq 0)$ 的奇异值分解 $A=U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^H$

中，划分 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_m),V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，则有

(1) $N(A)=\text{span}\{v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_n\}$；

(2) $R(A)=\text{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$；

(3) $A=\sigma_1u_1v_1^{\mathrm{H}}+\sigma_2u_2v_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\sigma_ru_rv_r^{\mathrm{H}}$

证明： $A=\left(U_1\,\middle|\,U_2\right)\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1^{\mathrm{H}}\\ V_2^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}=U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}$

容易验证： $U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}x=0\Leftrightarrow V_1^{\mathrm{H}}x=0$

(1) $N(A)=\{\,x \mid Ax=0\,\}=\{\,x \mid U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}x=0\,\}$

$$=\{\,x \mid V_1^{\mathrm{H}}x=0\,\}=N(V_1^{\mathrm{H}})=R^{\perp}(V_1)$$

$$=R(V_2)=\mathrm{span}\{\,v_{r+1},\cdots,v_n\,\}$$

(2) $R(A)=\{\,y \mid y=Ax\,\}=\{\,y \mid y=U_1(\Sigma V_1^{\mathrm{H}}x)\,\}$

$$\subset\{\,y \mid y=U_1 z\,\}=R(U_1)$$

$$R(U_1)=\{\,y \mid y=U_1 z\,\}=\{\,y \mid y=A(V_1\Sigma^{-1}z)\,\}$$

$$\subset\{\,y \mid y=Ax\,\}=R(A)$$

故 $R(A)=R(U_1)=\mathrm{span}\{\,u_1,\cdots,u_r\,\}$

(3) $A=(u_1,\cdots,u_r)\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^{\mathrm{H}}\\ \vdots \\ v_r^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}$

$$=\sigma_1 u_1 v_1^{\mathrm{H}}+\cdots+\sigma_r u_r v_r^{\mathrm{H}}$$

四、正交相抵

$A_{m\times n},B_{m\times n}$，若有酉矩阵 $U_{m\times m}$ 及 $V_{n\times n}$，使 $U^H AV = B$，

称A与B正交相抵。

性质：(1) A与A正交相抵；

(2) A与B正交相抵$\Rightarrow$$B$与$A$正交相抵；

(3) A与B正交相抵，B与C正交相抵，

则A与C正交相抵

定理18： A与B正交相抵 $\Rightarrow \sigma_A = \sigma_B$

证明：$B = U^H AV \Rightarrow B^H B = \cdots = V^{-1}\left(A^H A\right)V$

$$\Rightarrow \lambda_{B^H B} = \lambda_{A^H A} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sigma_A = \sigma_B$$

例：$A^H = A \Rightarrow \sigma_A = \left|\lambda_A\right|$ $\qquad \because \lambda_{A^H A} = \lambda_{A^2} = \left(\lambda_A\right)^2$

$A^H = -A \Rightarrow \sigma_A = \left|\lambda_A\right|$ $\qquad \because \lambda_{A^H A} = \lambda_{(jA)^2} = \left(j\lambda_A\right)^2$

$A^H = -A \Rightarrow \lambda_A$ 为0或纯虚数，$j\lambda_A$ 为实数

矩阵分解的应用

设方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解，则有

(1) $m=n$： $A=LU\Rightarrow Ly=b,\ Ux=y$

(2) $m=n$： $A=QR\Rightarrow Rx=Q^{\mathrm{T}}b$

(3) $A=UDV^{\mathrm{H}}\Rightarrow Dy=U^{\mathrm{H}}b\overset{\text{def}}{=}c,\ V^{\mathrm{H}}x=y$

$$D=\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix}$$ （隐含 $c_{r+1}=0,\cdots,c_m=0$）

通解为 $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ c_r/\sigma_r \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{bmatrix}$ （$k_1,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数）

$$x = Vy = \left(\frac{c_1}{\sigma_1}v_1 + \cdots + \frac{c_r}{\sigma_r}v_r\right) + (k_1 v_{r+1} + \cdots + k_{n-r}v_n)$$

[注] $k_1 v_{r+1} + \cdots + k_{n-r}v_n$ 是 $A_{m\times n}x = 0$ 的通解

因为 $A\left(\frac{c_1}{\sigma_1}v_1 + \cdots + \frac{c_r}{\sigma_r}v_r\right) = AV_1\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = U_1\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = [U_1 \mid U_2]c = b$

所以 $\frac{c_1}{\sigma_1}v_1 + \cdots + \frac{c_r}{\sigma_r}v_r$ 是 $A_{m\times n}x = b$ 的一个特解

作业

- P195 1、2、3、4
- P219 1、2、4 、7
- P220 8、9
- P225 1、2、3、4
- P233 1、2、4