Lógica Matemática

Aula 10: Quantificadores

Apresentação

Eventualmente, precisamos quantificar sentenças abertas. Dessa forma, nesta aula, faremos um breve estudo sobre os quantificadores e aprenderemos a negar uma proposição com os mesmos.

Objetivos

- Identificar e aplicar os quantificadores a sentenças abertas.
- Negar proposição com quantificadores.
- Determinar contraexemplos.

Introdução

QUANTIFICADOR UNIVERSAL (∀ x)

O símbolo (∀ x) pode ser lido como:

- Para todo x.
- Qualquer que seja x.

Exemplo

$\forall x \in N, x+1 \in N$. A sentença nos indica que para todo número natural a sua soma com 1 é sempre um número natural. Outra leitura é: Todo número natural admite sucessor,ou seja, existe um número natural consecutivo dele.

Exemplo

∀ x ∈ z se o último algarismo de x for 0 ou 5 , então x é divisível por 5.

A sentença define que todo número inteiro que termina pelo algarismo 0 ou 5 é sempre divisível por 5 , fato já bastante conhecido nosso.

Exemplo

{∀ x ∈ R, x^2+ x + 1 > 0} a proposição nos indica que para qualquer valor real do número **x** a expressão expressão **x^2+ x + 1** é sempre positiva. Podemos olhar para essa expressão como sendo uma função quadrática, **f(x) = x^2+ x + 1** e pode ser interpretada como: não importa o valor real de **x** que você atribua a função sempre assumirá um valor positivo, ou seja, nunca **f(x)** será negativo ou zero.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL (∃)

O símbolo (∃) pode ser lido como:

1. Existe x tal que.

2. Para algum elemento x.

Exemplo

∃ x ∈ Z; **x + 5 = 3**

A proposição acima nos indica que a equação x+5 = 3 no conjunto dos números inteiros admite solução. Quer dizer, existe um inteiro que, adicionado ao número 5, dá como resultado 3. Lógico que o número inteiro em questão é o -2.

∃ (x,y) ∈ Z x Z tal que **x + y = 3** e **x = 2y**

A proposição acima nos indica que existe um par de números inteiros ordenados de tal modo que a soma deles dois é igual a 3 e que o primeiro elemento é o dobro do segundo. Facilmente podemos constatar que esse par é (2,1). Se por acaso você encontrar dificuldade de identificar esse par é suficiente imaginar um sistema de duas equações: **x + y = 3 e x = 2y**. Fácil, não?

NEGAÇÃO DE PREPOSIÇÕES CONTENDO QUANTIFICADORES

Claro que os quantificadores podem ser precedidos do símbolo de negação. Por exemplo, no universo H dos seres humanos, as expressões:

(∀ x) (x fala alemão), ¬(∀ x)(x fala alemão)

(∃ x) (x tem 100 anos), ¬(∃ x) (x tem 100 anos)

São proposições, na linguagem comum, que se podem enunciar, respectivamente:

- "Toda a pessoa fala alemão".
- "Nem toda a pessoa fala alemão."
- "Alguma pessoa tem 100 anos."
- "Nenhuma pessoa tem 100 anos."

Valem, sempre, as equivalências a seguir:

$$\neg[(\forall x \in A)\ p(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in A)\ (\neg p(x))$$

$$\neg[(\exists x \in A)\ p(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ (\neg p(x))$$

Exemplo

A negação da proposição: "Todo morador do condomínio é boa pessoa" é a proposição.

Qual a negativa dessa proposição?

"Existe pelo menos um morador no condomínio que não é boa pessoa."

Exemplo

A negação da proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma que está reprovado."

Qual a negativa dessa proposição?

"Nenhum aluno da turma está reprovado."

Vamos dar uma olhada no que vem a ser um contraexemplo.

Em lógica, sempre que desejamos mostrar que algo nem sempre é verdade, basta apresentar um exemplo em que o fato não acontece.

Vamos apresentar alguns exemplos:

Exemplo

1) Todo número natural primo é ímpar.

Contraexemplo:
O número natural 2 é par e é um número primo.

2) (∀ x ∈ R)(|x| > 0)
Contraexemplo: O zero é um número real e o módulo dele é 0 e, portanto, não é positivo.

Portanto, para mostrarmos que uma proposição da forma (∀ x ∈ A) p(x) é falsa, basta mostrar que a sua negação (∃ x ∈ A) (¬p(x)) é verdadeira.

Vamos clarear nossas idéias!

Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

Clique nos botões para ver as informações.

(∀ x ∈ R) (|x| = x)

Solução: Falsa, pois |−5| = 5 ≠ −5

(∃ x ∈ R) (x^3 = x)

Solução : Verdadeira . Temos três valores reais que satisfazem essa equação são eles : x=0 ,x=-1 e x = 1. Para obtermos esses resultados é suficiente resolvermos a equação x^3-x=0 , que é equivalente a equação x (x − 1)= 0.

(∃ x ∈ R) (|x| = 0)

Solução: A proposição nos diz que existe um número real cujo módulo é zero. Isto é verdadeiro, o próprio zero.

(∀ x ∈ R) (x + 1 > x)

Solução: Verdadeira. Para constatarmos isso basta resolver a inequação x +1> x, que nos fornece 1 >0, que é sempre verdadeiro

(∃ x ∈ R) (x + 2 = x)

Solução : Basta resolver a equação e teremos : 2 = 0, portanto falsa

(∃ x ∈ R) (x^2 = x)

Solução : Falsa. Basta exibir um contra-exemplo. Por exemplo: **$2^2 \neq 2$**

Notas

Título modal [1]

Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos. Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos. Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos.

Título modal [1]

Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos. Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos. Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos.

Referências

SOUZA, João. Lógica para ciência da computação. Ed. Elsevier.

Próxima aula

- estudo dos quantificadores.

Explore mais