

# Curso: Engenharia Civil

DISCIPLINA: Estruturas de Concreto Armado II

Victor Machado da Silva, MSc  
victor.silva@professores.ibmec.edu.br

# Índice

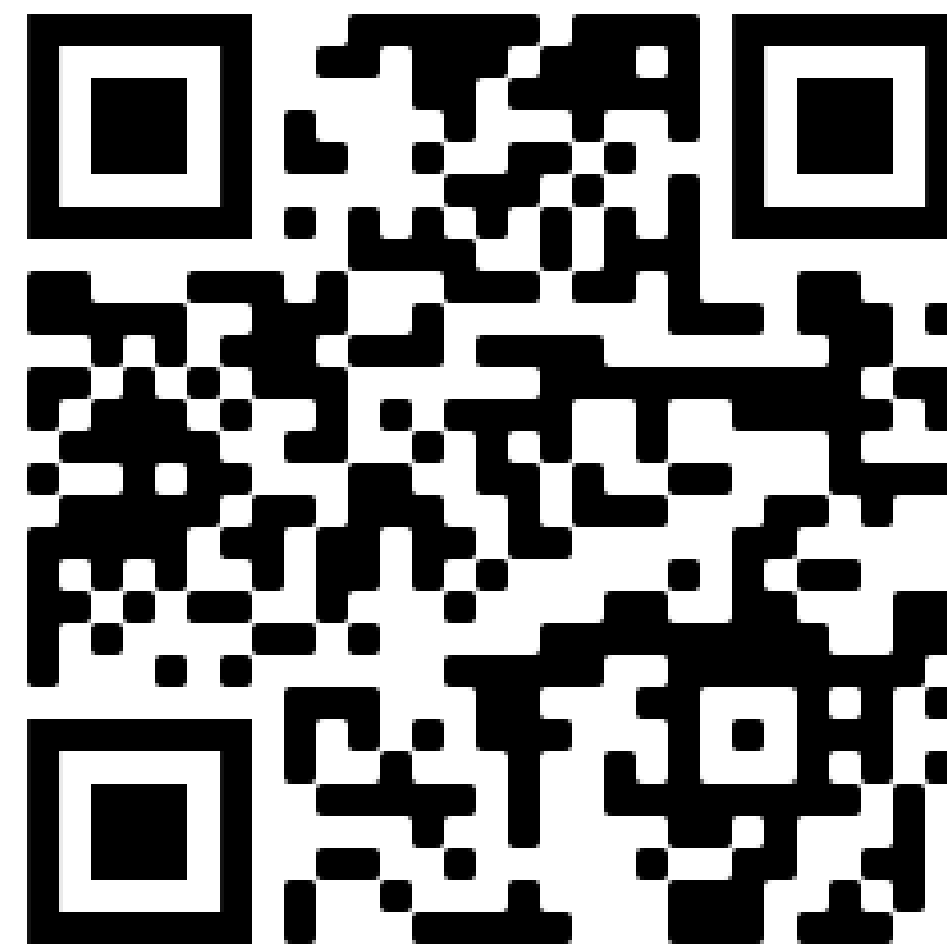
- [Apresentação do curso](#)
- [Introdução ao cálculo das lajes maciças](#)
- [Lajes armadas em uma direção](#)
- [Lajes armadas em cruz](#)
- [Detalhamento de lajes maciças](#)
- [Pilares](#)



# Apresentação do curso

# Apresentação do curso

- Contato: [victor.silva@professores.ibmec.edu.br](mailto:victor.silva@professores.ibmec.edu.br)
- Aulas às quartas-feiras, de 18:30 às 20:35
- Grupo no Whatsapp: <https://chat.whatsapp.com/CUk7YdTMTnoASFD6peX9I1>



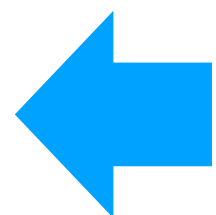
# Apresentação do curso

| Sem. | Data  | Tópico   |
|------|-------|--|
| 01   | 25/02 | Apresentação do curso; tipos de lajes em edifícios; classificação de lajes |
| 02   | 04/03 | Lajes armadas em uma direção: dimensionamento                              |
| 03   | 11/03 | Lajes armadas em cruz: dimensionamento                                     |
| 04   | 18/03 | Lajes maciças: classificação e dimensionamento – aplicação prática         |
| 05   | 25/03 | Lajes maciças: detalhamento  |
| 06   | 01/04 | Lajes maciças: detalhamento – aplicação prática                            |
| 07   | 08/04 | <b>SEM AULA (SEMANA AP1)</b>   |
| 08   | 15/04 | Atividade em grupo   |
| 09   | 22/04 | <b>SEM AULA (RECESSO TIRADENTES/SÃO JORGE)</b>                             |
| 10   | 29/04 | Pilares: análise e dimensionamento à flexocompressão reta                  |
| 11   | 06/05 | Pilares: análise e dimensionamento à flexocompressão oblíqua               |
| 12   | 13/05 | Pilares: análise e dimensionamento – aplicação prática                     |
| 13   | 20/05 | Pilares: esbeltez, flambagem e efeitos de segunda ordem                    |
| 14   | 27/05 | Pilares: disposições construtivas e detalhamento                           |
| 15   | 03/06 | <b>SEM AULA (CORPUS CHRISTI)</b>   |
| 16   | 10/06 | Pilares: disposições construtivas e detalhamento – aplicação prática       |
| 17   | 17/06 | Atividade em grupo   |
| 18   | 24/06 | <b>SEM AULA (SEMANA AP2)</b>   |
| 19   | 01/07 | <b>SEM AULA</b>  |
| 20   | 08/07 | <b>SEM AULA (SEMANA AS)</b>  |

# Apresentação do curso

## Avaliação

- Proporção:
  - Exercícios periódicos: 20%
  - Projeto (1ª parte – P1): 40%
  - Projeto (2ª parte – P2): 40%
- Detalhes do projeto:
  - Duplas ou trios
  - Duas entregas por parte: memória de cálculo e desenho técnico
- PS será uma prova com consulta, que substituirá a menor nota entre P1 e P2.



# Introdução ao cálculo das lajes maciças

# Introdução

O cálculo de lajes armadas em uma única direção respeita fielmente o comportamento de vigas com espessura de 100cm.

Os esforços solicitantes e as deformações nas lajes armadas em duas direções podem ser determinados por diferentes teorias.

A solução da equação geral das placas é tarefa muito complexa, o que motivou o surgimento de diversas tabelas, de diferentes origens e autores, com coeficientes que proporcionam o cálculo dos momentos fletores e das flechas para casos específicos de apoios e carregamentos.

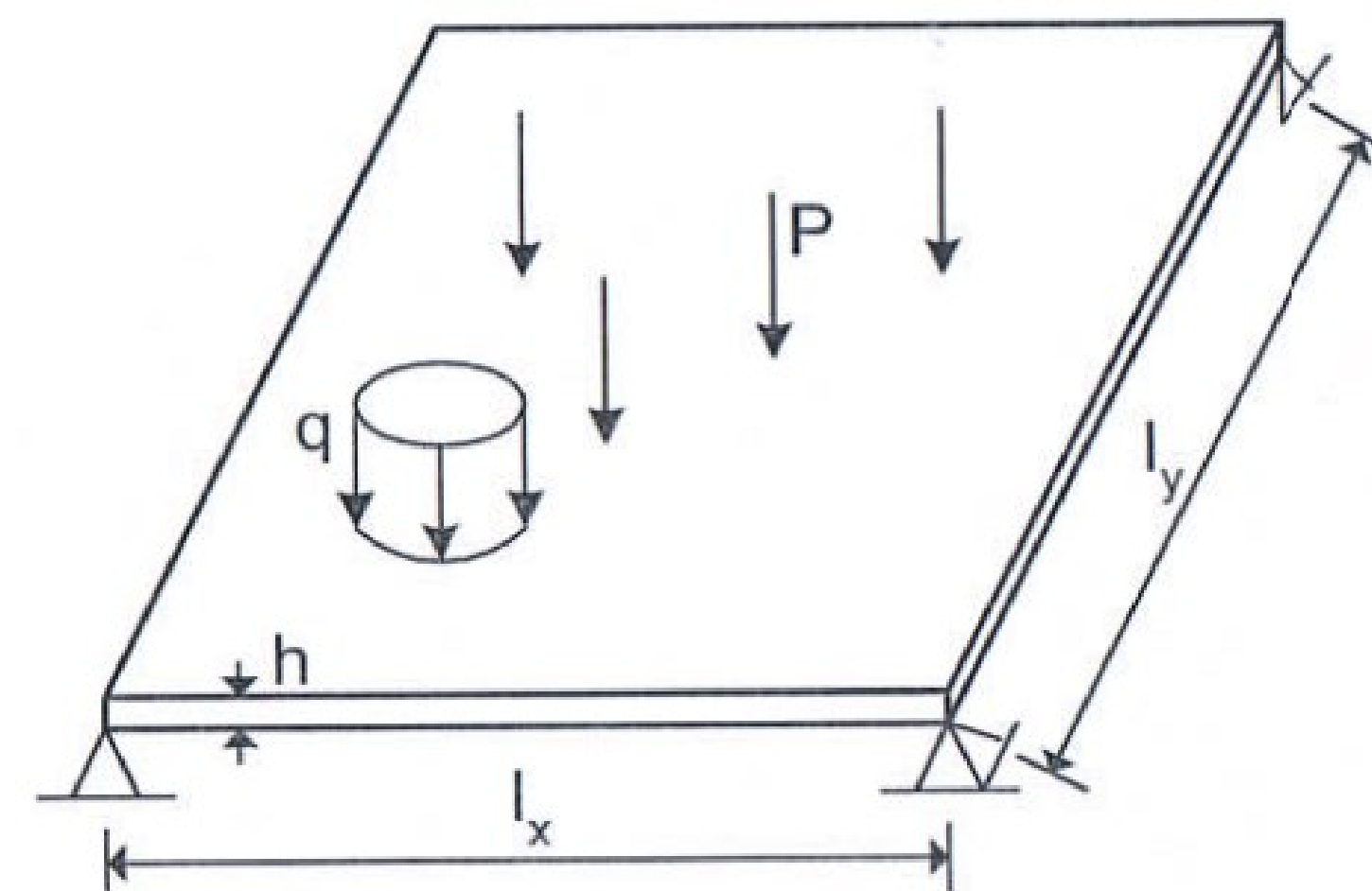


# Tipos usuais de lajes de edifícios

As lajes são os elementos estruturais que têm a função básica de receber as cargas de utilização das edificações, aplicadas nos pisos, e transmiti-las às vigas. As vigas transmitem as cargas aos pilares e, a partir destes, o carregamento é transferido para as fundações. Apesar de haver outras possibilidades de concepção, este é o modelo estrutural básico das edificações.

As lajes também servem para distribuir as ações horizontais entre os elementos estruturais de contraventamento, além de funcionarem como mesas de compressão das vigas T.

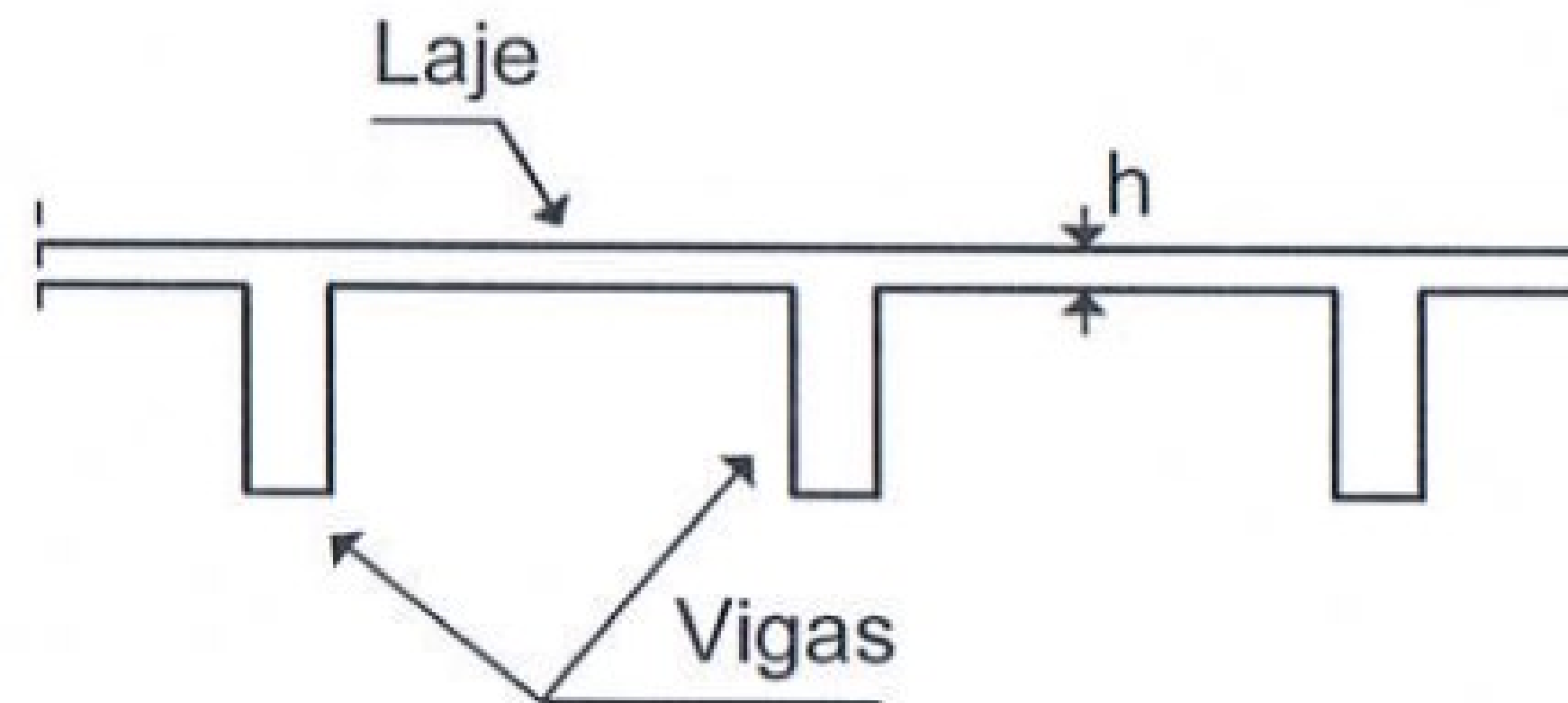
As lajes são elementos bidimensionais planos, cuja espessura  $h$  é bem inferior às outras duas dimensões ( $l_x$ ,  $l_y$ ), e que são solicitadas, predominantemente, por cargas perpendiculares ao seu plano médio.



# Tipos usuais de lajes de edifícios

## Lajes maciças:

- Placas de espessura uniforme, apoiadas ao longo do seu contorno.
- Os apoios podem ser constituídos por vigas ou por alvenarias, sendo este o tipo de laje predominante nos edifícios residenciais onde os vãos são relativamente pequenos.



# Tipos usuais de lajes de edifícios

## Lajes nervuradas:

- São empregadas para vencer grandes vãos, geralmente superiores a 8m, sendo constituídas por nervuras, onde são colocadas as armaduras longitudinais de tração.
- Dessa maneira, consegue-se uma redução do peso próprio da laje, já que se elimina uma parte do concreto que ficaria na zona tracionada, caso fosse adotada a solução em laje maciça.





# Tipos usuais de lajes de edifícios

## Lajes cogumelo:

- São apoiadas diretamente em pilares, resultando em um piso sem vigas.
- Nessas lajes, o topo do pilar possui um aumento de seção, denominado capitel, para aumentar a resistência à punção da laje.
- Quando o capitel não está presente, a laje é denominada laje lisa.





# Tipos usuais de lajes de edifícios

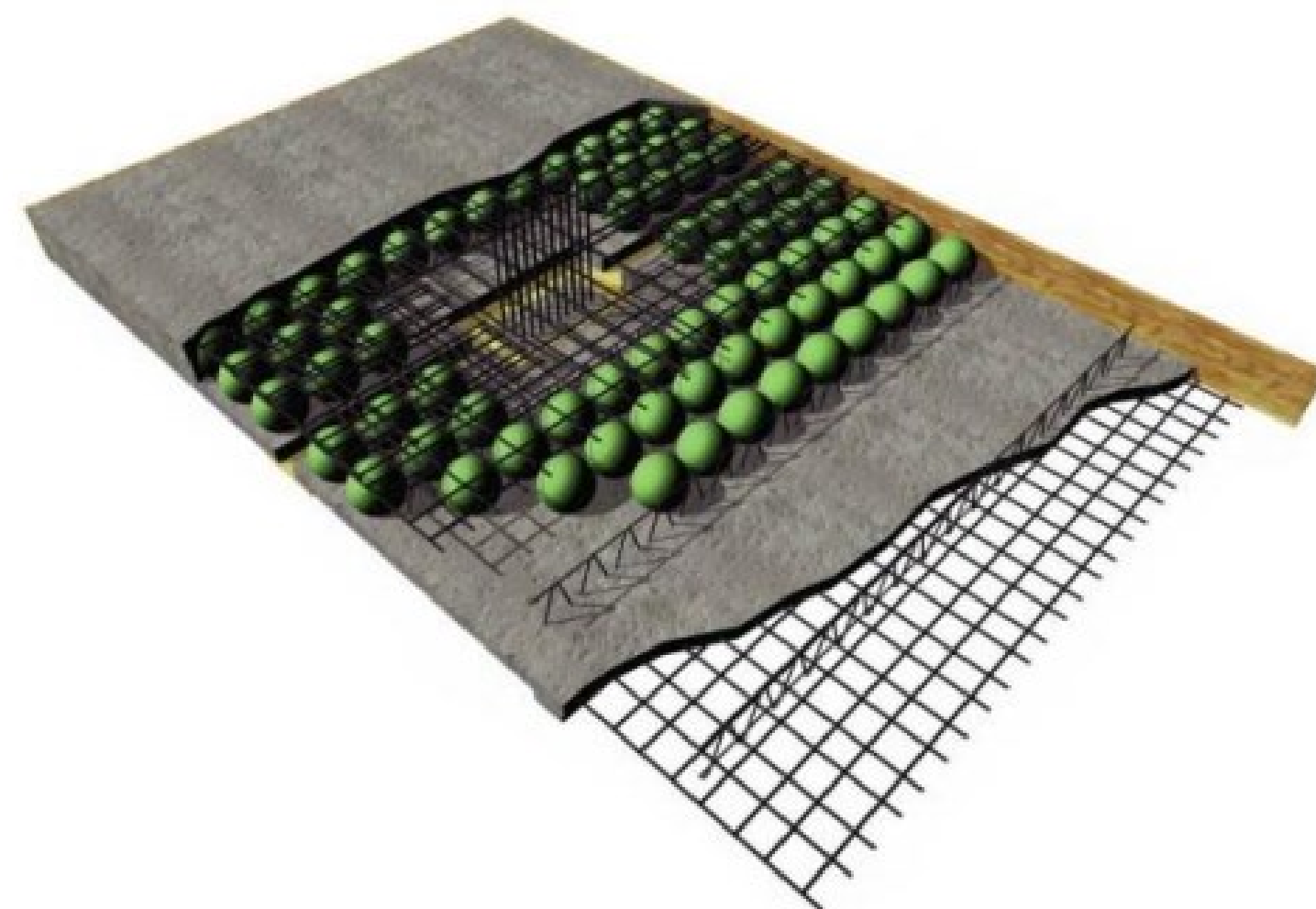




# Tipos usuais de lajes de edifícios

## *Lajes bubbledeck:*

- Lajes com vazios formados por esferas de polipropileno e posicionadas de modo uniforme entre telas metálicas e treliças.
- Dentre as vantagens, pode-se citar a diminuição do volume de concreto, a eliminação de vigas e paredes, o aumento do pé-direito, a dispensa do uso de formas e um ótimo isolamento acústico de térmico.

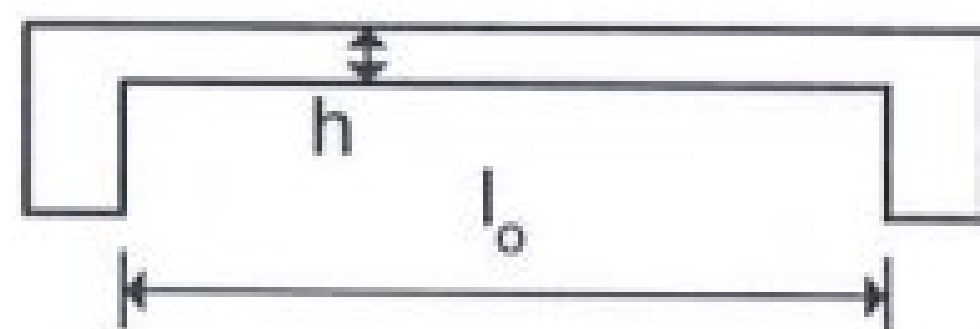


# Vãos teóricos das lajes

Vão teórico ou vão de cálculo,  $l$ , é a distância entre os centros dos apoios. Nas lajes em balanço, o comprimento teórico é o comprimento da extremidade livre até o centro o apoio. Entretanto, de acordo com a NBR6118, não é necessário adotar valores maiores que:

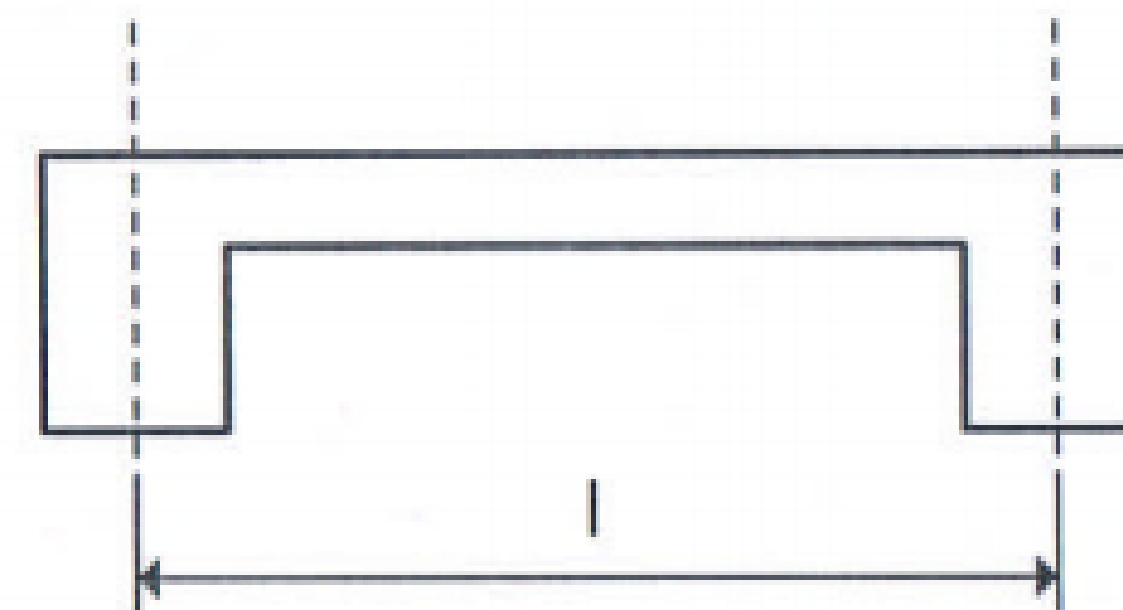
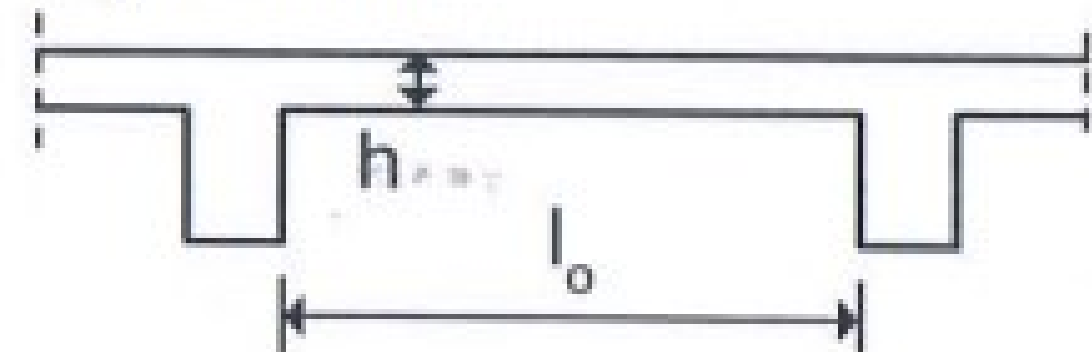
- Em laje isolada: o vão livre acrescido de 60% da espessura da laje;
- Em laje contínua: o vão livre acrescido de 60% da espessura da laje no painel considerado.

Laje isolada



$$l = l_0 + 0.6h$$

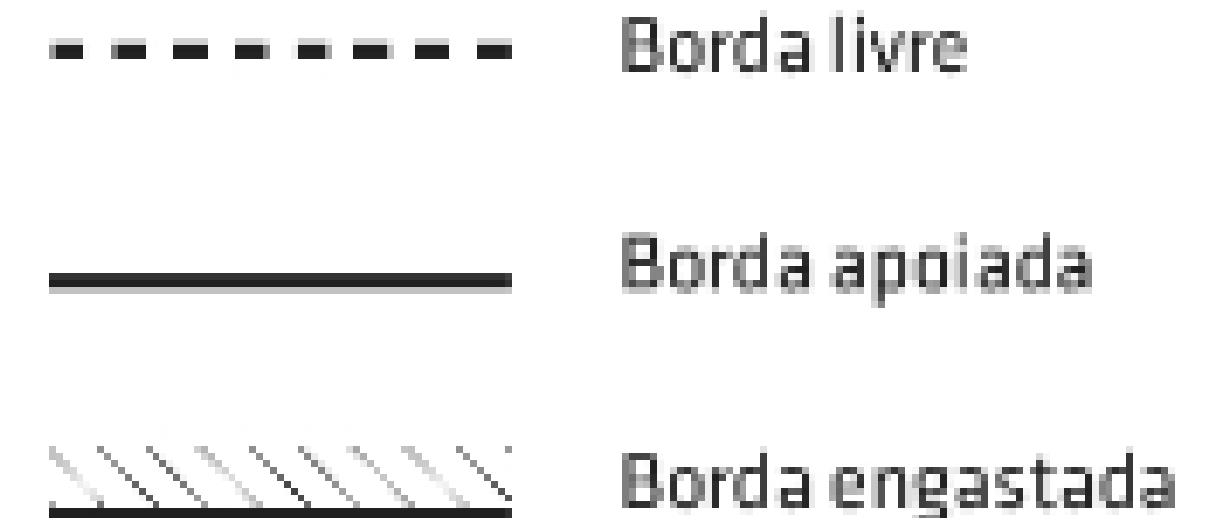
Laje contínua



# Condições de apoio

Quanto à determinação das condições de apoio de uma laje maciça, tem-se:

- Borda livre: não há suporte. Exemplo: lajes em balanço;
- Borda apoiada: há restrição dos deslocamentos verticais, no entanto, não há impedimento da rotação das lajes no apoio. Exemplo: vigas de apoio de rigidez normal;
- Borda engastada: há impedimento quanto ao deslocamento vertical e quanto à rotação no apoio. Exemplo: vigas de apoio de grande rigidez.

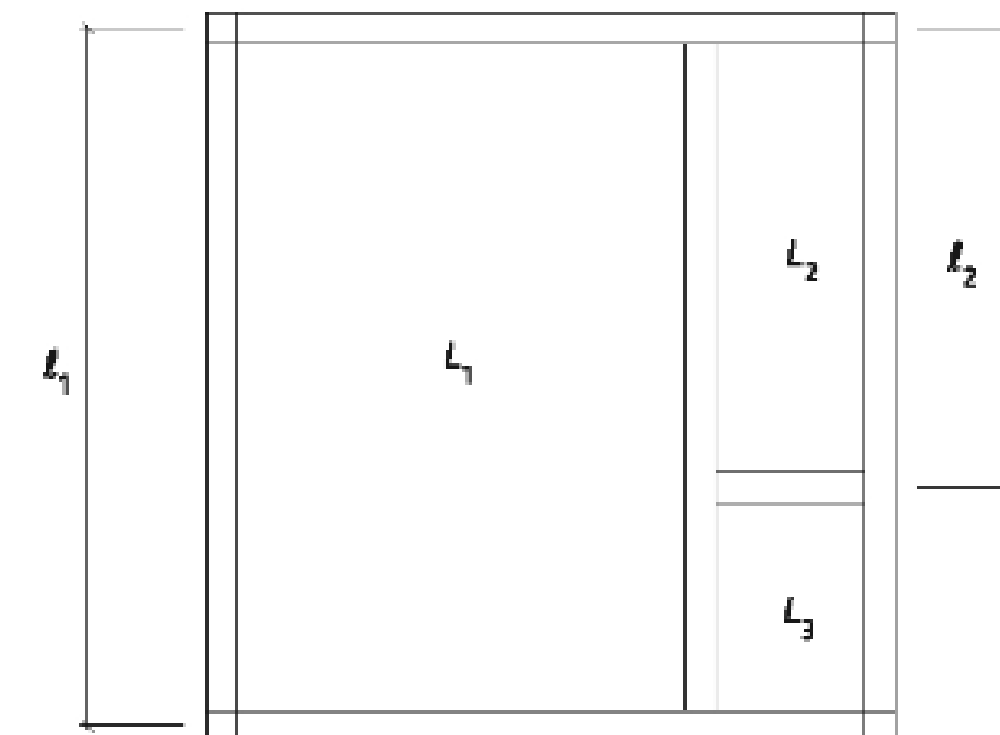
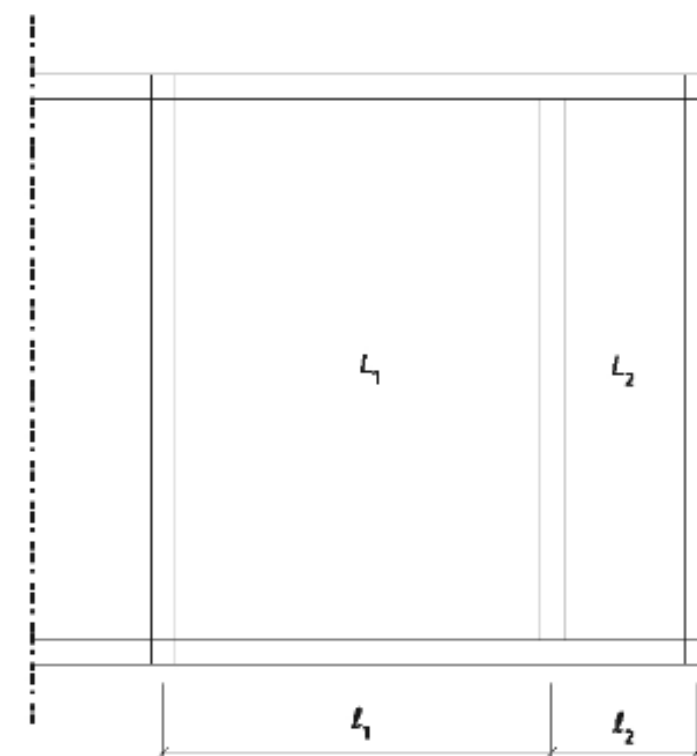




# Condições de apoio

Para que se possa considerar uma laje tenha uma borda engastada, devem-se observar as seguintes condições:

- Deve existir uma laje ao lado da analisada;
- A laje ao lado deve estar no mesmo nível da analisada;
- Havendo apenas uma laje ao lado ( $L_2$ ), esta deve ter comprimento no outro sentido não inferior a  $1/3$  do comprimento da laje em análise ( $L_1$ );
- Havendo uma laje ao lado ( $L_2$ ) que não seja do mesmo comprimento que a laje em análise ( $L_1$ ), esta é considerada engastada quando o comprimento engastado da laje adjacente ( $l_2$ ) for maior ou igual a  $2/3$  do comprimento da laje em estudo ( $l_1$ ).



# Classificação quanto ao tipo de armação

As lajes retangulares podem ser classificadas quanto ao tipo de armação como: armadas em cruz ou em duas direções (momentos fletores solicitam as duas direções), ou armadas em apenas uma direção (momentos fletores solicitam predominantemente apenas uma direção).

Observa-se que, mesmo nesse caso, a laje será armada nas duas direções. A diferença é que uma das armaduras é calculada e a outra (na direção do vão maior) é arbitrada.

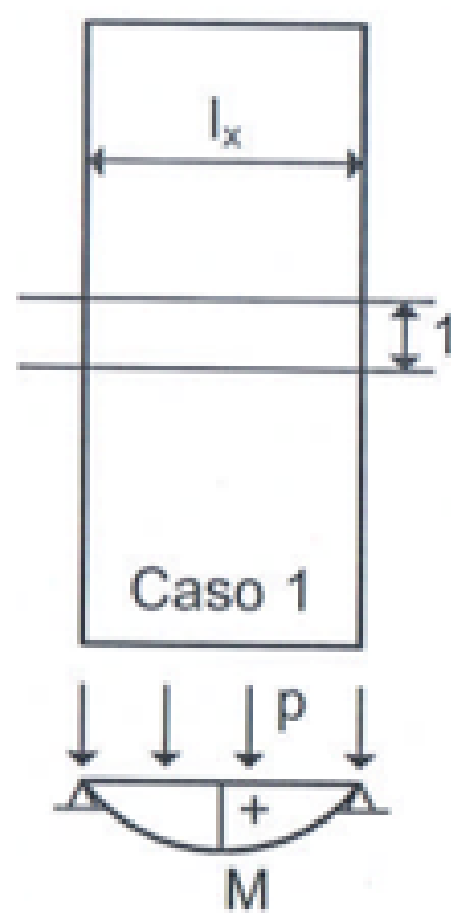
$$\begin{cases} \text{se } 0,5 \leq \frac{l_x}{l_y} \leq 2,0 \rightarrow \text{laje armada nas duas direções} \\ \text{se } \frac{l_x}{l_y} < 0,5 \text{ ou } \frac{l_x}{l_y} > 2,0 \rightarrow \text{laje armada em uma direção} \end{cases}$$



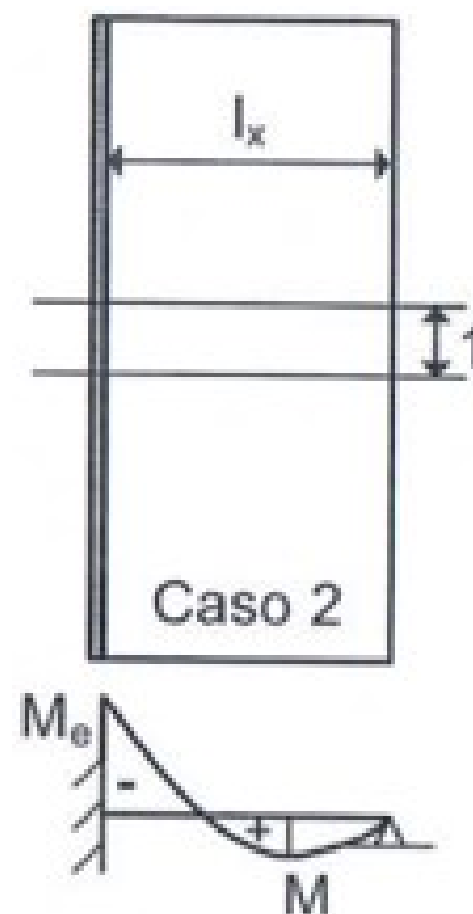
# Lajes armadas em uma direção

# Lajes isoladas armadas em uma direção

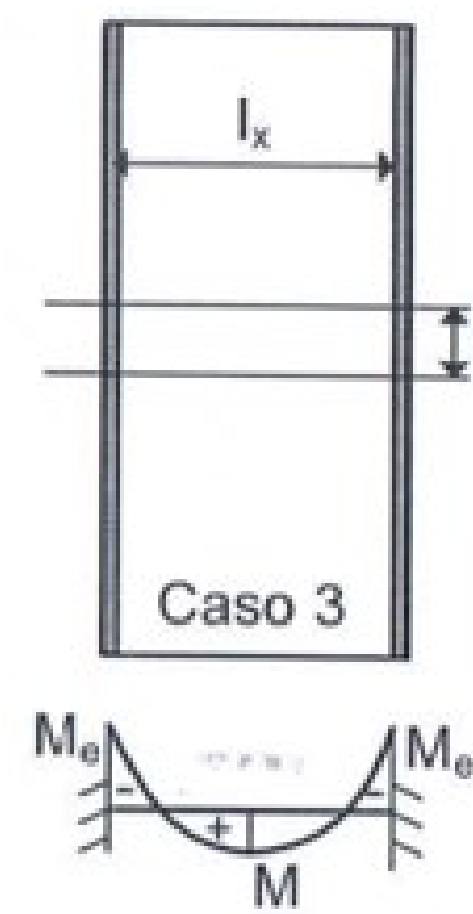
Nas lajes armadas em uma direção, apenas o momento fletor na direção do menor vão necessita ser calculado. Esse cálculo pode ser feito, de maneira simplificada e a favor da segurança, considerando-se uma faixa de largura unitária na direção do vão menor. O momento fletor nessa direção é obtido como para uma viga de largura unitária.



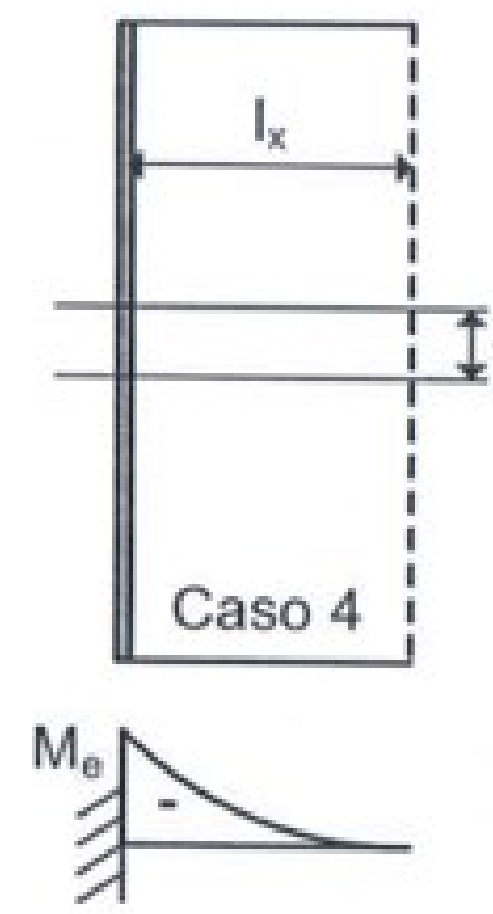
$$M = \frac{p \times l_x^2}{8}$$



$$M = \frac{p \times l_x^2}{14,22}$$
$$M_e = -\frac{p \times l_x^2}{8}$$



$$M = \frac{p \times l_x^2}{24}$$
$$M_e = -\frac{p \times l_x^2}{12}$$



$$M_e = -\frac{p \times l_x^2}{2}$$

# Lajes isoladas armadas em uma direção

Calcula-se a flecha no centro das lajes apoiadas, ou na extremidade livre das lajes em balanço, como para uma viga de largura unitária e vão  $l_x$ :

$$W_o = \frac{k}{384} \times \frac{p \times l_x^4}{D}$$

$D$  é a rigidez à flexão da laje, com  $h$ ,  $E_{cs}$  e  $\nu$  representando, respectivamente, a espessura da laje, o módulo de deformação secante e o coeficiente de Poisson do concreto:

$$D = \frac{E_{cs} \times h^3}{12 \times (1 - \nu^2)}$$

Por sua vez, o módulo de deformação secante é calculado como abaixo, com  $f_{ck}$  e o resultado dados em MPa:

$$E_{cs} = 0,85 \times 21500 \left( \frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{\frac{1}{3}}$$

# Lajes isoladas armadas em uma direção

Finalmente, o coeficiente de Poisson do concreto é usualmente calculado como  $\nu = 0,2$ , e o coeficiente  $k$  é dado na tabela abaixo:

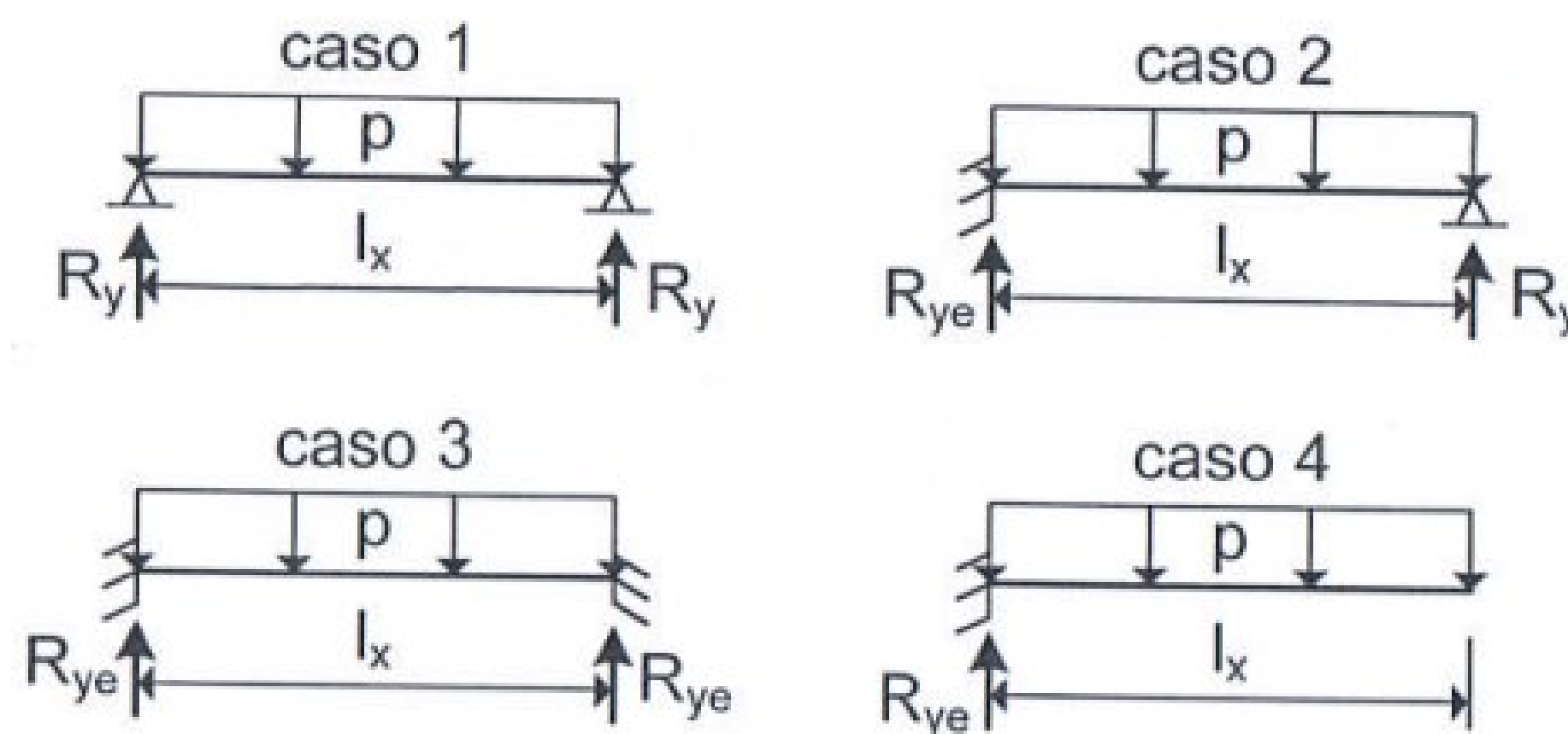
| Caso | k  | Local   |
|------|----|---------|
| 1    | 5  | Centro  |
| 2    | 2  | Centro  |
| 3    | 1  | Centro  |
| 4    | 48 | Extremo |

A expressão para o cálculo da flecha apresentada fornece a flecha inicial da laje. Essa expressão deve ser modificada para levar em conta a fluência do concreto, conforme será apresentado mais adiante neste curso.



# Lajes isoladas armadas em uma direção

As reações de apoio nos lados maiores podem ser calculadas de forma análoga, considerando a faixa de largura unitária na direção do menor vão. Essas reações são indicadas na sendo consideradas uniformemente distribuídas ao longo do lado  $l_y$ .



| Caso 1                         | Caso 2                                     | Caso 3                            | Caso 4                  |
|--------------------------------|--|-----------------------------------|-------------------------|
| $R_y = \frac{p \times l_x}{2}$ | $R_y = \frac{3 \times p \times l_x}{8}$    | $R_{ye} = \frac{p \times l_x}{2}$ | $R_{ye} = p \times l_x$ |
|                                | $R_{ye} = \frac{5 \times p \times l_x}{8}$ |                                   |                         |

# Lajes isoladas armadas em uma direção

Do ponto de vista de equilíbrio, não é necessário considerar nenhuma reação de apoio da laje nas vigas dispostas segundo o vão menor. Essas vigas podem nem mesmo existir em muitas situações.

Entretanto, se tais vigas existirem, é usual considerar algum carregamento para o dimensionamento das mesmas. Assim, as reações de apoio  $R_x$ , nos lados menores das lajes armadas em uma direção, podem ser avaliadas como:

$$R_x = \frac{p \times l_x}{4}$$

A reação  $R_x$ , considerada como uma carga uniformemente distribuída sobre as vigas de apoio, pode ser ignorada para o cálculo dos pilares, pois ela representa uma carga adicional.



# Lajes contínuas armadas em uma direção

Considera-se a laje contínua indicada na figura abaixo em que o vão  $l_y$  é superior ao dobro de todos os demais vãos da direção x. Logo, todos os painéis de lajes são armados na direção x.

Neste caso, a laje pode ser calculada como uma viga contínua de largura unitária. Entretanto, deve-se fazer um segundo cálculo, engastando os apoios intermediários. Nesse segundo cálculo, cada painel é considerado uma laje isolada.

Os momentos fletores positivos nos vãos a serem utilizados no dimensionamento da laje são os maiores valores obtidos nos dois cálculos.

Os momentos negativos são calculados considerando a laje como contínua.



# Lajes armadas em cruz

# Lajes armadas em cruz

As denominadas lajes armadas em cruz (ou nas duas direções) são aquelas em que a relação entre os vãos é inferior a 2.

Para essas lajes, o cálculo dos esforços deve ser feito levando-se em conta sua flexão biaxial, o que aumenta consideravelmente a complexidade do problema.

Diversos métodos de cálculo são disponíveis na bibliografia, porém este curso focará no processo de cálculo derivado da Teoria das Grelhas considerando vigas como apoios flexíveis. As tabelas adotadas neste curso foram adaptadas da série Curso de Concreto Armado, do engenheiro José Milton de Araújo.

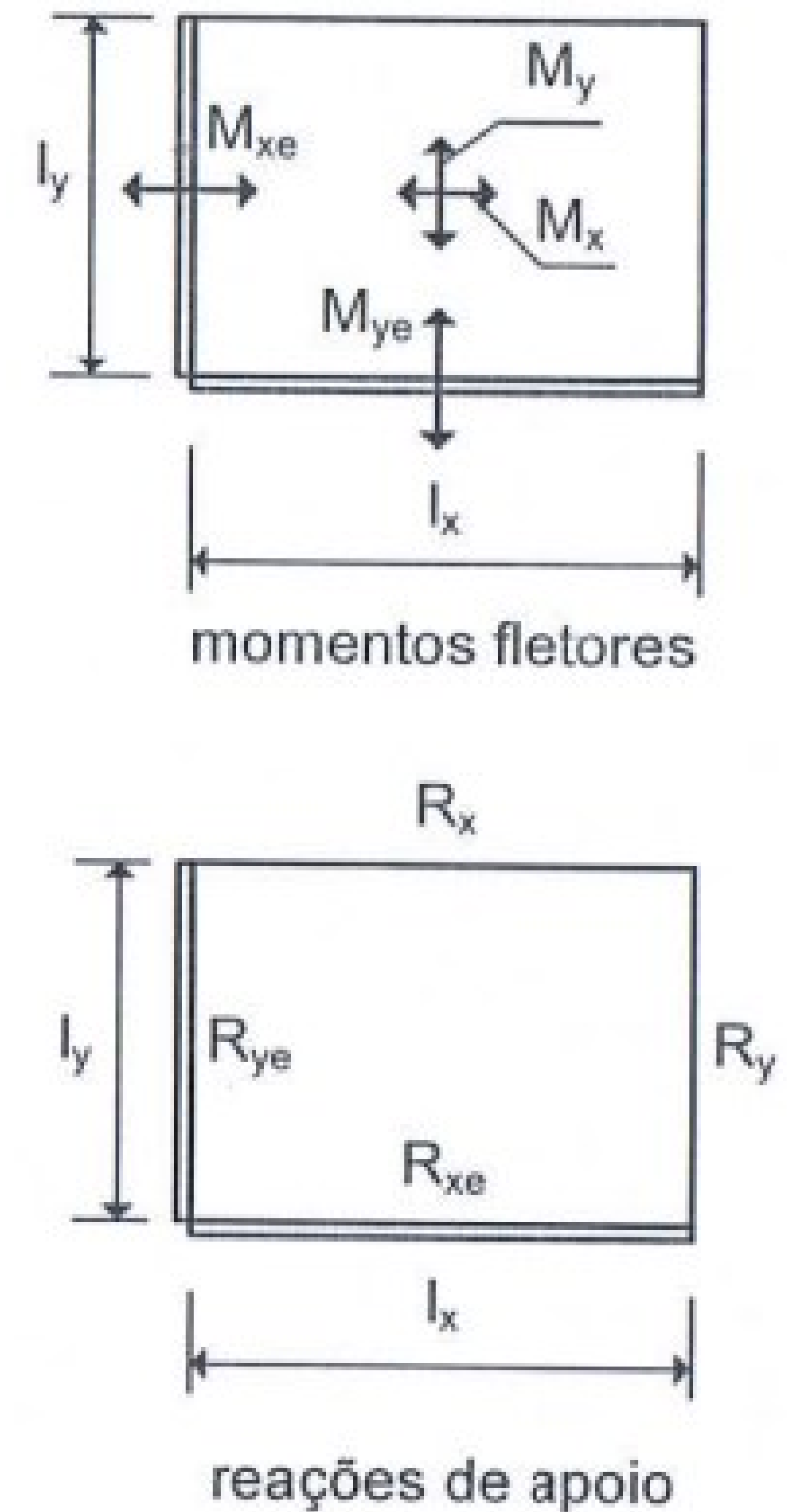
# Lajes armadas em cruz

Para o cálculo das reações de apoio, momentos fletores e flechas das lajes armadas em duas direções, são utilizadas tabelas que possibilitam a classificação da laje em tipos definidos com base na observação de suas condições de contorno.

As tabelas apresentadas neste curso correspondem a lajes retangulares apoiadas ao longo de todo o contorno (sem bordo livre), submetidas a uma carga  $p$  uniformemente distribuída. As tabelas fornecem coeficiente que permitem calcular a flecha no centro da laje, os momentos fletores positivos nos vãos, os momentos negativos nos bordos engastados e as reações de apoio. O parâmetro de entrada é a relação entre os lados  $\lambda = l_y/l_x$ . As tabelas foram elaboradas com base na Teoria das Grelhas. São apresentadas aqui as tabelas para lajes sobre apoios flexíveis.

# Lajes armadas em cruz

- $W_c \rightarrow$  flecha no centro da laje;
- $M_x, M_y \rightarrow$  momentos positivos no centro da laje nas direções dos vãos  $l_x$  e  $l_y$ , respectivamente;
- $M_{xe}, M_{ye} \rightarrow$  momentos negativos nos engastes nas direções dos vãos  $l_x$  e  $l_y$ , respectivamente;
- $R_x, R_y \rightarrow$  reação de apoio por unidade de comprimento nos lados  $l_x$  e  $l_y$ , respectivamente, quando estes lados forem apoios simples;
- $R_{xe}, R_{ye} \rightarrow$  reação de apoio por unidade de comprimento nos lados  $l_x$  e  $l_y$ , quando estes lados forem engastes.





# Lajes armadas em cruz

Quando não há necessidade de fazer distinção entre  $R_x$  e  $R_{xe}$ , as duas reações são denotadas por  $R_x$ . O mesmo é válido para  $R_y$  e  $R_{ye}$ .

Entrando nas tabelas com a relação entre os lados  $l_y/l_x$  obtêm-se os diversos coeficientes com os quais se calculam:

$$W_c = 0,001w_c \times \frac{p \times l^4}{D}$$

$$M_x = 0,001m_x \times p \times l_x^2; M_y = 0,001m_y \times p \times l_x^2; etc.$$

$$R_x = 0,001r_x \times p \times l_x; R_y = 0,001r_y \times p \times l_x; etc.$$

Observe que todos os valores são calculados com base no vão  $l_x$ , mesmo aquelas grandezas relacionadas ao vão  $y$ . Para identificar a relação entre  $l_x$  e  $l_y$ , veja as figuras que antecedem cada tabela. Para os casos 1, 4 e 6, considere que  $l_x$  é o menor dentre os dois vãos.

# Observação sobre os momentos negativos

Para os momentos de interface entre lajes, a NBR6118 permite que sejam adotados valores inferiores aos máximos calculados, uma vez que a análise das lajes como elementos contínuos apresentam momentos negativos inferiores àqueles calculados como se fossem isoladas, como foi o caso apresentado no exemplo.

Segundo a NBR6118, é possível adotar como momento negativo entre duas lajes contínuas o maior valor dentre:

- 80% do maior momento negativo entre as duas lajes naquele ponto;
- A média aritmética simples entre os momentos negativos das duas lajes.



# Detalhamento de lajes maciças



# Introdução

Após o cálculo dos esforços, o dimensionamento é feito conforme processo apresentado no cálculo de vigas. Por último, deve-se fazer o detalhamento das armaduras.

De um modo geral, o projeto não pode se limitar a um cálculo preciso das solicitações e das dimensões dos elementos estruturais. Além disso, devem ser tomadas algumas medidas que facilitem a execução, possibilitando uma maior uniformidade na concretagem da estrutura e uma adequada proteção das armaduras contra a corrosão. Assim, o detalhamento das armaduras torna-se uma etapa de fundamental importância no projeto estrutural. De um correto detalhamento, dependerá o sucesso ou o fracasso do projeto.

# Espessura mínima das lajes maciças

As lajes devem ser projetadas com uma espessura mínima suficiente para limitar suas deformações, além de evitar vibrações que causem desconforto aos usuários da edificação. Além disso, do ponto de vista construtivo, é conveniente que as lajes sejam projetadas com armadura simples, para evitar o uso de armadura superior ao longo dos vãos.

Segundo a NBR6118, a espessura das lajes maciças de concreto armado não deve ser menor que os seguintes limites:

- 7cm para lajes de cobertura não em balanço;
- 8cm para lajes de piso não em balanço;
- 10cm para lajes em balanço;
- 10cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30kN;
- 12cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30kN;
- 16cm para lajes listas e 14cm para lajes cogumelo.

# Espessura mínima das lajes maciças

Para as lajes em balanço com espessura  $h < 19\text{cm}$ , deve considerar o coeficiente adicional

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05h \geq 1,0$$

onde  $h \geq 10$  é a espessura da laje em cm.

O coeficiente  $\gamma_n$  deve majorar os esforços de cálculo finais, quando do dimensionamento das lajes em balanço.

# Cálculo de flechas em lajes

A NBR6118 estabelece diversos limites para os deslocamentos dos elementos estruturais, que são dependentes do dano que se quer evitar. Por exemplo, se o objetivo é evitar vibrações que possam ser sentidas no piso, a flecha devida à carga accidental não deve ultrapassar um determinado limite.

No caso dos edifícios residenciais e de escritórios, basta limitar a flecha provocada pela totalidade das cargas. Isto se deve ao fato de que a carga accidental é pequena em relação à carga permanente.

Assim, as flechas das lajes não devem ultrapassar o limite  $l/250$ , onde  $l$  é o menor vão da laje. Para lajes em balanço, como as marquises, a flecha na extremidade livre deve ser limitada a  $l/125$ , onde  $l$  é o comprimento do balanço.



# Cálculo de flechas em lajes

As flechas devem ser calculadas para a combinação quase permanente do carregamento, dada por:

$$p_o = g_k + \sum_{i=1}^n \psi_{2i} \times q_{ki}$$

onde  $g_k$  representa a soma das ações permanentes características e os coeficientes de combinação  $\psi_{2i}$  são definidos para as diversas ações variáveis características  $q_{ki}$ . A tabela abaixo apresenta os fatores de redução  $\psi_2$  para os casos mais comuns de ações variáveis.

| Ações variáveis   | $\psi_2$ |
|---|----------|
| Variações uniformes de temperatura  | 0,3      |
| Pressão dinâmica do vento   | 0,0      |
| Cargas acidentais dos edifícios quando não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas (edifícios residenciais) | 0,3      |
| Cargas acidentais dos edifícios, nos casos contrários (edifícios comerciais e de escritórios)   | 0,4      |
| Cargas acidentais em bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens   | 0,6      |

# Cálculo de flechas em lajes

No caso dos edifícios residenciais, tem-se:

$$p_o = g + 0,3q$$

onde se subentende que a carga permanente  $g$  e a carga acidental  $q$  são tomadas com seus valores característicos.

A flecha final,  $W_\infty$ , incluindo a fluência do concreto, pode ser obtida através da relação:

$$W_\infty = (1 + a_f) \times W_o$$

onde  $a_f$  é o coeficiente que considera a fluência do concreto e  $W_o$  é a flecha inicial calculada para a carga  $p_o$ , vista nos capítulos anteriores.

# Cálculo de flechas em lajes

Assim, para atender as exigências quanto ao estado limite de deformações excessivas, deve-se ter, considerando vigas infinitamente rígidas:

- $W_{\infty} \leq l/250$ , para lajes não em balanço;
- $W_{\infty} \leq l/125$ , para lajes em balanço.

No caso das lajes em balanço,  $l$  é o comprimento teórico e nos outros casos,  $l$  é o menor vão da laje.

No entanto, as flechas limites usadas para as lajes serão calculadas admitindo que uma parcela das flechas ocorrerá nas vigas, e não apenas nas lajes.

Assim, será admitido que o deslocamento se dê com dois terços ocorrendo na laje e um terço nas vigas de suporte da laje.

Dessa forma, o deslocamento máximo da laje deve ser inferior a  $2/3$  do limite prescrito pela norma ( $l/375$  para lajes que não estão em balanço e  $l/187,5$  para lajes em balanço).

# Verificação das flechas

## Consideração da fluência

- O cálculo do efeito da fluência deve ser feito considerando o tempo  $t_0$ , que representa a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.
- A favor da segurança, deve-se considerar que todas as ações devem atuar logo após a retirada do escoramento.
- Segundo o item 17.3.2.1.2 da NBR6118, a flecha adicional decorrente das cargas de longa duração em função da fluência pode ser calculada, de maneira aproximada, pela multiplicação da flecha imediata por um fator  $\alpha_f$ , dado por:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \times \rho'}$$

- $\rho'$  é um fator que depende da armadura comprimida. Como esse não tende a ser o caso para lajes, a expressão se reduz a:

$$\alpha_f = \Delta\xi$$



# Verificação das flechas

## Consideração da fluência

$$\alpha_f = \Delta\xi$$

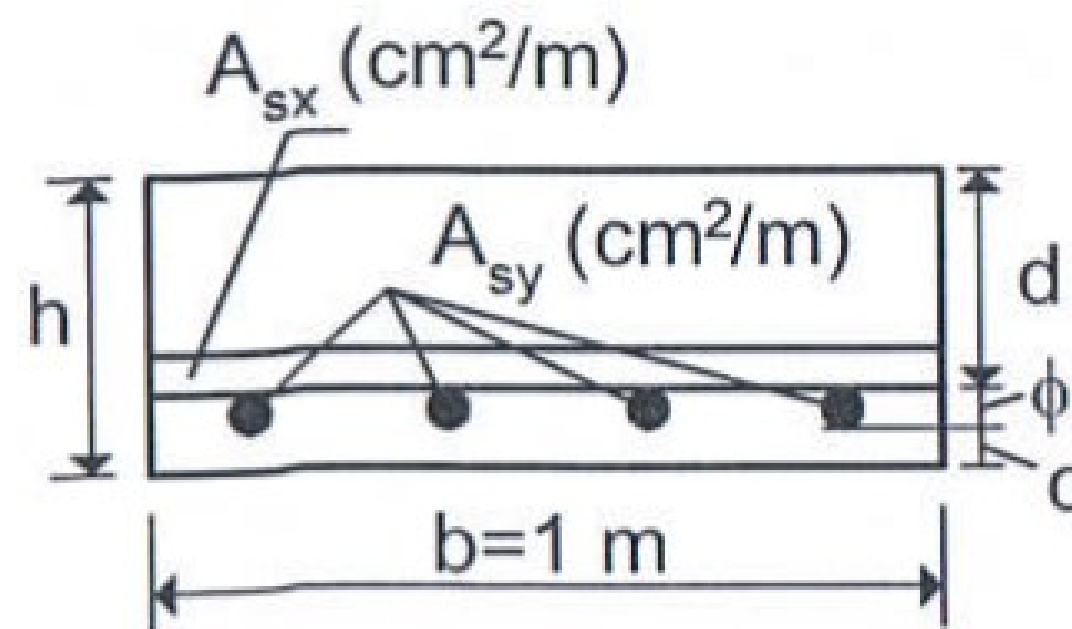
- $\Delta\xi \rightarrow$  coeficiente função do tempo, sendo  $\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0)$ ;
- $\xi(t) = \begin{cases} 0,68 \times 0,996^t \times t^{0,32}, & \text{para } t \leq 70 \text{ meses;} \\ 2 & \text{para } t \geq 70 \text{ meses} \end{cases}$ ;
- $t \rightarrow$  tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;
- $t_0 \rightarrow$  idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.
- Sendo assim, o valor da flecha total no tempo infinito, considerando uma flecha imediata  $w_{t,0}$  é dada por:

$$w_{t,\infty} = w_{t,0} \times (1 + \alpha_f)$$

# Cálculo das armaduras de flexão

O dimensionamento das armaduras de flexão é feito de acordo com a formulação apresentada no cálculo de vigas. Uma vez que os momentos fletores nas lajes são dados por unidade de comprimento, as armaduras são obtidas dimensionando-se uma seção retangulares de largura unitária e altura útil  $d$ .

$$d = h - \phi - \frac{\phi}{2} - c$$



| Classe de agressividade | I   | II  | III | IV  |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|
| Cobrimento nominal (cm) | 2,0 | 2,5 | 3,5 | 4,5 |

# Cálculo das armaduras de flexão

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \times d \times f_{cd}}; KX = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$$

$$KMD = 0,68KX - 0,272KX^2$$

$$KZ = \frac{z}{d} \rightarrow KZ = 1,0 - 0,4KX$$

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \times d \times f_s} \left[ \frac{cm^2}{m} \right]$$

# Cálculo das armaduras de flexão

| KMD    | KX     | KZ     | $\varepsilon_c$ | $\varepsilon_s$ | KMD    | KX     | KZ     | $\varepsilon_c$ | $\varepsilon_s$ |
|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|
| 0,0100 | 0,0148 | 0,9941 | 0,1502          | 10,000          | 0,1450 | 0,2354 | 0,9058 | 3,0787          | 10,000          |
| 0,0200 | 0,0298 | 0,9881 | 0,3068          | 10,000          | 0,1500 | 0,2445 | 0,9022 | 3,2363          | 10,000          |
| 0,0300 | 0,0449 | 0,9820 | 0,4704          | 10,000          | 0,1550 | 0,2537 | 0,8985 | 3,3991          | 10,000          |
| 0,0400 | 0,0603 | 0,9759 | 0,6414          | 10,000          | 0,1600 | 0,2630 | 0,8948 | 3,5000          | 9,8104          |
| 0,0500 | 0,0758 | 0,9697 | 0,8205          | 10,000          | 0,1650 | 0,2723 | 0,8911 | 3,5000          | 9,3531          |
| 0,0550 | 0,0837 | 0,9665 | 0,9133          | 10,000          | 0,1700 | 0,2818 | 0,8873 | 3,5000          | 8,9222          |
| 0,0600 | 0,0916 | 0,9634 | 1,0083          | 10,000          | 0,1750 | 0,2913 | 0,8835 | 3,5000          | 8,5154          |
| 0,0650 | 0,0996 | 0,9602 | 1,1056          | 10,000          | 0,1800 | 0,3009 | 0,8796 | 3,5000          | 8,1306          |
| 0,0700 | 0,1076 | 0,9570 | 1,2054          | 10,000          | 0,1850 | 0,3107 | 0,8757 | 3,5000          | 7,7662          |
| 0,0750 | 0,1156 | 0,9537 | 1,3077          | 10,000          | 0,1900 | 0,3205 | 0,8718 | 3,5000          | 7,4204          |
| 0,0800 | 0,1238 | 0,9505 | 1,4126          | 10,000          | 0,1950 | 0,3304 | 0,8678 | 3,5000          | 7,0919          |
| 0,0850 | 0,1320 | 0,9472 | 1,5203          | 10,000          | 0,2000 | 0,3405 | 0,8638 | 3,5000          | 6,7793          |
| 0,0900 | 0,1402 | 0,9439 | 1,6308          | 10,000          | 0,2050 | 0,3507 | 0,8597 | 3,5000          | 6,4814          |
| 0,0950 | 0,1485 | 0,9406 | 1,7444          | 10,000          | 0,2100 | 0,3609 | 0,8556 | 3,5000          | 6,1971          |
| 0,1000 | 0,1569 | 0,9372 | 1,8611          | 10,000          | 0,2150 | 0,3713 | 0,8515 | 3,5000          | 5,9255          |
| 0,1050 | 0,1653 | 0,9339 | 1,9810          | 10,000          | 0,2200 | 0,3819 | 0,8473 | 3,5000          | 5,6658          |
| 0,1100 | 0,1739 | 0,9305 | 2,1044          | 10,000          | 0,2250 | 0,3925 | 0,8430 | 3,5000          | 5,4170          |
| 0,1150 | 0,1824 | 0,9270 | 2,2314          | 10,000          | 0,2300 | 0,4033 | 0,8387 | 3,5000          | 5,1785          |
| 0,1200 | 0,1911 | 0,9236 | 2,3621          | 10,000          | 0,2350 | 0,4142 | 0,8343 | 3,5000          | 4,9496          |
| 0,1250 | 0,1998 | 0,9201 | 2,4967          | 10,000          | 0,2400 | 0,4253 | 0,8299 | 3,5000          | 4,7297          |
| 0,1300 | 0,2086 | 0,9166 | 2,6355          | 10,000          | 0,2450 | 0,4365 | 0,8254 | 3,5000          | 4,5181          |
| 0,1350 | 0,2174 | 0,9130 | 2,7786          | 10,000          | 0,2500 | 0,4479 | 0,8208 | 3,5000          | 4,3144          |
| 0,1400 | 0,2264 | 0,9094 | 2,9263          | 10,000          | 0,2509 | 0,4500 | 0,8200 | 3,5000          | 4,2778          |

# Cálculo das armaduras de flexão

$$A_{s,mín} = \rho_{mín} \times 100h \text{ (cm}^2\text{/m)}$$

| $f_{ck}$ (MPa) | Concretos do Grupo I |      |      |      |      |      |      |
|----------------|----------------------|------|------|------|------|------|------|
|                | 20                   | 25   | 30   | 35   | 40   | 45   | 50   |
| CA-50          | 0,15                 | 0,15 | 0,17 | 0,19 | 0,21 | 0,23 | 0,24 |
| CA-60          | 0,15                 | 0,15 | 0,15 | 0,16 | 0,18 | 0,19 | 0,20 |

| $f_{ck}$ (MPa) | Concretos do Grupo II |      |      |      |      |
|----------------|-----------------------|------|------|------|------|
|                | 55                    | 60   | 70   | 80   | 90   |
| CA-50          | 0,25                  | 0,26 | 0,27 | 0,29 | 0,30 |
| CA-60          | 0,21                  | 0,21 | 0,23 | 0,24 | 0,25 |

$$M_{k,mín} = \frac{A_{s,mín} \times f_{yd}}{\gamma_f} \times \left( d - \frac{A_{s,mín} \times f_{yd}}{2 \times b \times \sigma_{cd}} \right)$$



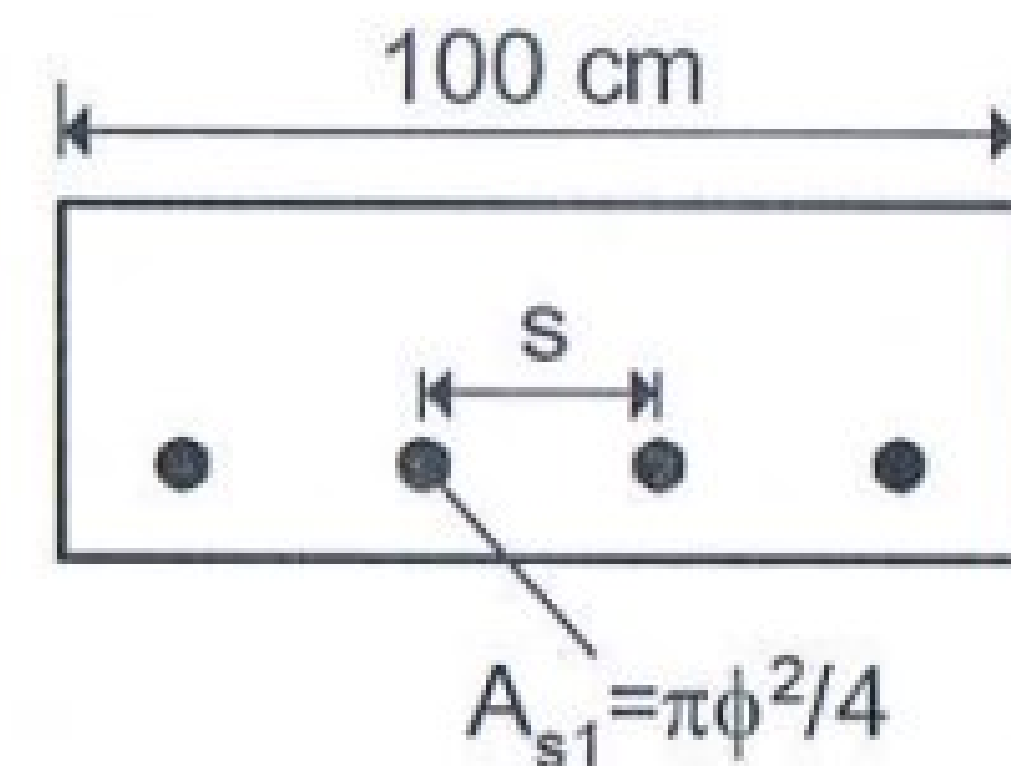
# Cálculo das armaduras de flexão

Obtidas as áreas de aço em cada direção, deve-se escolher um diâmetro para as barras e calcular o espaçamento necessário para que a armadura, disposta em uma faixa de 1m de largura, tenha a área calculada.

Se o espaçamento das barras é  $s$  centímetros, a área de aço existente em uma faixa de 1m é, em  $\text{cm}^2/\text{m}$ :

$$A_s = 100 \times \frac{\pi \times \phi^2}{4 \times s} = 100 \times \frac{A_{s1}}{s}$$

onde  $A_{s1}$  é a área da seção transversal de uma barra.





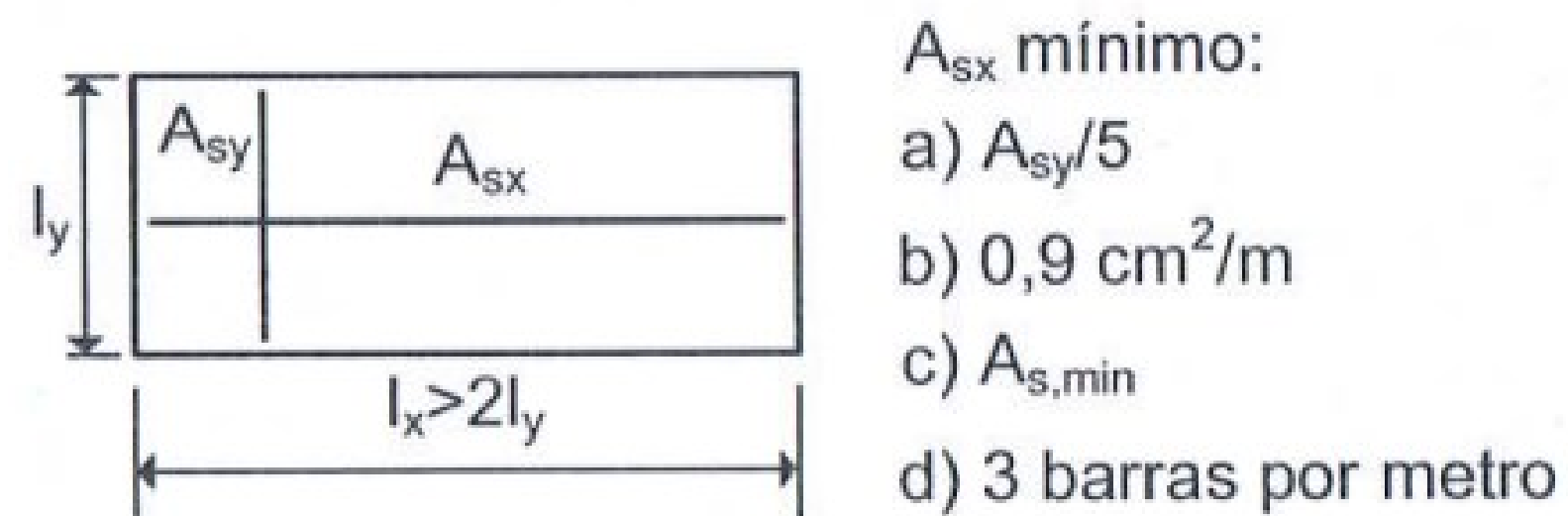
# Cálculo das armaduras de flexão

| Espaçamento |      | Bitola $\phi$ |      |      |       |       |
|-------------|------|---------------|------|------|-------|-------|
| s (cm)      | 4,2  | 5             | 6,3  | 8    | 10    | 12,5  |
| 7,5         | 1,85 | 2,62          | 4,16 | 6,70 | 10,47 | 16,36 |
| 10,0        | 1,39 | 1,96          | 3,12 | 5,03 | 7,85  | 12,27 |
| 12,5        | 1,11 | 1,57          | 2,49 | 4,02 | 6,28  | 9,82  |
| 15,0        | 0,92 | 1,31          | 2,08 | 3,35 | 5,24  | 8,18  |
| 17,5        | 0,79 | 1,12          | 1,78 | 2,87 | 4,49  | 7,01  |
| 20,0        | 0,69 | 0,98          | 1,56 | 2,51 | 3,93  | 6,14  |
| 22,5        | 0,62 | 0,87          | 1,39 | 2,23 | 3,49  | 5,45  |
| 25,0        | 0,55 | 0,79          | 1,25 | 2,01 | 3,14  | 4,91  |
| 30,0        | 0,46 | 0,65          | 1,04 | 1,68 | 2,62  | 4,09  |

# Outras prescrições da NBR6118

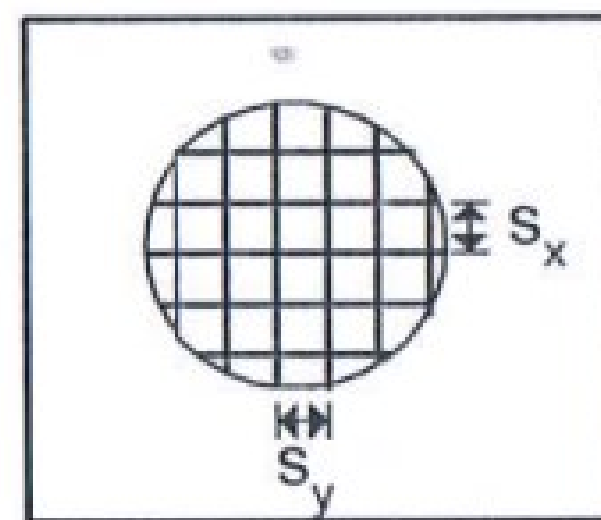
Segundo a NBR6118, o diâmetro das barras da armadura não deve ultrapassar 1/8 da espessura da laje.

A armadura de distribuição deve ser adotada conforme figura abaixo:



Regras de espaçamentos:

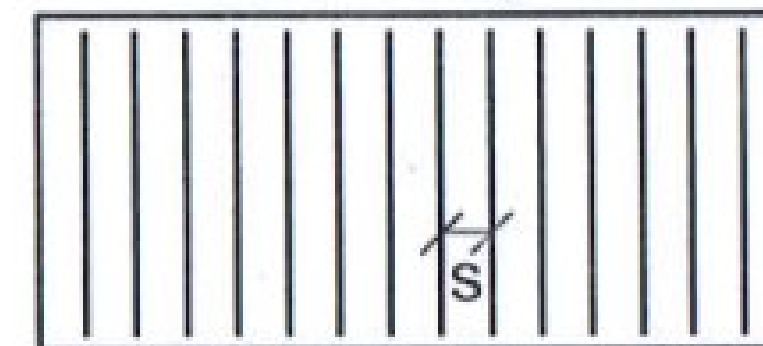
laje armada em cruz



$$s_x \leq s_{\text{max}}$$

$$s_y \leq s_{\text{max}}$$

laje armada em uma direção

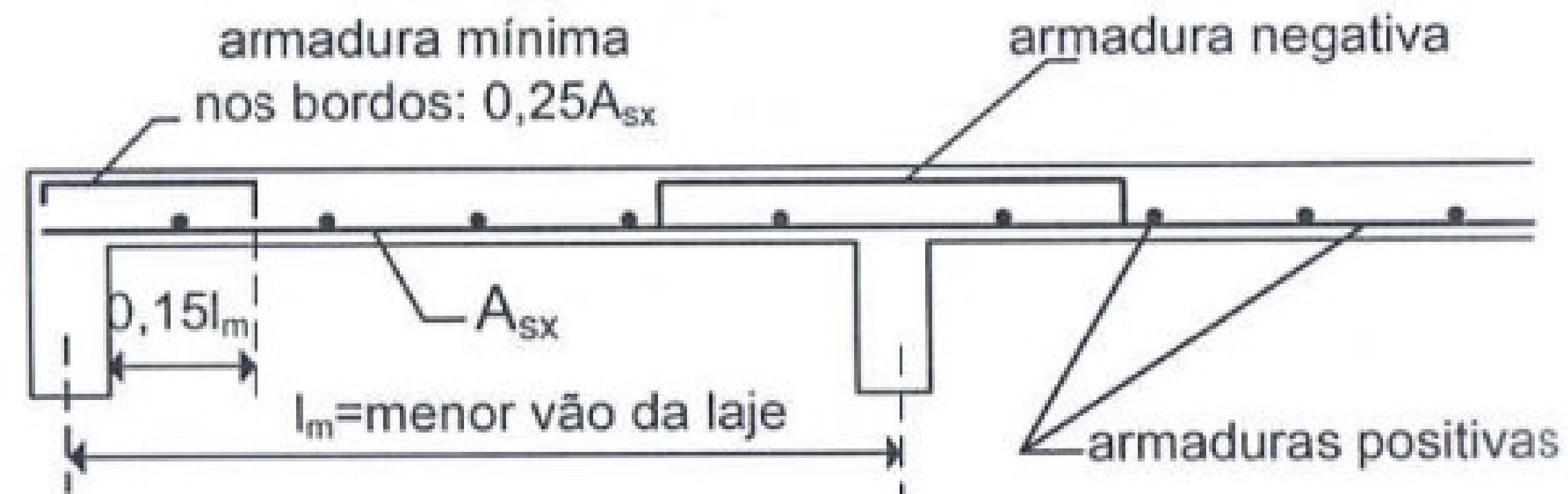


$$s \leq s_{\text{max}}$$

$$s_{\text{max}} = \text{menor valor entre } 20\text{cm e } 2h$$

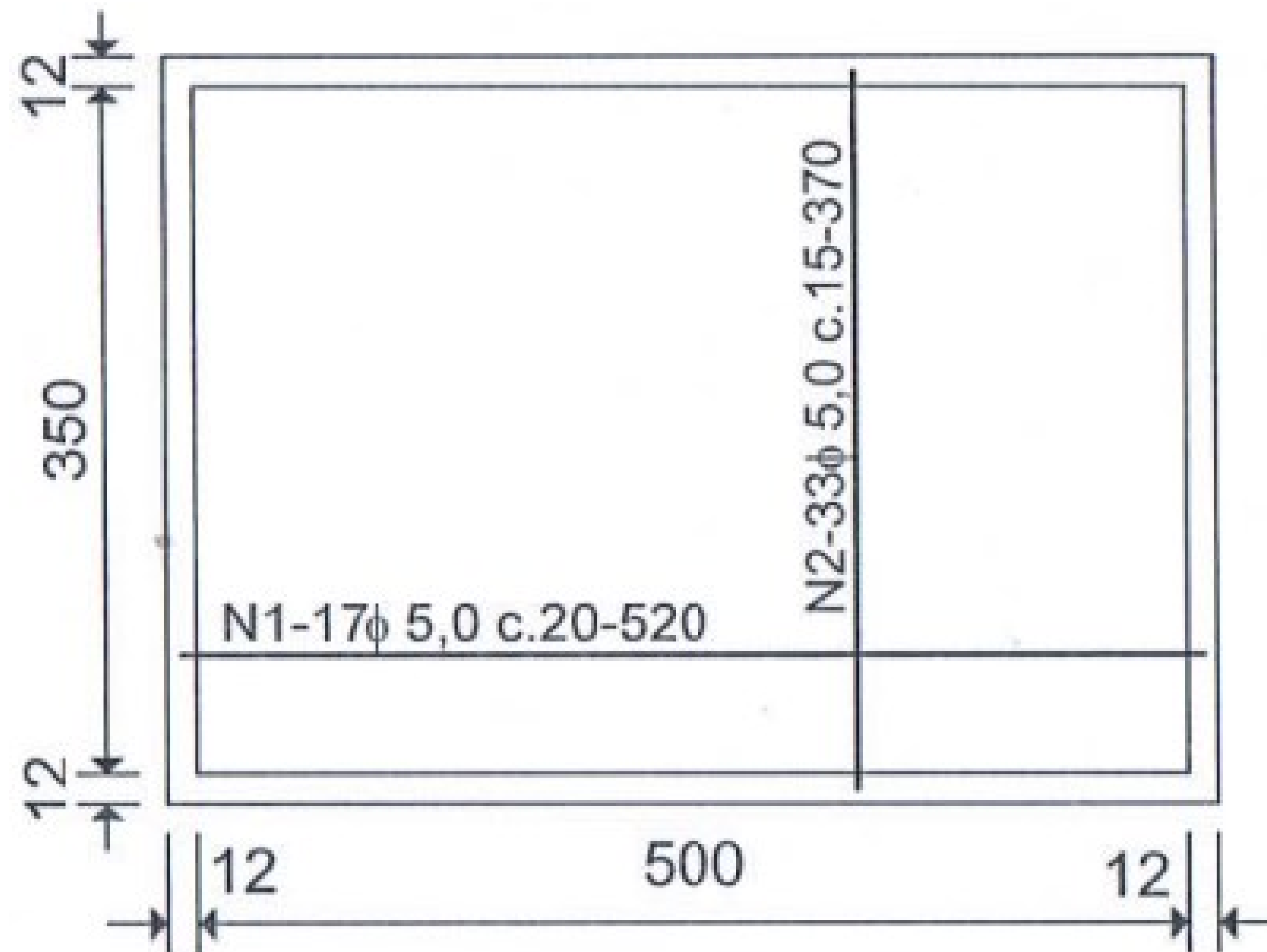
# Detalhamento das armaduras de flexão

As armaduras de flexão das lajes podem ser de dois tipos: as armaduras positivas, colocadas na face inferior, e as armaduras negativas, colocadas na face superior nas regiões de engastamento. Além disso, têm-se as armaduras de canto, colocadas nos cantos simplesmente apoiados, para absorver os momentos torçores.



# Detalhamento das armaduras de flexão

Ao detalhar as armaduras, é necessário especificar o número de barras, o diâmetro, o espaçamento e o comprimento das barras em cada direção da laje. Desse modo, o desenho de armaduras deve ser suficientemente claro para facilitar a compreensão do mesmo em obra.



# Detalhamento das armaduras de flexão

Os comprimentos das barras são iguais ao vão livre em cada direção acrescidos de 20cm.

A rigor, os comprimentos das barras devem ser determinados após o cálculo dos comprimentos de ancoragem nos apoios. Nas lajes isoladas, tem-se uma ancoragem em apoio de extremidade.

$$l_b = \frac{\phi}{4} \times \frac{f_{yd}}{f_{bd}} ; f_{bd} = \eta_1 \times \eta_2 \times \eta_3 \times f_{ctd}$$

- $\eta_1 \rightarrow 1,0$  para barras lisas (CA-25), 1,4 para barras entalhadas (CA-50) e 2,25 para barras de alta aderência (CA-60);
- $\eta_2 \rightarrow 1,0$  para situações de boa aderência, ou 0,7 para situações de má aderência;
- $\eta_3 \rightarrow 1,0$  para ferros de diâmetro menor que 32mm, e  $(132 - \phi)/100$  para ferros de diâmetro maior ou igual a 32mm;
- $f_{ctd} = 0,21 \times f_{ck}^{2/3} / 1,4$ .

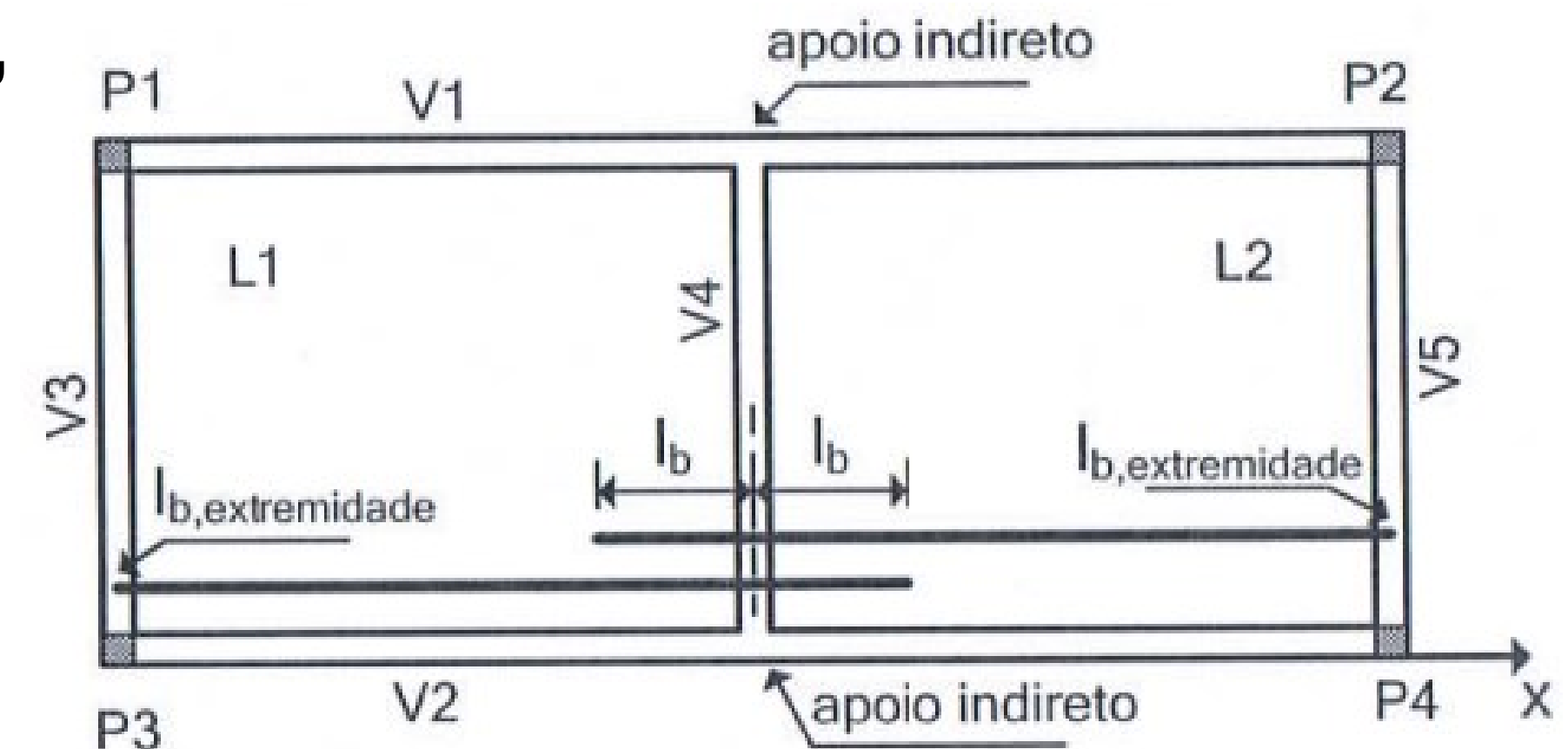


# Detalhamento das armaduras de flexão

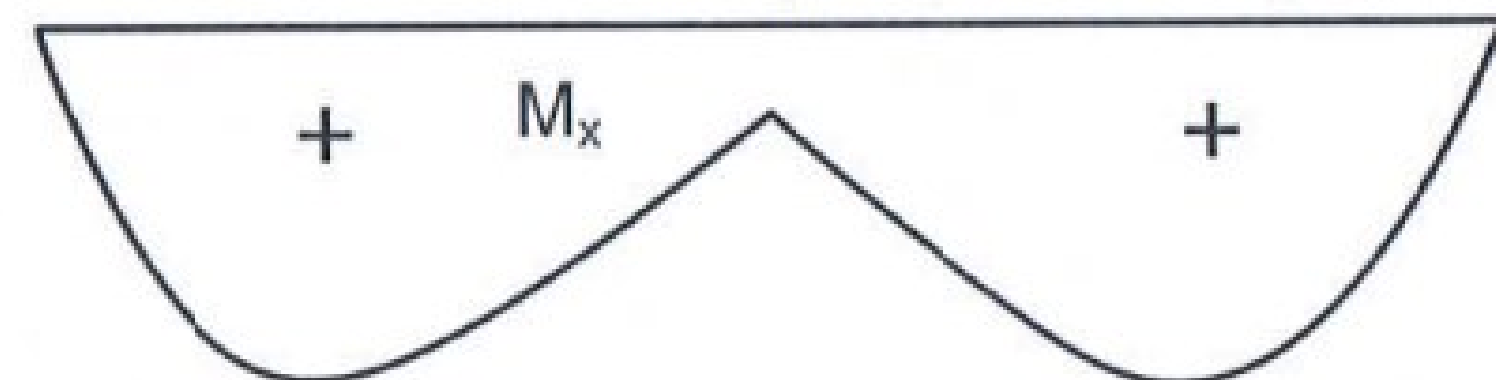
Deve-se ter um cuidado especial com as ancoragens das armaduras positivas das lajes contínuas apoiadas em vigas flexíveis. Dependendo da rigidez das vigas e de suas condições de apoio, podem surgir momentos positivos nos apoios internos das lajes.

Se as vigas V1 e V2 não forem rígidas o bastante, o momento negativo da laje sobre a viga V4, sofrerá uma grande redução em valor absoluto, podendo ficar até positivo.

Neste caso, as armaduras positivas das duas lajes devem ser ancoradas além do eixo da viga V4, para garantir uma emenda por traspasse das barras.



Momentos fletores na laje segundo a direção x



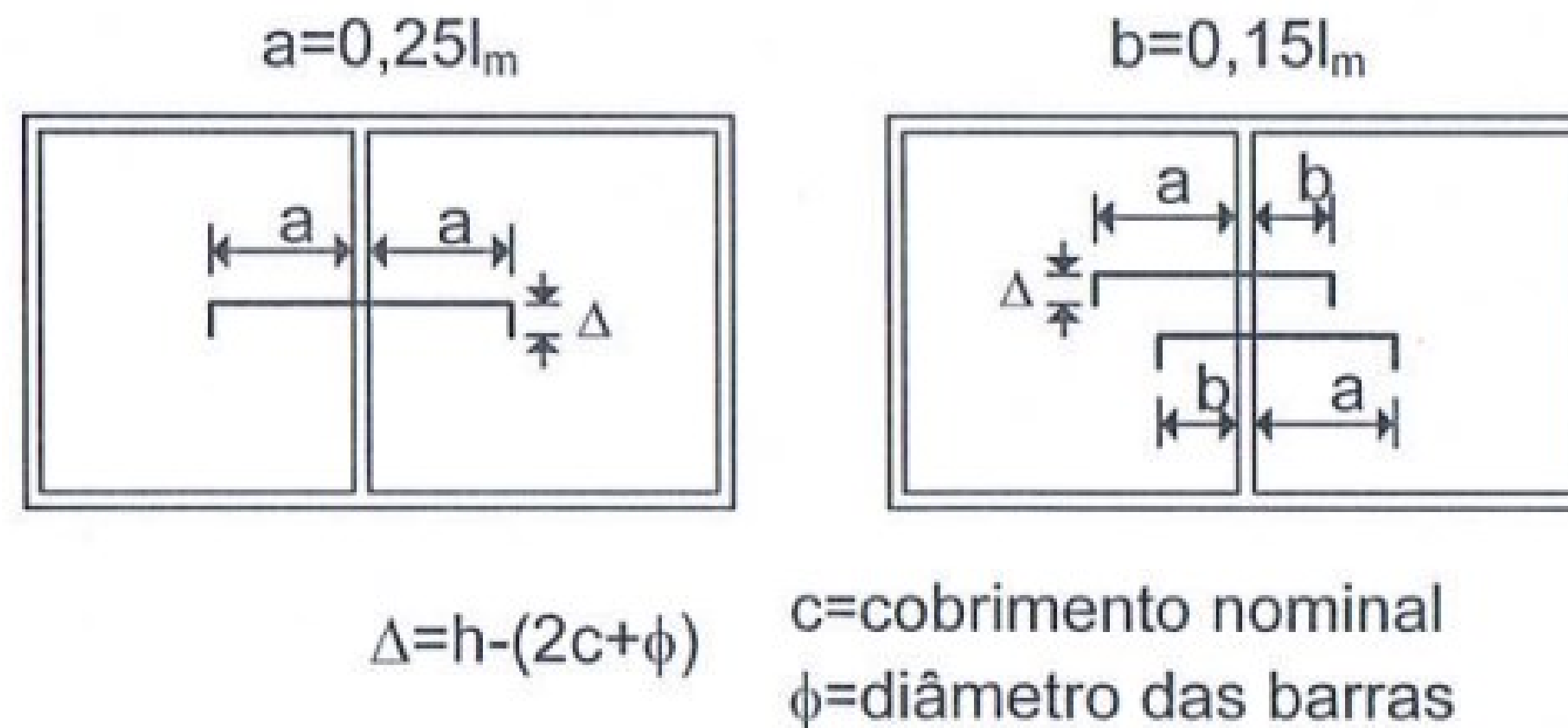
momento fletor positivo no apoio interno



# Detalhamento das armaduras de flexão

Abaixo indicam-se os detalhamentos das armaduras negativas sobre os apoios internos das lajes contínuas. Nessa figura,  $l_m$  representa o maior dos vãos menores das lajes contíguas.

Deve-se observar que a solução com barras alternadas só poderá ser utilizada quando o espaçamento máximo for de 16,5cm, para que existam pelo menos três barras por metro ao longo do apoio. O comprimento dos ganchos é igual à espessura da laje menos duas vezes o cobrimento.



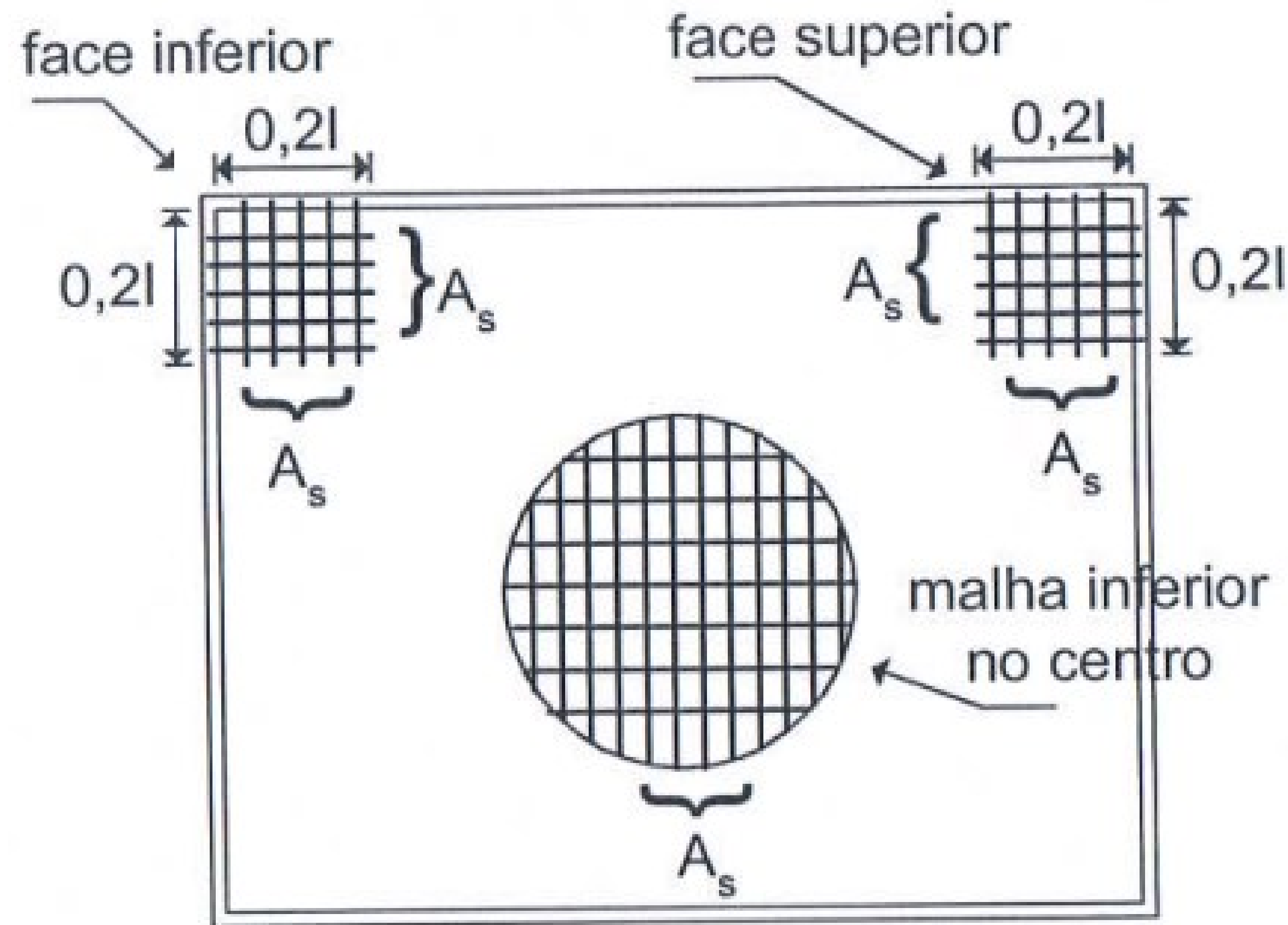
# Detalhamento das armaduras de flexão

Nos cantos onde concorrem dois bordos simplesmente apoiados é necessário colocar uma armadura especial, denominada armadura de canto. Além disso, na ausência ou insuficiência de sobrecarga, é necessário fazer uma ancoragem para evitar o levantamento dos cantos da laje. As barras dos cantos devem ser dobradas e ancoradas na parede ou na viga de borda para uma força  $R = 2M_{xy}$ .

Para facilitar a execução, adotam-se armaduras de canto em malha ortogonal, segundo as direções x e y. Essas armaduras devem se estender a partir das faces dos apoios, de uma distância igual a 1/5 do menor vão da laje.

Quando as armaduras de canto não forem calculadas, elas devem ter uma área da seção transversal igual à máxima armadura existente no centro da laje. A armadura principal inferior, já existente nos cantos, deve ser incluída na composição da armadura de canto inferior.

# Detalhamento das armaduras de flexão



$l$  = vão menor;  $A_s$  = maior armadura no centro



# Pilares

# Considerações iniciais sobre pilares

Em função dos esforços internos atuantes, os pilares podem estar solicitados por compressão normal centrada, flexão normal composta (flexocompressão) ou flexão oblíqua composta.

Podem assumir várias formas de seção transversal, sendo as mais comuns e usuais a seção quadrada, a retangular, a circular, a octogonal, a elíptica ou a associação das seções anteriores.

De acordo com o item 13.2.3 da NBR6118, a seção transversal de pilares e pilares-parede maciços, qualquer que seja a forma, não pode ser inferior a  $360\text{cm}^2$  ou possuir dimensão menor que 19cm.

# Armaduras para pilares

$$A_{s,mín} = \left( 0,15 \times \frac{N_d}{f_{yd}} \right) \geq 0,004A_c$$

$$A_{s,máx} \leq 0,08A_c$$

De acordo com o item 18.4.2 da NBR6118, quanto às barras longitudinais, deve-se ter, no mínimo, uma barra em cada vértice em seções poligonais e em seções circulares, pelo menos seis barras distribuídas ao longo do seu perímetro. Para barras longitudinais, tem-se:

$$\phi_L \begin{cases} \geq 10mm \\ \leq \frac{b}{8} \end{cases}$$

em que  $b$  é a menor dimensão externa da seção transversal do pilar.



# Armaduras para pilares

O espaçamento máximo entre os eixos das barras longitudinais ou entre os centros dos feixes ( $e_L$ ) deve obedecer às seguintes condições:

$$e_L \leq \begin{cases} 400mm \\ 2b \end{cases}$$

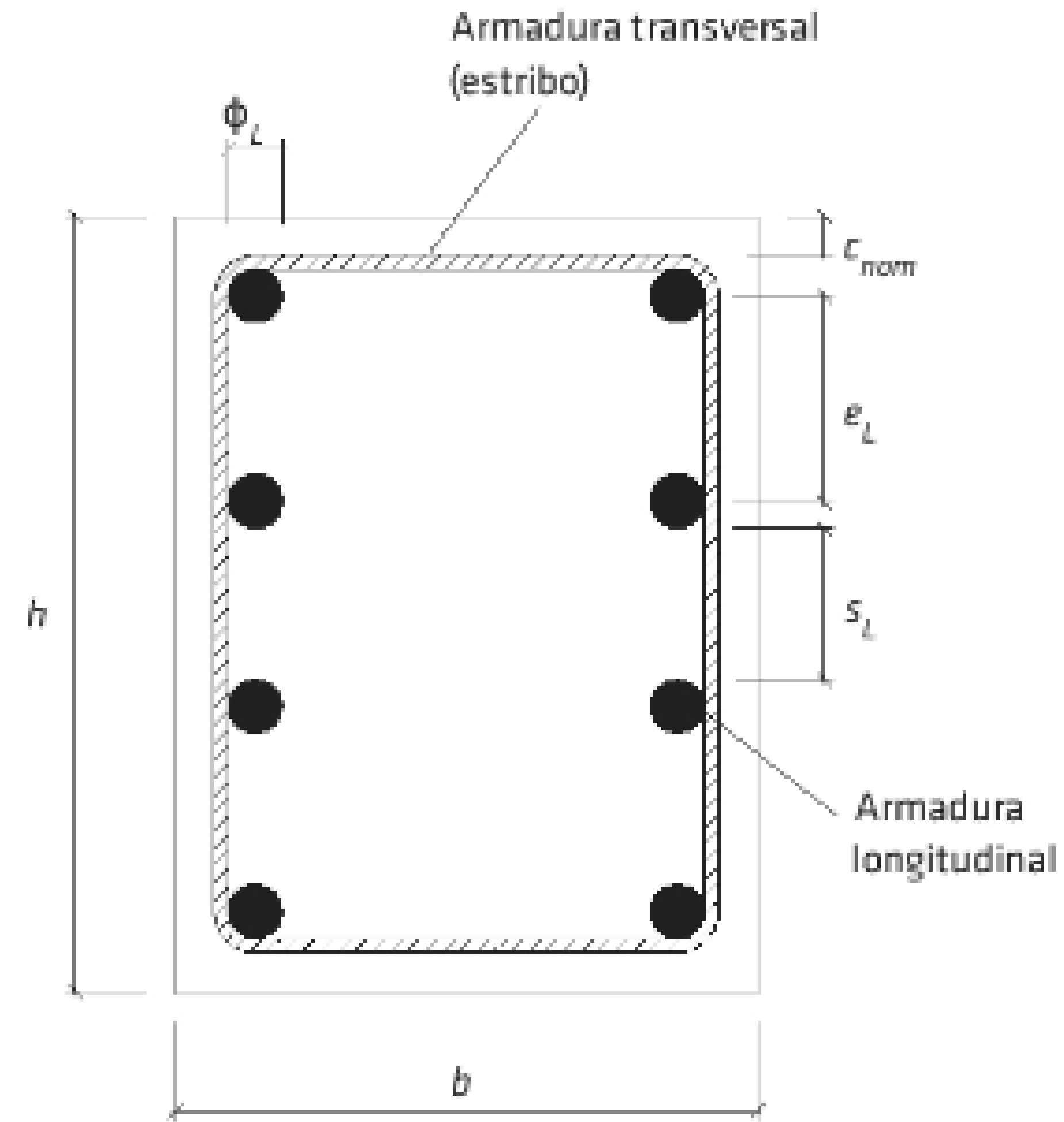
em que  $b$  é a menor dimensão da seção transversal do pilar.

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais ( $s_L$ ) deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

$$s_L \geq \begin{cases} 20mm \\ \phi_{barra}, \phi_{feixe}, \phi_{luva} \\ 1,2 \times d_{m\acute{a}x} \end{cases}$$

em que  $d_{m\acute{a}x}$  é a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

# Armaduras para pilares



# Armaduras para pilares

Para os estribos, deve-se ter em relação ao diâmetro o seguinte:

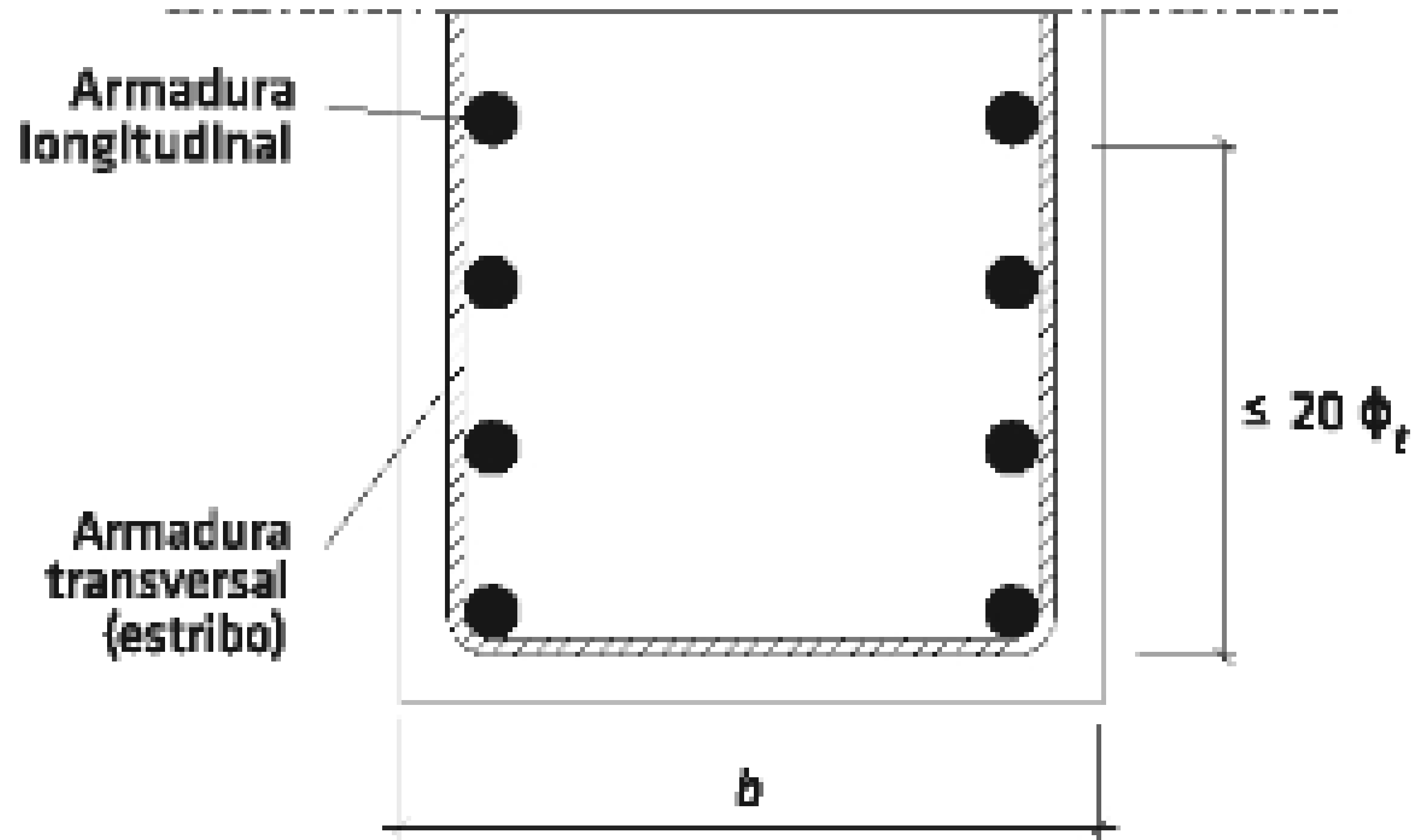
$$\phi_t \geq \begin{cases} 5mm \\ \frac{\phi_L}{4} \text{ ou } \frac{\phi_{feixe}}{4} \end{cases}$$

Em relação ao espaçamento entre os estribos, considerando-se a direção do eixo do pilar, tem-se:

$$e \leq \begin{cases} 200mm \\ b \\ 24\phi_L \text{ para } CA - 25 \text{ e } 12\phi_L \text{ para } CA - 50 \end{cases}$$

em que  $b$  é a menor dimensão da seção transversal do pilar.

# Armaduras para pilares



# Esbeltez e flambagem de pilares

O índice de esbeltez de peças comprimidas como os pilares é uma propriedade que relaciona o comprimento de flambagem da peça e o raio de giração da sua seção transversal, podendo ser definido por:

$$\lambda_x = \frac{l_{e,x}}{i_y} \quad \text{ou} \quad \lambda_y = l_{e,y}/i_x$$

em que:

- $\lambda \rightarrow$  índice de esbeltez da peça em relação ao eixo x ou y;
- $l_e \rightarrow$  comprimento equivalente do elemento comprimido (pilar) nas direções x ou y;
- $i \rightarrow$  raio de giração da seção transversal em relação ao eixo x ou y.



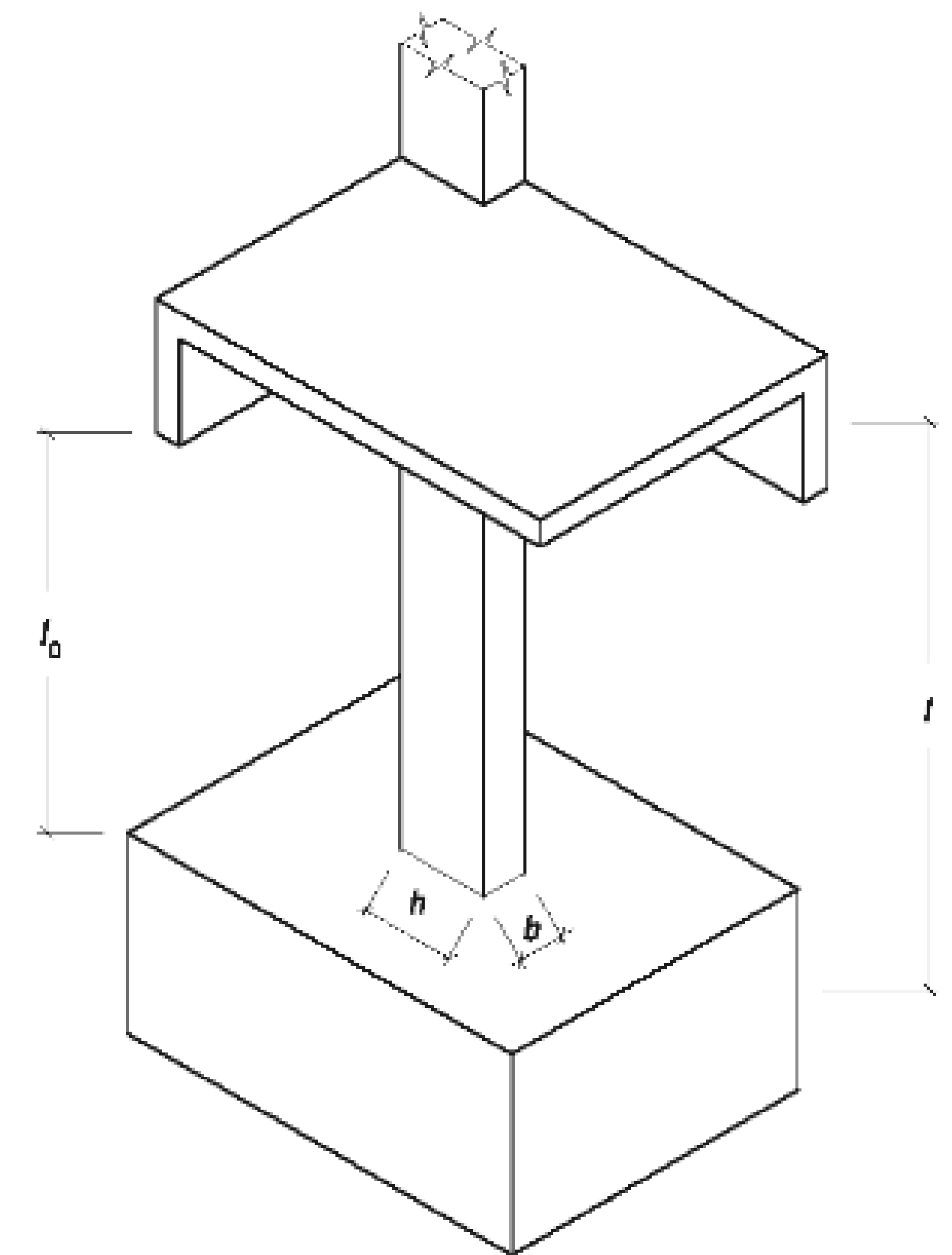
# Esbeltez e flambagem de pilares

Para o raio de giração, tem-se para as direções x ou y:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A_{seção}}}$$

em que:

- $I \rightarrow$  momento de inércia em x ou y;
- $A_{seção} \rightarrow$  área da seção transversal do pilar.



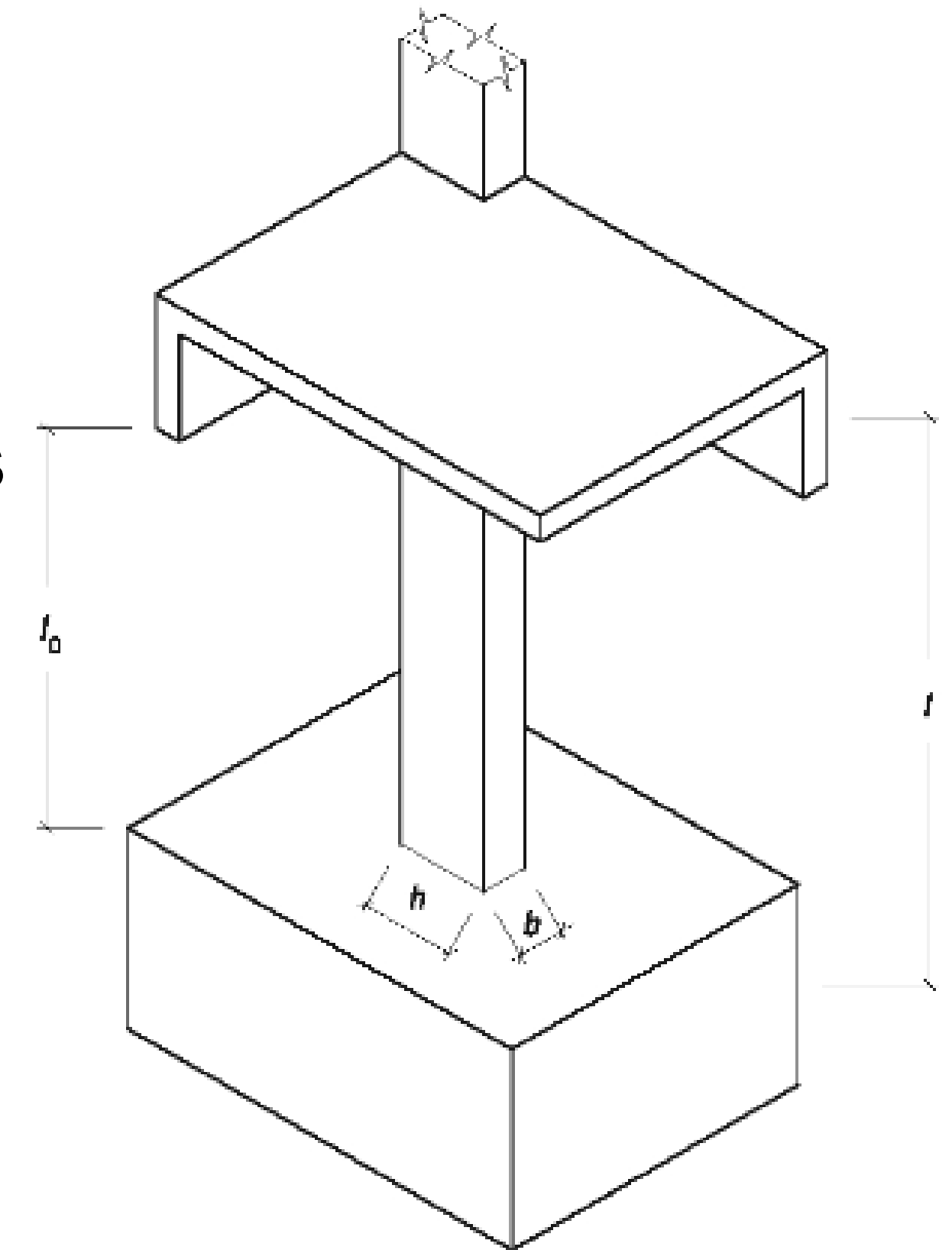
# Esbeltez e flambagem de pilares

O comprimento equivalente  $l_e$  deve ser calculado como:

$$l_e = \min(l_o + h; l)$$

onde:

- $l_o \rightarrow$  distância entre as faces internas dos elementos estruturais que vinculam o pilar;
- $h \rightarrow$  altura da seção transversal do pilar (maior dimensão da seção transversal);
- $l \rightarrow$  distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar (ou trecho dele) está vinculado.



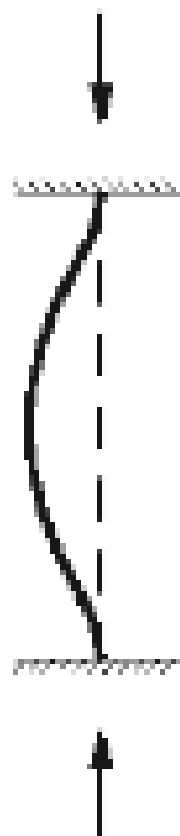
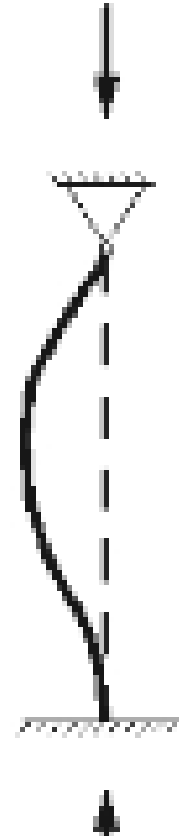
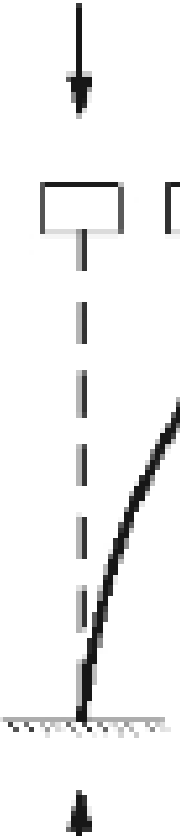
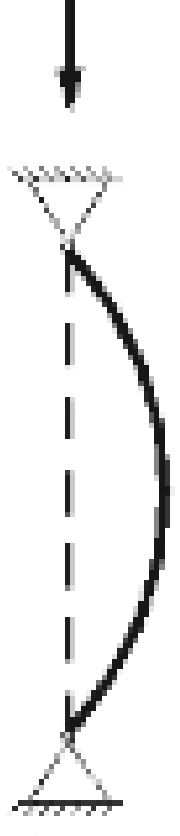
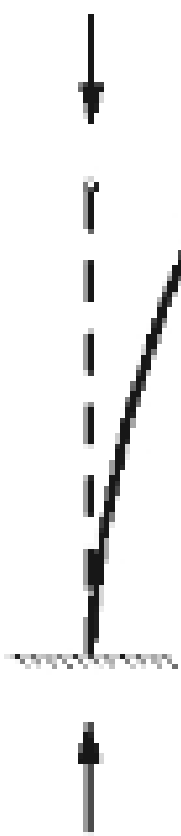
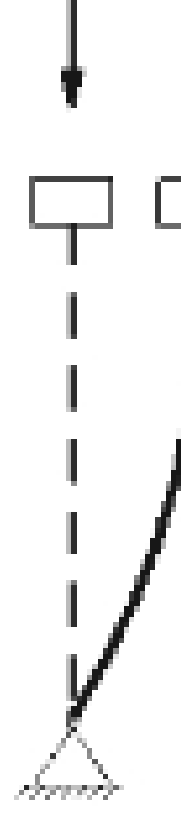
# Esbeltez e flambagem de pilares

Os pilares devem possuir índice de esbeltez de valor máximo igual a 200. Apenas em casos de elementos com força normal inferior a  $0,10 \times f_{cd} \times A_c$ , aceita-se índice de esbeltez superior a 200. Pode-se classificar os pilares de acordo com o índice de esbeltez como:

- Pilares curtos:  $\lambda \leq 35$ ;
- Pilares medianamente esbeltos:  $35 < \lambda \leq 90$ ;
- Pilares esbeltos:  $90 < \lambda \leq 140$ ;
- Pilares muito esbeltos:  $140 < \lambda \leq 200$ .

# Esbeltez e flambagem de pilares

A flambagem é um fenômeno que pode ser observado em peças esbeltas (área da seção transversal muito menor que o comprimento da peça) quando estas são solicitadas por forças de compressão axial, ocorrendo um deslocamento lateral na direção mais esbelta da peça.

|   |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|
| Representação das barras isoladas e seus deslocamentos devido à flambagem                                 |  |  |  |  |  |  |
| Legenda:<br>- linhas tracejadas: barra no estado inicial<br>- curvas contínuas: deformações por flambagem |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |
| Comprimento de flambagem ( $L_{fl}$ ) teórico   | $0,5 L$  | $0,7 L$  | $1,0 L$  | $1,0 L$  | $2,0 L$  | $2,0 L$  |
| Comprimento de flambagem ( $L_{fl}$ ) prático   | $0,65 L$   | $0,8 L$  | $1,2 L$  | $1,0 L$  | $2,1 L$  | $2,0 L$  |

em que:  $L$  = comprimento da barra isolada.

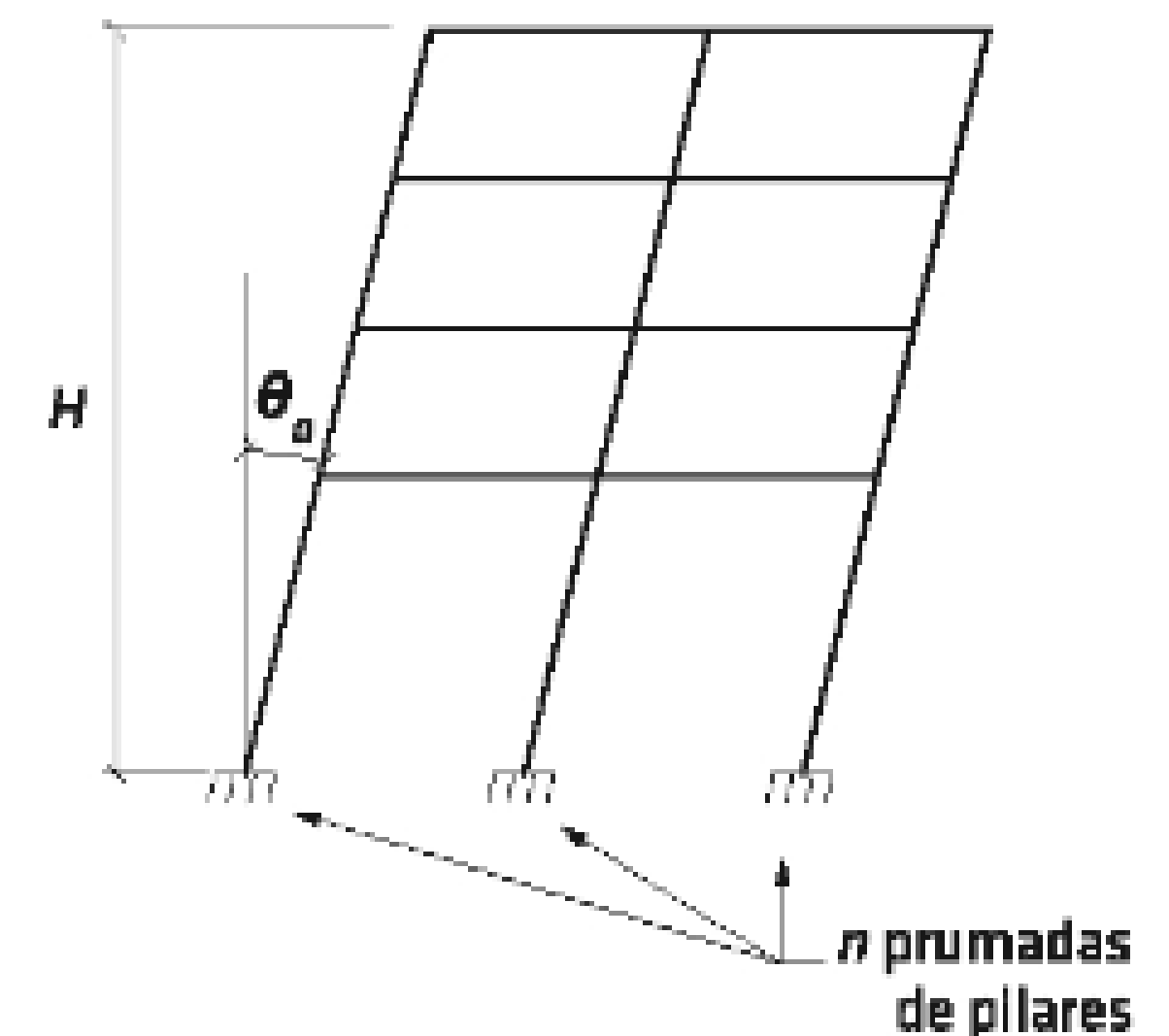
# Verificação no estado limite último

## Imperfeições geométricas

- De acordo com a NBR6118, para realizar a verificação do estado-limite último em estruturas reticuladas, devem-se levar em conta as imperfeições geométricas do eixo dos elementos da estrutura descarregada, sendo essas imperfeições classificadas em globais ou locais.

## Imperfeições globais

- Em se tratando dos pilares, na análise global dessas estruturas, sejam elas contraventadas ou não, deve ser considerado um desaprumo dos elementos verticais.
- Para pilares em balanço, adota-se  $\theta_1 = 1/200$ , e em edifícios que possuam predominantemente lajes lisas ou cogumelo, utiliza-se  $\theta_a = \theta_1$ .





# Verificação no estado limite último

## Imperfeições locais

- Quando são utilizados elementos que ligam pilares contraventados a pilares de contraventamento, deve-se levar em conta a tração causada pelo desaprumo do pilar contraventado.
- Para conhecimento do efeito das imperfeições locais nos pilares, considera-se, nas estruturas reticuladas, o momento mínimo de 1ª ordem obtido pela equação abaixo:

$$M_{1d,mín} = N_d \times (0,015 + 0,03h)$$

em que  $h$  é a altura da seção transversal na direção considerada, em metros.

# Verificação no estado limite último

## Efeitos de segunda ordem

- Devido à ação das cargas verticais e horizontais, observa-se um deslocamento horizontal nos nós na estrutura ocasionando a geração de esforços de 2ª ordem denominados efeitos globais de 2ª ordem.
- Inicialmente, deve-se calcular o índice de esbeltez  $\lambda$  e, se  $\lambda$  for menor que o valor-limite  $\lambda_1$ , os efeitos de 2ª ordem em elementos isolados podem ser desprezados. O valor limite  $\lambda_1$  corresponde ao valor a partir do qual os efeitos de 2ª ordem começam a provocar uma diminuição na resistência do pilar e é obtido pela equação abaixo:

$$35 \leq \lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \times \left(\frac{e_1}{h}\right)}{\alpha_b} \leq 90$$

# Verificação no estado limite último

Efeitos de segunda ordem

$$35 \leq \lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \times \left(\frac{e_1}{h}\right)}{\alpha_b} \leq 90$$

- $h \rightarrow$  dimensão da seção na direção considerada;
- $\alpha_b \rightarrow$  definido a seguir;
- $e_1 \rightarrow$  excentricidade de 1ª ordem, sendo, nesse caso, as excentricidades iniciais no topo e na base (para pilares de extremidade e de canto), dadas pela equação abaixo:

$$e_1 = \frac{M}{N}$$

# Verificação no estado limite último

## Valores de $\alpha_b$

- Os valores de  $\alpha_b$  variam de acordo com o tipo de pilar e carga, apresentando quatro grupos de classificação para a obtenção desse valor:
  - Para pilares biapoiados sem carga transversal, com  $0,40 \leq \alpha_b \leq 1,0$  e  $M_A$  e  $M_B$  são os momentos fletores de 1ª ordem nos extremos do pilar, com  $M_A$  sendo o de maior valor absoluto ao longo do pilar:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \times \frac{M_B}{M_A} \geq 0,40$$

- Para pilares biapoiados com carga transversal considerável ao longo da altura:

$$\alpha_b = 1,0$$

# Verificação no estado limite último

## Valores de $\alpha_b$

- Os valores de  $\alpha_b$  variam de acordo com o tipo de pilar e carga, apresentando quatro grupos de classificação para a obtenção desse valor (cont.):
  - Para pilares em balanço, com  $0,85 \leq \alpha_b \leq 1,0$ ,  $M_A$  é o momento fletor de 1ª ordem no engaste e  $M_C$  é o momento fletor de 1ª ordem no meio do pilar em balanço:

$$\alpha_b = 0,8 + 0,2 \times \frac{M_C}{M_A} \geq 0,85$$

- Para pilares biapoiados ou em balanço com momentos menores que o momento mínimo:

$$\alpha_b = 1,0$$



# Verificação no estado limite último

## Cálculo dos esforços

- Este método é utilizado quando o índice de esbeltez do pilar é de no máximo 90, sua seção é constante e a armadura ao longo do eixo é simétrica e constante.
- Quando  $\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$ , considera-se uma excentricidade de 2ª ordem  $e_2$  dada pela equação abaixo:

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \times \frac{1}{r}$$

em que  $l_e$  é o comprimento de flambagem e  $1/r$  é a curvatura na seção crítica.

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \times (\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

# Verificação no estado limite último

## Cálculo dos esforços

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \times (\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

- com  $h$  sendo a altura da seção na direção considerada e  $\nu$  é a força normal adimensional, calculada como:

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \times f_{cd}}$$

onde:

- $N_d \rightarrow$  força normal solicitante de cálculo;
- $A_c \rightarrow$  área da seção transversal o pilar;
- $f_{cd} \rightarrow$  resistência de cálculo à compressão do concreto.

# Verificação no estado limite último

## Cálculo dos esforços

- Com base na excentricidade de 2ª ordem  $e_2$ , chega-se ao cálculo do momento total máximo:

$$M_{d,total} = \alpha_b \times M_{1d,A} + N_d \times e_2 \geq M_{1d,A}$$

com  $M_{1d,A}$  sendo o momento de cálculo de 1ª ordem do momento  $M_A$ , com  $M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$ .

- Quando  $90 < \lambda \leq 200$ , classifica-se o pilar como esbelto, sendo necessário realizar o cálculo por um processo rigoroso, que foge ao escopo deste curso.

# Cálculo dos pilares

Para o cálculo dos pilares, deve-se realizar uma classificação quanto à sua posição em planta, o que leva, conseqüentemente, a distintos esforços solicitantes, possibilitando diferentes situações de projeto e de cálculo para cada uma das categorias.

São três as classificações possíveis quanto à posição: pilares intermediários, pilares de extremidade e pilares de canto.

# Cálculo dos pilares

## Pilar intermediário

- Os pilares intermediários encontram-se submetidos às forças axiais de compressão. Para projeto, considera-se que o pilar intermediário é solicitado por compressão normal centrada, ou seja, a excentricidade inicial é igual a zero.
- Apesar de a força normal atuar no centroide da seção transversal, a NBR6118 solicita uma verificação na seção por meio da equação:

$$M_{d,total} = M_{1d,mín} + N_d \times e_2$$

- Para excentricidade total em cada direção, tem-se:

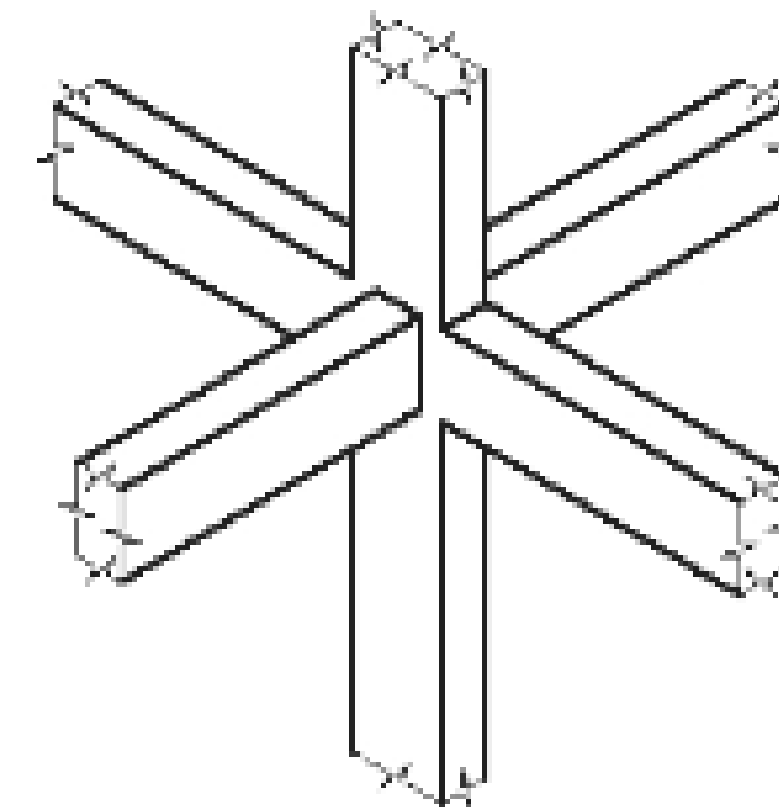
- Quando  $\lambda_{1x} \leq \lambda_x \leq 90$ :

$$e_x = (0,015 + 0,03 \times h_x) + e_{2x}$$

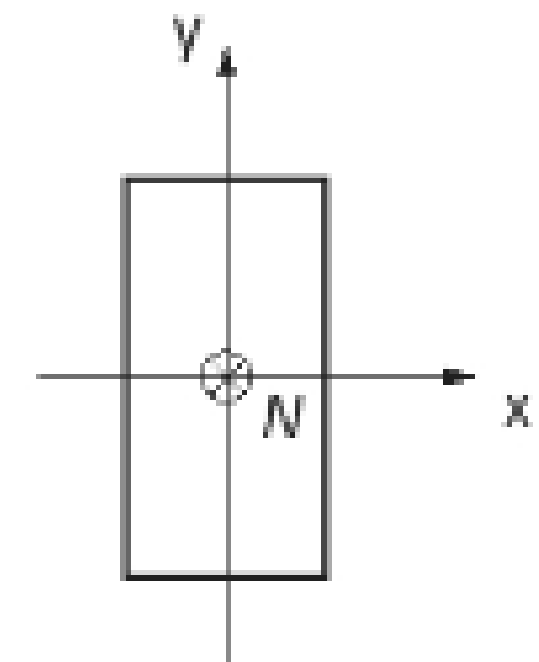
- Quando  $\lambda_{1y} \leq \lambda_y \leq 90$ :

$$e_y = (0,015 + 0,03 \times h_y) + e_{2y}$$

em que  $h_x$  e  $h_y$  são alturas da seção transversal na direção considerada, em metros.



Perspectiva



Seção transversal

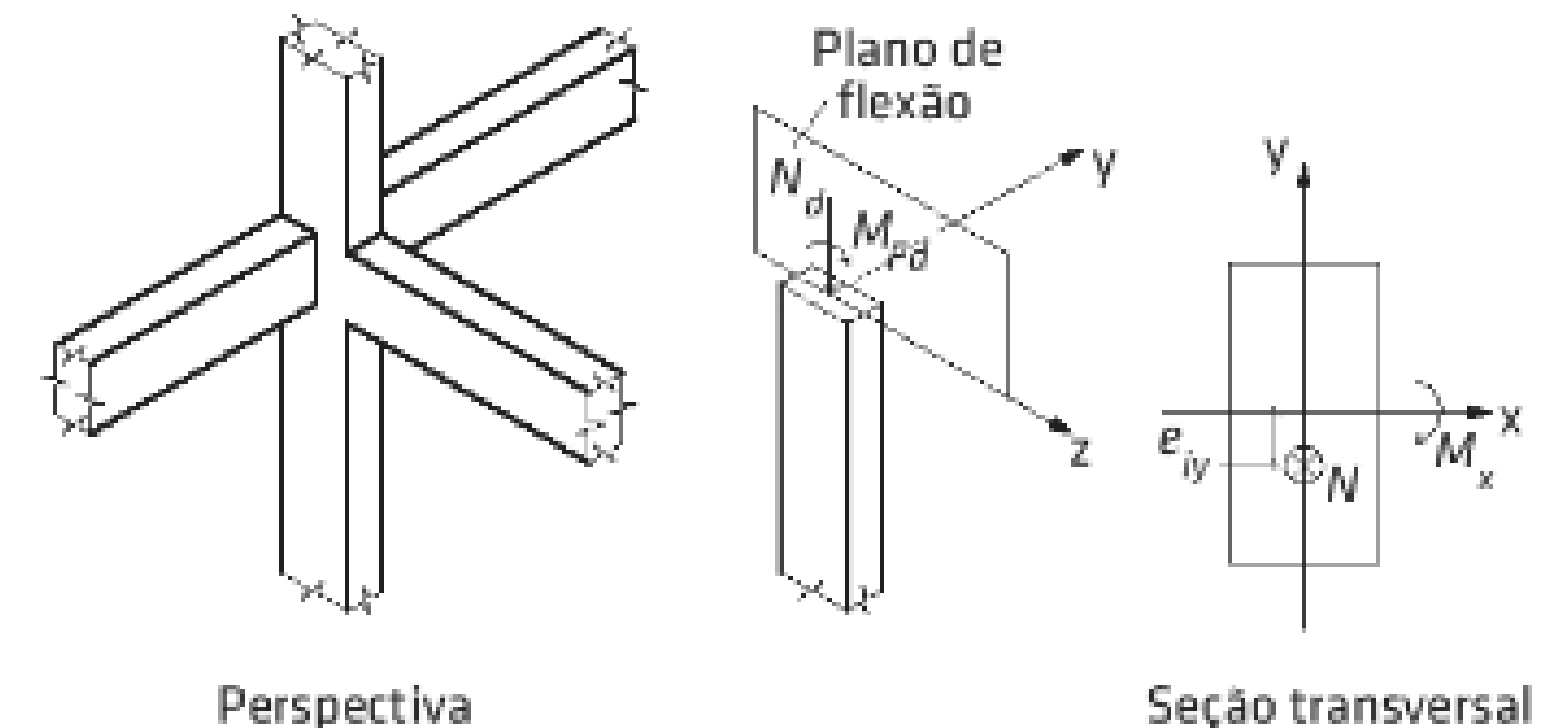


# Cálculo dos pilares

## Pilar de extremidade

- Encontram-se submetidos às forças normais de compressão e às ações dos momentos transmitidos pelas vigas que possuem extremidades externas nesses pilares. Considera-se que o pilar de extremidade é solicitado por flexão normal composta (flexocompressão), havendo excentricidade inicial segundo uma das ordenadas da seção transversal do pilar.
- Para o cálculo dos pilares de extremidade, tem-se:
  - Direção X (eixo sem excentricidade), para a qual se utiliza a equação:

$$M_{d,tot} = M_{1d,mín} + N_d \times e_{2x}$$



# Cálculo dos pilares

## Pilar de extremidade

- Para o cálculo dos pilares de extremidade, tem-se (cont.):
  - Direção Y (eixo com excentricidade inicial): inicialmente não se sabe qual seção do pilar é mais solicitada, devendo-se dimensionar verificando extremidade e seção intermediária.
    - Para a extremidade utiliza-se a equação, com  $M_A \geq M_B$  e  $M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$ :

$$M_{1d,A} = 1,4 \times M_A$$

- Para a seção intermediária utiliza-se:

$$M_{d,total} = N_d \times (e^* + e_{imp}) + N_d \times e_{2y}$$

$$e^* = 0,60 \times \frac{M_A}{N} + 0,40 \times \frac{M_B}{N} \geq 0,40 \times \frac{M_A}{N}, \text{ com } |M_A| \geq |M_B|$$

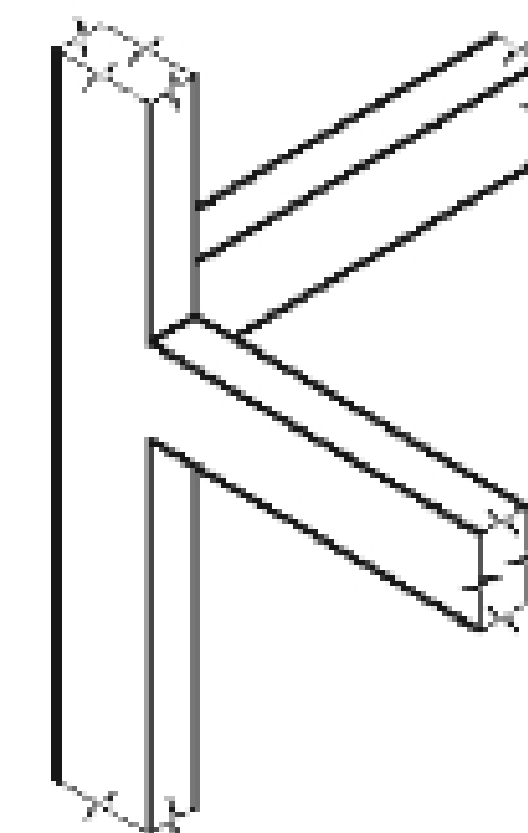
$$e_{imp} = \begin{cases} \theta_1 \times H, & \text{para pilares em balanço} \\ \theta_1 \times \frac{H}{2}, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{100 \times \sqrt{H}} \leq \frac{1}{200}$$

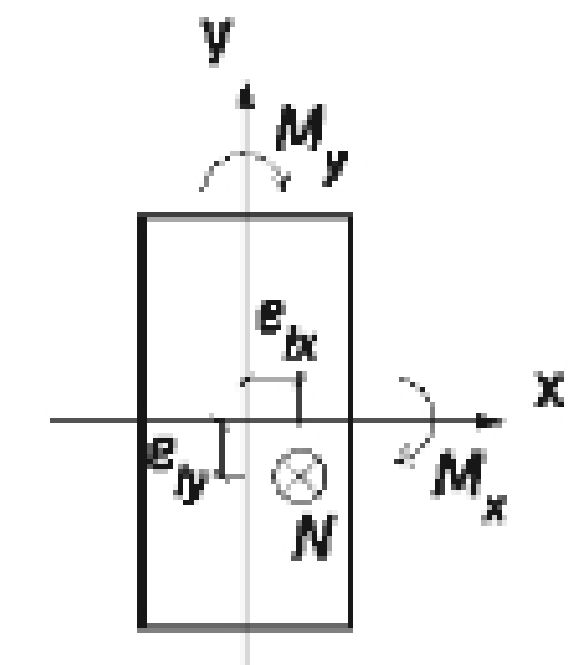
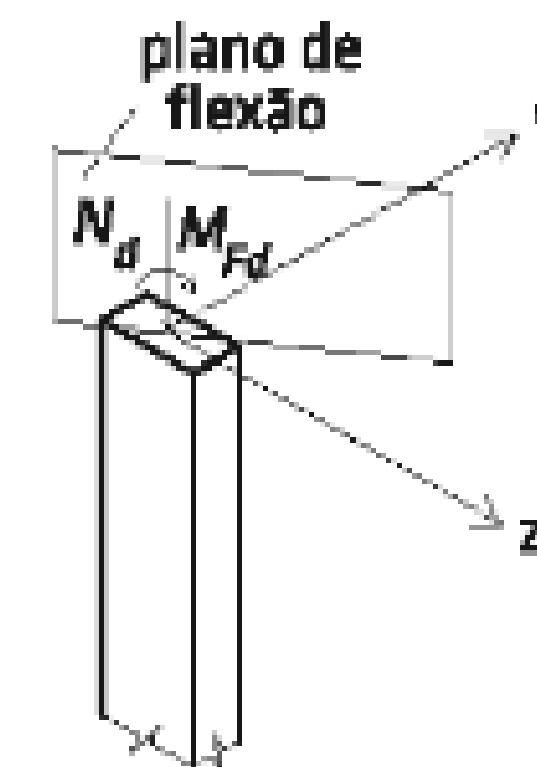
# Cálculo dos pilares

## Pilar de canto

- Estão submetidos às forças normais de compressão e às ações dos momentos transmitidos pelas vigas, que apresentam planos médios perpendiculares às faces dos pilares e são interrompidas nas bordas do pilar. Para projeto, considera-se que o pilar de canto é solicitado por flexão oblíqua composta, apresentando excentricidades iniciais nos dois eixos das ordenadas da seção transversal do pilar.
- Nesse caso, há excentricidades iniciais nos dois eixos. Assim como para a flexão normal composta, não se sabe qual a seção mais solicitada, devendo-se realizar a verificação das extremidades e seção intermediária.



Perspectiva



Seção transversal

# Cálculo dos pilares

## Pilar de canto

- Extremidades do topo e da base:
  - Utiliza-se a equação abaixo para ambas as direções:

$$M_{1d,A} = 1,4 \times M_A$$

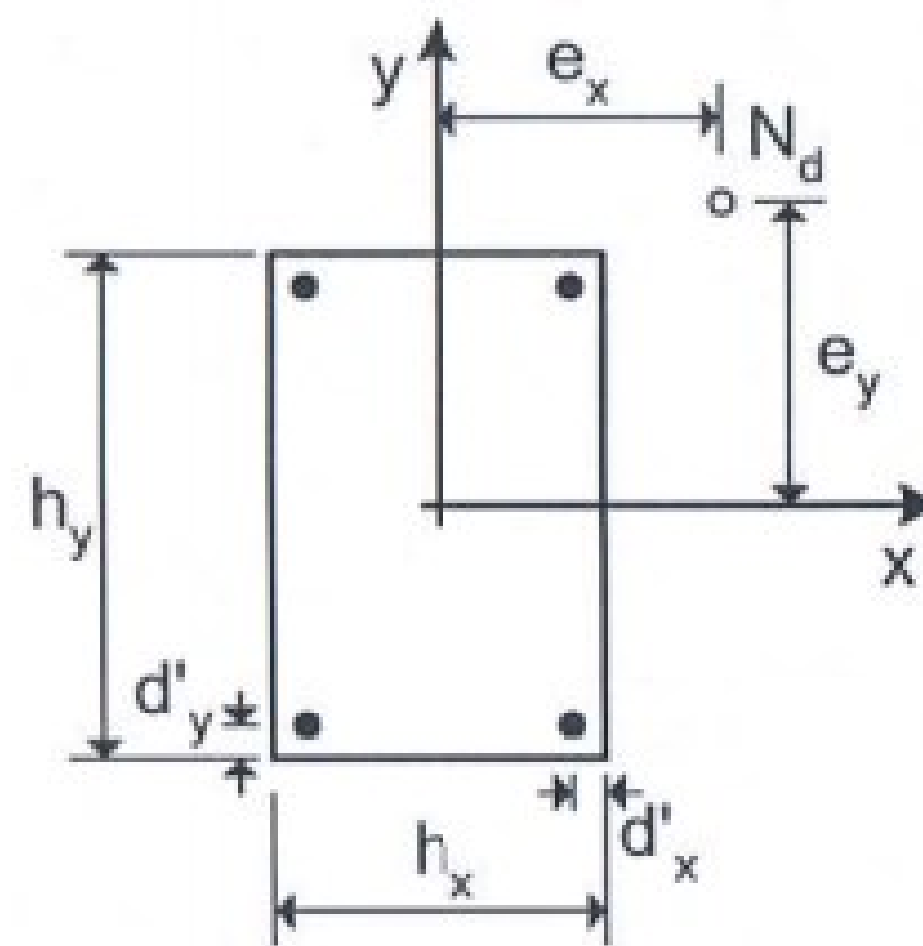
- Seção intermediária: para este cálculo, utilizam-se os mesmos cálculos realizados para a seção intermediária do pilar de extremidade (visto para a direção Y), sendo este cálculo, no entanto, agora realizado para as direções X e Y devido ao fato de esse pilar apresentar excentricidades iniciais nas duas direções.

# Dimensionamento dos pilares

Após calculados os momentos para as três situações (extremidade-topo, extremidade-base e seção intermediária), calculam-se as armaduras e adota-se a maior delas.

O dimensionamento dos pilares pode ser realizado por meio de ábacos desenvolvidos para cada caso ou com o auxílio de tabelas.

Em cada tabela, encontra-se indicada a seção transversal com a correspondente disposição das barras da armadura. Para cada seção, são fornecidas as taxas mecânicas de armadura  $\omega$ , para quatro valores do parâmetro  $\delta$ .





# Dimensionamento dos pilares

Para identificar a tabela a ser usada, deve-se calcular o parâmetro  $\delta = d'/h$  e observar a disposição das barras indicadas no topo da tabela. Os esforços solicitantes de cálculo são o esforço normal  $N_d$  e os momentos fletores  $M_{xd} = N_d \times e_x$  e  $M_{yd} = N_d \times e_y$ , onde  $e_x$  e  $e_y$  são as excentricidades da força normal em relação aos eixos de simetria da seção transversal.

Nos casos de flexocompressão reta, os esforços solicitantes são o esforço normal  $N_d$  e o momento fletor  $M_d = N_d \times e$ .

Os parâmetros de entrada para flexocompressão reta são os seguintes, com  $\sigma_{cd} = 0,85f_{cd}$ :

$$\nu = \frac{N_d}{b \times h \times \sigma_{cd}}; \mu = \frac{M_d}{b \times h^2 \times \sigma_{cd}}$$

# Dimensionamento dos pilares

Os parâmetros de entrada para flexocompressão oblíqua são os seguintes, com  $\sigma_{cd} = 0,80f_{cd}$  e  $A_c = h_x \times h_y$ :

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \times \sigma_{cd}}; \mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c \times h_x \times \sigma_{cd}}; \mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c \times h_y \times \sigma_{cd}}$$

Obtida a taxa de armadura  $\omega$ , calcula-se a área de aço:

$$A_s = \frac{\omega \times A_c \times \sigma_{cd}}{f_{yd}}$$

# Dimensionamento dos pilares

Se o parâmetro  $\delta$  do problema não coincidir com nenhum dos valores tabelados, pode-se empregar a tabela correspondente ao parâmetro  $\delta$  imediatamente superior ao valor calculado.

Para as tabelas de flexocompressão oblíqua, deve-se verificar a disposição das barras da armadura e o valor do esforço normal reduzido  $\nu$ . Para valores de  $\nu$  diferentes dos tabelados, pode-se fazer uma interpolação linear.

As tabelas são válidas apenas para os concretos do Grupo I, ou seja, concretos com  $f_{ck} \leq 50MPa$ .

OBRIGADO!



[www.ibmec.br](http://www.ibmec.br)

 /ibmec

 ibmec

 @ibmec\_oficial

 ibmec

