Лекции 1–2.

Monday, September 7, 2020 6:55 AM

Метрические п-ва

~~Мотивировка~~ Опр точка

$\mathbb{R}$; $x, y \in \mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{R}^n$; $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$ – евклидово расст-я

Обобщения.

X – мн-во ; $d: X \times X \to [0, +\infty)$

(X, d) – метрич. пр-во:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ (симметр-сть)
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ (н-во тр-ка)

аксиоматич. опр-е

Примеры

① X – некот мн-во $d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$ дискр метрика (упр-пров. аксиомы)

② $X = \mathbb{R}$; $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f(0) = 0$

$f(x+y) \le f(x) + f(y)$ (субаддит-сть) и $\nearrow$

можно ввести $d(x,y) := f(|x-y|)$ | упр – пров. акс-мы

Напр $f(x) = x^\alpha$; $0 < \alpha < 1$

③ $X = \mathbb{R}^n$ $d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$ ($p = 2$ – евклидова метрика)

$(x_1, \dots, x_n)$

$d_\infty(x,y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|$ – „пред. случай d_p".

$|x_j - y_j| = a_j$

$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{1/p} \xrightarrow[p \to \infty]{} a_{max} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{a_{max}} \right)^p \right)^{1/p}$

$\frac{a_j}{a_{max}} \le 1$

$a_{max} = \max_{1 \le j \le n} a_j$? $\wedge$ $n^{1/p} \to 1$

„=" ?

$$d_\infty(x,y) \le d_p(x,y) \le n^{1/p} \cdot d_\infty(x,y)$$

Упр*:
- $p \ge 1$ d_p – метрика
- $p \in (0,1)$ d_p – не явл. метрикой, но d_p^p – метрика

④ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $X = C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ – непр} \}$.

$d(f,g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ – метрика

$f, g \in C[a,b]$

⑤ $X = C[a,b]$

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

⑥ p-адическая метрика $X = \mathbb{Q}$

Зафиксируем p – простое.

$\forall r \in \mathbb{Q}$; $r = p^m \frac{q_1}{q_2}$, $q_1 \in \mathbb{Z}$, $q_2 \in \mathbb{N}$. (q_1, q_2 не дел. на p)

$|r|_p := p^{-m}$; $|0|_p := 0$

$d(r,s) := |r - s|_p$; $r, s \in \mathbb{Q}$. – тоже метрика

⑦ X – связный граф.

Расст-е м/у верш. = мин кол-во ребер, соед вершины

тоже метрика

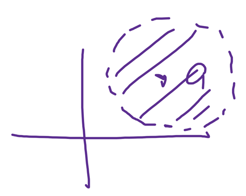
(X, d) – метр. пр-во.

<u>Открытый</u> шар с центром $a \in X$, радиус $r > 0$

$B(a, r) := \{ x : d(x, a) < r \}$

Примеры

1) $X = \mathbb{R}^2$, $d_2(x,y)$



2) $X=\mathbb{R}^2$; $d_4(x,y) \Rightarrow$ шар? — на практике

3) $X=\mathbb{R}^2$; $d_\infty(x,y) \Rightarrow$ шар?

4) $X=\mathbb{R}^2$, дискр метрика ($d(x,y)=\begin{cases}1, & x\ne y\\ 0, & x=y\end{cases}$).

Окр-сть т.а — $U_a(r)=B(a,r)$

Определение. $A\subset X$, $a\in A$ — внутр точка A, если

$\exists \delta>0$: $B(a,\delta)\subset A$

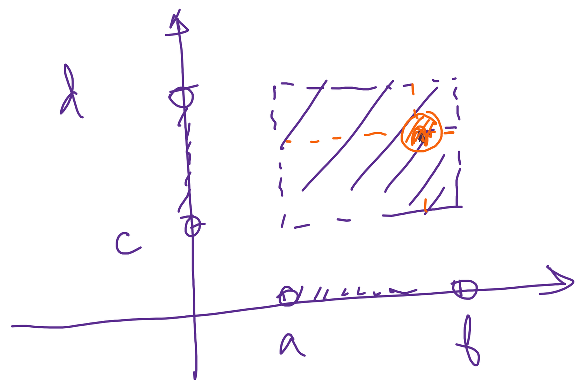
т.е. т.а входит в A вместе с некой окр-тью

Определение $A\subset X$ назыв открытым, если $\forall a\in A$ — внутр.

$B\subset X$ назыв. замкн., если $B^c := X\setminus B$ — открыто

$X, \emptyset$ — одновременно откр и замкн.

Примеры в $\mathbb{R}^2$, евкл. метрике



$x\in(a,b)\times(c,d)$

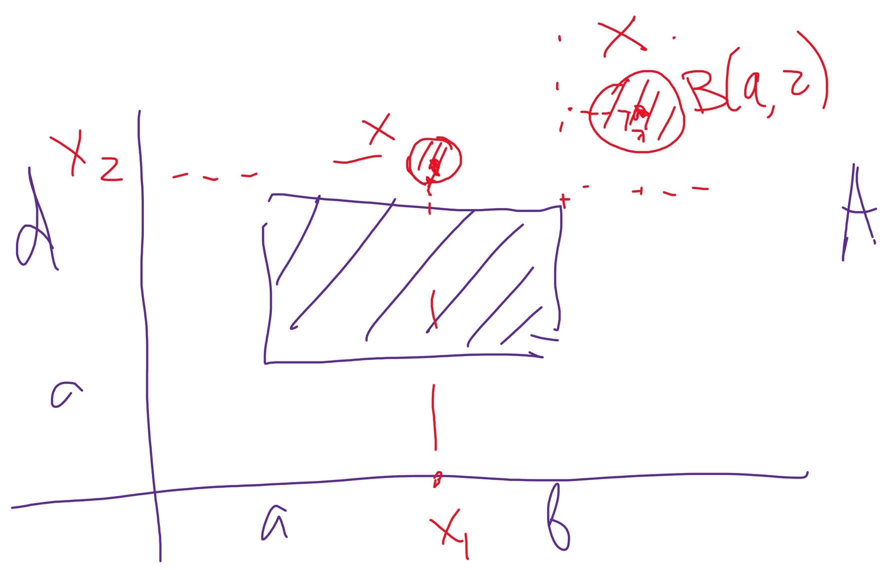
$a<x_1<b$

$c<x_2<d$

$$r=\frac{\min(b-x_1,\ x_1-a,\ d-x_2,\ x_2-c)}{2}$$

$x\in \underbrace{B(x,r)}_{U_x}\subset X$.

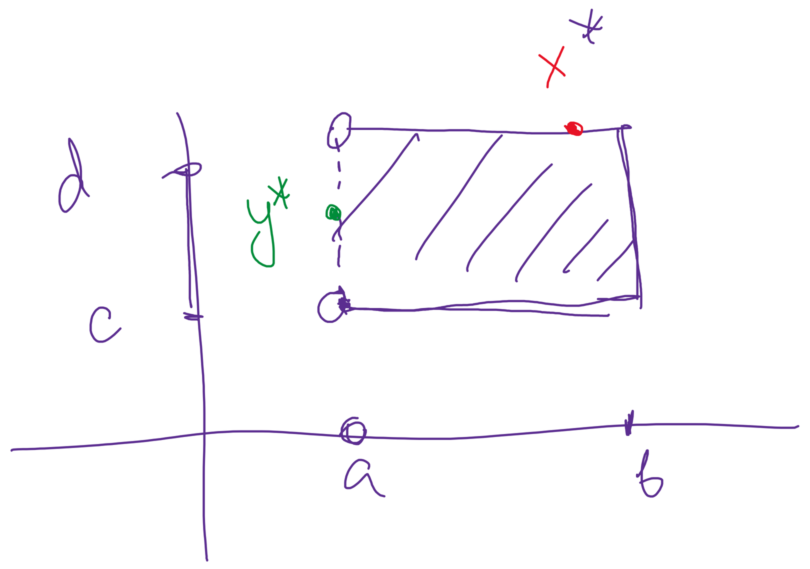
т.е. $\forall$ т. $x \in (a,b)\times(c,d)$ — внутр.



$A=[a,b]\times[c,d]$ — замкн?

т.е. A^c — откр.?

т.е. $\forall x\in A^c$ $\exists$ окр $U_x\subset A^c$?



$A=(a,b]\times[c,d]$

A — не открыто, т.к $\exists x^*\in A$: x^* — не явл внутр.,

т.к $\forall U_{x^*}\cap A^c\ne\emptyset$.

A — не замкн, т.к $y^*\in A^c$, но не явл внутр т A^c,

т.е A^c — не открыто

• Внутреннее мн-во A: $\operatorname{int}(A)$ – мн-во всех внутр. т A (откр мн-во)

• Внешнее A: $\operatorname{ext}(A)$ – мн-во всех внутр. т A^c.

дизъюнктное объединение

$C = A \vee B \iff \begin{cases} C = A \cup B \\ A \cap B = \varnothing. \end{cases}$

Граница мн-ва A

$$\partial A := X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A)$$

$$X = \operatorname{int} A \vee \partial A \vee \operatorname{ext} A.$$

$$a \in \partial A \iff \forall U_a : \; U_a \cap A \neq \varnothing \;\text{ и }\; U_a \cap A^c \neq \varnothing.$$

Замыкание

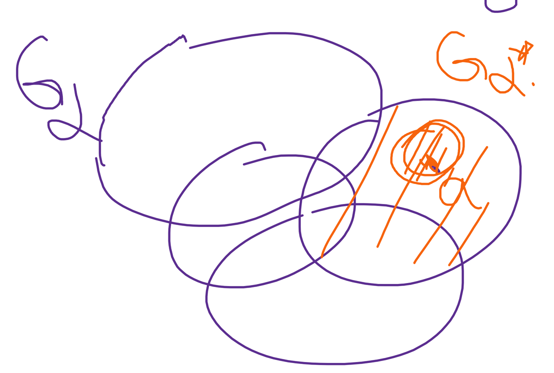
$Y \subset X$; $\quad \operatorname{cl} Y := \bigcap\limits_{\substack{Y \subset E \subset X \\ E\text{-замкн.}}} E$

(closure)

Св-ва откр и замкн мн-в.

① Пусть G_α – открыт $\Rightarrow \bigcup_\alpha G_\alpha$ – открыто

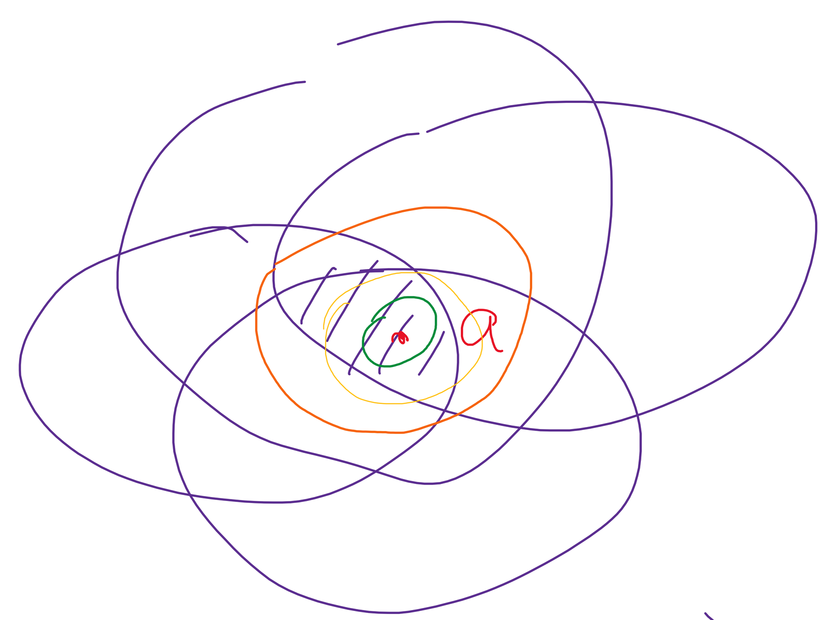
Д-во



$\exists\, a \in \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha^* : a \in \underset{\text{откр}}{G_{\alpha^*}} \Rightarrow \exists\, U_a \subset G_{\alpha^*} \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$

2) Пусть G_k – откр; $k = 1, \dots, N \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k$ – открыто (конечное пересечение)

Д-во



G_k $\quad \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k \ni a \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in G_k \;\; \forall k = 1, \dots, N.$

$\Rightarrow \exists\, U_{(a,k)} \subset G_k$ – окр-ть т a, вместе с кот. она входит в $\forall G_k$

$B(a, r)$ $\quad r^* = \min(r_k)$

$U_{(a,k)} = B(a, r_k)$

$$B(a, r^*) \subset B(a, r_k) \subset G_k$$

$$B(a, r^*) = \bigcap_{k=1}^{N} B(a, r_k) \subset \bigcap_{k=1}^{N} G_k$$

3) Любое пересечение замкн. мн-в — замкнуто

F_α — замкн.; F_α^c — откр.

$$\Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big)^c = \bigcup_\alpha \big(\underbrace{F_\alpha^c}_{\text{откр}}\big) \text{ — откр.} \Rightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha \text{ — замкн.}$$

4) Объедин-е конечного числа замкн. — замкнуто.

Замыкание $Y \subset X$; $\quad \mathrm{cl}\, Y := \bigcap\limits_{\substack{Y \subset E \subset X \\ E \text{ — замкн}}} E$

$\mathrm{cl}\, Y$ — замкн. мн-во (по св-ву 3).

не всегда вот (см п. 3)

① $\mathrm{cl}\, B(c,r) = \overline{B}(c,r) := \{x : d(x,c) \le r\}$, — в евкл. пр-ве (почему?)

② в $\forall$ метрич. пр-ве (X, d)

$$\mathrm{cl}\, B(c,r) \subset \overline{B}(c,r)$$

③ Пусть d — дискр. метрика в X.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \ne y \end{cases}$$

$B(c, 1)$

$B(c,1) = \{x : d(x,c) < 1\} = \{c\}$. $\quad cl\,(B(c,1)) = \{c\} = B(c,\frac{1}{2})$

$cl\,B(c,1) = \{c\}$ – замыкание шара $B(c,1)$

$\overline{B}(c,1) = \{x : d(x,c) \le 1\} = X$ – замкнутый шар $\overline{B}(c,1)$

Предельная точка (т. сгущения) ; Виноградов О. Л. „Математический анализ"

(X,d) – метрич. пр-во.

$A \subset X$

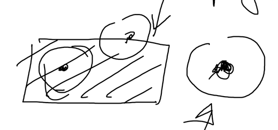
$x \in X$ – пред. точка мн-ва A, если $\forall U_x \quad U_x \cap A \neq \emptyset$.

т. е. в $\forall$ шаровой окр-сти $U_x = B(x,\delta)$ найдется другая т. из мн-ва A

(и тогда нетр. д-ть, что найдется беск. много т. из A)

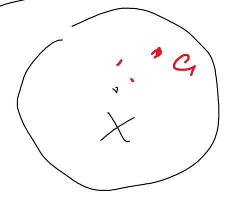
Изолированные т.

$a \in A$ – изол., если она не предельная



пред. точки

изол т A



~~Утверждение~~ $cl\,A$ A множество всех пред. точек

изол. точки

д-во.

$cl\,A \subset$ мн-во пред т. ?

Ут. A – замкн $\Leftrightarrow cl\,A = A$

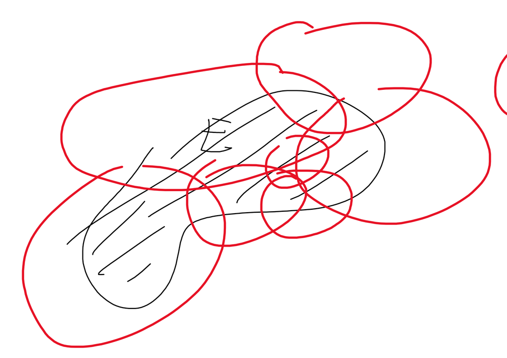
Компактность (X,d)

Открытое покрытие

$E \subset X$; $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}^{\subset X}$ – откр покрытие E, если

1) G_α – откр $\forall \alpha \in A$

2) $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$



G_α

$K \subset X$ – компакт, если из любого откр. покрытия можно выделить конечное подпокрытие

$\forall \{G_\alpha\}$ – откр покр. $E \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N : \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{N} G_{\alpha_j}$

откр покрытия $\quad G_x = B(x,1)$; $x \in \mathbb{R}^n$

Пример $\{G_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ — откр покр $\mathbb{R}^n$, ∄ кон п/п

$E \subset X$ — огр, если $\exists R;\ \exists a \in X:$ $E \subset B(a,R)$.

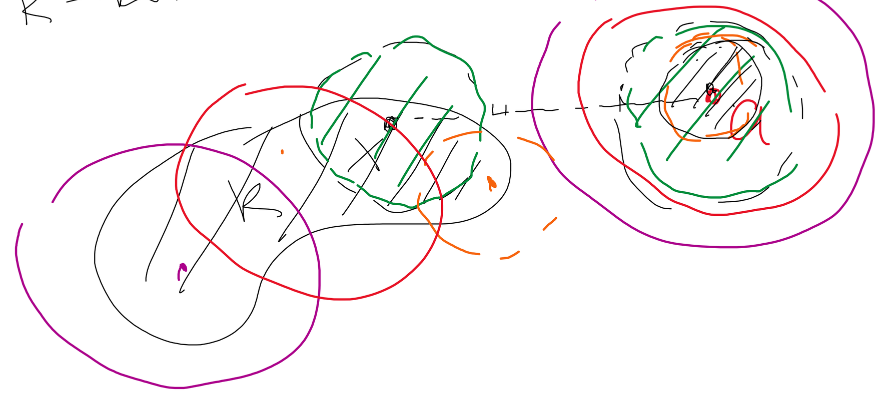
Свойства

① Если K-компакт, то K-замкнуто и ограничено

д-во

1) K-комп ⇒ K-замкн. ⇔ K^c-откр

$\forall a \in K^c$.



$\forall x \in K$ построим окр-ти т. x и a с рад. $r_x = \frac{d(x,a)}{3}$

$B(x,r_x) =: U_x$

$B(a,r_x) = V_x$

$\{U_x\}_{x\in K}$ — откр покр K. ⇒ выб. кон подпокр

$\{U_{x_1}; U_{x_2}, \dots, U_{x_N}\}$ — конечн подпокр K.

$V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$ — шарики с центр в т. a, вложенные

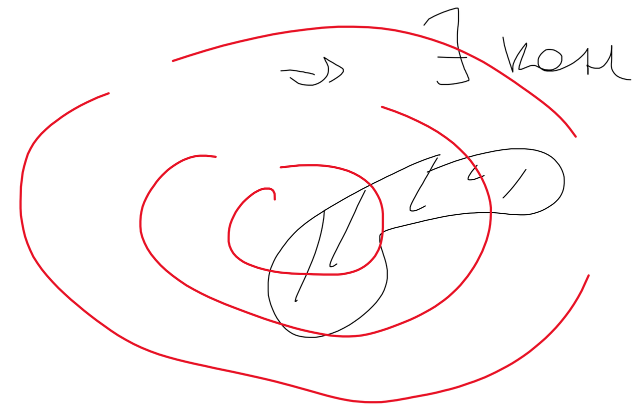
$r^* = \min(r_{x_1}, \dots, r_{x_N})$.

$\Rightarrow \underset{\text{открыто}}{B(a,r^*)} \subset \underline{K^c}$ ⇒ K^c-откр ⇒ K-замкн

2) если K-комп, то K-огр.

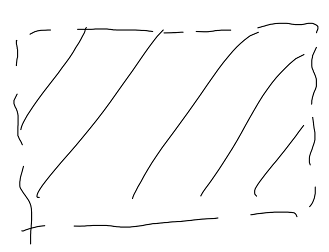
$a \in X$ зафикс $\{B(a,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — откр покр K ⇒

⇒ ∃ кон. подпокр $\{B(a,n_1), \dots, B(a,n_N)\}$



$R = \max(n_1, \dots, n_N)$

$K \subset B(a,R)$ ⇒ огр



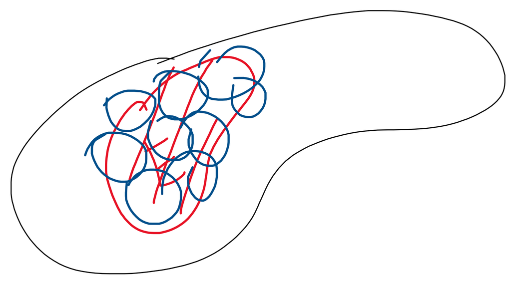
Откр покр. из кот нельзя выд. кон. подпокр-я?

Лемма ...

Лемма

K — компакт, $E \subset K$, E — замкн, тогда E — компакт

д-во



Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — откр. покрытие E

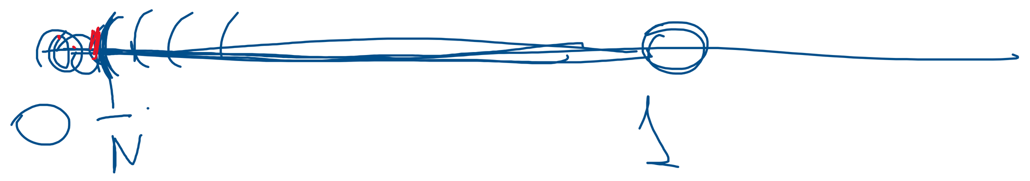
E^c — откр $\Rightarrow$ покрытие $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{E^c\}$ — покрытие K $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у него можно выбр конечное подпокрытие K

$$\{G_{\alpha_j}\}_{j=1}^{N} \cup \{E^c\}$$

$$\bigcup_{j=1}^{N} G_{\alpha_j} \cup E^c \supset K \supset E \quad \Rightarrow \quad E \subset \bigcup_{j=1}^{N} G_{\alpha_j}$$

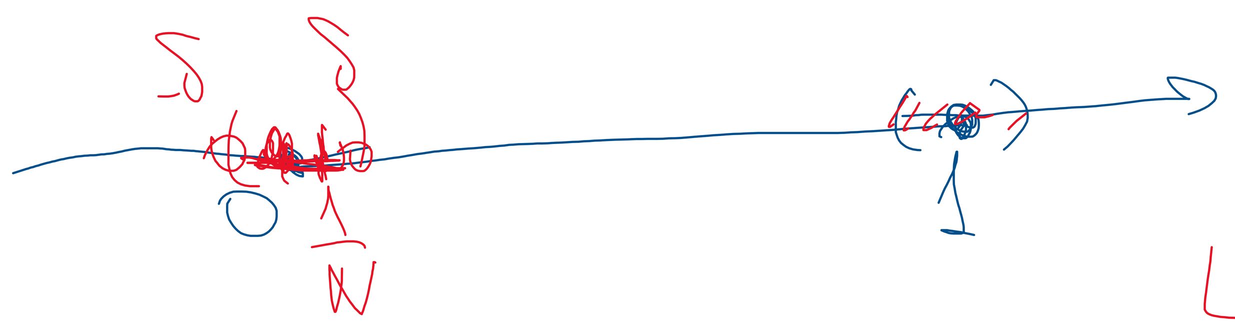
E^c не участвует в покр E (т.к. $E^c \cap E = \varnothing$)



$$\underbrace{\bigcup_{n\in N}\left(\frac{1}{n};1\right)}_{B\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2};\ r_n\right)} = (0,1)$$

если бы было кон. подпокр

$$\bigcup_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n},1\right) \subset \left(\frac{1}{N};1\right)$$



$$\underbrace{\bigcup_{n\in N}\left(\frac{1}{n},1\right)}_{\text{не покр } [0,1]} \cup (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cup (-\delta, +\delta)$$