Лекции 1-2.

Monday, September 7, 2020 6:55 AM

Метрические пр-ва

~~Мотивировка~~ Отпр. точка

$\mathbb{R}$; $x, y \in \mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{R}^n$; $x, y \in \mathbb{R}^n$; $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$ – евклидово расст-я.

Обобщения:

X – мн-во ; $d: X \times X \to [0, +\infty)$.

(X, d) – <u>метрич. пр-во</u>: (аксиоматич. опр-е)

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ (симметрия)
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ (н-во тр-ка)

Примеры.

① X – непуст. мн-во $d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$ дискр. метрика (упр-пров. аксиомы)

② $X = \mathbb{R}$; $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f(0) = 0$

$f(x+y) \le f(x) + f(y)$ (субаддит-сть) и ↗

можно ввести $d(x,y) := f(|x-y|)$ | упр. – пров. акс-мы

Напр. $f(x) = x^\alpha$; $0 < \alpha < 1$

③ $X = \mathbb{R}^n$ $(x_1, \dots, x_n)$ $d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$ ($p = 2$ – евклидова метрика)

$d_\infty(x,y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|$ – „пред. случай d_p".

$|x_j - y_j| = a_j$

$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{1/p} \xrightarrow[p \to \infty]{} a_{max} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{a_{max}}\right)^p\right)^{1/p}$

$a_{max} = \max_{1 \le j \le n} a_j$? „=" ? ; ≤ 1 ; $n^{1/p} \to 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} d_\infty(x,y) \le d_p(x,y) \le n^{1/p} \cdot d_\infty(x,y) \\ \text{Упр}^*: \ \cdot\ p \ge 1 \ \ d_p \text{ – метрика} \\ \qquad\ \ \cdot\ p \in (0,1) \ \ d_p \text{ – не явл. метрикой} \\ \qquad\qquad \text{но } d_p^p \text{ – метрика} \end{array}}$$

④ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $X = C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ – непр.} \}$.

$d(f,g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ – метрика

$f, g \in C[a,b]$

⑤ $X = C[a,b]$

$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$

⑥ p-адическая метрика $X = \mathbb{Q}$

Зафиксируем p-простое.

$\forall\, r \in \mathbb{Q}$; $r = p^m \dfrac{q_1}{q_2}$, $q_1 \in \mathbb{Z}$, $q_2 \in \mathbb{N}$. (q_1, q_2 не дел. на p).

$|r|_p := p^{-m}$; $|0|_p := 0$

$d(r,s) := |r - s|_p$; $r, s \in \mathbb{Q}$. – тоже метрика

⑦ X – связный граф.

расст-е м/у верш. = мин. кол-во ребер, соед. вершины

тоже метрика

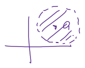
(X, d) – метр. пр-во.

<u>Открытый</u> шар с центром $a \in X$, радиус $r > 0$

$B(a, r) := \{ x : d(x,a) < r \}$.

Примеры

1) $X = \mathbb{R}^2$; $d_2(x,y)$



2) $X = \mathbb{R}^2$; $d_4(x,y) \Rightarrow$ шар? – на практике

3) $X = \mathbb{R}^2$; $d_\infty(x,y) \Rightarrow$ шар?

4) $X = \mathbb{R}^2$; дискр. метрика ($d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$).

Окр-сть т. a — $U_a(r) = B(a, r)$

<u>Определение</u> $A \subset X$; $a \in A$ – <u>внутр. точка</u> A, если

$\exists\, \delta > 0$; $B(a, \delta) \subset A$

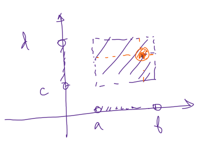
т.е. т. a входит в A вместе с некой окр-стью

<u>Определение</u> $A \subset X$ назыв. <u>открытым</u>, если <u>$\forall a \in A$ – внутр.</u>

$B \subset X$ назыв. <u>замкн.</u>, если $B^c := X \setminus B$ – открыто.

$X, \varnothing$ – одновременно откр. и замкн.

Примеры в $\mathbb{R}^2$; евкл. метрика



$x \in (a,b) \times (c,d)$

$a < x_1 < b$

$c < x_2 < d$

$r = \dfrac{\min(b - x_1,\ x_1 - a,\ d - x_2,\ x_2 - c)}{2}$

$x \in \underbrace{B(x, r)}_{U_x} \subset X$.

т.о. $\forall$ т. $x \in (a,b) \times (c,d)$ – внутр.