Studie Område Projekt

Matematik A / Programmering B

Victor Østergaard Nielsen
3di - H. C. Ørsted Gymnasiet Lyngby
15/12/2024

Vejledere:
Jan Strauss Hansen (Matematik A)
Kristian Krabbe Møller (Programmering B)

Indhold

1 Opgaveformulering

Machine-learning

Hovedspørgsmål: Hvordan kan et simpelt neuralt netværk, uden unødige abstraktioner eller biblioteker, anvendes tilgenkendelse af håndskrevne tal i realtid i et tegneprogram på computeren, og hvad er matematikken bag?

Opgaveformulering:

- Redegør overordnet for begrebet neuralt netværk.
- Redegør for de grundlæggende matematiske principper bag neurale netværk herunder matriceregning.
- Redegør for valg af programmeringssprog ift. udvikling af programmer med neuralt netværk.
- Analysér hvordan et neuralt netværk kan programmeres, gerne uden unødvendige abstraktioner eller biblioteker, så det kan genkende håndskrevne tal i realtid i/fra et tegneprogram på computeren.
- Undersøg hvorledes programmet kan optimeres for at opnå lavest mulig fejlrate og evt. hvorledes støj i den analyserede data kan påvirke fejlraten.
- Diskuter og vurder hvorvidt neutrale netværk er den mest effektive tilgang til at genkende håndskrevne tal på en adaptiv og robust måde.

2 Indledning

3 Matricer og matrixregning

3.1 Matricer

En matrice er en tabel af tal, der er arrangeret i rækker og kolonner. En matrice kan repræsenteres med et stort bogstav, f.eks. A, og elementerne i matricen kan repræsenteres som a_{ij}, hvor i er rækken og j er kolonnen. En matrice med m rækker og n kolonner kaldes en $m \times n$ matrice. En matrice med lige mange rækker og kolonner kaldes en kvadratisk matrice. En matrice med kun én række kaldes en rækkevektor, og en matrice med kun én kolonne kaldes en søjlevektor. (Lauritzen & Bökstedt, 2019)

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ Matrice}} \qquad \underbrace{B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}}_{\text{Søjlevektor}} \qquad \underbrace{C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \end{bmatrix}}_{\text{Rækkevektor}} \tag{1}$$

Mens der i denne opgave ekskulstivt vil blive fokusseret på "2d"matricer, så er det også muligt at have "3d"matricer, hvor der er en dybde dimension. Dette kunne f.eks. være en matrice, der repræsenterer et billede, hvor der er en række og en kolonne for hver pixel, og en dybde for hver farvekanal.

3.2 Matrixregning

Matrixregning er en vigtig del af matematikken bag neurale netværk og er derfor vigtig at forstå. Der er flere forskellige operationer, der kan udføres på matricer, herunder addition, subtraktion, skalarmultiplikation og matrix-multiplikation m.m.

3.2.1 Addition og subtraktion

For at addere eller subtrahere to matricer skal de have samme dimensioner, altså de skal have samme mængde rækker og søjler. Givet dette, så er matmatkiken ikke meget andlernedes fra normale tal, det betyder at: $A + B = B + A$. Da de 2 matricer har samme dimension udføres addition og subtraktion således:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Hver position i A matricen bliver altså adderet eller subtraheret med samme position i B matricen.

3.2.2 Skalarmultiplikation af matricer

Givet tallet k kan man gange k på matricen A således:

$$k \cdot A = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

3.2.3 Elementvis anvendelse af en funktion på matricer

Givet en funktion $f(x)$ og en $m \times n$ matrice A, vil $f(A)$ være en $m \times n$ matrice, hvor $f(x)$ er blevet anvendt på hvert element i A:

$$f(A) = f\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(a_{11}) & f(a_{12}) & \dots & f(a_{1n}) \\ f(a_{21}) & f(a_{22}) & \dots & f(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a_{m1}) & f(a_{m2}) & \dots & f(a_{mn}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

3.2.4 Matrixmultiplikation

At gange to matricer sammen er lidt mere kompliceret, det indebærer først og fremmest at de 2 matricer er af kompatibel størrelse. Hvis A er en $m \times p$ matrice og B er en $p \times r$ matrice, så er $C = A \cdot B$ en $m \times r$ matrice. Bemærk at antallet af kolonner i A matricen skal være lig antallet af rækker i B matricen. For at finde elementet c_{ij} i C matricen ganges række i i A matricen med kolonne j i B matricen. Dette gøres ved at gange elementerne i række i i A matricen med elementerne i kolonne j i B matricen og summere dem. F.eks. hvis A er en 3×2 matrice og B er en 2×3 matrice, så er C en 3×3 matrice, og elementet c_{11} i C matricen findes således (Simonson, 2015):

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \tag{5}$$

Intuitivt kan dette visualiseres ved at tegne A og B matricerne således (Simonson, 2015):

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{c_{11}} & \phantom{c_{12}} & \phantom{c_{13}} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{array} \tag{6}$$

For at finde elementet c_{11} i C matricen, ganges række 1 i A matricen med kolonne 1 i B matricen, dette er visualiseret herunder (Simonson, 2015):

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \color{blue}{b_{11}} & b_{12} & b_{13} \\ \color{purple}{b_{21}} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{teal}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \phantom{c_{12}} & \phantom{c_{13}} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{array} \qquad c_{11} = \color{red}{a_{11}} \cdot \color{blue}{b_{11}} + \color{teal}{a_{12}} \cdot \color{purple}{b_{21}} \tag{7}$$

Samme operation gentages for resten af positionerne i C matricen:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

Det ses nu visuelt at den resulterende matrice C er en 3×3 matrice når A er en 3×2 matrice og B er en 2×3 matrice. Det skal dog bemærkes at matrixmultiplikation ikke er kommutativ, altså $A \cdot B \neq B \cdot A$. Dette kan også ses visuelt ved at bytte om på A og B matricerne:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array} \tag{9}$$

Det ses at $A \cdot B$ og $B \cdot A$ ikke er ens, og derfor er matrixmultiplikation ikke kommutativ. (Lauritzen & Bökstedt, 2019) Selv med to kvadratiske matricer af samme dimension er matrixmultiplikation ikke nødvendigvis kommutativ. Dette kan betragtes i følgende eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Det ses at $A \cdot B \neq B \cdot A$, matrixmultiplikation er altså ikke kommutativ hverken i den resulterende størrelse i ikke kvadratiske matricer eller i kvadratiske matricer af samme størrelse. (Lauritzen & Bökstedt, 2019)

3.2.5 Transponering af matricer

Transponering af en matrice betyder at bytte om på rækker og kolonner. Hvis A er en $m \times n$ matrice, så er transponeringen af A en $n \times m$ matrice, og elementet a_{ij} i A matricen bliver til elementet a_{ji} i A^T matricen. Dette kan visualiseres ved at tegne A matricen og A^T matricen:

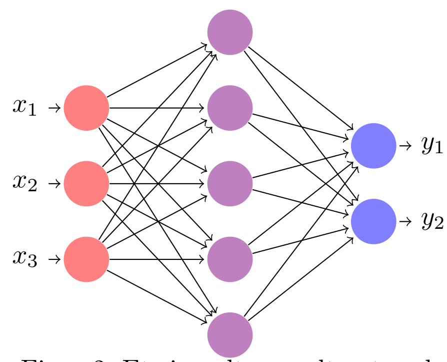
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{12}$$

4 Neurale netværk

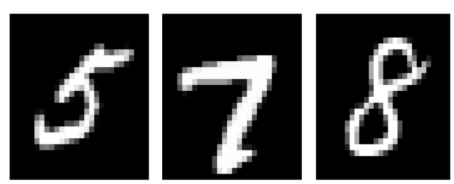
4.1 Introduktion

Et neuralt netværk er en matematisk model, der er inspireret af de biologiske neuroner i menneskehjernen. Et neuralt netværk består af en række lag, hvor hvert lag består af neuroner. Dette kan ses på (Figur 2). Hvert neuron i et lag er forbundet til alle neuroner i det forrige lag og det næste lag. Hver forbindelse mellem neuronerne har en vægt, der bestemmer, hvor meget signalet fra det ene neuron påvirker det næste neuron. Hvert neuron har også en bias, der bestemmer, hvor let det er for neuronet at sende et signal. Et neuralt netværk består af et inputlag, et eller flere skjulte lag og et outputlag. Dette er illustreret på (Figur 2). Det er altså denne model, der er inspireret af de mange sammenkoblede neuroner i menneskehjernen. Denne lighed er ikke tilfældig, da neurale netværk er designet til at efterligne hjernens evne til at lære.

Figur 1: Neuroner i menneskehjernen fra (St. Clair, 2021)



Figur 2: Et simpelt neuralt netværk

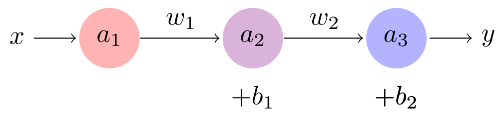


Figur 3: Eksempel fra MNIST datasættet (LeCun m.fl., 1994)

Bemærk (Figur 3). Du ved udmærket godt, hvilke tal der er på billedet, selvom du aldrig før har set netop dette 5-, 7- og 8-tal før. Dette er, fordi din hjerne er trænet til at genkende tal. Denne opgave er enormt udfordrende for et alment computerprogram, idet det ikke har nogen intuitiv forståelse af, hvad et tal er, og det skal derfor programmeres med specifikke instruktioner for at kunne genkende tal. Denne tilgang er ikke optimal, da den kræver, at programmøren har en dyb forståelse af, hvordan tal ser ud, og hvordan de kan genkendes. Denne metode er ikke holdbar i længden, idet der er uendeligt mange måder at skrive et 7-tal på. For at kunne generalisere talgenkendelse og gøre metoden mere robust overfor nye skrivemåder af tal kan neurale netværk anvendes. Antag et neuralt netværk med et tal som input og de helt rigtige vægte og biases. Denne model vil i teorien kunne genkende tal, også selvom modellen aldrig før har set netop dette tal. Håbet er, at modellen har "lært"at generalisere træningsdataen til en mere generel forståelse af tal. Modellens output vil derfor være en søjlevektor med sandsynligheder for, at inputtet er et tal fra 0 til 9. Modellens prediktering vil være det tal, der har den højeste sandsynlighed ifølge modellen.

4.1.1 Feedforward

Når modellen skal prediktere, altså gå fra input til output, kaldes dette for *feedforward*. Her sendes inputtet gennem alle lagene i modellen, og bliver bliver påvirket af vægtene mellem neuronerne og biaset i hvert neuron. Herunder er et simpelt neuralt netværk med kun 1 neuron i hvert lag og et skjult lag og hvor a_n er aktiveringen af neuronen i lag n og w_n er vægten mellem neuronen i lag n og lag $n+1$:



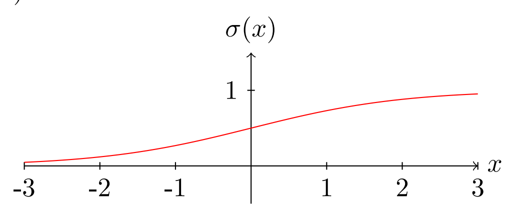
Figur 4: Et simpelt neuralt netværk

Så hvis vi ønsker at prediktere outputtet y givet inputtet x, så kan vi gøre dette ved at følge disse trin:

$$a_1 = x \tag{13}$$
$$a_2 = \sigma(w_1 \cdot a_1 + b_1) \tag{14}$$
$$a_3 = \sigma(w_2 \cdot a_2 + b_2) \tag{15}$$
$$y = a_3 \tag{16}$$

Her er $\sigma(x)$ en aktiveringsfunktion, der tager inputtet x og returnerer et output. Denne funktion er essentiel for at modellen kan lære mere komplekse femomener, da den introducerer ikke-linearitet i modellen. En af de mest brugte aktiveringsfunktioner er ReLU, der tager inputtet x og returnerer x hvis $x > 0$ og 0 ellers. (Sanderson, 2017) Hvis outputtet skal betragtes som en sandsynlighed, er sigmoid funktionen en god aktiveringsfunktion, da den tager inputtet x og returnerer en værdi mellem 0 og 1, som kan tolkes som en sandsynlighed. Sigmoid funktionens definition samt et plot af funktionen er vist herunder: (Nielsen, 2019b)

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \tag{17}$$



Figur 5: Sigmoid funktionen

Typisk har et neuralt netværk flere neuroner i hvert lag, og antallet af vægte og biases er derfor meget større. x, y, samt alle de forskellige a_n og b_n for hvert lag er søjlevektorer, og w_n i alle lag er matricer. og derfor skal der bruges matrixmultiplikation for at kunne beregne outputtet. Dette er ikke et problem, da de pågældende regneoperationer er defineret tidligere i afsnittet.

4.1.2 Træning af neurale netværk med Cross-Entropy

Når et neuralt netværk initialiseres, er alle vægtene og biases tilfældige. Dette betyder, at modellen ikke kan genkende noget, ligesom et barn, der skal lære noget for første gang. For at træne modellen til at genkende mønstre kræves der et passende datasæt med labels, der angiver, hvad hvert input repræsenterer. For at kunne forbedre modellen skal vi måle, hvor god den er til at lave forudsigelser. I stedet for blot at måle antallet af korrekte gæt, anvender vi en såkaldt *loss-funktion*, som kvantificerer, hvor præcist modellen forudsiger. For klassifikationsproblemer bruger vi ofte *cross-entropy loss*, som evaluerer forskellen mellem modellens sandsynlighedsfordeling og de faktiske labels. Loss-funktionen tager modellens sandsynligheder for hver klasse og beregner, hvor langt de er fra de korrekte labels.

Eksempelvis, hvis et datapunkt har en korrekt label på klasse 3, og modellen giver sandsynlighederne.

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.03 \\ 0.25 \\ 0.07 \\ 0.18 \\ 0.09 \\ 0.04 \\ 0.11 \\ 0.06 \\ 0.05 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Cross-entropy loss beregnes ved formlen:

$$L_i = -\sum_{j=1}^{10} \hat{y}_{ij} \log(y_{ij}) \tag{19}$$

hvor $\hat{y}_{ij}$ er den korrekte label, og y_{ij} er modellens forudsigelse for klasse j. Dette sikrer, at modellen straffes hårdt for lave sandsynligheder på den korrekte klasse. Summen af loss over hele datasættet divideres med antallet af datapunkter for at få gennemsnitlig loss:

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_i \tag{20}$$

Cross-entropy loss er kontinuert og differentierbar, hvilket gør det muligt at optimere ved hjælp af gradient descent. Målet er at minimere loss, så modellen bliver bedre til at forudsige. Dette gør cross-entropy til en standardmetode for klassifikationsopgaver, hvor sandsynlighedsfordelinger er i spil.

4.2 Softmax

Softmax er en aktiveringsfunktion, der bruges i det sidste lag af et neuralt netværk, når outputtet skal repræsentere en sandsynlighedsfordeling over forskellige klasser. Softmax-funktionen tager en vektor af vilkårlige reelle tal og omdanner dem til en vektor af sandsynligheder, hvor summen af sandsynlighederne er 1. Softmax-funktionen er defineret som:

$$\text{softmax}(z_i) = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^{K} e^{z_j}} \tag{21}$$

hvor z_i er elementet i inputvektoren, og K er antallet af klasser. Softmax-funktionen anvendes ofte i klassifikationsproblemer, hvor outputtet skal repræsentere sandsynligheden for hver klasse. Herunder ses et eksempel på softmax-funktionen anvendt på et enkelt datapunkt i:

$$\underbrace{\hat{y}_i = \text{softmax}\left(\begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right)}_{\text{Modellens prediktion}} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2.0}}{e^{2.0}+e^{1.0}+e^{0.1}} \\ \frac{e^{1.0}}{e^{2.0}+e^{1.0}+e^{0.1}} \\ \frac{e^{0.1}}{e^{2.0}+e^{1.0}+e^{0.1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.659 \\ 0.242 \\ 0.099 \end{bmatrix} \tag{22}$$

I dette eksempel er sandsynligheden for klasse 1 (første element) 65.9%, for klasse 2 (andet element) 24.2%, og for klasse 3 (tredje element) 9.9%. Softmax-funktionen sikrer, at summen af sandsynlighederne er 1, hvilket gør det muligt at tolke outputtet som en sandsynlighedsfordeling. (Sanderson, 2017)

4.3 Gradient descent

Gradient descent er en algoritme, der tager loss-funktionen og beregner gradienten af denne i forhold til alle modellens parametre (vægtene og biases). Gradienten er en vektor, der peger i retningen af den største stigning af loss-funktionen. For at minimere loss-funktionen skal vi derfor bevæge os i den modsatte retning af gradienten. Dette gøres ved at opdatere vægtene og biases i modellen med gradienten ganget med en konstant, kaldet *learning* *rate*. Processen gentages, indtil loss-funktionen er tilstrækkeligt minimeret. (IBM, 1994; Nielsen, 2019b; Sanderson, 2017) Antag, at vi organiserer modellens vægte og biases i en søjlevektor $\vec{W}$, og at loss-funktionen er $L(\vec{W})$. Gradienten af loss-funktionen er $\nabla L(\vec{W})$. Derfor beskriver søjlevektoren $-\nabla L(\vec{W})$, hvordan vi kan opdatere $\vec{W}$ for at minimere loss-funktionen og dermed forbedre modellens præstation. Algoritmen, der finder gradienten på baggrund af modellens parametre og loss-funktionen, kaldes *backpropagation*. (Nielsen, 2019b; Sanderson, 2017) Hvordan backpropagation fungerer, vil blive gennemgået mere detaljeret i et kommende afsnit. Indtil videre antager vi blot, at den fungerer som beskrevet og returnerer den korrekte gradient for modellens parametre.

4.4 Partielle afledte

Partielle afledte bruges til at beskrive, hvordan en funktion ændrer sig, når kun én af dens variabler ændres, mens de andre holdes konstante. Lad os antage, at vi har en funktion $f(x, y)$, der afhænger af to variabler x og y. Den partielle afledte af f med hensyn til x betegnes som $\frac{\partial f}{\partial x}$ og repræsenterer hældningen af f i x-retningen. Tilsvarende betegner $\frac{\partial f}{\partial y}$ hældningen i y-retningen. Partielle afledte er særligt nyttige i optimering og machine learning, hvor de bruges til at finde gradienten af en funktion med flere variabler. Gradientens komponenter består netop af de partielle afledte for hver variabel. For eksempel, hvis vi ønsker at minimere en funktion $f(x, y)$, kan vi bruge gradienten $\nabla f(x, y)$, som indeholder de partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$, til at navigere mod lavere værdier af f. (Kirsanov, 2024)

4.5 Kædereglen

Kædereglen er en fundamental regel i differentialregning, der gør det muligt at differentiere sammensatte funktioner. Hvis vi har to funktioner, $f(g(x))$, hvor f afhænger af $g(x)$, og g afhænger af x, siger kædereglen, at den afledte af f med hensyn til x er produktet af den afledte af f med hensyn til g og den afledte af g med hensyn til x:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{23}$$

Med Leibniz notation kan kædereglen skrives som:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{hvor } z = g(x) \tag{24}$$

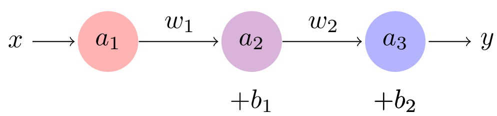
Kædereglen er en central den i neurale netværk og i machine learning, især i algoritmen backpropagation, hvor det kræves at beregne gradienten af en sammensat loss-funktion i forhold til modellens parametre. (Kirsanov, 2024)

4.6 Backpropagation

Antag et simpelt neuralt netværk som det, der er vist i (Figur 4) tidligere, og loss-funktionen for dette netværk, L. L har som funktionsparameter alle modellens parametre og giver en kvantitativ vurdering af, hvor gode disse parametre er givet et datasæt. En primitiv måde at optimere modellens parametre på er at ændre hver parameter separat og undersøge, om loss-funktionen er højere eller lavere med de nye parametre. Hvis loss er lavere, ændres parameteren; hvis ikke, nulstilles parameteren, og den næste justeres. Gentages denne proces tilstrækkeligt mange gange, vil man nærme sig et minimum i loss-funktionen. Selvom denne metode er primitiv, kan den fungere for en simpel model som den, der er visualiseret i (Figur 4). Dog vil denne tilgang være ineffektiv og ekstremt langsom for en model med hundredevis eller tusindvis af parametre og er derfor ikke en praktisk metode for den gældende problemstilling. Denne vilkårlige permutationsalgoritme er den bedste metode i generelle tilfælde, da der ikke nødvendigvis findes en bedre metode. (Kirsanov, 2024) For differentiable udregninger, som dem i et neuralt netværk, findes der dog en langt bedre metode, der muliggør markant mere effektiv optimering af modellens parametre. Denne algoritmes formål er at forudsige, hvordan en ændring i modellens parametre vil påvirke loss-funktionen, uden at justere manuelt. Selvom denne algoritme kan lyde umulig, bygger den faktisk på fundamentale matematiske principper. Algoritmen kaldes *backpropagation*. (Kirsanov, 2024; Nielsen, 2019a; Sanderson, 2017) eksemplet herunder gennemgår hvordan de afledte udregnes i et simpelt neuralt netværk for at illustrere backpropagation anvendt.

4.6.1 Udregning af gradienten

Beskue det nedstående neurale netværk med 1 neuron i hvert lag og et skjult lag, Dette afsnit har til formål at gennemgå hvordan gradienten af loss funktionen udregnes i forhold til vægtene og biases i modellen. dette eksempel bruger sigmoid aktiveringsfunktionen og kvadratisk loss funktion, som er en lidt anden end den tidligere beskrevne cross-entropy loss funktion. Dette er gjort da de partielle afledte er lettere at udregne i dette tilfælde og vil derfor gøre det lettere at forstå backpropagation.



Figur 6: Et simpelt neuralt netværk

For at simplificere senere udregninger, er modellen konstrueret således at kun a_2 benytter sig af en aktiveringsfunktion $\sigma(x)$. Så for at udregne y givet x kan denne udregnes således:

$$y = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 \tag{25}$$

Og lavet om til en funktion $f(x)$:

$$f(w_1, b_1, w_2, b_2, x) = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 \tag{26}$$

Og insættes i loss funktionen $L(y)$:

$$L(y_i) = (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad \text{hvor } \hat{y}_i \text{ er det rigtige svar for } i \text{ indeks} \tag{27}$$

$$L(f(w_1, b_1, w_2, b_2, x)) = L(\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2) \tag{28}$$

Hvis vi nu har en loss funktion $L(y_i)$, der kvantificerer, hvor god modellen er til at prediktere, kan vi nu udregne gradienten af L i forhold til w_1, b_1, w_2 og b_2. Dette gøres ved at bruge kædereglen til at udregne de partielle afledte af L i forhold til w_1, b_1, w_2 og b_2. Skrivemåden y_i erstattes hermed med y da indekset ikke er vigtigt for resten af eksemplet. Først udregnes $\frac{\partial L}{\partial b_2}$

Her kan kædereglen bruges til at udregne $\frac{\partial L}{\partial b_2}$:

$$\frac{\partial L}{\partial b_2} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b_2} \tag{29}$$

Lad os først udregne $\frac{\partial L}{\partial y}$, som er den partielle afledte af L i forhold til y, denne er relativt simpel at udregne, da L blot kan differentieres på normal vis:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 \cdot (y - \hat{y}) = 2y - 2\hat{y} \tag{30}$$

Og $\frac{\partial y}{\partial b_2}$, som er den partielle afledte af y i forhold til b_2, denne er også simpel at udregne, da resten antages at være konstant og derfor ender vi med:

$$\frac{\partial y}{\partial b_2} = 1 \qquad\qquad L(\overbrace{\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2}^{y}) \tag{31}$$

Så $\frac{\partial L}{\partial b_2}$ kan nu udregnes:

$$\frac{\partial L}{\partial b_2} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b_2} = \frac{\partial L}{\cancel{\partial y}} \cdot \frac{\cancel{\partial y}}{\partial b_2} \tag{32}$$

$$= (2y - 2\hat{y}) \cdot 1 = 2y - 2\hat{y} \quad \text{hvor} \quad y = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 \tag{33}$$

$$= 2 \cdot \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + 2b_2 - 2\hat{y} \tag{34}$$

Nu er $\frac{\partial L}{\partial b_2}$ udregnet! Nu kan $\frac{\partial L}{\partial w_2}$ udregnes på samme måde, først opdeles $\frac{\partial L}{\partial w_2}$ efter kædereglen:

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w_2} \tag{35}$$

Eftersom $\frac{\partial L}{\partial y}$ allerede er udregnet, kan vi nu udregne $\frac{\partial y}{\partial w_2}$, som er den partielle afledte af y i forhold til w_2. Dette kan udregnes da w_2 kun afhænger af $\sigma(w_1 \cdot x + b_1)$ og da den er konstant i forhold til w_2, den partielle afledte er derfor lig $\sigma(w_1 \cdot x + b_1)$:

$$\frac{\partial y}{\partial w_2} = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \qquad\qquad L(\overbrace{\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2}^{y}) \tag{36}$$

Så $\frac{\partial L}{\partial w_2}$ kan nu udregnes:

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w_2} = \frac{\partial L}{\cancel{\partial y}} \cdot \frac{\cancel{\partial y}}{\partial w_2} \tag{37}$$

$$= (2y - 2\hat{y}) \cdot \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \quad \text{hvor} \quad y = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 \tag{38}$$

$$= 2 \cdot (\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 - \hat{y}) \cdot \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \tag{39}$$

Nu er $\frac{\partial L}{\partial w_2}$ udregnet! Nu kan $\frac{\partial L}{\partial b_1}$ udregnes på samme måde, Dog er denne mere kompleks, da den er "dybere"i kæden, og derfor skal der bruges kædereglen flere gange. Først opdeles $\frac{\partial L}{\partial b_1}$ efter kædereglen:

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial b_1} \tag{40}$$

Beskue (Figur 6) og Ligning (28) for hvordan a_2 er defineret. Så $\frac{\partial L}{\partial b_1}$ kan nu udregnes, da $\frac{\partial L}{\partial y}$ allerede er udregnet, kan vi nu udregne $\frac{\partial y}{\partial a_2}$, som er den partielle afledte af y i forhold til a_2. Her kan samme tankegang bruges idet a_2 kun afhænger af w_2:

$$\frac{\partial y}{\partial {\color{blue}a_2}} = w_2 \qquad\qquad L(\overbrace{{\color{blue}\sigma(w_1 \cdot x + b_1)} \cdot w_2 + b_2}^{y}) \tag{41}$$

Nu kan $\frac{\partial a_2}{\partial b_1}$ udregnes, som er den partielle afledte af a_2 i forhold til b_1. Her vil den partielle afledte være $\sigma'(w_1 \cdot x + b_1)$, da a_2 afhænger direkte af b_2 gennem aktiveringsfunktionen

$$\frac{\partial a_2}{\partial {\color{blue}b_1}} = \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \qquad\qquad L(\overbrace{\sigma(w_1 \cdot x + {\color{blue}b_1})}^{a_2} \cdot w_2 + b_2) \tag{42}$$

Så $\frac{\partial L}{\partial b_1}$ kan nu udregnes:

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial b_1} = \frac{\partial L}{\cancel{\partial y}} \cdot \frac{\cancel{\partial y}}{\cancel{\partial a_2}} \cdot \frac{\cancel{\partial a_2}}{\partial b_1} \tag{43}$$

$$= (2y - 2\hat{y}) \cdot w_2 \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \quad \text{hvor} \quad y = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 \tag{44}$$

$$= 2 \cdot (\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 - \hat{y}) \cdot w_2 \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \tag{45}$$

Nu er $\frac{\partial L}{\partial b_1}$ udregnet! Nu kan $\frac{\partial L}{\partial w_1}$ udregnes på samme måde, På samme måde er denne mere kompleks, da den også er "dybere"i kæden, og derfor skal der bruges kædereglen flere gange. Først opdeles $\frac{\partial L}{\partial w_1}$ efter kædereglen:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial w_1} \tag{46}$$

Så $\frac{\partial L}{\partial w_1}$ kan nu udregnes, da $\frac{\partial L}{\partial y}$ og $\frac{\partial y}{\partial a_2}$ allerede er udregnet, Nu kan $\frac{\partial a_2}{\partial w_1}$ udregnes, som er den partielle afledte af a_2 i forhold til w_1. Da $a_2 = \sigma(w_1 \cdot x + b_1)$, afhænger a_2 af w_1 gennem argumentet, og med hensyn til kædereglen, vil den partielle afledte være:

$$\frac{\partial a_2}{\partial {\color{blue}w_1}} = x \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \qquad\qquad L(\overbrace{\sigma({\color{blue}w_1} \cdot x + b_1)}^{a_2} \cdot w_2 + b_2) \tag{47}$$

Så $\frac{\partial L}{\partial w_1}$ kan nu udregnes:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial w_1} = \frac{\partial L}{\cancel{\partial y}} \cdot \frac{\cancel{\partial y}}{\cancel{\partial a_2}} \cdot \frac{\cancel{\partial a_2}}{\partial w_1} \tag{48}$$

$$= (2y - 2\hat{y}) \cdot w_2 \cdot x \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \quad \text{hvor} \quad y = \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 \tag{49}$$

$$= 2 \cdot (\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 - \hat{y}) \cdot w_2 \cdot x \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \tag{50}$$

Lad os tage et skridt tilbage og opsummere, hvad der er blevet udregnet. Vi har nu udregnet gradienten af loss funktionen i forhold til modellens parametre, netop w_1, b_1, w_2 og b_2. Dette er essentielt for at kunne træne modellen effektivt, da vi nu ved, hvordan loss funktionen ændrer sig, når vi ændrer vægtene og biases. Dette gør det muligt at bruge gradient descent til at minimere loss funktionen og dermed forbedre modellens præstation. Dette gøres i priksis ved at gemme aktiveringerne af de forskellige lag når modellen prediktere, og derefter bruge disse mellemregninger til at regne baglæns og dermed finde gradienten, det er her algoritmen backpropagation får sit navn. Selvom eksemplet i dette afsnit er simpelt, kan samme principper anvendes på langt mere komplekse neurale netværk med mange flere lag og neuroner. Her vil værdierne dog være matricer og vektorer, og derfor vil de partielle afledte således også være organiseret i matricer, mens dette lyder komplekst, er det i praksis blot en udvidelse af de principper, der er blevet gennemgået i dette afsnit, bare med flere indekser.

Lad os for en god ordens skyld tjekke vores svar efter ved brug af Maple CAS værktøjet:

$$L(y) \coloneqq (y - \hat{y})^2 : \tag{51}$$

$$f(w_1, b_1, w_2, b_2, x) \coloneqq \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 : \tag{52}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_2} = \mathrm{diff}(L(f(w_1, b_1, w_2, b_2, x)), b_2) = 2 \cdot \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + 2 \cdot b_2 - 2 \cdot \hat{y} \tag{53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = \mathrm{diff}(L(f(w_1, b_1, w_2, b_2, x)), w_2) = 2 \cdot (\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 - \hat{y}) \cdot \sigma(w_1 \cdot x + b_1) \tag{54}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = \mathrm{diff}(L(f(w_1, b_1, w_2, b_2, x)), b_1) = 2 \cdot (\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 - \hat{y}) \cdot w_2 \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \tag{55}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = \mathrm{diff}(L(f(w_1, b_1, w_2, b_2, x)), w_1) = 2 \cdot (\sigma(w_1 \cdot x + b_1) \cdot w_2 + b_2 - \hat{y}) \cdot w_2 \cdot x \cdot \sigma'(w_1 \cdot x + b_1) \tag{56}$$

Som det ses er vores svar korrekt, og dermed er vores udregninger korrekte. Da udledningen af de afledte for at mere kompliceret netværk ikke er meget anderledes end hvad der tidligere er gennemgået, vil de afledte fra (Keita, 2023; Kurbiel, 2021; Verma, 2020) såvel som den samme generelle tankegang blive brugt til at udlede de partielle afledte uden dybere redegørelse da dette ligger langt over opgavens omfang/niveau.

5 Valg af programmeringssprog

Til at implementere et neuralt netværk, er det nødvændigt at vælge et programmeringssprog, der er egnet til formålet. Der findes mange forskellige programmeringssprog, der kan bruges til at implementere neurale netværk, herunder Python, R, Java, C++, og mange flere. Men da det ønskes at programmet er interaktivt og let at bruge, er Python med PyGame eller Java med Processing de mest oplagte valg. Python og mere specifikt NumPy, som er et bibliotek til Python, er enormt brugervenligt og hurtigt at udføre matriceregning i. Java er også et godt valg, da det er et meget populært programmeringssprog, med faste typer som gør det nemmere at undgå fejl. Processing er et bibliotek til Java, der gør det nemt at lave grafik og interaktive applikationer. Men grundet Python's minimale syntaks er det valt til udviklingen af programmet.

6 Neuralt netværk implementeret i Python

Til genkendelse af håndskrevne tal med opløsning på 28×28 pixels skal input laget have $28 \cdot 28 = 748$ inputs. til de skjulte lag blev der nogenlunde arbitrært valgt 2 lag af 16 neuroner, outputlaget er bestående af 10 neuroner hvor hver repræsenterer sandsynligheden for at inputtet er det givne tal. Der blev valgt at bruge sigmoid funktionen som aktiveringsfunktion i de skjulte lag og softmax i outputlaget. Der blev valgt at bruge loss funktioned *cross-entropy loss* da det er en standard loss funktion til klassifikationsopgaver. Og gradient decent algorimen bruges til at minimere loss funktionen.

6.1 Dataindlæsning

MNIST datasættet er meget populært og der ligger derfor allerede en masse implementeringer af indlæsning af datasættet på nettet. Der blev valgt at bruge en implementering fra (Khodabakhsh, 2019) da den er udviklet som en klasse og derfor er nem at bruge. Klassen er vist i (Kodestykke 1), og kan indlæse både trænings- og testdatasættet med metoden `load_data()`. denne process tager ca. 1000ms på en almindelig computer, og skal kun køres en gang, når programmet starter, da dataen gemmes i arbejdshukommelsen efterfølgende.

6.2 Tegnefladen

Da opgaveformuleringen kræver et ”tegneprogram”, hvori brugeren selv kan indtaste tal, vil netop dette udvikles. Her tages Python med biblioteket PyGame i brug, da det tilbyder en række funktioner til at tegne til et vindue på computeren. Først skal et vindue laves:

```python
pygame.init()
WIDTH, HEIGHT = 800, 600
screen = pygame.display.set_mode((WIDTH, HEIGHT))
pygame.display.set_caption("Drawing Pad")
```

Nu er vinduet tegnet. Det blev valgt at lave tegnefladen som en klasse. Klassen skal holde styr på opløsningen såvel som alle pixelsene. Derfor kan vi definere konstruktøren således:

```python
class DrawingPad:
    def __init__(self):
        self.dx = 28
        self.dy = 28
        self.last_pixel_x = None
        self.last_pixel_y = None
        self.pixel_size = min(WIDTH // self.dx, HEIGHT // self.dy)
        self.pixel_values = [
            [0 for _ in range(self.dy)] for _ in range(self.dx)]
```

Her er `self.dx` og `self.dy` opløsningen af tegnefladen. `self.pixel_size` er størrelsen af pixelsene. Da pixelsene altid bør være kvadratiske, tages `min()` af både den lodrette og vandrette dimension. `self.pixel_values` er værdierne af alle de forskellige pixels i et 2D-array; alle værdierne starter som 0. `self.last_pixel_x` og `self.last_pixel_y` er interne variable til at holde styr på tegnelogikken. Dette forklares senere. Nu kan tegnefladen tegnes til vinduet:

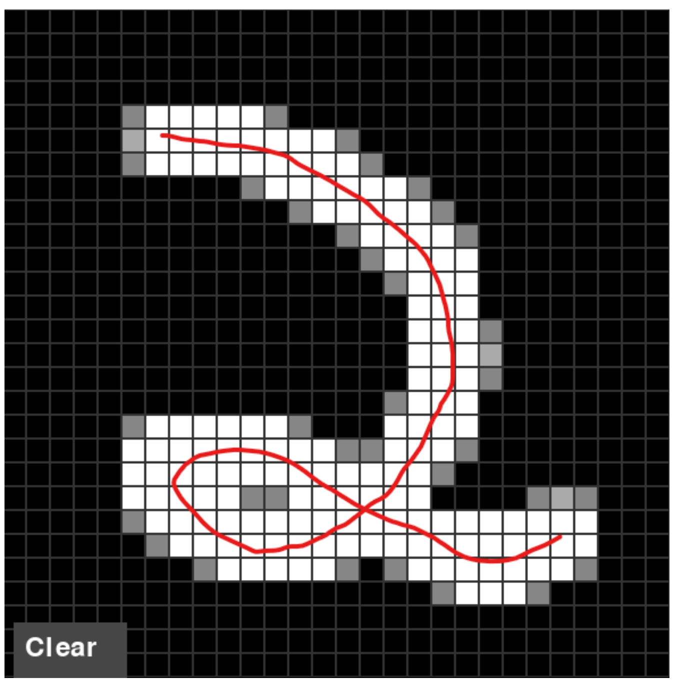
```python
    def draw(self):
        for i in range(self.dx):
            for j in range(self.dy):
                color_value = self.pixel_values[i][j]
                rect = pygame.Rect(
                    i * self.pixel_size,
                    j * self.pixel_size,
                    self.pixel_size,
                    self.pixel_size,
                )
                pygame.draw.rect(
                    screen, (color_value, color_value, color_value), rect)
                pygame.draw.rect(screen, (50, 50, 50), rect, 1)
```

Denne kode tegner et gitter af rektangler på skærmen ved at iterere gennem `self.dx` og `self.dy` og bruger `pygame.draw.rect` til at tegne hvert rektangel med en farve baseret på `self.pixel_values`, såvel som en grå 1-pixel-tyk border. For at opdatere tegnefladen, når brugeren tegner med musen, blev metoden `handle_event()` udviklet:

```python
    def handle_event(self, event):
        if event.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN:
            x, y = event.pos
            grid_x = x // self.pixel_size
            grid_y = y // self.pixel_size
            if (self.last_pixel_x == grid_x and self.last_pixel_y == grid_y):
                return
```

```
43             if 0 <= grid_x < self.dx and 0 <= grid_y < self.dy:
44                 self.last_pixel_x = grid_x
45                 self.last_pixel_y = grid_y
46                 for i in range(-1, 2):
47                     for j in range(-1, 2):
48                         new_x = grid_x + i
49                         new_y = grid_y + j
50                         if 0 <= new_x < self.dx and 0 <= new_y < self.dy:
51                             distance = (
52                                 (new_x - grid_x) ** 2 + (new_y - grid_y) ** 2
53                             ) ** 0.5
54                             newPixelValue = min(
55                                 255,
56                                 self.pixel_values[new_x][new_y]
57                                 + int(255 * (1 - distance / 3)),
58                             )
59                             if newPixelValue > self.pixel_values[new_x][new_y]:
60                                 self.pixel_values[new_x][new_y] = newPixelValue
```

`handle_event()` tjekker først, om hændelsen er `pygame.MOUSEBUTTONDOWN`. Hvis ikke, afsluttes funktionen. Musens klik-koordinater konverteres til gitterkoordinater på tegnefladen og sammenlignes med det sidste klik for at sikre, at den kun opdaterer én gang per pixel. Hvis gitterkoordinaterne er gyldige, opdaterer funktionen den seneste klikposition (`self.last_pixel_x` og `self.last_pixel_y`) og justerer pixelværdierne i en 3x3-rude omkring klikket. For hver nabocelle beregnes afstanden til musen. En ny pixelværdi (maks. 255) beregnes og opdateres, hvis den nye værdi er højere end den nuværende. Herunder på (Figur 7) ses et eksempel på dette, hvor den røde streg er den faktiske sti, som musen tog. Yderligere kan hele tegnefladeklassen beskues i (Kodestykke 4) på linje 26-87:



Figur 7: Eksempel på tegnefladen og den faktiske sti, som musen tog

Som ses på billedet muliggør afstandsmetoden at tegne en mere realistisk sti hvor der opstår et naturligt gradient i intensiteten. denne metode er valgt da den imiterer MNIST-datasættets udseende bedre end en simpel binær metode, og siden modellen er trænet på MNIST-datasættet, vil det give bedre resultater at komme så tæt på datasættet som muligt.

6.3 Prediktering

Hver frame opdateres modellens prediktion af det tegnede tal. Til dette bruges metoden `predict()`, den bruger modellens parametre som er gemt i `model.npz` filen, herunder ses indlæsningen af disse parametre samt selve `predict()` metoden:

```python
def main():
    model = None
    W1, b1, W2, b2, W3, b3 = None, None, None, None, None, None
    try:
        model = np.load("model.npz")
        W1, b1 = model['W1'], model['b1']
        W2, b2 = model['W2'], model['b2']
        W3, b3 = model['W3'], model['b3']
    except FileNotFoundError:
        print("Model file not found. Please run train.py to train the model.")
        sys.exit(1)
```

```python
def predict(image, W1, b1, W2, b2, W3, b3):
    x = np.array(image).reshape(-1) / 255.0
    Z1 = x @ W1 + b1
    A1 = sigmoid_activation(Z1)
    Z2 = A1 @ W2 + b2
    A2 = sigmoid_activation(Z2)
    Z3 = A2 @ W3 + b3
    A3 = softmax(Z3)
    return np.argmax(A3), A3
```

`.npz` formatet er blot et format til at gemme flere NumPy arrays i en fil. i `main()` metoden indlæses disse parametre og gemmes i variablerne `w1`, `b1`, `w2`, `b2`, `w3` og `b3`. Disse bruges i `predict()` metoden sammen med et input, som er en 2D-array af pixelværdierne, som bliver lavet om til `x` med `.reshape(-1)`, hvor hver række er sat sammen til en lang række. Herunder ses selve `predict()` metoden bare skrevet som matematik:

$$y = L\left(\text{softmax}\left(W_3 \cdot \sigma\left(W_2 \cdot \sigma\left(W_1 \cdot X + B_1\right) + B_2\right) + B_3\right)\right) \tag{57}$$

Denne ligning repræsenterer outputtet y fra `predict()`. Modellen udfører følgende beregninger: Inputtet X multipliceres med vægtmatricen W_1 og lægges sammen med biasvektoren B_1. Resultatet `Z1` gennemgår sigmoid aktiveringsfunktionen σ. Denne proces gentages for det andet lag med vægte W_2 og bias B_2. I det tredje lag multipliceres de transformerede data med W_3, lægges sammen med B_3, og sendes gennem softmax-funktionen. Til sidst anvendes en cross-entropy loss funktionen L på outputtet. Operatoren $\cdot$ betegner matrixmultiplikation, hvilket er passende i denne sammenhæng, dog er samme operator i Python-notation lig `@`. i koden er `Z` blot en betegnelse for værdierne i de forskellige lag før de sendes gennem aktiveringsfunktionen og bliver til `A`. Så for at prediktere modellen med værdierne fra tegnefladen kan man gøre således:

```python
        image = drawing_pad.get_image()
        predicted_digit, probabilities = predict(image, W1, b1, W2, b2, W3, b3)
```

6.4 De afledte

Som tidligere beskrevet er selve udregningen af de partielle afledte over opgavens omfang og vil derfor ikke blive udregnet fra bunden. Der vil tages udgangspunkt i de afledte fra (Keita, 2023; Kurbiel, 2021; Verma, 2020). De afledte nævnt i disse kilder antages at være korrekte, dog vil de senere blive testet med *finite difference* metoden for at sikre deres korrekthed. (Verma, 2020) påstår følgende afledte for de forskellige lag i et netværk med 1 skjult lag med Cross-Entropy loss og Softmax aktiveringsfunktion i outputlaget:

$$dZ_2 = \frac{\partial L}{\partial Z_2} = A_2 - Y \tag{58}$$

$$dW_2 = \frac{\partial L}{\partial W_2} = \frac{1}{m}(dZ_2 \cdot A_1^T) \tag{59}$$

$$dB_2 = \frac{\partial L}{\partial B_2} = \frac{1}{m}\sum dZ_2 \tag{60}$$

$$dZ_1 = \frac{\partial L}{\partial Z_1} = W_2^T \cdot \sigma'(Z_1) \tag{61}$$

$$dW_1 = \frac{\partial L}{\partial W_1} = \frac{1}{m}(dZ_1 \cdot X^T) \tag{62}$$

$$dB_1 = \frac{\partial L}{\partial B_1} = \frac{1}{m}\sum dZ_1 \tag{63}$$

Hvor m er antallet af træningsdata, A_1 og A_2 er aktiveringerne i de forskellige lag, Y er de rigtige svar, og σ' er den afledte af sigmoid funktionen, bemærk at Z er værdierne i de forskellige lag før de sendes gennem aktiveringsfunktionen og hermed bliver til A. Kilden (Kurbiel, 2021) er enige med denne differentiering af Cross-entry loss og Softmax aktiveringsfunktionen. Da vores model er bestående af 2 skjulte lag, kan disse afledte udvides til at gælde for 2 skjulte lag, da hver lag kun er afhængig af det forrige, er det blot en udvidelse af de samme principper som tidligere beskrevet ba begge de skjulte lag er aktiveret med sigmoid funktionen. Derfor kan de afledte for hele modellen skrives som:

$$dZ_3 = \frac{\partial L}{\partial Z_3} = A_3 - Y \tag{64}$$

$$dW_3 = \frac{\partial L}{\partial W_3} = \frac{1}{m}(dZ_3 \cdot A_2^T) \tag{65}$$

$$dB_3 = \frac{\partial L}{\partial B_3} = \frac{1}{m}\sum dZ_3 \tag{66}$$

$$dZ_2 = \frac{\partial L}{\partial Z_2} = W_3^T \cdot \sigma'(Z_2) \tag{67}$$

$$dW_2 = \frac{\partial L}{\partial W_2} = \frac{1}{m}(dZ_2 \cdot A_1^T) \tag{68}$$

$$dB_2 = \frac{\partial L}{\partial B_2} = \frac{1}{m}\sum dZ_2 \tag{69}$$

$$dZ_1 = \frac{\partial L}{\partial Z_1} = W_2^T \cdot \sigma'(Z_1) \tag{70}$$

$$dW_1 = \frac{\partial L}{\partial W_1} = \frac{1}{m}(dZ_1 \cdot X^T) \tag{71}$$

$$dB_1 = \frac{\partial L}{\partial B_1} = \frac{1}{m}\sum dZ_1 \tag{72}$$

Bemærk her hvordan dZ_2, dW_2 og dB_2 på samme måde som dZ_1, dW_1 og dB_1 da de på lige vis kun er afhængige af det forrige lags værdier. Disse afledte kan nu implementeres i Python således:

```python
    def update(self, X, Y, pred, rate=1):
        m = X.shape[0]
        A1, A2, A3 = pred['A1'], pred['A2'], pred['A3']
        dZ3 = A3 - Y
        dW3 = (A2.T @ dZ3) / m
        db3 = np.sum(dZ3, axis=0) / m
        dZ2 = (dZ3 @ self.W3.T) * sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(A2)
        dW2 = (A1.T @ dZ2) / m
        db2 = np.sum(dZ2, axis=0) / m
        dZ1 = (dZ2 @ self.W2.T) * sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(A1)
```

```
52        dW1 = (X.T @ dZ1) / m
53        db1 = np.sum(dZ1, axis=0) / m
54        self.W1 -= rate * dW1
55        self.b1 -= rate * db1
56        self.W2 -= rate * dW2
57        self.b2 -= rate * db2
58        self.W3 -= rate * dW3
59        self.b3 -= rate * db3
```

Bemærk på linje 54-59 hvordan indlæringsraten ganges med gradienten og subtraheres fra vægtene og biases. Dette er selve gradient descent algoritmen, som bruges til at minimere loss funktionen. Bemærk også at de afledte bruger den afledte af sigmoid funktionen, hvor i koden bruges `sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(y)` frem for `sigmoid_derivative(x)` til at udregne denne. Beskue (Kodestykke 2) i bilag for at se implementeringen af denne funktion, Men grunden til dette er at sigmoid funktionen allerede er udregnet i `predict()` metoden tidligere, og derfor kan den bruges til at udregne hældningen meget hurtigere end hvis den skulle udregnes igen. Det kan også tydligt ses at `sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(y)` er hurtigere end `sigmoid_derivative(x)` i (Kodestykke 2) i bilag på linje 6-11. Selvom det er en lille besparelse enkeltvis, vil denne funktion blive kaldt enormt mange gange, og derfor er det vigtigt at den er så hurtig som muligt, så man undgår at udregne ting flere gange, når det ikke er nødvendigt. (Smith, 2024)

6.5 Træning

På baggrund af de implementerede metoder kan modellen nu trænes. Dette gøres i `train()` metoden, som ses herunder:

```
    def train(self, X, Y, epochs):
        idx = np.random.permutation(X.shape[0])
        X, Y = X[idx], Y[idx]

        X_batches = np.array_split(X, X.shape[0] // 1000)
        Y_batches = np.array_split(Y, Y.shape[0] // 1000)
        for epoch in range(1, epochs + 1):
            for X_batch, Y_batch in zip(X_batches, Y_batches):
                pred = self.predict(X_batch)
                self.update(X_batch, Y_batch, pred, rate=1)
            if epoch % 10 == 0:
                loss = -np.mean(np.sum(Y_batch * np.log(pred['A3'] + 1e-8), axis=1))
                accuracy = np.mean(np.argmax(pred['A3'], axis=1) == np.argmax(Y_batch, axis=1))
                test_pred = self.predict(x_test)
                test_accuracy = np.mean(np.argmax(test_pred['A3'], axis=1) == y_test)
                print(f"Epoch {epoch} Loss: {loss:.4f}, Accuracy: {accuracy * 100:.2f}%, Test Accuracy: {test_accuracy * 100:.2f}%")
            if epoch % 100 == 0:
                self.export_to_file("model.npz")
```

`train()` er konstrueret således, at den træner modellen over et specificeret antal epochs. For hver epoch bliver træningsdataene blandet med en tilfældig permutation af indeks, der genereres med `np.random.permutation(X.shape[0])`. Herefter omorganiseres `X` og `Y` baseret på denne rækkefølge for at sikre, at træningsforløbet ikke bliver påvirket af dataenes oprindelige rækkefølge. Efter blandingen opdeles de blandede data i mindre batches af 1.000 datapunkter hver. Dette muliggør brugen af mini-batch gradient descent, som er en mere effektiv, men støjende tilgang til minimering af loss-funktionen, da den bruger en tilnærmelse af gradienten. Dette har som biprodukt, at den kan undslippe visse lokale minima. For hvert batch kaldes først `predict()`-metoden, som beregner modellens prediktioner, og derefter `update()`-metoden, som opdaterer modellens parametre med backpropagation-algoritmen. Hver 10. epoch evalueres og logger modellen ydeevne, både på træningsdataene og på et separat testdatasæt, som består af 10.000 datapunkter, der ikke er blevet brugt til træning. Dette gøres for at overvåge modellens præstation på nye, usete data, såvel som for at undgå overfitting. For at gemme modellen bliver den løbende gemt i en fil kaldet `model.npz` hver 100. epoch ved hjælp af `export_to_file()`-metoden, som kalder `np.savez()`-metoden fra NumPy. Dette giver mulighed for at stoppe træningen, når et tilfredsstillende resultat er opnået. Samlet set implementerer `train()` en standard træningsproces for et neuralt netværk, som inkluderer datablanding, mini-batch-træning, løbende evaluering og lagring af modellen.

Når denne metode kaldes ses følgende i konsollen:

```
C:/.../sop> python train.py
Loading MNIST data...
MNIST data loaded.
Epoch 10 Loss: 0.3930, Accuracy: 88.67%, Test Accuracy: 88.72%
Epoch 20 Loss: 0.2989, Accuracy: 91.32%, Test Accuracy: 91.01%
Epoch 30 Loss: 0.2545, Accuracy: 92.58%, Test Accuracy: 92.12%
Epoch 40 Loss: 0.2264, Accuracy: 93.43%, Test Accuracy: 92.66%
Epoch 50 Loss: 0.2062, Accuracy: 94.03%, Test Accuracy: 93.15%
Epoch 60 Loss: 0.1910, Accuracy: 94.46%, Test Accuracy: 93.53%
Epoch 70 Loss: 0.1792, Accuracy: 94.84%, Test Accuracy: 93.85%
Epoch 80 Loss: 0.1694, Accuracy: 95.09%, Test Accuracy: 94.07%
Epoch 90 Loss: 0.1610, Accuracy: 95.33%, Test Accuracy: 94.25%
Epoch 100 Loss: 0.1536, Accuracy: 95.54%, Test Accuracy: 94.31%
```

Med denne model arkitektur på 2 skjulte lag med 16 neuroner i hvert er en testnøjagtighed på 94.31% efter 100 epochs hvilket er meget tilfredsstillende til denne opgaves brugstilfælde. Dette resultat er opnået med en træningstid på ca. 40 sekunder på en almindelig computer. Hvordan modellen kan forbedres yderligere vil blive diskuteret i et senere afsnit.

Litteratur

IBM. (1994). What is Gradient Descent? — IBM. *IBM*. https://www.ibm.com/topics/gradient-descent

Keita, Z. (2023 december). Mastering Backpropagation: A Comprehensive Guide for Neural Networks. *DataCamp*. Hentet 7. december 2024, fra https://www.datacamp.com/tutorial/mastering-backpropagation

Khodabakhsh, H. (2019 januar). Read MNIST Dataset — Kaggle. *Kaggle*. https://www.kaggle.com/code/hojjatk/read-mnist-dataset

Kirsanov, A. (2024). The Most Important Algorithm in Machine Learning. https://www.youtube.com/watch?v=SmZmBKc7Lrs

Kurbiel, T. (2021 april). Derivative of the Softmax Function and the Categorical Cross-Entropy Loss. *Towards Data Science*. Hentet 8. december 2024, fra https://towardsdatascience.com/derivative-of-the-softmax-function-and-the-categorical-cross-entropy-loss-ffceefc081d1

Lauritzen, N., & Bökstedt, M. (2019). Tal og Lineær Algebra 2019 4 Matricer. *Matematisk Institut, Aarhus Universitet*. https://data.math.au.dk/interactive/lintrans/Chapters/vektorerogmatricer.html

LeCun, Y., Cortes, C., & Burges, C. J. (1994). MNIST handwritten digit database. *Courant Institute NYU, Google Labs, Microsoft Research*. https://yann.lecun.com/exdb/mnist/

Nielsen, M. (2019a). How the backpropagation algorithm works. http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap2.html

Nielsen, M. (2019b). Using neural nets to recognize handwritten digits. http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap1.html

Sanderson, G. (2017). Gradient descent, how neural networks learn. *3Blue1Brown*. https://www.3blue1brown.com/lessons/gradient-descent

Simonson, M. (2015 oktober). Matrix Multiplication Made Easy. *American Mathematical Society*. https://blogs.ams.org/mathgradblog/2015/10/19/matrix-multiplication-easy/

Smith, W. (2024 februar). Derivative of Sigmoid Function - Simplified Explanation for Better Understanding. *The Story of Mathematics*. Hentet 8. december 2024, fra https://www.storyofmathematics.com/derivative-of-sigmoid-function/

St. Clair, B. (2021 april). Explainer: What is a neuron? *Science News*. https://www.snexplores.org/article/explainer-what-is-a-neuron

Verma, A. (2020 juli). Building A Neural Net from Scratch Using R - Part 1. *R Views*. Hentet 8. december 2024, fra https://rviews.rstudio.com/2020/07/20/shallow-neural-net-from-scratch-using-r-part-1/

7 Bilag

mnist_dataloader.py

```python
from array import array
import struct
import numpy as np

class MnistDataloader(object):
    def __init__(self, training_images_filepath,training_labels_filepath,
                 test_images_filepath, test_labels_filepath):
        self.training_images_filepath = training_images_filepath
        self.training_labels_filepath = training_labels_filepath
        self.test_images_filepath = test_images_filepath
        self.test_labels_filepath = test_labels_filepath

    def read_images_labels(self, images_filepath, labels_filepath):
        labels = []
        with open(labels_filepath, 'rb') as file:
            magic, size = struct.unpack(">II", file.read(8))
            if magic != 2049:
                raise ValueError('Magic number mismatch, expected 2049, got {}'.format(magic))
            labels = array("B", file.read())

        with open(images_filepath, 'rb') as file:
            magic, size, rows, cols = struct.unpack(">IIII", file.read(16))
            if magic != 2051:
                raise ValueError('Magic number mismatch, expected 2051, got {}'.format(magic))
            image_data = array("B", file.read())
        images = []
        for i in range(size):
            images.append([0] * rows * cols)
        for i in range(size):
            img = np.array(image_data[i * rows * cols:(i + 1) * rows * cols])
            img = img.reshape(28, 28)
            images[i][:] = img

        return images, labels

    def load_data(self):
        x_train, y_train = self.read_images_labels(self.training_images_filepath, self.training_labels_filepath)
        x_test, y_test = self.read_images_labels(self.test_images_filepath, self.test_labels_filepath)
        return (x_train, y_train),(x_test, y_test)
```

Kodestykke 1: Python kode til indlæsning af MNIST datasættet

activations.py

```python
import numpy as np

def sigmoid_activation(x):
    return 1 / (1 + np.exp(-x))

def sigmoid_derivative(x):
    return np.exp(-x) / (1 + np.exp(-x))**2

def sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(sigmoid_output):
    # a faster way to calculate sigmoid_derivative
    return sigmoid_output * (1 - sigmoid_output)

def softmax(x):
    if x.ndim == 1:
        exp_x = np.exp(x - np.max(x))
        return exp_x / np.sum(exp_x)
    else:
        exp_x = np.exp(x - np.max(x, axis=1, keepdims=True))
        return exp_x / np.sum(exp_x, axis=1, keepdims=True)
```

Kodestykke 2: Python kode til aktiveringsfunktioner

train.py

```
import numpy as np
from mnist_dataloader import MnistDataloader  # Added import statement
from activations import sigmoid_activation, sigmoid_derivative, sigmoid_derivative_from_sigmoid_output, softmax

print("Loading MNIST data...")
mnist_dataloader = MnistDataloader(
        'mnist/train-images.idx3-ubyte', 'mnist/train-labels.idx1-ubyte',
        'mnist/t10k-images.idx3-ubyte', 'mnist/t10k-labels.idx1-ubyte'
    )
(x_train, y_train), (x_test, y_test) = mnist_dataloader.load_data()
print("MNIST data loaded.")

x_train = np.array(x_train).reshape(-1, 28*28) / 255.0
y_train_one_hot = np.zeros((len(y_train), 10))
y_train_one_hot[np.arange(len(y_train)), y_train] = 1

x_test = np.array(x_test).reshape(-1, 28*28) / 255.0
y_test_one_hot = np.zeros((len(y_test), 10))
y_test_one_hot[np.arange(len(y_test)), y_test] = 1

class NeuralNetwork:
    def __init__(self):
        self.noNodes = [16, 16]
        self.nI = x_train.shape[1]
        self.nO = y_train_one_hot.shape[1]
        self.W1 = np.random.uniform(-1, 1, (self.nI, self.noNodes[0]))
        self.b1 = np.random.uniform(-1, 1, self.noNodes[0])
        self.W2 = np.random.uniform(-1, 1, (self.noNodes[0], self.noNodes[1]))
        self.b2 = np.random.uniform(-1, 1, self.noNodes[1])
        self.W3 = np.random.uniform(-1, 1, (self.noNodes[1], self.nO))
        self.b3 = np.random.uniform(-1, 1, self.nO)

    def predict(self, X):
        Z1 = X @ self.W1 + self.b1
        A1 = sigmoid_activation(Z1)
        Z2 = A1 @ self.W2 + self.b2
        A2 = sigmoid_activation(Z2)
        Z3 = A2 @ self.W3 + self.b3
        A3 = softmax(Z3)
        return {'A1': A1, 'A2': A2, 'A3': A3, 'Z1': Z1, 'Z2': Z2, 'Z3': Z3}

    def update(self, X, Y, pred, rate=1):
        m = X.shape[0]
        A1, A2, A3 = pred['A1'], pred['A2'], pred['A3']
        dZ3 = A3 - Y
        dW3 = (A2.T @ dZ3) / m
        db3 = np.sum(dZ3, axis=0) / m
        dZ2 = (dZ3 @ self.W3.T) * sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(A2)
        dW2 = (A1.T @ dZ2) / m
        db2 = np.sum(dZ2, axis=0) / m
        dZ1 = (dZ2 @ self.W2.T) * sigmoid_derivative_from_sigmoid_output(A1)
        dW1 = (X.T @ dZ1) / m
        db1 = np.sum(dZ1, axis=0) / m
```

```
        self.W1 -= rate * dW1
        self.b1 -= rate * db1
        self.W2 -= rate * dW2
        self.b2 -= rate * db2
        self.W3 -= rate * dW3
        self.b3 -= rate * db3

    def train(self, X, Y, epochs):
        idx = np.random.permutation(X.shape[0])
        X, Y = X[idx], Y[idx]

        X_batches = np.array_split(X, X.shape[0] // 1000)
        Y_batches = np.array_split(Y, Y.shape[0] // 1000)
        for epoch in range(1, epochs + 1):
            for X_batch, Y_batch in zip(X_batches, Y_batches):
                pred = self.predict(X_batch)
                self.update(X_batch, Y_batch, pred, rate=1)
            if epoch % 10 == 0:
                loss = -np.mean(np.sum(Y_batch * np.log(pred['A3'] + 1e-8), axis=1))
                accuracy = np.mean(np.argmax(pred['A3'], axis=1) == np.argmax(Y_batch, axis=1))
                test_pred = self.predict(x_test)
                test_accuracy = np.mean(np.argmax(test_pred['A3'], axis=1) == y_test)
                print(f"Epoch {epoch} Loss: {loss:.4f}, Accuracy: {accuracy * 100:.2f}%, Test Accuracy: {test_accuracy * 100:.2f}%")
            if epoch % 100 == 0:
                self.export_to_file("model.npz")

    def export_to_file(self, filename):
        np.savez(filename, W1=self.W1, b1=self.b1, W2=self.W2, b2=self.b2, W3=self.W3, b3=self.b3)

nn = NeuralNetwork()
nn.train(x_train, y_train_one_hot, epochs=10000)
```

Kodestykke 3: Python kode til træning af neuralt netværk

run.py

```python
from array import array
import pygame
import sys
import numpy as np
from mnist_dataloader import MnistDataloader  # Added import statement
from activations import sigmoid_activation, softmax

pygame.init()
WIDTH, HEIGHT = 800, 600
screen = pygame.display.set_mode((WIDTH, HEIGHT))
pygame.display.set_caption("Drawing Pad")

BUTTON_COLOR = (70, 70, 70)
WHITE = (255, 255, 255)
BLACK = (0, 0, 0)


print("Loading MNIST data...")
mnist_dataloader = MnistDataloader(
        'mnist/train-images.idx3-ubyte', 'mnist/train-labels.idx1-ubyte',
        'mnist/t10k-images.idx3-ubyte', 'mnist/t10k-labels.idx1-ubyte'
    )
(x_train, y_train), _ = mnist_dataloader.load_data()
print("MNIST data loaded.")

class DrawingPad:
    def __init__(self):
        self.dx = 28
        self.dy = 28
        self.last_pixel_x = None
        self.last_pixel_y = None
        self.pixel_size = min(WIDTH // self.dx, HEIGHT // self.dy)
        self.pixel_values = [
            [0 for _ in range(self.dy)] for _ in range(self.dx)]

    def handle_event(self, event):
        if event.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN:
            x, y = event.pos
            grid_x = x // self.pixel_size
            grid_y = y // self.pixel_size
            if (self.last_pixel_x == grid_x and self.last_pixel_y == grid_y):
                return
            if 0 <= grid_x < self.dx and 0 <= grid_y < self.dy:
                self.last_pixel_x = grid_x
                self.last_pixel_y = grid_y
                for i in range(-1, 2):
                    for j in range(-1, 2):
                        new_x = grid_x + i
                        new_y = grid_y + j
                        if 0 <= new_x < self.dx and 0 <= new_y < self.dy:
                            distance = (
                                (new_x - grid_x) ** 2 + (new_y - grid_y) ** 2
                            ) ** 0.5
                            newPixelValue = min(
```

```
                                255,
                                self.pixel_values[new_x][new_y]
                                + int(255 * (1 - distance / 3)),
                            )
                            if newPixelValue > self.pixel_values[new_x][new_y]:
                                self.pixel_values[new_x][new_y] = newPixelValue

    def draw(self):
        for i in range(self.dx):
            for j in range(self.dy):
                color_value = self.pixel_values[i][j]
                rect = pygame.Rect(
                    i * self.pixel_size,
                    j * self.pixel_size,
                    self.pixel_size,
                    self.pixel_size,
                )
                pygame.draw.rect(
                    screen, (color_value, color_value, color_value), rect)
                pygame.draw.rect(screen, (50, 50, 50), rect, 1)

    def clear(self):
        self.pixel_values = [
            [0 for _ in range(self.dy)] for _ in range(self.dx)
        ]

    def set_image(self, image):
        self.pixel_values = np.array(image).T

    def get_image(self):
        pixel_values = self.pixel_values
        image = np.array(pixel_values).T
        return image

def predict(image, W1, b1, W2, b2, W3, b3):
    x = np.array(image).reshape(-1) / 255.0
    Z1 = x @ W1 + b1
    A1 = sigmoid_activation(Z1)
    Z2 = A1 @ W2 + b2
    A2 = sigmoid_activation(Z2)
    Z3 = A2 @ W3 + b3
    A3 = softmax(Z3)
    return np.argmax(A3), A3


def main():
    model = None
    W1, b1, W2, b2, W3, b3 = None, None, None, None, None, None
    try:
        model = np.load("model.npz")
        W1, b1 = model['W1'], model['b1']
        W2, b2 = model['W2'], model['b2']
        W3, b3 = model['W3'], model['b3']
    except FileNotFoundError:
        print("Model file not found. Please run train.py to train the model.")
        sys.exit(1)
```

```python

    screen.fill(BLACK)
    drawing_pad = DrawingPad()
    clear_button = pygame.Rect(10, HEIGHT - 60, 100, 50)
    font = pygame.font.Font(None, 36)
    button_text = font.render("Clear", True, WHITE)
    predicted_digit = None
    probabilities = None

    drawing_pad.set_image(x_train[1337]) # Set an example image from the training set, in this case the image is a 6
    print("Label of the image:", y_train[1337])

    while True:
        for event in pygame.event.get():
            if event.type == pygame.QUIT:
                pygame.quit()
                sys.exit()
            elif event.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN and clear_button.collidepoint(
                event.pos
            ):
                drawing_pad.clear()

        image = drawing_pad.get_image()
        predicted_digit, probabilities = predict(image, W1, b1, W2, b2, W3, b3)
        print("Predicted digit:", predicted_digit)

        mouse_clicked = pygame.mouse.get_pressed()[0]
        if mouse_clicked:
            drawing_pad.handle_event(
                pygame.event.Event(
                    pygame.MOUSEBUTTONDOWN, {"pos": pygame.mouse.get_pos()}
                )
            )
        screen.fill(BLACK)
        drawing_pad.draw()
        pygame.draw.rect(screen, BUTTON_COLOR, clear_button)
        screen.blit(button_text, (clear_button.x + 10, clear_button.y + 10))
        if predicted_digit is not None:
            prediction_text = font.render(f"Predicted: {predicted_digit}", True, WHITE)
            screen.blit(prediction_text, (WIDTH - 200, 10))
            for i, prob in enumerate(probabilities):
                prob_text = font.render(f"{i}: {prob * 100:.2f}%", True, WHITE)
                screen.blit(prob_text, (WIDTH - 200, 40 + i * 30))

        pygame.display.flip()


if __name__ == "__main__":
    main()
```

Kodestykke 4: Python kode til kørsel af neuralt netværk