Studie Område Projekt

Matematik A / Programmering B

Victor Østergaard Nielsen
3di - H. C. Ørsted Gymnasiet Lyngby
15/12/2024

Vejledere:
Jan Strauss Hansen (Matematik A)
Kristian Krabbe Møller (Programmering B)

Indhold

1 Opgaveformulering

Machine-learning

Hovedspørgsmål: Hvordan kan et simpelt neuralt netværk, uden unødige abstraktioner eller biblioteker, anvendes tilgenkendelse af håndskrevne tal i realtid i et tegneprogram på computeren, og hvad er matematikken bag?

Opgaveformulering:

- Redegør overordnet for begrebet neuralt netværk.
- Redegør for de grundlæggende matematiske principper bag neurale netværk herunder matriceregning.
- Redegør for valg af programmeringssprog ift. udvikling af programmer med neuralt netværk.
- Analysér hvordan et neutralt netværk kan programmeres, gerne uden unødvendige abstraktioner eller biblioteker, så det kan genkende håndskrevne tal i realtid i/fra et tegneprogram på computeren.
- Undersøg hvorledes programmet kan optimeres for at opnå lavest mulig fejlrate og evt. hvorledes støj i den analyserede data kan påvirke fejlraten.
- Diskuter og vurder hvorvidt neutrale netværk er den mest effektive tilgang til at genkende håndskrevne tal på en adaptiv og robust måde.

2 Indledning

3 Matricer og matrixregning

3.1 Matricer

En matrice er en tabel af tal, der er arrangeret i rækker og kolonner. En matrice kan repræsenteres med et stort bogstav, f.eks. A, og elementerne i matricen kan repræsenteres som a_{ij}, hvor i er rækken og j er kolonnen. En matrice med m rækker og n kolonner kaldes en $m \times n$ matrice. En matrice med lige mange rækker og kolonner kaldes en kvadratisk matrice. En matrice med kun én række kaldes en rækkevektor, og en matrice med kun én kolonne kaldes en søjlevektor. (Lauritzen & Bökstedt, 2019)

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ Matrice}} \qquad \underbrace{B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}}_{\text{Søjlevektor}} \qquad \underbrace{C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \end{bmatrix}}_{\text{Rækkevektor}} \tag{1}$$

Mens der i denne opgave ekskulstivt vil blive fokusseret på "2d"matricer, så er det også muligt at have "3d"matricer, hvor der er en dybde dimension. Dette kunne f.eks. være en matrice, der repræsenterer et billede, hvor der er en række og en kolonne for hver pixel, og en dybde for hver farvekanal.

3.2 Matrixregning

Matrixregning er en vigtig del af matematikken bag neurale netværk og er derfor vigtig at forstå. Der er flere forskellige operationer, der kan udføres på matricer, herunder addition, subtraktion, skalarmultiplikation og matrix-multiplikation m.m.

3.2.1 Addition og subtraktion

For at addere eller subtrahere to matricer skal de have samme dimensioner, altså de skal have samme mængde rækker og søjler. Givet dette, så er matmatkiken ikke meget andlernedes fra normale tal, det betyder at: $A + B = B + A$. Da de 2 matricer har samme dimension udføres addition og subtraktion således:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Hver position i A matricen bliver altså adderet eller subtraheret med samme position i B matricen.

3.2.2 Skalarmultiplikation af matricer

Givet tallet k kan man gange k på matricen A således:

$$k \cdot A = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

3.2.3 Elementvis anvendelse af en funktion på matricer

Givet en funktion $f(x)$ og en $m \times n$ matrice A, vil $f(A)$ være en $m \times n$ matrice, hvor $f(x)$ er blevet anvendt på hvert element i A:

$$f(A) = f\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(a_{11}) & f(a_{12}) & \dots & f(a_{1n}) \\ f(a_{21}) & f(a_{22}) & \dots & f(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a_{m1}) & f(a_{m2}) & \dots & f(a_{mn}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

3.2.4 Matrixmultiplikation

At gange to matricer sammen er lidt mere kompliceret, det indebærer først og fremmest at de 2 matricer er af kompatibel størrelse. Hvis A er en $m \times p$ matrice og B er en $p \times r$ matrice, så er $C = A \cdot B$ en $m \times r$ matrice. Bemærk at antallet af kolonner i A matricen skal være lig antallet af rækker i B matricen. For at finde elementet c_{ij} i C matricen ganges række i i A matricen med kolonne j i B matricen. Dette gøres ved at gange elementerne i række i i A matricen med elementerne i kolonne j i B matricen og summere dem. F.eks. hvis A er en 3×2 matrice og B er en 2×3 matrice, så er C en 3×3 matrice, og elementet c_{11} i C matricen findes således (Simonson, 2015):

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \tag{5}$$

Intuitivt kan dette visualiseres ved at tegne A og B matricerne således (Simonson, 2015):

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{b_{11}} & \phantom{b_{12}} & \phantom{b_{13}} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \tag{6}$$

For at finde elementet c_{11} i C matricen, ganges række 1 i A matricen med kolonne 1 i B matricen, dette er visualiseret herunder (Simonson, 2015):

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \color{blue}{b_{11}} & b_{12} & b_{13} \\ \color{purple}{b_{21}} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{teal}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \phantom{b_{12}} & \phantom{b_{13}} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad c_{11} = \color{red}{a_{11}} \cdot \color{blue}{b_{11}} + \color{teal}{a_{12}} \cdot \color{purple}{b_{21}} \tag{7}$$

Samme operation gentages for resten af positionerne i C matricen:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

Det ses nu visuelt at den resulterende matrice C er en 3×3 matrice når A er en 3×2 matrice og B er en 2×3 matrice. Det skal dog bemærkes at matrixmultiplikation ikke er kommutativ, altså $A \cdot B \neq B \cdot A$. Dette kan også ses visuelt ved at bytte om på A og B matricerne:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array} \tag{9}$$

Det ses at $A \cdot B$ og $B \cdot A$ ikke er ens, og derfor er matrixmultiplikation ikke kommutativ. (Lauritzen & Bökstedt, 2019) Selv med to kvadratiske matricer af samme dimension er matrixmultiplikation ikke nødvendigvis kommutativ. Dette kan betragtes i følgende eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Det ses at $A \cdot B \neq B \cdot A$, matrixmultiplikation er altså ikke kommutativ hverken i den resulterende størrelse i ikke kvadratiske matricer eller i kvadratiske matricer af samme størrelse. (Lauritzen & Bökstedt, 2019)

3.2.5 Transponering af matricer

Transponering af en matrice betyder at bytte om på rækker og kolonner. Hvis A er en $m \times n$ matrice, så er transponeringen af A en $n \times m$ matrice, og elementet a_{ij} i A matricen bliver til elementet a_{ji} i A^T matricen. Dette kan visualiseres ved at tegne A matricen og A^T matricen:

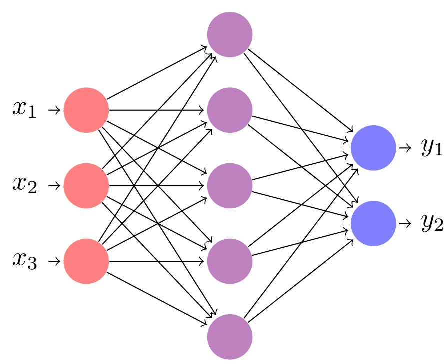
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \tag{12}$$

4 Neurale netværk

4.1 Introduktion

blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah

Figur 1: Neuroner i menneskehjernen fra (St. Clair, 2021)



Figur 2: Et simpelt neuralt netværk