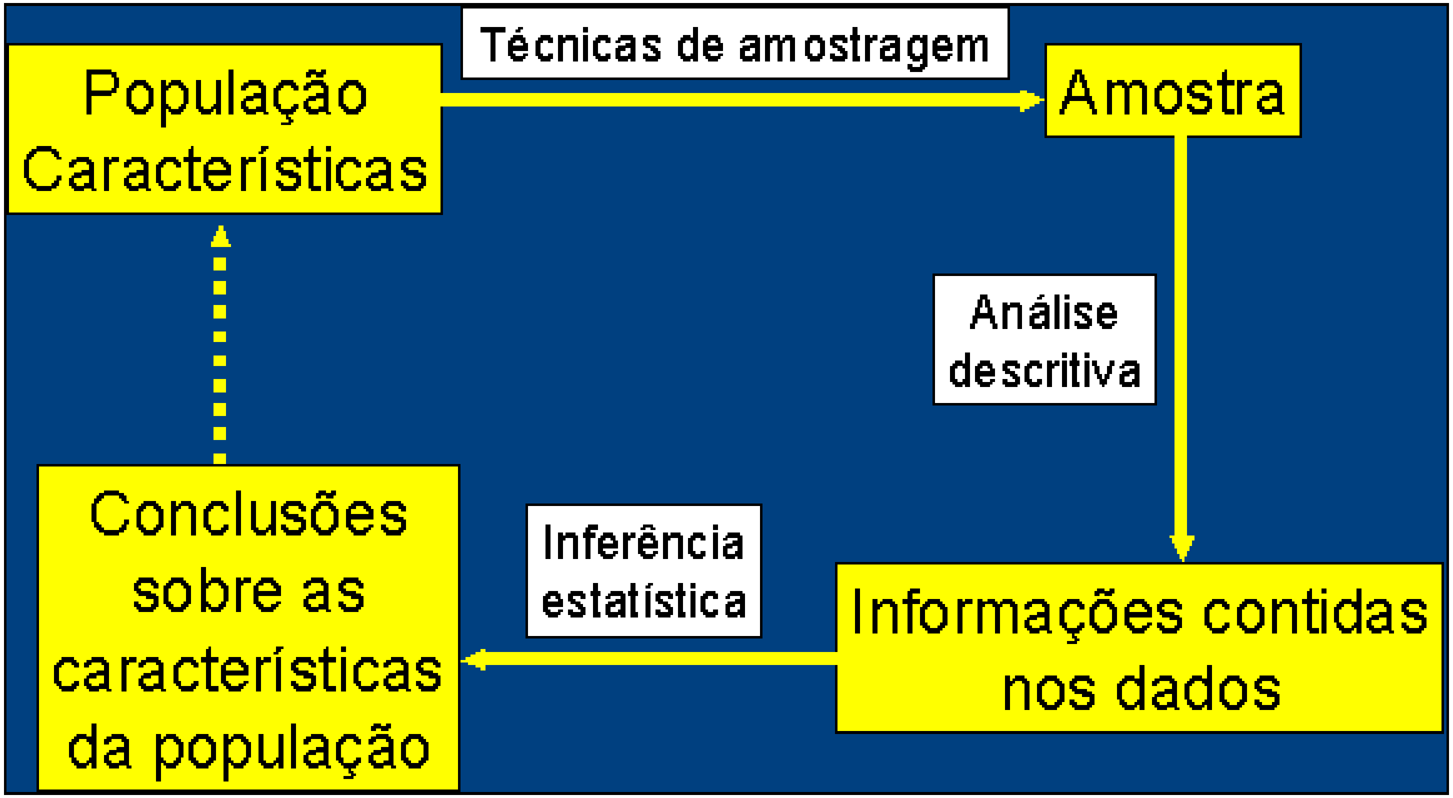
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

Teste de Hipóteses

Ana Amélia Benedito Silva

Etapas da Analise Estatística



ANÁLISE DESCRITIVA

- conjunto de técnicas que tem como objetivo descrever uma amostra extraída de uma população.
  - Tabelas
  - Gráficos
  - Medidas-resumo
    - medidas de tendência central
      - média, mediana, moda
    - medidas de dispersão
      - amplitude, desvio-padrão, erro-padrão
    - medidas separatrizes
      - percentis, quartis, decis

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

- Conjunto de técnicas que tem como objetivo estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra.
  - Teste de hipóteses
  - Estimação por parâmetros ou intervalo de confiança

- Permite ao pesquisador ir além da descrição dos dados da amostra

Inferência estatística

<u>Estimação</u>

- Qual é a media da altura dos brasileiros?
- Qual é a porcentagem de votos que o candidato A vai receber nas eleições?
- Qual é a porcentagem de adultos que já tomaram as 4 doses de vacina pra COVID-19 no Brasil?

<u>Teste de hipóteses</u>

- Será que a média da altura dos brasileiros é diferente de 1,65m?
- O candidato A vencerá as eleições?
- Será que pelo menos 50% dos adultos já tomou as 4 doses de vacina para COVID-19?

TESTE DE HIPÓTESES

PERGUNTA

↓

HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

⇒ média da altura dos brasileiros <> 1,65m?

↓

⇒ $H_0 : \mu = 1,65m$

$H_1 : \mu <> 1,65m$

HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

H_0 : Hipótese de igualdade ou nulidade
H_1 : Hipótese alternativa

- Aplicar um teste de hipóteses significa calcular as probabilidades de errar ao se aceitar ou rejeitar a hipótese de nulidade H_0
- A decisão é sempre tomada em relação à H_0:

Aceita-se ou rejeita-se H_0

Orientação para escolha de testes estatísticos

TABELA DE ORIENTAÇÃO NA ESCOLHA DE TESTES ESTATÍSTICOS

	Uma variável					Duas variáveis
Tipo da variável dependente	Uma amostra	Duas amostras		Mais de duas amostras		Medidas de correlação
		relacionadas	independentes	relacionadas	independentes	
Qualitativa nominal ou ordinal	binomial ou X^2	McNemar	X^2 ou Fischer	Prova Q de Cochran	X^2 para várias amostras	coeficiente de contigência C
Quantitativa discreta ou contínua (dados não seguem curva de Gauss)	Kolmogorov Smirnov	Wilcoxon ou Prova dos sinais	Mann-Whitney Ou Prova da Mediana	Prova de Friedman	Kruskal-Wallis ou Prova da mediana	correlação de Spearman
Quantitativa discreta ou contínua (dados seguem curva de Gauss)	Teste para média	teste t de Student pareado	teste t de Student para amostras independentes	ANOVA para medidas repetidas	ANOVA para grupos independentes	correlação de Pearson

Teste para média amostral

- Há 2 tipos:
  - Utilizando estatística z: quando a variância da população é conhecida, ou seja, existe alguma informação, externa aos dados, sobre a variância da variável em estudo na população

  - Utilizando estatística t: quando a variância da população é desconhecida, ou seja, quando não existe nenhuma informação, externa aos dados, sobre a variância da variável em estudo na população

Exemplo 1 – pacotes de café

(variância populacional conhecida)

Exemplo 1 – pacotes de café

- **Situação**

Uma máquina automática enche pacotes de café.

Sabe-se que a distribuição de probabilidade do peso destes pacotes segue uma **normal** com média de 500g e desvio-padrão de 20g.

Deseja-se verificar se a máquina está calibrada sem interromper a produção.

- **Evidência amostral**

Para testá-la um técnico colhe uma amostra com 16 pacotes a cada 30 minutos.

Suponha que as médias das amostras de café sejam iguais à 490g.

A máquina está descalibrada ou a diferença encontrada foi devida ao acaso?

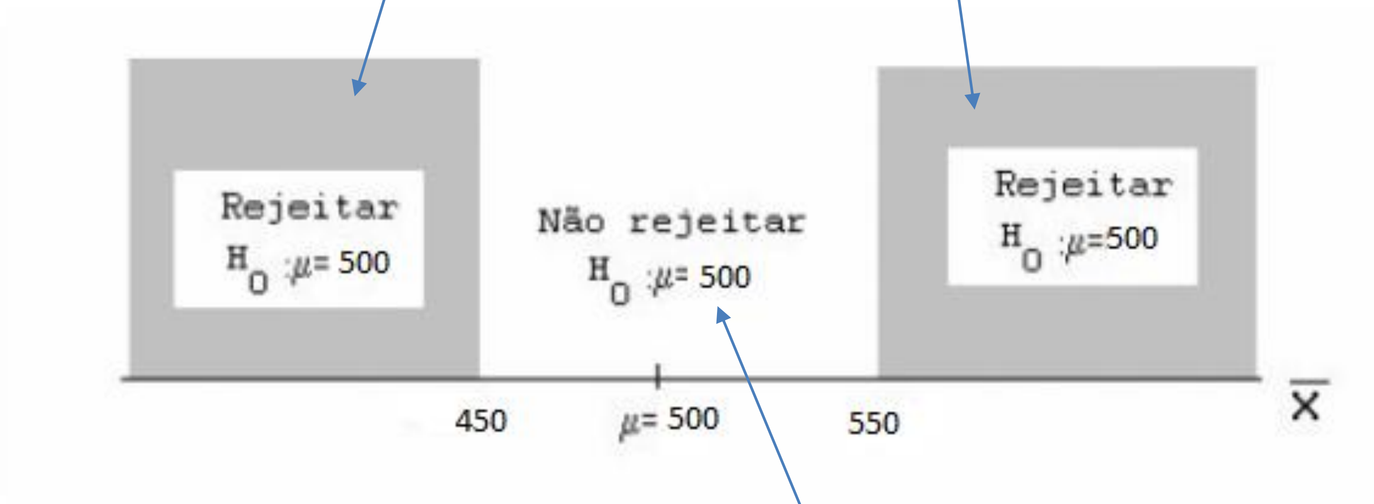
Região crítica

- Suponha que a equipe técnica tenha decidido adotar a seguinte regra: a máquina estará descalibrada se a média amostral $\bar{x}$ for maior que 550g ou menor que 450g.
- $R_{aceitação}$ = {450<= $\bar{x}$ <=550}

  → Região de aceitação de Ho
- $R_{crítica}$ = {$\bar{x}$>550 ou $\bar{x}$ < 450}

  → Região de rejeição de Ho
- Se a máquina estiver descalibrada, isto é, se a média for diferente de 500g, espera-se que a média amostral $\bar{x}$ caia na Região Crítica

Região crítica



Região de aceitação de H0

Procedimento (teste)

$$Se\ \ \bar{x} \in R_c \Rightarrow \text{Rejeita - se }\ \mathrm{H}_0$$

$$Se\ \ \bar{x} \notin R_c \Rightarrow Aceita\text{ - se }\ \mathrm{H}_0$$

Tipos de erro num teste estatístico

	Realidade no lote	
Decisão do técnico a partir da amostra	**H_0 é verdadeira:** Máquina está calibrada	**H_0 é falsa:** Máquina não está calibrada
H_0 é verdadeira: Máquina está calibrada	**Decisão correta** Probabilidade= 1- α	**Decisão errada** **Erro β**
H_0 é falsa: Máquina não está calibrada	**Decisão errada** **Erro α**	**Decisão correta** Probabilidade= 1- β

α = P (Erro tipo I) = chamado de nível de significância (em geral 5%)
risco máximo aceitável de errar ao dizer que H_0 é falsa quando na realidade H_0 é verdadeira.
β = P (Erro tipo II)
risco máximo aceitável de errar ao dizer que H_0 é verdadeira quando H_0 for falsa

Tipos de erro num teste estatístico

P(Erro tipo I)=α (**nível de significância**)

$$\alpha = P(\text{Rejeitar H}_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$$

$$P(Erro\ II) = \beta = P(\text{Não rejeitar H}_0 \mid H_0 \text{ falso}).$$

$$1-\beta = P(\text{Rejeitar} \mid H_0 \text{ é falso}).$$ $\rightarrow$**Poder do teste**

α : nível de significância

- Corresponde a uma probabilidade
- É um ponto de corte arbitrário
- Utilizado para definir um risco máximo que se pode correr ao rejeitar H_0 em função dos resultados obtidos num experimento
  - Na maioria das aplicações, utiliza-se $\alpha = 0,05$.
  - Mais rigorosos, escolhem $\alpha = 0,01$.
  - Menos rigorosos, escolhem $\alpha = 0,10$.
- 0,05 significa que 5 entre 100 testes erroneamente rejeitarão H_0 quando na verdade H_0 é verdadeira.

p-value : nível descritivo

- É chamado de nível descritivo (p-value ou p-valor).
- O <u>p-value</u> é comparado ao α pré-determinado, para decidir se a H_0 deve ser rejeitada ou não.
- P-value representa a probabilidade de H_0 ser verdadeira.
- Se p for muito pequeno, H_0 não é verdadeira, H_0 é falsa.
- Como decidir?
  - Se p-value $\leq \alpha \rightarrow$ rejeitamos H_0
  - Se p-value $> \alpha \rightarrow$ aceitamos H_0

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 1 – Determinar as hipóteses
- Passo 2 - Escolha da estatística do teste
- Passo 3 - Determinação da Região crítica
- Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais
- Passo 5 – Concluir pela aceitação ou rejeição de H_0, comparando o valor obtido no Passo 4 com a Região de Aceitação ou com a Região Crítica.

Voltando aos pacotes de café

Abordagem pela região de aceitação

Passo 1 - Determinação das hipóteses

$H_0 : \mu = 500g$

$H_1 : \mu \neq 500g$

μ representa a média do peso da população de pacotes

O técnico obteve médias amostrais, cada uma com 16 pacotes, que pesavam 490g

O técnico deve determinar a probabilidade de se obter ao acaso uma média de 490g se a média populacional da máquina for de fato igual à 500g, ou seja, a máquina está calibrada.

Vamos considerar α = 5%

Abordagem pela região de aceitação

Passo 2 - Escolha da estatística do teste é:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Passo 3 - Determinação da Região crítica para α=5% (ver na Tabela)

$$\mathbf{z_{\alpha=0,025} = \pm 1,96}$$

$$R_{crítica} = \{\, z \in Z \; |z| \geq 1,96 \}$$

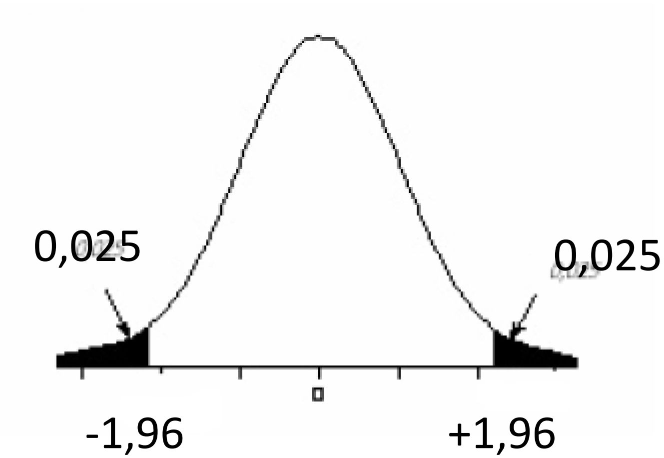
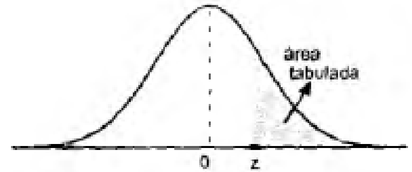


TABELA DE ORIENTAÇÃO NA ESCOLHA DE TESTES ESTATÍSTICOS

	Uma variável					Duas variáveis
Tipo da variável dependente	Uma amostra	Duas amostras		*Mais de duas amostras*		Medidas de correlação
		relacionadas	*independentes*	*relacionadas*	*independentes*	
Qualitativa nominal ou ordinal	binomial ou X^2	McNemar	X^2 ou Fischer	Prova Q de Cochran	X^2 para várias amostras	coeficiente de contigência C
Quantitativa discreta ou contínua (dados não seguem curva de Gauss)	Kolmogorov Smirnov	Wilcoxon ou Prova dos sinais	Mann-Whitney Ou Prova da Mediana	Prova de Friedman	Kruskal-Wallis ou Prova da mediana	correlação de Spearman
Quantitativa discreta ou contínua (dados seguem curva de Gauss)	Teste para média	teste t de Student pareado	teste t de Student para amostras independentes	ANOVA para medidas repetidas	ANOVA para grupos independentes	correlação de Pearson

TABELA IV Distribuição normal padrão.



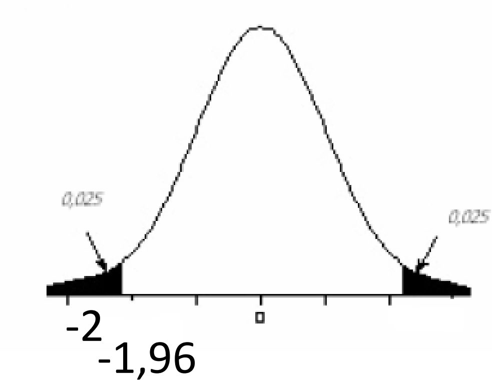
z	segunda decimal de z 0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2842	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,00135									
3,5	0,000 233									
4,0	0,000 031 7									
4,5	0,000 003 40									
5,0	0,000 000 287									

Abordagem pela região de aceitação

Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais

$$Z = \frac{(\overline{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{(490 - 500)}{20/\sqrt{16}} = -2 < z_{\alpha=(0,05/2)} = -1,96$$

Passo 5 – Conclusão



$z_{obs} = -2$ caiu fora da região de aceitação de H_0, caiu na Região Crítica.

A máquina está descalibrada, a um nível de significância de 5%.

Exemplo 2 – teste vocacional
teste t de Student

(variância populacional desconhecida)

Exemplo 2

- Os registros dos últimos anos de um colégio atestam para os calouros admitidos uma nota média num teste de QI = 115.
- Para testar a hipótese de que a média de uma nova turma é a mesma das turmas anteriores, retirou-se, ao acaso, uma amostra de 20 notas, obtendo-se média 118 e desvio-padrão 20.

- Dados populacionais:

  $\mu = 115$; σ = desconhecido

- Dados amostrais:

  $\bar{x} = 118$; $s = 20$; $n = 20$

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 1 – Determinar as hipóteses

$$H_0 : \mu = 115$$
$$H_1 : \mu \neq 115$$

μ representa a média da nota da população

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 2 - Escolha da estatística do teste

Como não conhecemos o desvio padrão populacional, utilizamos uma estatística T ao invés de uma estatística z.

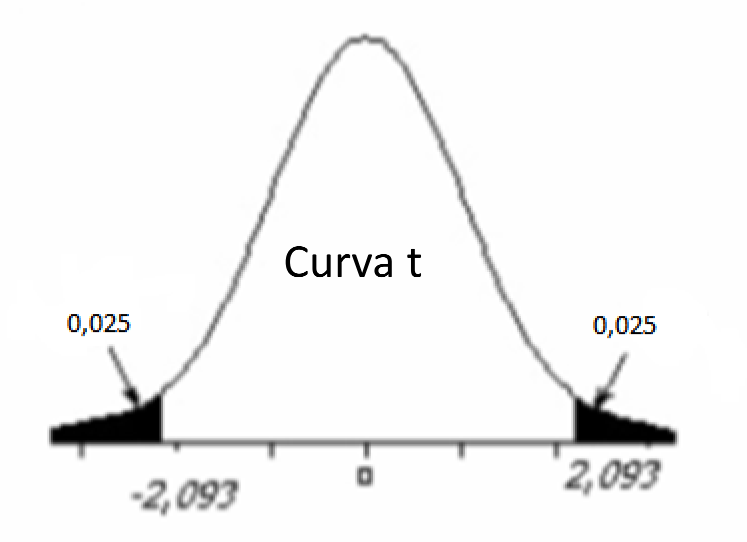
$$T = \frac{\overline{X} - 115}{S/\sqrt{n}} \underset{sob\ H_0}{\sim} t(n-1)$$

TABELA DE ORIENTAÇÃO NA ESCOLHA DE TESTES ESTATÍSTICOS

	Uma variável					Duas variáveis
Tipo da variável dependente	Uma amostra	Duas amostras		Mais de duas amostras		Medidas de correlação
		relacionadas	*independentes*	*relacionadas*	*independentes*	
Qualitativa nominal ou ordinal	binomial ou X^2	McNemar	X^2 ou Fischer	Prova Q de Cochran	X^2 para várias amostras	coeficiente de contigência C
Quantitativa discreta ou contínua (dados não seguem curva de Gauss)	Kolmogorov Smirnov	Wilcoxon ou Prova dos sinais	Mann-Whitney Ou Prova da Mediana	Prova de Friedman	Kruskal-Wallis ou Prova da mediana	correlação de Spearman
Quantitativa discreta ou contínua (dados seguem curva de Gauss)	Teste para média	teste t de Student pareado	teste t de Student para amostras independentes	ANOVA para medidas repetidas	ANOVA para grupos independentes	correlação de Pearson

Passos para realizar teste de hipóteses

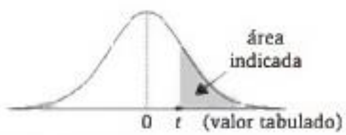
- Passo 3 - Determinação da Região crítica para α=5%



$$R_{crítica} = \{ t \in T \; | T | \geq 2{,}093 \}$$

graus de liberdade = n - 1

Tabela 4 *Distribuição t de Student.*



gl	Área na cauda superior								
	0,25	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,0025**	**0,001**	**0,0005**
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais

$$T_{obs} = \frac{118-115}{20/\sqrt{20}} = 0{,}67$$

- Passo 5 – Conclusão

  T_{obs} = 0,67 valor que pertence à Região de Aceitação de H_o

  Logo concluímos que a média da nova turma é a mesma das turmas anteriores, o QI médio não se alterou na população.

Exercício para fazer na aula

A média da concentração de colesterol no sangue para a população de homens de 20 a 74 anos é 211 mg/100ml e desvio-padrão = 46mg/100ml.

Selecionamos uma amostra de 12 homens de um grupo de fumantes hipertensos e o colesterol foi de 217 mg/100ml.

Será que a média da amostra é compatível com a média populacional de 211 mg/100ml, ou seja, será que o colesterol dos sujeitos deste grupo é diferente do colesterol populacional?

Solução

Abordagem pela região de aceitação

Passo 1 - Determinação das hipóteses

$H_0 : \mu = 211$ mg/100ml

$H_1 : \mu \neq 211$ mg/100ml

μ representa a média do colesterol na população de homens de 20 a 74 anos é 211 mg/100ml.

Abordagem pela região de aceitação

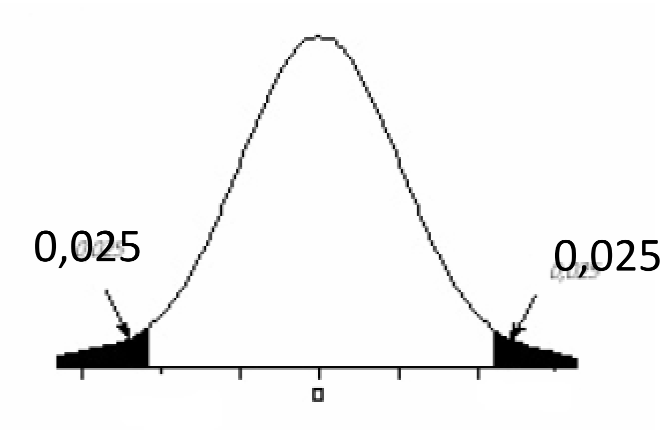
Passo 2 - Escolha da estatística do teste é:

Como conhecemos o desvio padrão populacional, utilizamos a estatística z.

$$Z = \frac{(\overline{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Passo 3 - Determinação da Região crítica para α=5%

$z_{\alpha=0,025} = \pm\ 1,96$
(da tabela da curva normal)

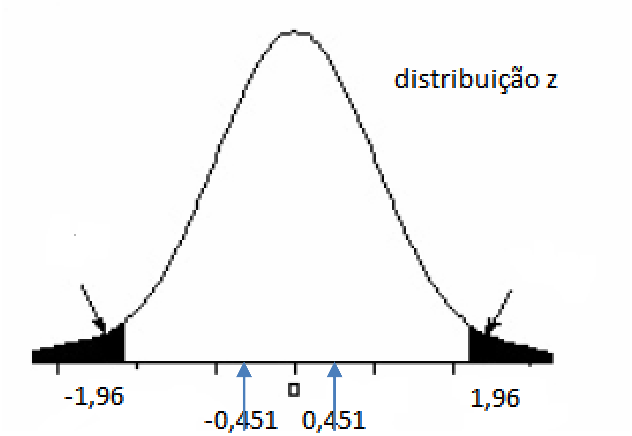


Abordagem pela região de aceitação

Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{(217 - 211)}{46/\sqrt{12})}$$

$$z_{observado} = 0{,}451$$



Passo 5 – Conclusão

$z_{observado}$ caiu dentro da região de aceitação de H_0

Logo → aceitamos H_0

ou seja, o nível médio de colesterol da população de fumantes hipertensos não é diferente de 211 mg/100ml.

obrigada

Região crítica (tirar?)

- Conjunto de valores assumidos pela variável dependente ou estatística do teste para os quais a hipótese H_0 é rejeitada
- Se a máquina estiver descalibrada, isto é, se a média for diferente de 500g, espera-se que a média amostral $\bar{x}$ seja inferior ou superior a 500g
- Suponha que a equipe técnica tenha decidido adotar a seguinte regra: a máquina estará descalibrada se a média amostral $\bar{x}$ for maior que 550g ou menor que 450g.
- $R_c = \{\bar{x} > 550$ ou $\bar{x} < 450\}$

  → Região de rejeição de Ho
- $R_a = \{450 <= \bar{x} <= 550\}$

  → Região de aceitação de Ho

Voltando aos pacotes de café

Abordagem pela região de aceitação (tirar?)

Passo 1 - Determinação das hipóteses

$H_0 : \mu = 500g$

$H_1 : \mu \neq 500g$

μ representa a média do peso da população de pacotes

O técnico deve determinar a probabilidade de se observar uma diferença tão grande quanto 10g ao acaso se a média populacional da máquina for de fato igual à 500g.

~~Tipos de erro num teste estatístico~~ (tirar?)

- No exemplo dos pacotes de café, selecionamos uma amostra de 16 pacotes e obtivemos uma média de 490g.
- Essa média da amostra é compatível com a média suposta de 500g?
- E se selecionarmos uma amostra com média 450g? Ou uma outra com média 550g?

- **Pergunta:**
  - Quão distante da média populacional = 500g precisa a média amostral se localizar antes que possamos concluir que esta amostra refere-se à outra população de pacotes de café, ou seja, que a máquina está descalibrada?

Regra de decisão baseado no p-value

- Como decidir?
  - Se p-value $\leq \alpha \rightarrow$ rejeitamos H_0
  - Se p-value $> \alpha \rightarrow$ aceitamos H_0

- Para conduzir um teste de hipótese usamos a distribuição amostral da média.
- Quando a população é normal com desvio-padrão conhecido ou *n* suficientemente grande, utilizamos *a* ***estatística z*** (*segue uma distribuição z)*.
- Quando o desvio-padrão da população não é conhecido, substituímos pelo valor da amostra *s*; e se a população original seguir uma distribuição normal, utilizamos *a* ***estatística t***. (*segue uma distribuição t*)