Tema 3

Circuitos lógicos combinacionales

Juan J. Navarro
juanjo@ac.upc.edu
Tel: 93 4016983
Despacho D6-205

3.5. Apéndice (a). Algebra de conmutación o **Algebra de Boole** con dos elementos (0, 1)

3.5. Algebra de Conmutación. Circuitos equivalentes. Minimización

3.5.1. Álgebra de Conmutación

Axiomas (definición de las puertas Not, And y Or):

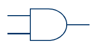
- Variables lógicas binarias:

  (A1) if x=0 then x≠1 (A1´) if x=1 then x≠0

- Complementación: 

  (A2) if x=0 then !x=1 (A2´) if x=1 then !x=0

- Funciones And y Or

(A3) 0·0=0	(A3´) 1+1=1
(A4) 1·1=1	(A4´) 0+0=0
(A5) 0·1=1·0=0	(A5´) 1+0=0+1=1

Álgebra de Conmutación

Teoremas de 1 variable

(se demuestran a partir de los axiomas):

- Elemento neutro: (T1) x+0=x (T1´) x·1=x
- Dominancia: (T2) x+1=1 (T1´) x·0=0
- Idempotencia: (T3) x+x=x (T2´) x·x=x
- Involución: (T4) !(!x)=x
- Complemento (T5) x+!x=1 (T5´) x·!x=0

Álgebra de Conmutación

Teoremas de 2 y 3 variables:

- Conmutatividad:

  (T6) x+y=y+x (T6´) x·y=y·x
- Asociatividad:

  (T7) (x+y)+z=x+(y+z) (T7´) (x·y)·z=x·(y·z)
- Distributividad:

  (T8) (x·y)+(x·z)=x·(y+z) (T8´) (x+y)·(x+z)=x+(y·z)
- Absorción:

  (T9) x+(x·y)=x (T9´) x·(x + y) = x
- Morgan:

  (T10) !(x+y) = !x · !y (T10´) !(x·y) = !x + !y

3.5.2. Demostración de teoremas

A partir de los axiomas (Tablas de verdad de la Not, And y Or):

Ejemplo: (T8´) (x+y)·(x+z)=x+(y·z)

x	!x
0	1
1	0

x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	z	x+y	x+z	(x+y)·(x+z)	y·z	x+(y·z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(x+y)·(x+z)=x+(y·z)

Ejemplo de demostración de teoremas. Enunciado

A partir de los axiomas (Tablas de verdad de la Not, And y Or):

- Combinación, un teorema más: (T11) (x·y)**+**(x·!y)=x

x	!x
0	1
1	0

x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

¡Completad las columnas de la tabla!

x	y	x·y	!y	x·!y	(x·y)+(x·!y)
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Ejemplo de demostración de teoremas. Solución

A partir de los axiomas (Tablas de verdad de la Not, And y Or):

- Combinación, un teorema más: (T11) (x·y)**+**(x·!y)=x

x	!x
0	1
1	0

x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x**+**y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

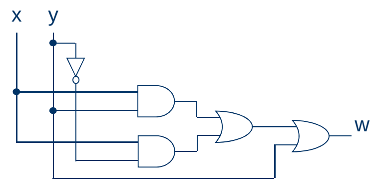
x	y	x·y	!y	x·!y	(x·y)+(x·!y)
0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

(x·y)**+**(x·!y) = x

3.5.3. De la expresión lógica al circuito directo

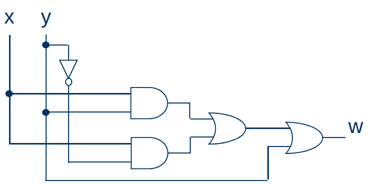
- Del circuito lógico combinacional a la expresión lógica directa de cada una de sus salidas (visto ya en análisis)
- De la expresión lógica al circuito lógico directo
  - v.g. Expresión lógica: w=((x·y)+(x·!y))+y

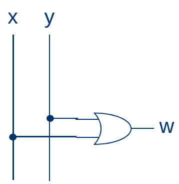
Circuito directo:



3.5.4. Expresiones/Circuitos Equivalentes

- Reglas de precedencia en expresiones lógicas: (), !, ·, +
  - v.g.: (x·y)+(x·z) ⇒ x·y+x·z
- Expresiones lógicas equivalentes (las igualdades de los teoremas):
  - v.g.: ((x·y)+(x·!y))+y es equivalente a x+y
- **Una expresión lógica especifica un circuito lógico, y al revés**
- Circuitos lógicos equivalentes:
  - v.g.: w=((x·y)+(x·!y))+y es equivalente a w=x+y

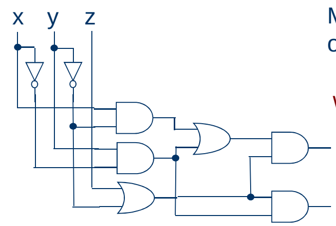




Actividad #3.1(f)

- Individual
- Intercambiad la hoja de la actividad #3.1 con vuestro compañero.
- En la parte de atrás de la hoja (tercer 1/3):
- Dibuja un circuito equivalente al original, pero con menor número de puertas (una puerta de 3 entradas cuenta como 2 puertas de 2 entradas).

Solución de la actividad #3.1(f)

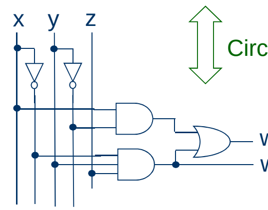


Manipulación de las expresiones directas hasta obtener expresiones en suma de productos

w0 = (x·!y + !x·y)·(!y+z) = x·!y·(!y+z) + !x·y·(!y+z) =
= x·!y·!y + x·!y·z + !x·y·!y + !x·y·z =
= x·!y + x·!y·z + 0 + !x·y·z =x·!y + !x·y·z

w1 = !x·y ·(!y+z) = !x·y·!y + !x·y·z = 0 + !x·y·z
= !x·y·z

Circuitos equivalentes



w0 = x·!y + !x·y·z
w1 = !x·y·z

3.5.5. ¿Síntesis mínima?

Objetivos importantes de IC

- **Análisis:** Dado un esquema encontrar la tabla de verdad (no importa cómo). Solución única.
- **Síntesis:** Dada una tabla de verdad encontrar la expresión en suma de minterms y dibujar el circuito que la implementa directamente con Not, And y Or (o con Dec y Or o con ROM). Solución única.
- De momento:

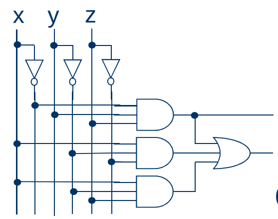
  No tenéis que saber encontrar la implementación de una tabla de verdad con el número mínimo de puertas, eso lo veremos en el Apéndice (b)

¿Síntesis mínima para la Actividad #3.1?

¿La implementación en suma de minterms de #3.1(d) tiene menos hardware que el circuito original?

¿Y que el circuito equivalente que hemos obtenido en #3.1(f)?

Cualquier respuesta es posible, depende de los circuitos, ya que la **expresión en suma de minterms** (que es única, para cada tabla de verdad) **no tiene porque ser mínima.**



w1 = !x·y·z
w0 = !x·y·z + x·!y·!z + x·!y·z

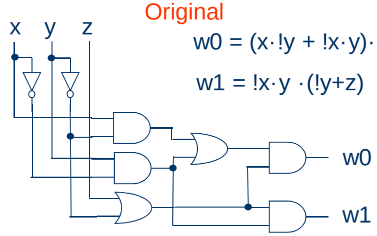
(Hemos aprovechado el m_3 para las dos salidas)

Respuesta

Original

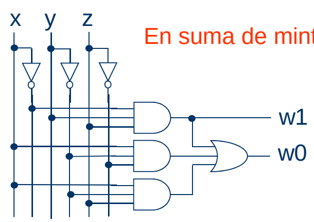
w0 = (x·!y + !x·y)·(!y+z)

w1 = !x·y ·(!y+z)



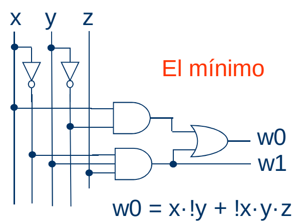
Circuitos equivalentes

En suma de minterms



w1 = !x·y·z
w0 = !x·y·z + x·!y·!z + x·!y·z

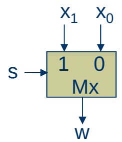
El mínimo



w0 = x·!y + !x·y·z
w1 = !x·y·z

¿Síntesis mínima? Ejemplo del Mx

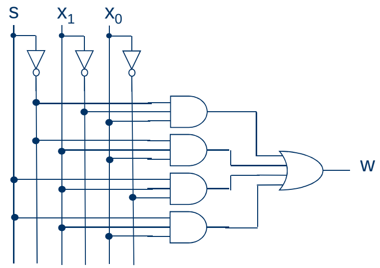
- **1. Funcionalidad:** Multiplexor (Mx)
  if s=0 then w=x_0 else w=x_1



- **2. Tabla de verdad:**

s	x_1	x_0	w	
0	0	0	0	
0	0	1	1	⇒ $!s\cdot!x_1\cdot x_0$
0	1	0	0	
0	1	1	1	⇒ $!s\cdot x_1\cdot x_0$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	⇒ $s\cdot x_1\cdot!x_0$
1	1	1	1	⇒ $s\cdot x_1\cdot x_0$

- **4. Circuito directo:**



- **3. Expresión en suma de minterms:**

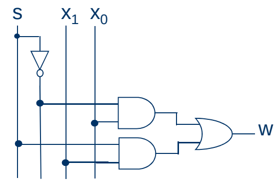
$w(s,x_1, x_0) = m_1 + m_3 + m_6 + m_7 = !s\cdot!x_1\cdot x_0 + !s\cdot x_1\cdot x_0 + s\cdot x_1\cdot!x_0 + s\cdot x_1\cdot x_0$

¿Síntesis mínima? Ejemplo del Mx

- **2. Tabla de verdad:**

s	x_1	x_0	w		
0	0	0	0		
0	0	1	1	⇒ $!s\cdot!x_1\cdot x_0$	$!sx_0$
0	1	0	0		
0	1	1	1	⇒ $!s\cdot x_1\cdot x_0$	
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	1	⇒ $s\cdot x_1\cdot!x_0$	sx_1
1	1	1	1	⇒ $s\cdot x_1\cdot x_0$	

- **5. Circuito directo:**



- **3. Expresión en suma de minterms:**

$w(s,x_1, x_0) = !s\cdot!x_1\cdot x_0 + !s\cdot x_1\cdot x_0 + s\cdot x_1\cdot!x_0 + s\cdot x_1\cdot x_0$

- **4. Minimización de la expresión usando teoremas:**

$w(s,x_1, x_0) = !s\cdot!x_1\cdot x_0 + !s\cdot x_1\cdot x_0 + s\cdot x_1\cdot!x_0 + s\cdot x_1\cdot x_0 =$
$= !s\cdot x_0\cdot(!x_1 + x_1) + s\cdot x_1\cdot(!x_0 + x_0)=$
$= !sx_0 + sx_1$