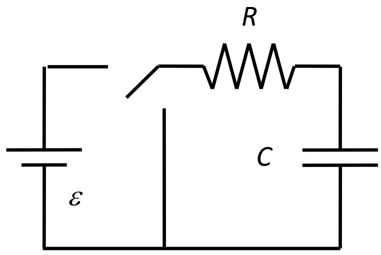
TEMA 2

CORRENT ALTERN

2.1 Transitoris: Circuits RC i RL (1h30') *(en realitat 2h)*

2.1.1 Circuit RC

És un circuit format per un **condensador de capacitat *C* en sèrie amb una resistència *R***. Si el conjunt es **connecta a un generador** de fem ε, el **condensador** triga un determinat temps en carregar-se. Durant aquest temps pel circuit **circula un corrent**. El comportament en aquest interval de temps s'anomena **règim transitori o transitori**.



La segona llei de Kirchhoff aplicada al circuit és:

$$\varepsilon = V_R + V_C = RI + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C},$$

que és una **equació diferencial** de primer ordre. La **solució** és:

$$R\frac{dq}{dt} = \varepsilon - \frac{q}{C} \rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon C - q}{RC} \rightarrow \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{dt}{RC} \rightarrow$$

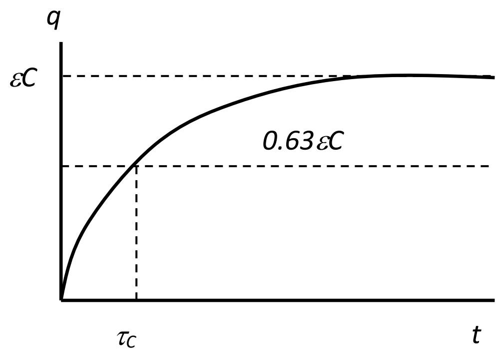
$$\int_0^q \frac{dq}{q - \varepsilon C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \rightarrow$$

$$ln(q - \varepsilon C) - ln(-\varepsilon C) = -\frac{t}{RC}$$

$$\rightarrow ln\left(\frac{q - \varepsilon C}{-\varepsilon C}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow$$

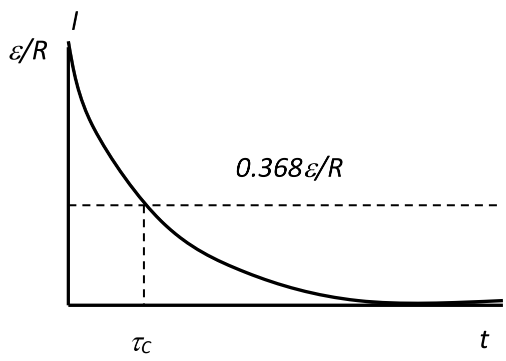
$$\frac{q - \varepsilon C}{\varepsilon C} = -e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow$$

$$q(t) = \varepsilon C\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] = \varepsilon C\left\{1 - e^{-t/\tau_C}\right\}$$



Derivant l'expressió anterior, determinem la intensitat *I(t):*

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\varepsilon C\left\{1 - e^{-t/\tau_C}\right\}$$
$$= -\varepsilon C\frac{d}{dt}e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$
$$= \frac{\varepsilon C}{RC}e^{-\frac{t}{\tau_C}} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau_C},$$



on τ_C***=RC* és la constant de temps** del circuit.

COMENTARIS

- A l'instant inicial q = 0 i $I = \varepsilon/R$. Quan el condensador està totalment carregat $q=\varepsilon C$ i $I = 0$.

- Si t = τ_C, *q=0.632* ε*C* i *I = 0.368* ε*/R*. Per tant, τ_C és el **temps** necessari perquè el condensador es **carregui al 63.2%** del seu **valor final** i la **intensitat** es **redueixi fins el 36.8% de la intensitat inicial**.
- Com **més gran és** τ_C, **més triga** el condensador **a carregar-se i més triga el corrent a anul·lar-se**
- Donat que **l'energia emmagatzemada per un condensador** és $U = \frac{Q^2}{2C}$, τ_C també és el **temps** necessari perquè l'energia electrostàtica del condensador sigui el **40%** del seu valor final.

Si a **l'instant inicial** la càrrega del condensador és ***Q₀***, i aquest es connecta a una **resistència** (no hi ha pila), el **condensador triga un temps a descarregar-se**, circulant durant aquest temps un corrent. L'estudi d'aquest nou **règim transitori** es fa aplicant la segona llei de Kirchhoff:

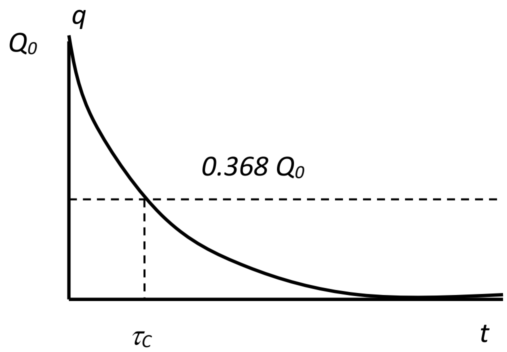
$$0 = RI + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \rightarrow R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \ ,$$

que és una **equació diferencial** de primer ordre.

La **solució** és:

$$q(t) = \ Q_0 e^{-t/\tau_C}$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/\tau_C}$$



COMENTARIS

- A l'instant inicial *q = Q₀* i *I = I₀ = Q₀/RC*. Quan el condensador està totalment descarregat *q=I = 0*.
- τ_C és el **temps** necessari perquè **la càrrega i la intensitat siguin el 36.8%** dels seus valors inicials (en aquest cas l'energia en seria el 13.5 %).

A aquesta animació de Dave Nero a *GeoGebra* se simula el procés de càrrega i descàrrega d'un condensador en un circuit RC. Podeu visualitzar la càrrega, la intensitat i la tensió al condensador. Elegiu els valors de R, C i ε que vulgueu i visualitzeu la càrrega i descarrega activant o desactivant els dos interruptors del circuit.
https://www.geogebra.org/m/rFEV4HJx

A aquest vídeo es mostra un mètode per mesurar la constant de temps d'un circuit amb un oscil·loscopi, que consisteix en analitzar la tensió al condensador quan al circuit s'aplica un senyal quadrat. El que ens interessa més en aquest vídeo són els primers segons, on es veu la resposta de tensió al condensador quan a l'entrada s'aplica un senyal quadrat.
https://www.youtube.com/watch?v=3RbYeebUge4

2.1.2 Circuit RL

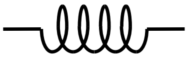
Un **condensador** és un dispositiu que permet **emmagatzemar energia elèctrica** en forma de **càrrega o camp elèctric**. D'altra banda, un inductor o bobina és un element que pot **emmagatzemar energia elèctrica en forma de camp magnètic**. Bàsicament és un **conjunt d'espires** de fil conductor disposades al voltant d'un material o en el buit. La

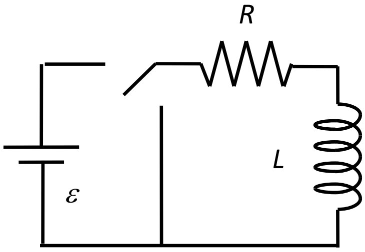
caiguda de tensió entre els seus extrems, quan per ella circula un **corrent variable amb el temps,** és:

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

On **L és el coeficient d'autoinducció** de la bobina, que depèn de les seves dimensions, el nombre d'espires, l'àrea, la longitud i el material que hi ha a dins.

Al SI s'expressa en Henrys (H). 1H = 1V·1s/1A

Símbol: 



Un circuit RL està format per una **bobina d'autoinducció *L* en sèrie amb una resistència *R***. Quan el conjunt es **connecta a un generador** de fem ε, pel circuit circula un corrent variable. Per estudiar el règim transitori apliquem la segona llei de Kirchhoff al circuit:

$$\varepsilon = V_R + V_L = RI + L\frac{dI}{dt}$$

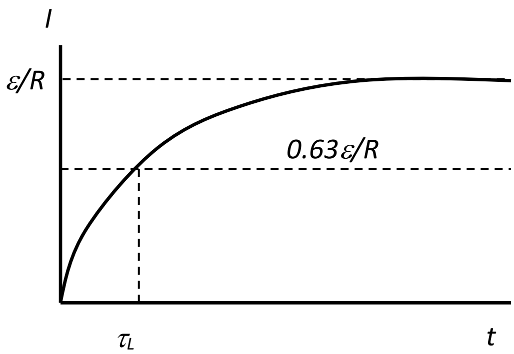
L'**equació** diferencial és formalment **anàloga a la del circuit RC**. La solució és:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left\{1 - e^{-t/\tau_L}\right\}$$

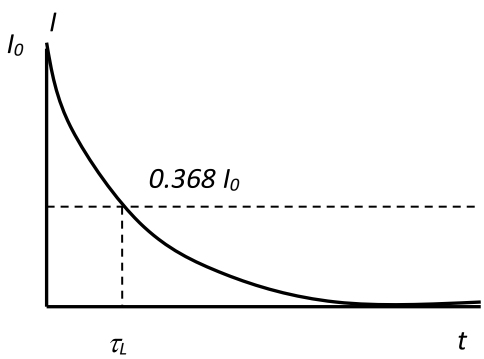
On τ_L **=*L/R* és la constant de temps** del circuit.

COMENTARIS

- Quan es tanca el circuit la intensitat triga un temps a assolir el valor final $I = \varepsilon/R$.
- τ_L és el **temps** necessari perquè el **corrent assoleixi el 63.2% del seu valor final.**
- Com **més gran és** τ_L (més gran és L o menor és R), **més triga** el corrent a assolir el seu valor final.
- Com **l'energia magnètica emmagatzemada a una bobina** és $U = \frac{1}{2}LI^2$, τ_L és el **temps** necessari perquè l'energia de la bobina sigui **el 40% del seu valor final.**



Pel cas d'un circuit RL sense generador, pel que a l'instant inicial circula un corrent d'intensitat I_0, **la intensitat no s'anul·la instantàniament**. L'estudi del **règim transitori**



es fa aplicant la segona llei de Kirchhoff, que en aquest cas és:

$$0 = V_R + V_L = RI + L\frac{dI}{dt}$$

La solució és:

$$I(t) = I_o e^{-t/\tau_L}$$

A aquesta animació de Dave Nero a *GeoGebra* es visualitza el comportament de la intensitat i la tensió a la bobina en un circuit RL. Elegiu els valors de R, L i ε que vulgueu i visualitzeu la intensitat i la tensió a la bobina activant o desactivant els dos interruptors del circuit.
https://www.geogebra.org/m/TaUMx2nF

Fer problema 1 de la col·lecció

1. Quants cops ha de transcórrer la constant de temps τ_c abans que un condensador en un circuit *RC* es carregui fins al 99% del valor de la seva càrrega en equilibri? En quin factor s'haurà reduït la intensitat inicial del corrent?

Fer problema 2 de la col·lecció

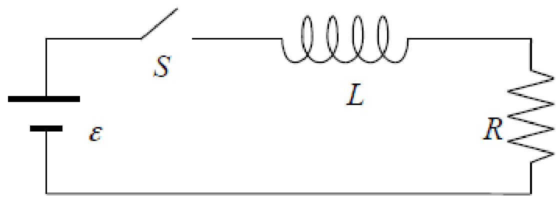
2. Un condensador, de capacitat C = 40 μF, inicialment descarregat es connecta en sèrie amb una resistència R = 2 kΩ i un generador que manté entre els seus terminals una tensió constant ε = 200 V. Determineu:
a) La intensitat inicial I_0 del corrent.
b) L'equació del corrent en funció del temps.
c) L'equació de la càrrega del condensador en funció del temps.

Fer problema 3 de la col·lecció

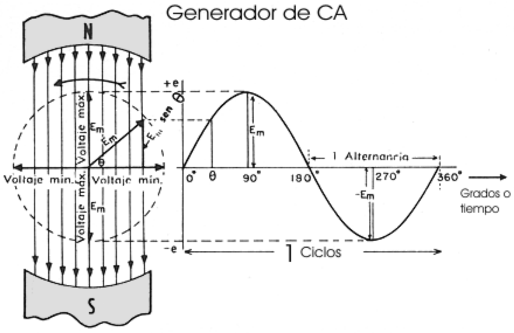
3. Una bobina de 5 mH d'autoinducció està connectada en sèrie amb una resistència de 15 Ω i el conjunt es connecta amb una pila de fem 12 V i resistència interna 1 Ω.
a) Calculeu el corrent al cap de 100 μs.
b) Si tallem la connexió amb la pila, quin serà el corrent al cap de 20 μs després d'assolir
el règim estacionari?

Fer problema 4 de la col·lecció

4. Es vol connectar un dispositiu electrònic de resistència R = 175 Ω a una font de tensió de fem ε mitjançant un interruptor S. El dispositiu ha estat dissenyat per funcionar amb un corrent de 36 mA, però, per evitar danys, el corrent no pot augmentar a més de 4.9 mA en els primers 58 μs després d'haver tancat l'interruptor. Per protegir el dispositiu es connecta en sèrie amb una bobina L, tal i com s'indica a la figura.
a) Quant ha de valer la fem ε de la font de tensió?
b) Quant ha de valer l'autoinducció L de la bobina?
c) Quant valdrà la constant de temps τ del circuit?



2.2 Règim estacionari del circuit RCL (1h30') *(en realitat 30')*



Una **font de tensió** de **corrent altern** és un generador que entre els seus borns proporciona una diferència de potencial que varia amb el temps segons l'expressió:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \theta),$$

on $\boldsymbol{\omega}$ és la **pulsació o freqüència angular** que al SI s'expressa en **rad/s**, i que està relacionada amb el **període $\boldsymbol{T}$ i la freqüència $\boldsymbol{f}$** per l'equació:

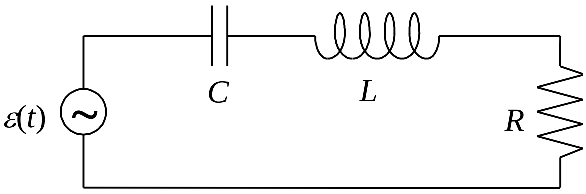
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

T s'expressa en s i la **freqüència**, que és la inversa del període f=1/T, s'expressa al SI en **Hz** (Hertz o cicles/s).

Al nostre país la **freqüència del senyal altern comercial** és de **50 Hz**. La **fase $\boldsymbol{\theta}$ depèn de les condicions inicials** i a la majoria de les vegades suposarem que és **nul·la.**

A aquesta animació de Vicente Martin Morales a *GeoGebra* se simula un generador de corrent altern. https://www.geogebra.org/m/tP35XuQS

Si es connecta el **generador** a un circuit format per **l'associació en sèrie** d'una **resistència *R***, un **condensador de capacitat *C*** i una **bobina de coeficient d'autoinducció *L***, la segona llei de Kirchhoff aplicada a la malla és:



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Derivant l'expressió anterior respecte al temps, s'arriba a la següent equació diferencial de segon ordre:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C}$$

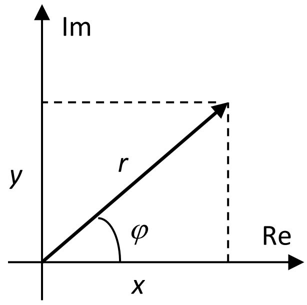
La **solució** *I(t)* està formada per dues parts: la corresponent al **règim transitori**, que al cap de poc temps és negligible, i l'associada al **règim estacionari**, que és la **més important.** En aquest curs estudiarem aquesta última, que **anomenarem *I(t)*,** i que es pot demostrar que és de la forma:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

A aquesta animació del professor Rousseau de la Universitat de Maine se simulen els règims transitori i estacionari per un circuit RCL. S'observa que el règim transitori és molt curt. Per veure-ho, amb el cursor apliqueu un valor entre -1 i 1 a U i qualsevol valor de l'angle φ entre -180 i 180. Poseu també un valor no gaire gran a λ i la relació F0/Fx. http://subaru.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/rlcexci.html

2.3 Nombres complexos (1h30') *(en realitat 1h30')*

Es tracta del conjunt de nombres que resulta de la **suma disjunta** del conjunt dels **nombres reals i el dels nombres imaginaris purs**. És a dir, un nombre complex té una **part real i una d'imaginària**, i es representa en el pla (**pla complex**), de forma que la **part real** es mostra a **l'eix real** i **la part imaginària a l'eix imaginari**. Per expressar-lo s'utilitzen dues notacions complementàries:



2.3.1 Notacions

- **Notació cartesiana** $\bar{z} = x + iy$, on **i és la unitat imaginària** $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$
- **Notació polar** $\bar{z} = r_{\varphi} \quad o \quad r\,\angle\varphi$

Per **passar d'una forma a l'altra** s'utilitzen les relacions:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

La **notació polar es basa en la fórmula d'Euler**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \ i\ \sin\varphi \rightarrow$$

$$\bar{z} = r\angle\varphi = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + \ i\ \sin\varphi) = x + iy$$

Exemples: $4 + 3i \rightarrow \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.9^o$

$$5 - 12i \rightarrow \sqrt{5^2 + 12^2} = 13, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-12}{5}\right) = -67.4^o = 292.6^o$$

$$6\angle 120^o \rightarrow 6\cos 120^o + i\sin 120^o = -3 + 5.2i$$

A aquesta animació de Jose Luis Alonso Borrego a GeoGebra es representa un nombre complex en les dues notacions. Plantegeu diferents problemes i practiqueu el pas d'una forma a l'altra.
https://www.geogebra.org/m/dg7GNTaN

2.3.2 Operacions

Donats $\bar{z_1} = x_1 + iy_1 = r_1\angle\varphi_1$ i $\bar{z_2} = x_2 + iy_2 = r_2\angle\varphi_2$

- **Suma i resta** (**només en forma cartesiana**)

$\bar{z_1} + \bar{z_2} = (x_1 + x_2) + \ i(y_1 + iy_2)$

$\bar{z_1} - \bar{z_2} = (x_1 - x_2) + \ i(y_1 - iy_2)$

Exemples: $(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$

$(3 + 3i) - (6 + 2i) = -3 + i$

- **Multiplicació** (**més senzilla en forma polar**)

Forma cartesiana:

$$\bar{z_1} \cdot \bar{z_2} = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Forma polar

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = r_1\angle\varphi_1 \cdot r_2\angle\varphi_2 = r_1 r_2\angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Exemples: $(1 + 2i) \cdot (3 - 2i) = (3 + 4) + i(6 - 2) = 7 + 4i$

$$2\angle 150^o \cdot 1\angle 30^o = 2\angle 180^o$$

$$(3 - 2i) \cdot (2 + 3i) = (6 + 6) + i(9 - 4) = 12 + 5i$$

$$(3 - 2i) \cdot (2 + 3i) = \sqrt{13}\angle -33.7^o \cdot \sqrt{13}\angle 56.3^o = 13\angle 22.6^o$$
$$= 13\cos 22.6^o + i13\sin 22.6^o = 12 + 5i$$

A aquesta animació de David Virgili a GeoGebra podem practicar la suma i multiplicació de dos nombres complexos. Plantegeu diferents problemes, resoleu-los i compareu amb la simulació.
https://www.geogebra.org/m/WaSzuF82

- **Divisió (més senzilla en forma polar)**.

En **cartesiana** cal introduir el **complex conjugat** $\bar{z}_2^{\,*} = x_2 - iy_2 = r_2\angle{-\varphi_2}$)

En forma cartesiana:

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)}\frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)} =$$
$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$$

En forma polar

$$\bar{z}_1/\bar{z}_2 = r_1\angle\varphi_1/r_2\angle\varphi_2 = r_1/r_2\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Exemples:

$$\frac{(2 + i)}{(1 - 2i)} = \frac{(2 + i)}{(1 - 2i)}\frac{(1 + 2i)}{(1 + 2i)} = \frac{(2 - 2) + i(4 + 1)}{(1 + 4)} = \frac{5i}{5} = i$$

$$4\angle 65^o/2\angle 15^o = 2\angle 50^o$$

$$\frac{(18 - i)}{(3 + 4i)} = \frac{(18 - i)}{(3 + 4i)}\frac{(3 - 4i)}{(3 - 4i)} = \frac{(54 - 4) + i(-72 - 3)}{(9 + 16)} = \frac{50 - 75i}{25} = 2 - 3i$$

$$\frac{(18 - i)}{(3 + 4i)} = \frac{\sqrt{325}\angle -3.2^o}{5\angle 53.1^o} = 3.6\angle -56.3^o =$$
$$= 3.6\cos -56.3^o + i3.6\sin -56.3^o = 2 - 3i$$

A aquesta animació de Keskkin Lluis Riboldi GeoGebra podem practicar la divisió de dos nombres complexos. Plantegeu diferents problemes, resoleu-los i compareu amb la simulació.
https://www.geogebra.org/m/SZjYDByn

2.3.3 Operacions amb CASIO fx-115MS.

1) Prem la tecla MODE i activa l'opció CMPLX

2) Introdueix els nombres en forma cartesiana. Per exemple

$(2 + 3i)$ 2 + 3i. Perquè aparegui i prem SHIFT i després ENG

3) Perquè aparegui la part real i imaginària fas SHIFT i després =, que és l'opció assignada per passar de Re<->Im. D'aquesta forma a la pantalla veuràs 2 o 3i

4) Per passar a forma polar fas SHIFT(+), que fa l'opció $r\angle\theta$. Sortirà 3.6 i si fas SHIFT(=), que és l'opció assignada per passar de Re<->Im, apareixerà l'angle 56.3

5) A partir d'aquí puc fer les operacions que vulgui:

$(2+3i)+(4-i)=6+2i=6.3\angle 18.43^{\text{o}}$. Aquesta darrera opció fent el pas **SHIFT(+),** que fa l'opció $r\angle\theta$.

$$\frac{(18-i)}{(3+4i)}=2-3i=3.68\angle-56.3^{o}$$

6) Si vols entrar els números en forma polar. Per exemple $6\angle 30^{\text{o}}$ fes:

6 SHIFT – (Compte !!! símbol signe "–" i no símbol resta, que és l'opció ∠, 30.

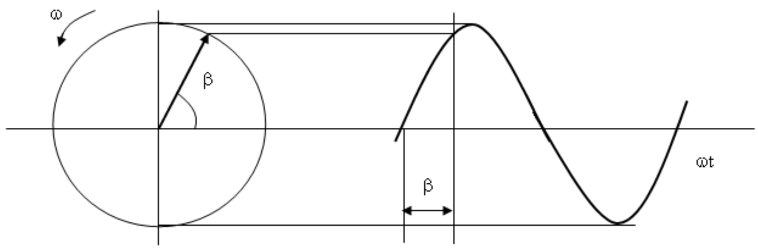
Una operació que es pot fer és:

$4\angle 65^{\text{o}}/2\angle 15^{\text{o}}=2\angle 50^{\text{o}}$. Aquesta operació la resol en forma cartesiana, que li dona 1.28+1.53i, i que pots passar a polar tot fent **SHIFT(+),** que fa l'opció $r\angle\theta$ i després SHIFT(=) per veure mòdul i angle

2.4 Impedància. Llei d'Ohm (1h30') (*en realitat 2h)*

Un **fasor és una funció complexa**, que representa una funció sinusoidal que varia en el temps, i que òbviament es representa en el pla complex.

Així, per exemple, donada la funció:



$$x(t)=\ A\ \cos(\omega t+\theta)$$

Definim el fasor com:

$$\bar{z}(t)=A\ \cos(\omega t+\theta)+iA\ \sin(\omega t+\theta)=$$
$$=x(t)+\ iy(t)=Ae^{i(\omega t+\theta)}=A\angle(\omega t+\theta)$$

De manera que:

$$Re[\bar{z}(t)]=x(t)$$

A aquesta animació de Filippo Giacomelli a GeoGebra es visualitza el concepte de fasor. Com es pot observar, es poden representar tres fasors alhora amb fases inicials diferents.
https://www.geogebra.org/m/fX6vEPha

En el nostre cas definim el **fasor *fem*** com:

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon_0 e^{i\omega t}=\varepsilon_0 e^{i(\omega t+0)}=\varepsilon_0\angle 0^{o}$$

De forma que

$$Re[\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Anàlogament definim el **fasor intensitat** com:

$$\bar{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = I_0 \angle - \varphi$$

De forma que

$$Re[\bar{I}] = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Observem que el terme ωt s'obvia, donat que afecta de la mateixa forma a la intensitat i la *fem*.

A aquesta animació de Dave Nero a GeoGebra es representen els fasors fem i tensions a la resistència, bobina i condensador per un circuit RCL.
https://www.geogebra.org/m/uWJTQjsP

Recordem que l'equació a resoldre era:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C}$$

En notació fasorial queda:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = L\frac{d^2\bar{I}}{dt^2} + R\frac{d\bar{I}}{dt} + \frac{\bar{I}}{C}$$

Com tot seguit veurem, l'avantatge de la notació fasorial és que l'expressió de les derivades és extremadament simple i molt útil:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\varepsilon_0 e^{i\omega t}\right] = i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t} = i\omega\bar{\varepsilon}$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[I_0 e^{i(\omega t-\varphi)}\right] = i\omega I_0 e^{i(\omega t-\varphi)} = i\omega\bar{I}$$

$$\frac{d^2\bar{I}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\bar{I}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[i\omega\bar{I}] = i\omega\frac{d\bar{I}}{dt} = i\omega(i\omega\bar{I}) = -\omega^2\bar{I}$$

Si substituïm les derivades a l'equació fasorial anterior, tenim:

$$i\omega\bar{\varepsilon} = -L\omega^2\bar{I} + Ri\omega\bar{I} + \frac{\bar{I}}{C}$$

Si dividim per ω i multipliquem per $-i$ a banda i banda tenim:

$$\bar{\varepsilon} = i\omega L\bar{I} + R\bar{I} - \frac{\bar{I}}{\omega C}i = [R + i(\omega L - 1/C\omega)]\bar{I}$$

Definint la **impedància** com:

$$\bar{Z} = R + i(\omega L - 1/C\omega)$$

Obtenim la **llei d'Ohm del corrent altern**:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{Z}\bar{I}$$

REFEXIÓ FINAL: Observem que gràcies a la notació fasorial, i més concretament a la forma de les derivades dels fasors, l'equació diferencial $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C}$ s'ha transformat en la llei d'Ohm del corrent altern.

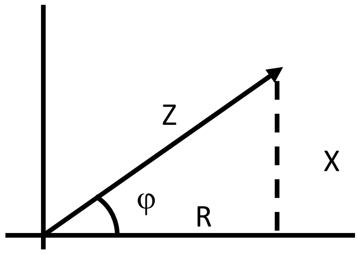
La impedància $\bar{Z}$ és un nombre complex amb **part real la resistència *R*** i **part imaginària la reactància *X*** (que depèn de la capacitat, la inductància i la freqüència).

Representa l'oposició que ofereix el circuit a què per ell hi circuli un corrent altern. Ho podem escriure com:

$$\bar{Z} = R + iX$$

La **reactància** total, que s'expressa en **Ω**, és la combinació de les **reactàncies inductiva (*X*$_L$) i capacitiva (*X*$_C$)**

$$X = X_L - X_C$$



Cada reactància és:

$$X_L = \omega L \quad i \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

La **impedància en la seva forma polar** és:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{I}} = \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}} = \frac{\varepsilon_0 \angle 0^o}{I_0 \angle - \varphi} = \frac{\varepsilon_0}{I_0}\angle\varphi = Z\angle\varphi$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}\ ;\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

A aquesta animació de J-F Pochon a GeoGebra es representa la impedància i les seves components per un circuit RCL, pel que es pot variar els valors de la freqüència, així com de R, C i L.
https://www.geogebra.org/m/FarWYcGm

Donant la volta a l'expressió de **la llei d'Ohm** es pot trobar la **intensitat** que circula pel **circuit RCL** i també la fem. És a dir:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{Z}\bar{I} \rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{Z}}$$

Dinàmica de treball:

1. Es calcula $\bar{Z}$ en la seva **forma cartesiana.**
2. S'expressa en la seva **forma polar.**
3. Es determina la **intensitat aplicant la llei d'Ohm**:

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{Z}} = \frac{\varepsilon_0\angle 0^o}{Z\angle\varphi} = \frac{\varepsilon_0}{Z}\angle - \varphi = I_0\angle - \varphi \rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon_0}{Z}\cos(\omega t - \varphi) = I_0\cos(\omega t - \varphi)$$

Casos particulars:

- Si **X_L>X_C**, llavors $X = X_L - X_C > 0$. Per tant $\varphi > 0$ i la **intensitat *I* va retardada respecte la fem** ε, i es diu que el **circuit és inductiu**.
- Si **X_L<X_C**, llavors $X = X_L - X_C < 0$. Per tant $\varphi < 0$ i **la intensitat *I* va avançada respecte la fem** ε, i es diu que el **circuit és capacitiu**.

- Si X_L=X_C, llavors $X = X_L - X_C = 0$. Per tant $\varphi = 0$ i **la intensitat I i la fem ε estan en fase**, i es diu que hi ha **ressonància**.

  A aquesta animació de Muñoz Gabriel a GeoGebra es representa la intensitat i la fem d'un circuit amb només resistència o condensador o bobina. Observeu que la intensitat està en fase amb la fem quan hi ha una resistència. Com la intensitat va retardada 90° quan només hi ha una bobina i com la intensitat va avançada 90° quan només hi ha un condensador.
  https://www.geogebra.org/m/JHuqppZy

4. Apliquem les relacions $\overline{V_i} = \overline{Z_i}\overline{I_i}$ per trobar les **tensions a cada element**:

$$\overline{V_R} = \overline{Z_R}\overline{I} = R\angle 0 \cdot I_0\angle -\varphi = RI_0\angle -\varphi \quad \rightarrow$$
$$V_R(t) = RI_0\cos(\omega t - \varphi)$$

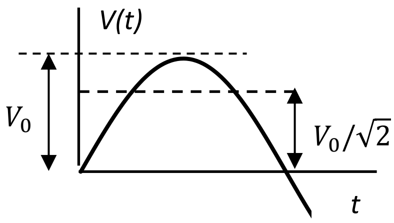
De la fórmula d'Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\ \sin\varphi$ es conclou que:

$$e^{i90^o} = 1\angle 90^o = \cos 90^o + i\ \sin 90^o = i$$
$$e^{-i90^o} = 1\angle -90^o = \cos 90^o - i\ \sin 90^o = -i$$
$$\overline{V_L} = \overline{Z_L}\overline{I} = X_L i \cdot I_0\angle -\varphi = X_L\angle 90^o \cdot I_0\angle -\varphi = X_L I_0\angle 90^o - \varphi \quad \rightarrow$$
$$V_L(t) = X_L I_0\cos(\omega t - \varphi + 90^o)$$
$$\overline{V_C} = \overline{Z_C}\overline{I} = -X_C i \cdot I_0\angle -\varphi = X_C\angle -90^o \cdot I_0\angle -\varphi = X_C I_0\angle -90^o - \varphi \quad \rightarrow$$
$$V_C(t) = X_C I_0\cos(\omega t - \varphi - 90^o)$$

A aquesta animació de Ray Tuck a GeoGebra es representa les tensions total i a cada element d'un circuit RCL, pel que es pot variar els valors de la freqüència, així com de R, C i L.
https://www.geogebra.org/m/Jnh64cWZ

El **valor mitjà** de la intensitat o les tensions és **nul**. Per aquest motiu s'introdueix com a **quantitat representativa el valor eficaç**. Pel cas d'un **senyal sinusoidal** tenim:

$$V_{ef} = \sqrt{\left\{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)dt\right\}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

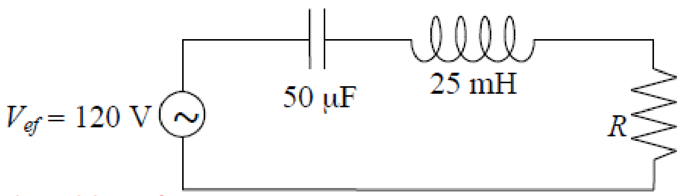


Per la intensitat també tenim: $I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. **De vegades** a la resolució de problemes **s'utilitzaran valors eficaços** enlloc d'amplituds. El valor **220 V** es refereix al **valor eficaç de la tensió alterna**.

A aquesta animació de Tan Seng Kwan a GeoGebra es representa la el valor eficaç d'una intensitat alterna.
https://www.geogebra.org/m/hwhn5ppn

Fer problema 6 de la col·lecció

6. Al circuit de la figura, la intensitat avança 63.5° respecte a la tensió. Si la pulsació és de 400 rad/s, calculeu el valor de R i el fasor de la tensió a cada element del circuit, prenent $\overline{\mathbf{V}} = (120\sqrt{2}\ \mathrm{V})|\underline{0^o}$

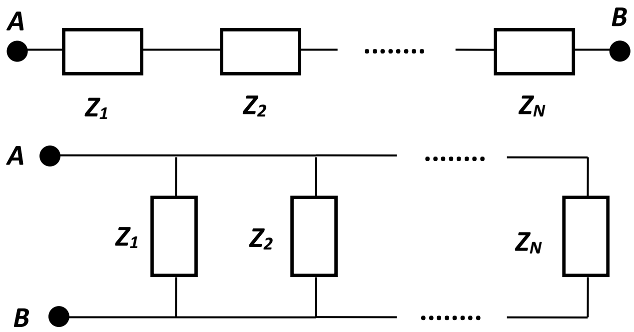


Fer problema 7 de la col·lecció

7. Un circuit sèrie està format per dos elements purs, de tal forma que quan s'aplica una tensió $V(t)$ = (300 V) sin(1000t+π/3) circula un corrent $I(t)$ = (4 A) cos(1000t+π/6). Quins són aquests elements? (recordeu que cos(x) = sin(x + π/2))

2.5 Circuits de corrent altern (2h) *(en realitat 1h30')*

El **formalisme dels nombres complexos** presenta l'avantatge de que les **lleis** que eren **vàlides en corrent continu**, **també** ho són pel **corrent altern**. **Es tractarà, per tant, de substituir les tensions i intensitats** pels seus corresponents **fasors** i les **resistències** per les **impedàncies**.
Així, doncs, es verifiquen les dues **lleis de Kirchhoff**, i per tant, les lleis d'**associació** d'**impedàncies** en **sèrie:**



$$\overline{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \overline{Z_\iota} \quad ; \quad \overline{V_\iota} = \overline{Z_\iota} \cdot \overline{I}$$

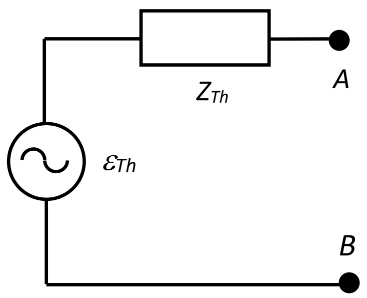
i en **paral·lel**:

$$\frac{1}{\overline{Z_{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\overline{Z_\iota}} \quad ; \quad \overline{I_\iota} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z_\iota}}$$

També es verifica el **teorema de Thévenin**, que ara s'enuncia de la forma següent:

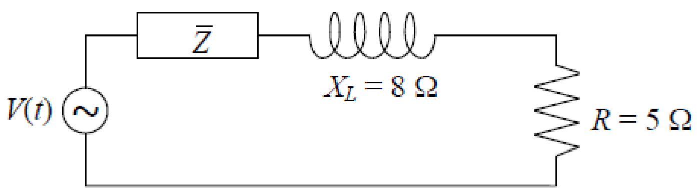
Qualsevol circuit (o part d'un circuit) **lineal** amb **dos terminals** A i B on hi ha connectada una **càrrega** és **equivalent** a un **generador** de fem $\bar{\varepsilon}_{Th}$ en **sèrie** amb una **impedància** $\overline{Z}_{Th}$, on:

- $\bar{\varepsilon}_{Th}$ és el fasor de la **tensió** entre els terminals **A i B a circuit obert** (sense càrrega).
- $\overline{Z}_{Th}$ és el valor de la **impedància entre A i B sense la càrrega** i curtcircuitant els generadors del circuit original. És a dir, **substituint** els **generadors** per les seves **impedàncies internes**.



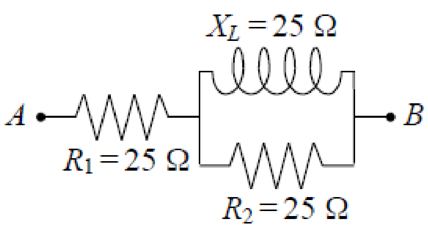
Fer problema 8 de la col·lecció

8. Calculeu la impedància $\overline{Z}$ del circuit de la figura. Suposeu f=50 Hz (recordeu que $\omega=2\pi f$), $V(t)$ = (50 V) cos($\omega t+\pi/4$), $I(t)$ = (2.5 A) cos($\omega t-\pi/12$)



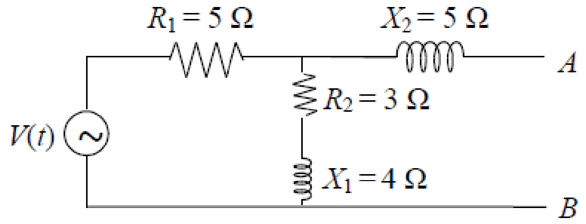
Fer problema 10 de la col·lecció

10. Al circuit de la figura $\overline{V}_{AB} = (100\sqrt{2}\ \mathrm{V})\ \underline{|0^\circ}$. Trobeu:
a) La impedància complexa del circuit.
b) Els fasors de la intensitat i la tensió a cada branca.



Fer problema 11 de la col·lecció

11. Trobeu el circuit equivalent Thévenin del circuit de la figura, tenint en compte que $V(t) = (10\text{ V})\sin(\omega t)$



2.6 Potència (1h30') *(en realitat 3h30')*

La **potència instantània** donada pel generador al circuit és:

$$P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 I_0 \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$$

La **potència mitjana** és la mitjana temporal:

$$< P(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2}\cos\varphi = \varepsilon_{ef} I_{ef}\cos\varphi = Z I_{ef}^2 \cos\varphi = R I_{ef}^2$$

Ja que, com

$$\bar{\varepsilon} = \bar{Z}\cdot\bar{I} \;\rightarrow\; \varepsilon_0 = Z I_0 \;\rightarrow\; \varepsilon_{ef} = Z I_{ef}$$

COMENTARIS

1. La potència que **dona el generador** al circuit s'anomena **potència aparent**, i es defineix com:

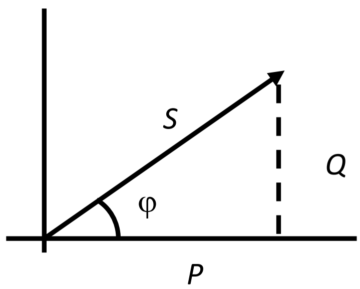
   $$S = \varepsilon_{ef} I_{ef}\ ,$$

   que s'expressa en **VA** (Volt-Ampere).
2. La potència $P = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos\varphi$ s'anomena **potència activa** o real, i és la que es **consumeix al circuit (a la resistència).** Aquesta és la potència que s'utilitza per realitzar un treball, i per tant és la que es reflecteix a la **factura** de la companyia elèctrica. ***cos φ*** és el **factor de potència** (nombre comprès entre 0 i 1), i que també es pot definir a partir dels quocients entre les potències activa i aparent $\cos\varphi = \frac{P}{S}$.

3. Si la impedància és una **resistència pura *cos φ* = 1**, i la **potència activa és la potència aparent**.

4. Si la impedància és una **reactància pura** (inductància o capacitat) ***cos φ* = 0**, i la **potència activa és nul·la**.

   A aquesta animació de J-F Pochon a GeoGebra es representa la tensió, la intensitat i la potència instantània per un determinat circuit. Observeu que si la reactància del circuit és nul·la la potència sempre és positiva, i per tant la potència activa s'iguala a l'aparent. En canvi, si el circuit és totalment inductiu o capacitiu la potència activa és nul·la, ja que la potència instantània és simètrica respecte 0.
   https://www.geogebra.org/m/GBdCKqN2



5. La potència donada pel generador es **dissipa als elements resistius del circuit** (**potència activa *P***), i la **resta va i ve periòdicament de la reactància al**

generador, i s'anomena **potència reactiva *Q***. La **potència reactiva no produeix un treball útil**, però es necessita perquè les **bobines** creïn els **camps magnètics** dels induïts dels motors, transformadors i fluorescents, i els **condensadors** creïn els camps **elèctrics**. Es defineix com:

$$Q = S\ \sin\varphi = \varepsilon_{ef} I_{ef}\ \sin\varphi = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Com no és una potència "útil" es diu que està dewattada, i s'expressa en var (Volt Amperes Reactius)

6. És bo tenir una instal·lació amb un **factor de potència molt menor que 1** ? Per respondre, estudiarem el cas d'un generador de 1000 W de potència i amb un valor eficaç de la fem ε_{ef} = 220 V.
   - Si *cos* φ *= 0.9* el valor eficaç de la intensitat és $I_{ef} = P/\ \varepsilon_{ef} \cos\varphi$ = 5.05 A.
   - Si *cos* φ *= 0.5*, el valor eficaç de la intensitat és $I_{ef} = P/\ \varepsilon_{ef} \cos\varphi$ = 9.09 A

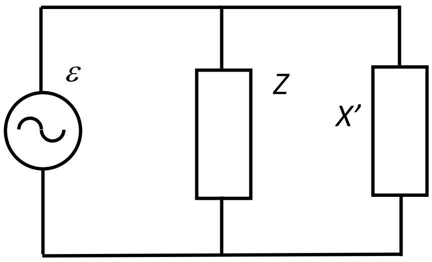
Per tant, **com menor és *cos* φ, més gran és I_{ef}** i **més gran serà la potència dissipada** per efecte Joule als **cables de conducció**, que a la vegada hauran de ser més gruixuts (i per tant més cars). Per aquest motiu les companyies elèctriques controlen que les instal·lacions de les fàbriques **tinguin factors de potència alts**. Concretament penalitzen **factors de potència menors que 0.9**. Per aquest motiu és convenient **corregir el factor de potència**. Per això es **connecta en paral·lel a la impedància** de la instal·lació una **reactància pura**.

És a dir, si suposem un circuit amb una impedància $\bar{Z}_1 = \bar{Z} = R + iX$, i connectem en paral·lel una reactància X', la impedància equivalent de l'associació és:

$$\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{iX'} = \frac{\bar{Z}^*}{Z^2} - \frac{i}{X'} =$$

$$= \frac{1}{Z^2X'}\{\bar{Z}^*X' - iZ^2\} = \frac{1}{Z^2X'}\{(R - iX)X' - iZ^2\} =$$

$$= \frac{1}{Z^2X'}\{RX' - i(XX' + Z^2)\}$$



Si $\frac{1}{\bar{Z}_{eq}}$ no té part imaginària $\bar{Z}_{eq}$ tampoc, i el factor de potència serà 1. Per tant:

$$Z^2 + XX' = 0 \rightarrow X' = -\frac{Z^2}{X}$$

Finalment, la impedància equivalent del conjunt un cop s'ha corregit el factor de potència és una resistència pura de valor:

$$R_{eq} = \frac{Z^2}{R}$$

COMENTARIS

1. Si $\boldsymbol{X=X_L-X_C>0}$ el **circuit és inductiu**, que és la situació habitual, ja que els elements més comuns que hi ha a les fàbriques són motors, transformadors i fluorescents, on hi ha bàsicament bobines. En aquests casos **l'element a connectar en paral·lel** amb la impedància del circuit és un **condensador**.

2. **Si $X=X_L-X_C<0$ el circuit és capacitiu**, i en aquest cas cal connectar en paral·lel a la impedància una **bobina**.
3. Quan es corregeix el factor de potència el transport d'energia ja no es produeix del circuit al generador sinó que per exemple, en el cas d'un circuit inductiu, el flux es produeix entre aquest i el condensador. Les pèrdues degudes al transport d'energia s'eliminen, ja que l'**energia** necessària perquè funcionin les màquines les **subministra el condensador**.

A aquestes dues animacions de Falstad es compara el comportament d'un circuit inductiu (format per una bobina i una resistència de 10 Ω) abans i després de corregir el factor de potència amb un condensador connectat en paral·lel. Observeu que quan el factor de potència no s'ha corregit per la resistència de 50 Ω (que representa el conjunt de cables que porten el corrent a la "fàbrica") circula corrent. En canvi quan el factor de potència s'ha corregit, i després de que passi prou temps, per la resistència de 50 Ω no circula corrent. Així, doncs, el condensador al carregar-se i descarregar-se subministra el corrent necessari perquè la instal·lació elèctrica (formada per la bobina i la resistència de 10 Ω) funcioni
http://www.falstad.com/circuit/e-powerfactor1.html
http://www.falstad.com/circuit/e-powerfactor2.html

Fer problema 13 de la col·lecció

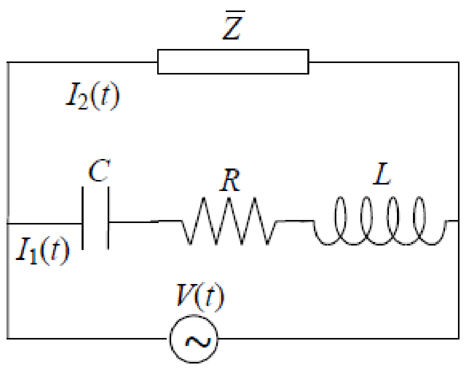
13. En sèrie amb una resistència de 140 Ω hi ha un condensador de 15 μF i una bobina de 0.15 H que no té resistència. La intensitat que circula és de 0.18 A. Calculeu el factor de potència del circuit, la tensió eficaç aplicada i els valors de la potència mitjana consumida a cada element del circuit, sabent que la tensió aplicada té una freqüència de 50 Hz.

Fer problema 15 de la col·lecció

15. Un circuit està format per l'associació en sèrie d'una bobina amb coeficient d'autoinducció L i una resistència de valor R. Alimentem aquesta circuit amb una font de corrent altern de tensió eficaç V_{ef} = 125 V i freqüència f = 50 Hz. Sabent que la potència mitjana consumida pel circuit és de 25 W i que el factor de potència és 0.4, determineu:
a) La intensitat eficaç que circula pel circuit i el seu desfasament respecta la tensió.
b) Els valors de R i L.
c) La potència aparent, activa i reactiva del circuit.
d) L'element (i el seu valor) que s'ha de connectar en paral·lel a tot el circuit per corregir el factor de potència (és a dir, per fer que el factor de potència del conjunt sigui 1).

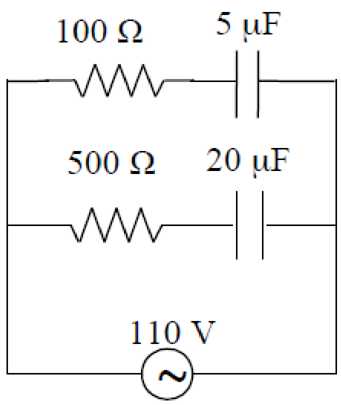
Fer problema 18 de la col·lecció

18. Al circuit de la figura les intensitats $I_1(t)$ i $I_2(t)$ estan en fase. Si la tensió instantània del generador és $V(t) = (220\sqrt{2}\text{ V})\cos(1000\pi t)$, C = 1 μF, R = 500 Ω, L = 0.2 H i la potència mitjana consumida a la impedància $\bar{Z}$ és de 100 W, determineu
a) l'expressió de la intensitat instantània $I_1(t)$ i de les tensions instantànies als extrems del condensador, la resistència i la bobina,
b) l'expressió de la intensitat instantània $I_2(t)$ i la impedància complexa $\bar{Z}$.



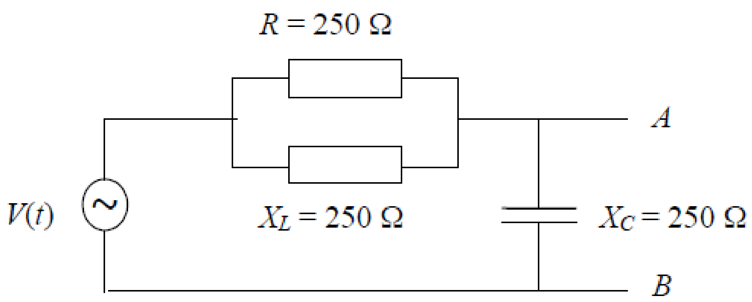
Fer problema 20 de la col·lecció

20. Si la freqüència de la tensió aplicada en el circuit de la figura és 50 Hz, trobeu:
a) Els fasors de les intensitats a cada branca i el de la intensitat total.
b) El factor de potència del circuit.
c) Quin element haurem d'associar en paral·lel per a que el factor de potència sigui la unitat ? I en sèrie ?



Fer problema 21 de la col·lecció

21. Si a la font de tensió del circuit de la figura $V(t) = (125\sqrt{2}\ \text{V})\cos(100\pi t)$, determineu:
a) La intensitat instantània a cada element del circuit.
b) El circuit equivalent Thévenin entre els punts A i B.
c) La potència mitjana que es dissiparia a una resistència $R' = 75\ \Omega$ connectada en paral·lel entre els punts A i B.



2.7 Ressonància (1h') *(en realitat 1h)*

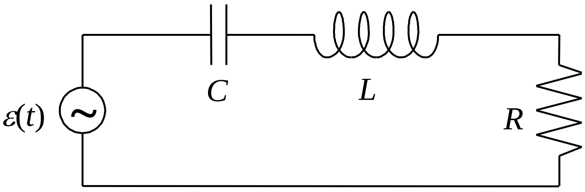
El fenomen de la ressonància apareix en **diferents camps de la Física**: Mecànica, Electromagnetisme, etc. Quan **s'excita** o pertorba un **sistema poc amortit** aquest **tendeix a vibrar** a les seves **freqüències naturals o ressonants**.

Si la força **d'excitació és periòdica** i la seva **freqüència és igual a la freqüència natural**, **l'amplitud de les vibracions** pot ser **molt gran**, encara que la **magnitud** de la força sigui **petita**. Per exemple, en el cas d'un gronxador si la freqüència d'oscil·lació coincideix amb la de l'aplicació de la força, l'amplada de les vibracions augmenta encara que apliquem una força petita.

A l'adreça següent es veu la ressonància pel cas d'un gronxador.
https://www.youtube.com/watch?v=5JbpcsH80us

A l'adreça següent es veu el cas extrem de la ressonància mecànica del pont de Tacoma i una molt interessant visualització dels conceptes de freqüència pròpia i ressonància.
http://www.youtube.com/watch?v=MHlICTWMBMs

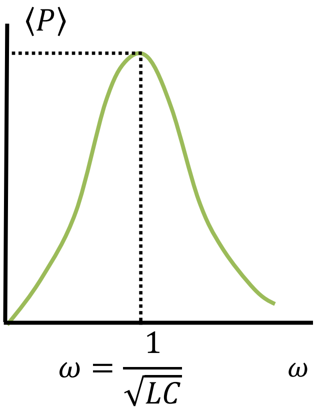
A aquesta animació de Tom Walsh a GeoGebra es visualitza el concepte de ressonància per un sistema de tres masses unides a molles diferents, que estan sotmeses a una força externa periòdica de freqüència variable. Observem que quan la freqüència és petita s'activa la massa de l'esquerra, si és gran ho fa la de la dreta i si és mitjana ho fa la del mig.
https://www.geogebra.org/m/JCyp4bYH



Pel cas d'un circuit **RCL sèrie** es pot aconseguir que la **reactància** total sigui **nul·la**, aplicant una fem amb una **freqüència** igual a:

$$X = 0 = X_L - X_C \to \omega L = \frac{1}{\omega C} \to \omega^2 = \frac{1}{LC} \to \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\to f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



Comentaris:

- Aquesta és la **freqüència de ressonància**.
- A la **ressonància** la **impedància** és igual a la **resistència** (X=0) i la **intensitat és màxima** $I_{ef}=\mathcal{E}_{ef}/R$. A més, com la intensitat està en fase amb la fem del generador, el **factor de potència és 1 i la potència és màxima**.
- Aplicació: Sintonització d'una emissora de ràdio. El circuit receptor consta d'un **circuit RCL amb un condensador variable**. **Variant la capacitat** s'aconsegueix que el **circuit** estigui en **ressonància** amb el senyal. Llavors la potència serà màxima i l'emissora s'escoltarà.

A aquesta simulació de Physique TSI 1 Vieljeux a GeoGebra es mostra la corba d'amplitud de la intensitat per un circuit RCL. Observeu que la ressonància s'assoleix quan la freqüència del generador coincideix amb la pròpia del circuit, que només depèn dels valors de L i C.
https://www.geogebra.org/m/bugmekkr

Fer problema 28 de la col·lecció

28. En un circuit *LCR* sèrie tenim L = 2 H, C = 1 μF i ω = 100π rad/s. Quin element cal afegir en sèrie perquè hi hagi ressonància? Feu el diagrama fasorial.

Fer problema 29 de la col·lecció

29. Considereu un circuit *LCR* sèrie format per una resistència de 10 Ω, una bobina de 0.05 H i un condensador de 20 μF. Si es connecta a una font alterna de 120 V i 50 Hz, calculeu:
a) El factor de potència del circuit.
b) La potència aparent, activa i reactiva.
c) La freqüència de ressonància.
d) La intensitat instantània màxima en la ressonància.
e) La impedància que oposa el circuit a aquesta intensitat.

2.8 Superposició de senyals. Amplada de banda (1h') *(en realitat 1h)*

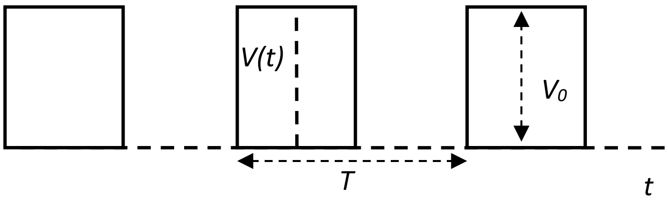
El **teorema de Fourier** afirma que: **qualsevol funció periòdica** *V(t)* de forma arbitrària de **freqüència *f*** es pot expressar com una **sèrie** (sèrie de Fourier) o **superposició de funcions harmòniques** de **freqüències que són múltiples enters de *f*:**

$$V(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f t)$$

Els coeficients A_n i B_n es calculen a partir d'integrals de la mateixa funció *V(t)*.

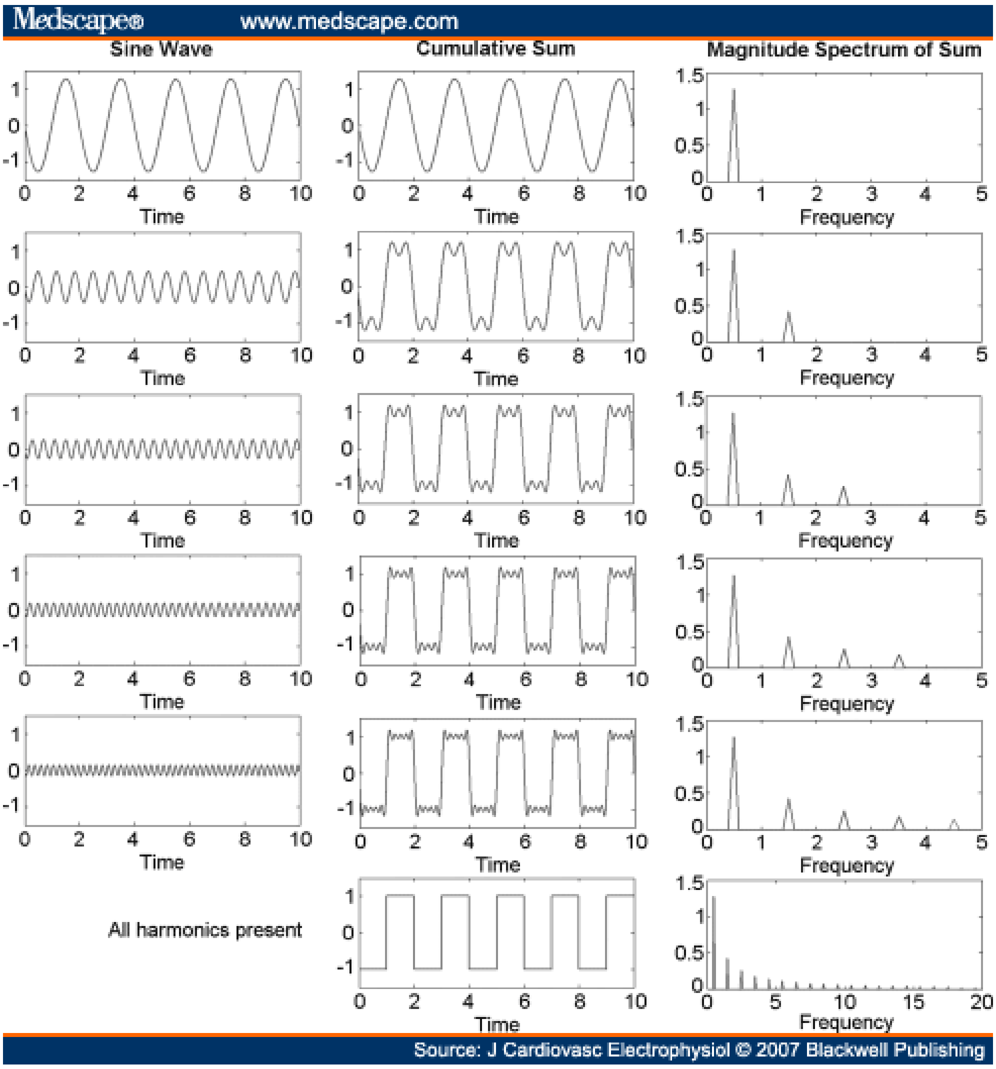
A aquestes simulacions de PhET i de Giovanni Organtini a GeoGebra es visualitza el teorema de Fourier per una funció quadrada (pel cas de PhET també per una triangular).
http://phet.colorado.edu/en/simulation/fourier
https://www.geogebra.org/m/wUanseCs

Pel cas d'una **funció periòdica simètrica (respecte del temps) quadrada, d'amplitud V_0 i de període $T=1/f=2\pi/\omega$,** tenim:

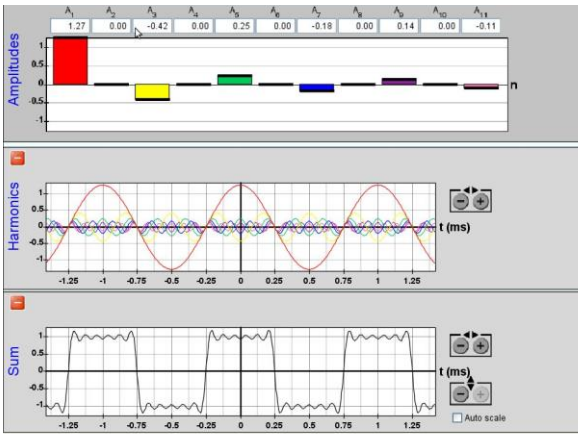


$$V(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi n f t)$$

$$V(t) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi}\left\{\frac{\cos(1\cdot 2\pi ft)}{1} - \frac{\cos(3\cdot 2\pi ft)}{3} + \frac{\cos(5\cdot 2\pi ft)}{5} - \frac{\cos(7\cdot 2\pi ft)}{7} + \cdots\right\}$$



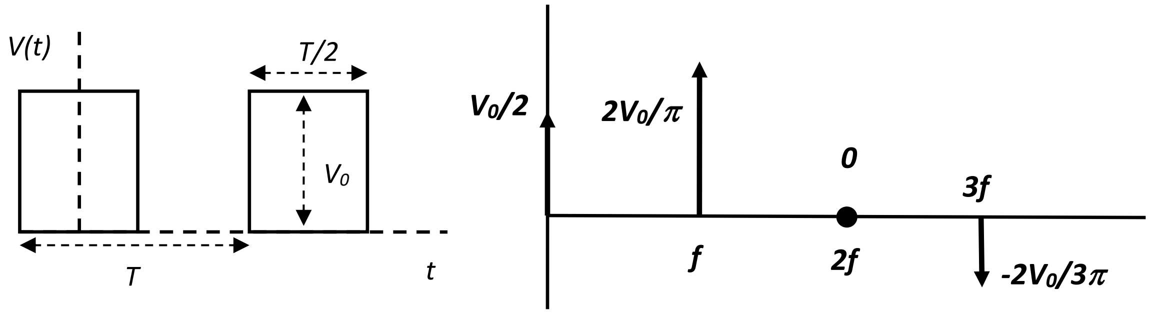
La representació dels valors dels coeficients A_n i B_n en funció de la freqüència s'anomena **espectre**, que indica la contribució de cada freqüència (o harmònic) a la funció total. **Com més harmònics** considerem a la sèrie de Fourier, **millor es reproduirà** el senyal quadrat original. Ara bé, amb un nombre no gaire gran d'harmònics es pot representar acceptablement el senyal. Per exemple, la contribució dels 11 primers harmònics és:



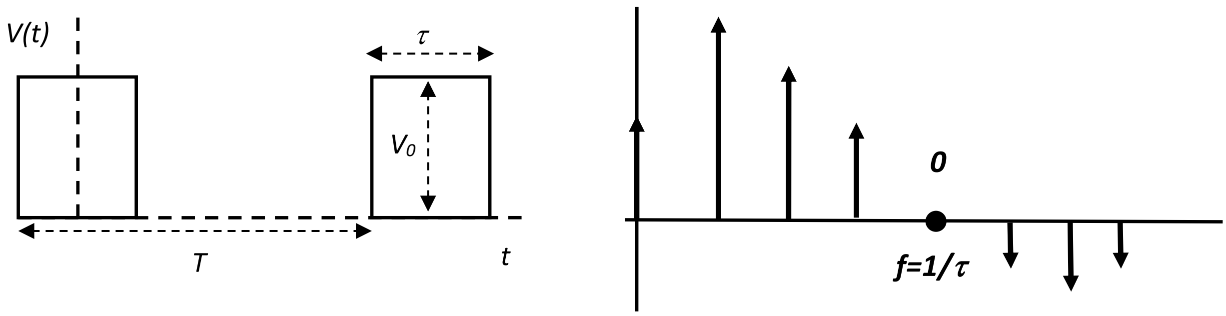
0	f	2f	3f	4f	5f	6f	7f	8f	9f	10f	11f
$V_0/2$	$2V_0/\pi$	0	$-2V_0/3\pi$	0	$2V_0/5\pi$	0	$-2V_0/7\pi$	0	$2V_0/9\pi$	0	$-2V_0/11\pi$

A aquesta simulació de Michael Borcherds a GeoGebra es visualitza com es transmet un senyal quadrat (i per tant els diferents termes de Fourier) en el temps.
https://www.geogebra.org/m/yBetCdjK

Per tant, pel cas d'un **senyal quadrat de període *T***, com la durada de la part positiva és $\tau = T/2$, **el primer 0 de l'espectre** apareix per la **freqüència** $2f = 2/T=1/(T/2)=$ $\boldsymbol{1/\tau}$.



Si **augmentem el període** *T* però la durada de cada pols τ es manté constant, **augmenta el nombre** de termes harmònics, i **disminueix la distància** entre ells, però l'espectre **s'anul·la** per primer cop pel valor de la freqüència $\boldsymbol{1/\tau}$.



Si enlloc d'un senyal periòdic quadrat tenim un únic **pols quadrat de durada** τ, la **separació entre harmònics serà infinitesimal** i per reproduir el senyal original caldrà substituir la sèrie per una **integral**, que s'anomena **transformada de Fourier**. La contribució a l'espectre no es deguda a un conjunt discret de freqüències, sinó que ara tenim una **distribució contínua** d'harmònics distribuïts segons una funció sinusoïdal d'amplitud decreixent (funció sinc):

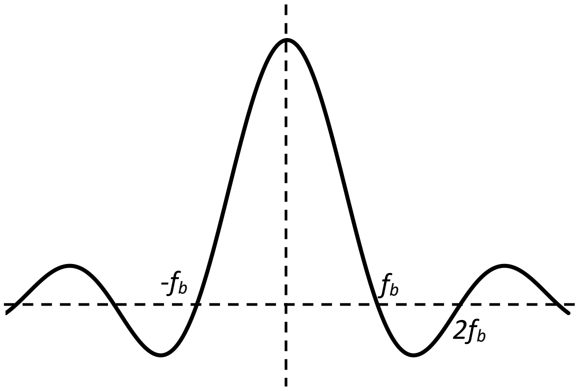
$$V(f) = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}$$

Aquesta funció **s'anul·la** per primer cop pel valor de la freqüència:

$$f_b = 1/\tau$$

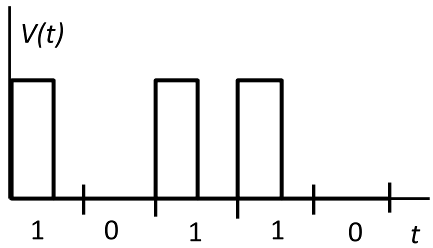
COMENTARIS

1. f_b s'anomena **amplada de banda, que és l'interval de freqüències necessari** per **reproduir acceptablement un pols quadrat individual**.
2. L'amplada de banda és **inversament proporcional a la durada del pols**. Així, com **més curt** sigui aquest, **més gran serà l'amplada de banda**, i per tant es necessitaran **més harmònics** per reproduir acceptablement el senyal.



3. L'amplada de banda està directament relacionada amb la **velocitat de transmissió** de la informació o "bitrate", que és el nombre de **bits per segon (bits/s** o **bauds**) utilitzats per establir una comunicació. Així si s'utilitza la codificació amb **retorn a zero** (RZ) tenim que la **durada d'un bit és el doble de la durada d'un pols τ,** i per tant la velocitat de transmissió és:

$$V = \frac{1}{2\tau} = \frac{f_b}{2} \rightarrow f_b = 2V$$



Així doncs, si es vol **augmentar la velocitat de transmissió,** cal **augmentar l'amplada de banda**, i per tant, **disminuir la durada dels pols**. Alguns valors de velocitats de transmissió són:

	V	f_b	τ	Medi
Modem 56k	56 kbits/s	112 kHz	8.9 μs	Cable trenat
ADSL 2+	24 Mbits/s	48 MHz	20.8 ns	Cable trenat
10 Gbits Ethernet	10 Gbits/s	20 GHz	50 ps	Fibra òptica
Bluetooth 3.0	24 Mbits/s	48 MHz	20.8 ns	Wireless
Mobil 4G	100 Mbits/s	200 MHz	5 ns	Wireless
USB 3.0 Super speed	5 Gbits/s	10 GHz	0.1 ns	Memòria usb
DDR3-SDRAM	422 Gbits/s	844 GHz	1.2 ps	Bus memòria
Serial ATA 3	4.8 Gbits/s	9.6 GHz	0.1 ns	Disc dur-placa base

Fer problema 24 de la col·lecció

24. Considereu una ona quadrada amb valors màxim i mínim de 2 V i −2 V respectivament i amplada de 2.5 ms. Determineu la freqüència, l'amplitud i la fase en graus de l'onzè harmònic.

Fer problema 27 de la col·lecció

27. L'amplada de banda nominal d'una línia de telèfon és de 4 kHz. Quina és la duració aproximada del pols més curt que es pot enviar? Donat que l'amplada entre polsos ha de ser igual a l'amplada del pols, quants polsos per segon es poden enviar?

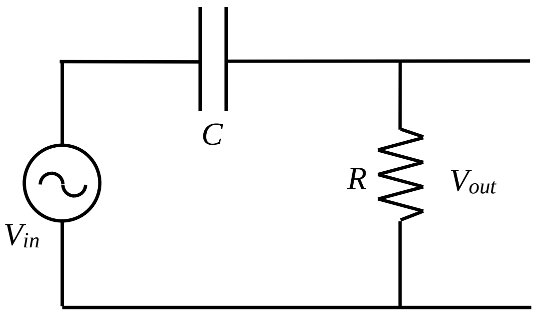
2.9 Filtres (1h') *(en realitat 1h)*

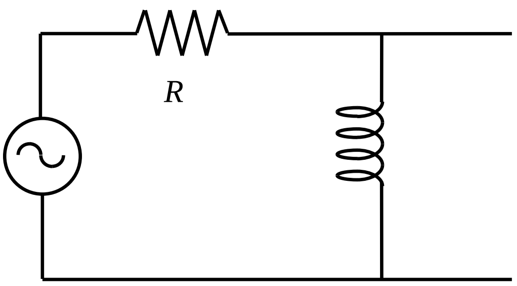
És una aplicació dels circuits ressonants a fi d'eliminar freqüències no desitjades en comunicacions. Són, per tant, circuits que **deixen passar o eliminen senyals de determinades freqüències**. La forma més **bàsica** consisteix en circuits amb elements passius lineals, on hi ha **resistències i condensadors (RC)** o **resistències i bobines (RL)**. També es poden fer amb **circuits LC**.

A aquesta animació del professor Rousseau de la universitat de Maine es visualitza la funció de transferència de filtres passa altes i passa baixes.
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/filtredemo.html

2.9.1 Circuits passa altes

Es pot construir per exemple amb un circuit RC o un RL.





Pel cas d'un **circuit RC** la impedància és:

$$\bar{Z} = R + iX_C \rightarrow Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

La intensitat *I* que circula pel circuit és: $\bar{I} = \frac{\bar{V}_{in}}{\bar{Z}}$

El valor eficaç de la tensió a la sortida V_{out} és:

$$\bar{V}_{out} = \bar{Z}_R \bar{I} = \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}} \bar{V}_{in} \rightarrow V_{out} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} V_{in}$$

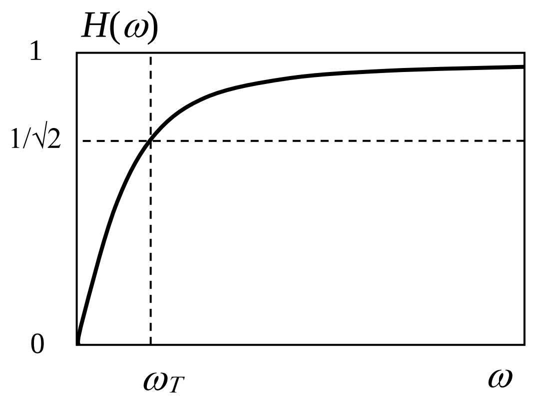
Definint la **funció de transferència $H(\omega)$** com el quocient entre els valors eficaços de les tensions a la sortida i a l'entrada, obtenim una funció que depèn de la freqüència:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

$$Si\ \omega \uparrow \rightarrow \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0 \rightarrow H(\omega) \rightarrow 1$$

$$Si\ \omega \downarrow \rightarrow \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \rightarrow H(\omega) \rightarrow 0$$

El filtre **deixa passar senyals d'alta freqüència i elimina els de baixa**.

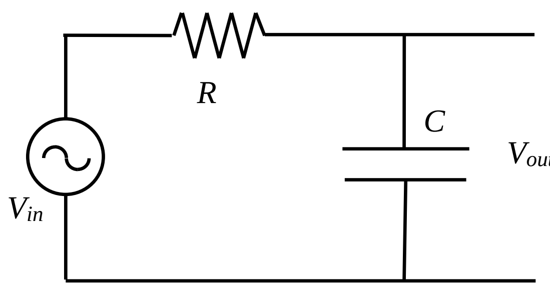


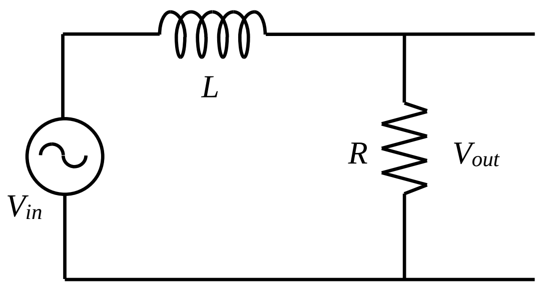
A aquesta primera animació del professor Rousseau de la universitat de Maine es visualitza la funció de transferència d'un filtre passa altes (corba vermella), format per una resistència i un condensador. Observeu com canvia la funció quan varieu la resistència i la capacitat.
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/rcordre1.html

A aquesta segona animació del professor Rousseau de la universitat de Maine es visualitza el filtratge d'un senyal d'entrada que pot ser sinusoidal, quadrat i triangular pel cas d'un filtre passa altes format per una resistència i un condensador. Observeu com canvia la resposta en funció de la freqüència.
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/resicondo.html

2.9.2 Circuits passa baixes

Es pot construir per exemple amb un circuit RC o un RL.





Pel cas d'un **circuit RC** ara el valor eficaç de la tensió a la sortida és:

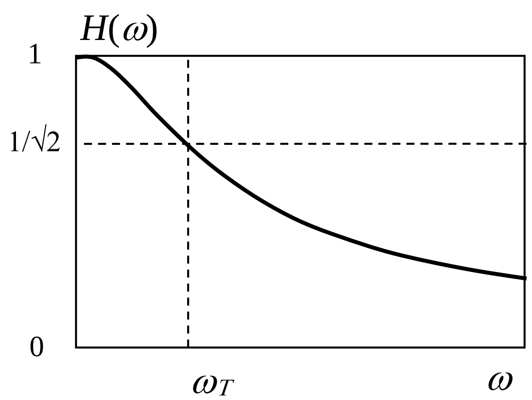
$$\bar{V}_{out} = \bar{Z}_C \bar{I} = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}} \bar{V}_{in} \rightarrow V_{out} = \frac{1/_{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} V_{in}$$

La **funció de transferència $H(\omega)$** és:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1/_{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

$$Si\ \omega \uparrow \rightarrow \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0 \rightarrow H(\omega) \rightarrow 0$$

$$Si\ \omega \downarrow \rightarrow \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \rightarrow H(\omega) \rightarrow 1$$



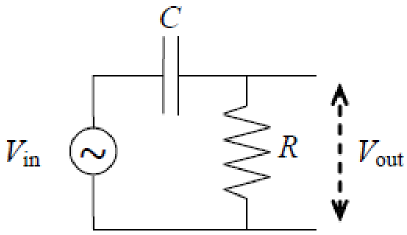
El filtre **deixa passar senyals de baixa freqüència i elimina els d'alta**.

A aquesta primera animació del professor Rousseau de la universitat de Maine es visualitza la funció de transferència d'un filtre passa baixes (corba vermella), format per una resistència i un condensador. Observeu com canvia la funció quan varieu la resistència i la capacitat.
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/rcordre1.html

A aquesta segona animació del professor Rousseau de la universitat de Maine es visualitza el filtratge d'un senyal d'entrada que pot ser sinusoidal, quadrat i triangular pel cas d'un filtre passa baixes format per una resistència i un condensador. Observeu com canvia la resposta en funció de la freqüència.
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/resicondo.html

Fer problema 33 de la col·lecció

33. El circuit filtre de la figura adjunta té una resistència de 1000 Ω i una capacitat de 0.01 μF. Calculeu la funció de transferència V_{out}/V_{in} quan ω = 50 rad/s i $\omega = 5\times10^5$ rad/s.



Fer problema 34 de la col·lecció

34. Quina és la funció de transferència $F(\omega) = V_{out}(\omega)/V_{in}(\omega)$ dels dos filtres de la figura? Quin tipus de filtres són?