

TEMA 4

ONES

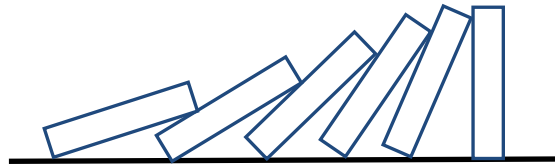
4.1 Definició. Tipus d'ones. Funció d'ones (1h30') (en realitat 1h15')

4.1.1 Definició:

Una ona és una **pertorbació**, que es **propaga a l'espai i en el temps**, amb la que es **transmet energia i quantitat de moviment sense transport de matèria**.

La pertorbació consisteix en una **variació periòdica o no periòdica d'una determinada propietat**, que s'origina en un **punt de l'espai**, com **elongació** dels punts d'una corda (en el cas d'ones a una corda), o **canvis de pressió** (en el cas del so) o **camp elèctric i magnètic** (pel cas d'ones electromagnètiques).

Exemple 1: Efecte dòmino. No es transporta matèria, ja que les fitxes no es desplacen, però sí que es transporta energia, ja que aquestes van caient a mesura que la pertorbació es propaga en l'espai i en el temps.



A aquesta animació d'un record Guinness de caiguda de fitxes de dòmino s'observa com la pertorbació es propaga per totes les fitxes, mentre aquestes cauen.

<https://www.youtube.com/watch?v=vbjko3M0JT4>

Exemple 2: Pols a una corda. Quan se sacseja l'extrem d'una corda la pertorbació es propaga per tots els seus punts. És a dir es transporta energia, però no matèria.

A aquesta animació de Ray Tuck a GeoGebra es genera un pols a una corda, que es propaga pels diferents punts. La pertorbació, consistent en un moviment vertical dels punts de la corda, es propaga perpendicularment a aquest moviment.

<https://www.geogebra.org/m/kP6ANJ4U>

Exemple 3: Pols a una molla. Quan se sacseja l'extrem d'una molla la pertorbació es propaga per tots els seus punts. De nou es transporta energia, però no matèria.

A aquesta animació de Ray Tuck a GeoGebra es genera un pols a una molla, que es propaga pels diferents punts. La pertorbació, consistent en un moviment horitzontal dels punts de la molla, es propaga en la mateixa direcció que la pròpia pertorbació, però, com es pot observar, sense transport de matèria.

<https://www.geogebra.org/m/VGBspXmc>

4.1.2 Tipus d'ones

- **Depenent de si necessiten un medi material per propagar-se.**
 1. **Mecàniques:** Com per exemple les ones a l'aigua, el so, a una corda o a una molla necessiten d'un medi material (aigua, aire, corda, molla) ja que la pertorbació es propaga gràcies a les propietats elàstiques del medi.
 2. **Electromagnètiques:** Els camps elèctrics i magnètics que les conformen es poden propagar en el buit, i per tant, no necessiten un medi material per propagar-se.
- **Depenent de la pertorbació inicial**
 1. **Periòdiques:** La pertorbació inicial es repeteix cíclicament.
 2. **Harmòniques:** Són ones periòdiques en les quals la pertorbació inicial consisteix en un moviment harmònic simple.
 3. **No periòdiques:** La pertorbació inicial no es repeteix cíclicament.
 4. **Pols:** La pertorbació dura molt poc temps.

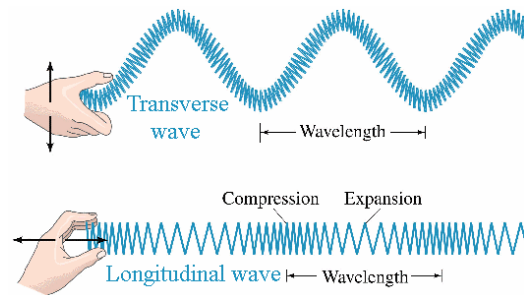
A aquesta animació de PhET se simulen diferents tipus d'ones a una corda: periòdiques, no periòdiques, harmòniques i polsos.

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

- **Segons el nombre de dimensions en què es propaguen:**

1. **Unidimensionals:** Es propaguen en una sola dimensió (Ones en una corda).
 2. **Bidimensionals:** Es propaguen en dues dimensions (Ones a la superfície de l'aigua d'un llac).
 3. **Tridimensionals:** Es propaguen en tres dimensions (Ones sonores, electromagnètiques).
- **Segons la relació entre la direcció de propagació (que s'anomena raig) i la de la vibració que produeix la pertorbació:**

1. **Ones transversals:** Les dues direccions són **perpendiculars** (ones a una corda, ones electromagnètiques).
2. **Ones Longitudinals:** Les dues direccions són **paral·leles** (ones a una molla a la qual li donem un impuls horitzontal, ones sonores en gasos i líquids).



A aquesta animació de Gaetano Di Caprio a GeoGebra se simulen ones transversals. Es veu clarament com la direcció de propagació de l'ona és perpendicular al moviment que provoca sobre els partícules del sistema. Com suggereix el propi autor visualitzeu l'ona i augmenteu el nombre de partícules.

<https://www.geogebra.org/m/JGzMaUz3>

A aquesta animació de Tom Walsh a GeoGebra se simulen ones longitudinals. Si prenem les opcions "Travelling Wave" i "Notes" veureu com l'ona es propaga en la mateixa direcció de vibració, i que les partícules oscil·len respecte un a determinada posició.

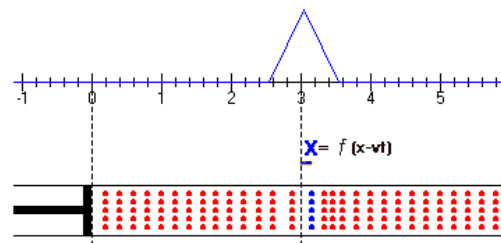
<https://www.geogebra.org/m/zsESysFA>

En aquest vídeo del professor Boyd Edwards podem veure ones longitudinals que es mouen per un slinky.

<https://www.youtube.com/watch?v=xOasekn-NTQ>

4.1.3 Funció d'ones

Expressió matemàtica que dóna informació sobre els **efectes de la pertorbació en el temps** i segons la **direcció de propagació**. Pel cas d'ones a una **corda** la funció d'ona ens diu quant val l'**elongació** o desplaçament vertical, respecte de la posició d'equilibri, de tots els punts per diferents instants de temps. Pel cas d'**ones acústiques** la funció d'ones és la **variació de la pressió** de l'aire, i pel cas d'**ones electromagnètiques** són els **camps elèctric i magnètic**.



Pel cas d'una **ona unidimensional**, com la que es propaga per una corda, la funció d'ona depèn de dues variables. Si la **direcció de propagació (o raig)** n'hi diem **variable x**, la **funció d'ona** depèn de les **variables $\Psi(x,t)$** . Els fenòmens ondulatoris estan governats per una equació en derivades parcials de segon grau, anomenada **equació d'ones**:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$$

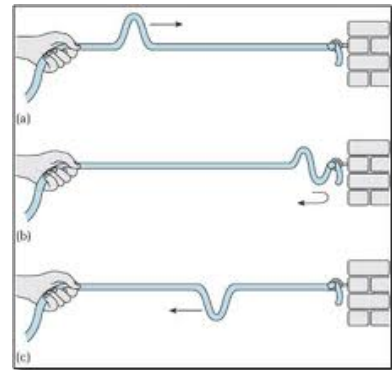
Aquesta equació descriu una **ona unidimensional propagant-se sense canviar la seva forma segons l'eix x a velocitat constant**. Les quantitats $\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$ són les derivades parcials segones de la funció d'ones respecte de les coordenades x i t . La solució d'aquesta equació és **qualsevol funció** que tingui **per argument $(x+vt)$ o $(x-vt)$** . Així la funció:

$$\Psi(x, t) = f(x - vt),$$

descriu una ona que es desplaça **cap a la dreta (valors de $x > 0$)**. Mentre que:

$$\Psi(x, t) = f(x + vt),$$

descriu una ona que es **desplaça cap a l'esquerra ($x < 0$)**.



A aquesta animació de Tom Walsh a GeoGebra se simula un pols que es propaga cap a la dreta i que posteriorment es reflecteix cap a l'esquerra. L'animació considera els casos de reflexió en extrem fixe (hi ha un canvi de fase és 180°) i lliure (amb canvi de fase de 0°).

<https://www.geogebra.org/m/t3neXVU8>

Fer problema 3 de la col·lecció

3. Les següents funcions d'ona representen ones en moviment:

a) $y_1(x, t) = A \cos[k(x + 34 t)]$

b) $y_2(x, t) = B \exp(-k(x - 20 t)^2)$

c) $y_3(x, t) = C / [D + k(x - 10 t)^2]$

on x s'expressa en metres, t en segons i A , B , C , D i k son constants amb les unitats apropiades per que y resulti en metres. Determineu la direcció de propagació i la velocitat de l'ona en cada cas.

4.2 Ones harmòniques (1h T) (en realitat 1h)

Les ones harmòniques són especialment importants perquè d'acord amb el **teorema de Fourier**, **qualsevol ona o paquet d'ones** es pot expressar com a **combinació d'ones harmòniques de freqüències diferents**.

$$\Psi(x, t) = f(x \pm vt) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[n(kx \pm \omega t)] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin[n(kx \pm \omega t)]$$

Si se sacseja l'extrem lliure d'una corda prou llarga segons un **moviment harmònic simple d'amplitud A i freqüència f** , **tots els punts** es mouran segons aquest **moviment harmònic simple**, i la corda adoptarà una forma sinusoidal. L'**elongació** o desplaçament vertical, respecte la posició d'equilibri a l'instant t per un punt que està a una distància x de l'extrem, és:

$$\Psi(x, t) = A \sin[k(x \pm vt) + \delta]$$

En general aquesta és l'expressió de la funció d'ona d'una **ona harmònica unidimensional**, que es propaga en el temps segons l'eix de les x

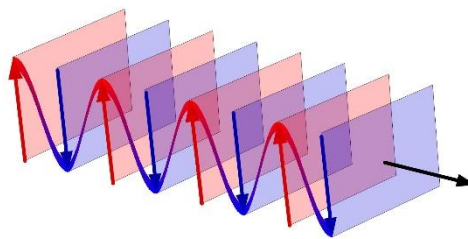
A aquesta animació de Tom Walsh a GeoGebra se simula les ones en una corda. Com es pot observar, en un dels extrems de la corda es genera un moviment harmònic d'unes determinades freqüència i amplitud, que es propaga pels diferents punts de la corda. El programa permet canviar l'amplitud i la freqüència. També permet canviar la tensió T i la densitat de la corda μ . Aquests valors són necessaris per determinar la velocitat de propagació de l'ona a la corda, que és: $v = \sqrt{T/\mu}$.

<https://www.geogebra.org/m/qyTMgkgX>

A és l'amplitud, que en el cas de la corda, és la màxima elongació dels punts respecte de la posició d'equilibri. En general **les unitats** en què s'expressa **depèn del tipus d'ona**. Així, pel cas d'ones a una corda seran unitats de longitud, pel cas d'ones sonores unitats de pressió, i pel cas d'ones electromagnètiques unitats de camps elèctric i magnètic.

L'argument $[k(x \pm vt) + \delta]$ és la **fase**, i **δ la fase inicial** (o constant de fase), que depèn de les **condicions inicials** (de com es genera la pertorbació a l'instant inicial). Ambdues quantitats s'expressen en **radiants** (rad) i a la majoria dels casos es pren $\delta = 0$.

Un **front d'ona** es la **superfície** (pel cas d'ones tridimensionals) o la **línia** (pel cas de bidimensionals) formada pel conjunt de punts als que **arriba la pertorbació en un determinat moment**. També es pot definir com el conjunt de punts que tenen la **mateixa fase** i que, per tant, l'argument $[k(x \pm vt) + \delta]$ és **el mateix**. Els fronts d'ona **són perpendiculars a la direcció de propagació o raig**. L'expressió anterior, amb una amplitud A constant, descriu una ona que es propaga segons l'eix x amb **fronts d'ona** que són **superfícies planes** i que, per tant, anomenem **ones planes harmòniques**.



A aquesta animació de Nathaniel Cunningham a GeoGebra se simulen ones planes harmòniques.

<https://www.geogebra.org/m/tnQDEkZ4>

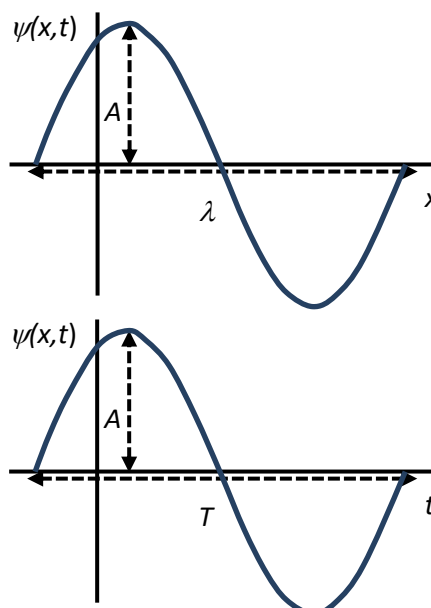
La **longitud d'ona λ** és la **distància entre dos màxims o dos mínims consecutius**, o d'una forma més genèrica, la distància mínima entre dos punts que es troben en el mateix estat de vibració. Al SI s'expressa en **metres** (m), encara que sovint s'utilitzen múltiples com el km, o submúltiples com el mm, μm , nm.

El **període T** es defineix com el temps que transcorre entre dos estats de moviment consecutius equivalents, o en un llenguatge més planer, el **temps transcorregut entre dos màxims o dos mínims consecutius**. Al SI s'expressa en s.

El període, la longitud d'ona i la velocitat de propagació v estan relacionats per les expressions:

$$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = vT \rightarrow T = \frac{\lambda}{v}$$

Per tant, la **longitud d'ona és la distància que recorre l'ona en un període**.



La freqüència és:

$$f = \frac{1}{T},$$

que és el **nombre d'oscil·lacions o vibracions completes per unitat de temps**. Al SI s'expressa en s^{-1} , que habitualment n'hi direm **Hertz (Hz)** o també cicles/s. Sovint s'utilitzen múltiples com el kHz (kilo 10^3 Hz), el MHz (mega 10^6 Hz), el GHz (giga 10^9 Hz), el THz (tera 10^{12} Hz), el PHz (peta 10^{15} Hz) o el EHz (exa 10^{18} Hz).

El **nombre d'ones k** es defineix com:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

té dimensions d'inversa de la longitud i, per tant, al SI s'expressa en rad/m o m^{-1}

La **freqüència angular o pulsació** que és:

$$\omega = kv \rightarrow k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Al SI s'expressa en **rad/s**, encara que de vegades també s'utilitzen les revolucions per minut (**rpm**), essent la relació d'equivalència: $1 \text{ rpm} = 2\pi/60 = 0,1047 \text{ rad/s}$.

A aquesta animació de Barb Newitt es mostren dues ones harmòniques per les que es pot variar l'amplitud, freqüència i velocitat. Observeu com varia la longitud d'ona quan variem aquests paràmetres.
<https://www.geogebra.org/m/cwyjdf2y>

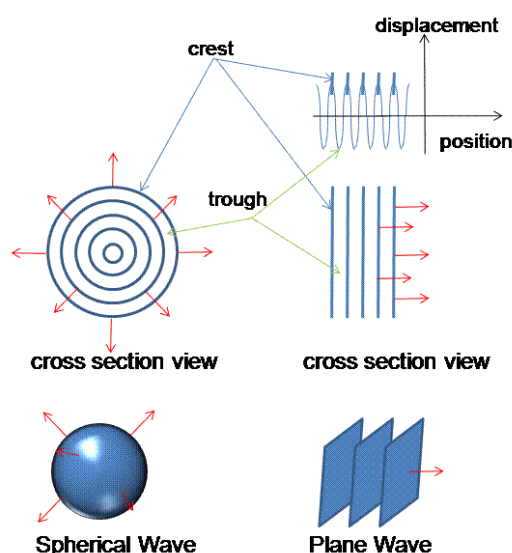
La funció d'ones planes harmònica unidimensional es pot expressar:

$$\Psi(x, t) = A \sin[kx \pm \omega t + \delta]$$

Cal dir que en tota l'exposició hem utilitzat la funció **sinus**, però també seria possible expressar-ho en termes del **cosinus**.

L'aproximació de les ones planes no sempre és aplicable. Així, pel cas d'una pertorbació que s'origina en un **punt o focus puntual**, i que es propaga **uniformement** (isotròpicament) en les **tres dimensions**, és més adequat suposar que els **fronts d'ones són superfícies esfèriques** de radi cada cop més gran i que, per tant, d'acord amb el principi de conservació de l'energia, l'amplitud decreixi amb la distància r al focus:

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin[kr \pm \omega t + \delta]$$



A aquestes animacions de Nathaniel Cunningham a GeoGebra se simulen ones harmòniques amb fronts d'ona circulars que es propaguen en dos sentits diferents.

<https://www.geogebra.org/m/xFnkKEfS>

<https://www.geogebra.org/m/TDdkKSEq>

Fer problema 2 de la col·lecció

2. Una ona harmònica transversal de 4 m d'amplitud es propaga per una corda de dreta a esquerra amb una velocitat de 10 m/s. Si la longitud d'ona és de 20 m, trobeu la funció d'ona i la velocitat transversal màxima en qualsevol punt de la corda.

A aquestes animacions de Tan Seng Kwang a GeoGebra es calculen diferències de fase per una ona harmònica. En el primer cas es fa per dues partícules que al mateix instant ocupen posicions diferents (podem variar la longitud d'ona). A la segona es fa el mateix per dues partícules que ocupen la mateixa posició en dos instants diferents (podem variar el període).

<https://www.geogebra.org/m/kmpdntk6>

<https://www.geogebra.org/m/rkr6c6wx>

Fer problema 4 de la col·lecció

4. Una ona harmònica està caracteritzada per la funció d'ones $y(x,t) = 0.4 \sin(25x + 50t)$, on x i y s'expressen en centímetres, i t en segons.

a) Quina es la distància mínima en un instant de temps donat entre dos punts amb una diferència de fase de 50° ?

b) Quina es la diferència de fase en un cert punt en un interval de temps de 0.1 segons?

c) Quina es la diferència de fase en un instant de temps entre dos punts separats 20 centímetres?

4.3 Ones electromagnètiques. Densitat d'energia. Intensitat. (2h T i 1h P) (en realitat 2h30')

Les equacions de **Maxwell** són el resultat de l'estudi recopilatori dels fenòmens elèctrics i magnètics que James Clerk Maxwell feu pels volts de 1860. Maxwell demostrà que el conjunt de lleis de l'electricitat i el magnetisme es podia sintetitzar en **quatre equacions**, que regeixen les variacions espacials i temporals dels camps elèctrics i magnètics, i les relaciona amb les seves causes o fonts.

Són importants perquè:

- Permeten **unificar els fenòmens elèctrics i magnètics**.
- Prediuen l'existència **d'ones electromagnètiques**, ja que operant sobre les equacions s'arriba a una **equació d'ones pels camps elèctric i magnètic**. Així, si l'ona es propaga segons l'eix de les x , s'obté:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2} ; \quad \frac{\partial^2 \vec{B}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(x,t)}{\partial t^2}$$

Comentaris:

1. Quan **s'acceleren càrregues**, per exemple aplicant un corrent altern a una **antena** (que és un fil conductor amb electrons lliures), **s'emeten ones electromagnètiques**.

A aquesta animació de PhET se simula la generació i detecció d'ones electromagnètiques en antenes
<http://phet.colorado.edu/en/simulation/radio-waves>

En aquest vídeo del professor Boyd Edwards podem veure que si un receptor de ràdio s'aïlla dins una gàbia de Faraday no funciona. Fixeu-vos en l'explicació que fa sobre el funcionament de l'aparell de ràdio i el moviment dels electrons a l'antena.

<https://www.youtube.com/watch?v=ojHYtWKRTM>

En aquests dos vídeos es veuen més aplicacions de la gàbia de Faraday (el primer és del divulgador de la ciència Juan Antonio Jiménez Salas).

<https://www.youtube.com/watch?v=7RKk2JWXx30>

<https://www.youtube.com/watch?v=VrYIZRPA6Gk>

2. Els **camp elèctric i magnètic són les funcions d'ona electromagnètica**, que es poden **propagar pel buit** a una velocitat que depèn de la permitivitat elèctrica ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$) i la permeabilitat magnètica del buit ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$).

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

és la **velocitat de la llum al buit**. A partir d'aquest resultat Maxwell deduí que la llum era una **ona electromagnètica**.

3. L'any 1887 Heinrich **Hertz** **generà i detectà experimentalment** ones electromagnètiques.
4. Els **camp elèctric i magnètic són mútuament perpendiculars i vibren en fase**.
5. Els **mòduls dels camps** estan relacionats:

$$|\vec{E}| = c|\vec{B}|$$

6. Les ones electromagnètiques són **transversals**: els **camp elèctric i magnètic són perpendiculars a la direcció de propagació**. Si el vector \vec{u} és paral·lel a aquesta **direcció**, i es defineix com:

$$\vec{u} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|}$$

Els camps elèctric i magnètic es poden **determinar** l'un a partir de l'altre:

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{c} ; \vec{E} = c(\vec{B} \times \vec{u})$$

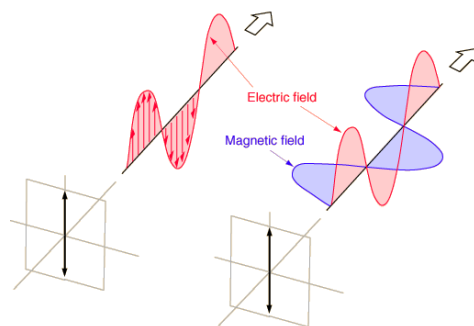
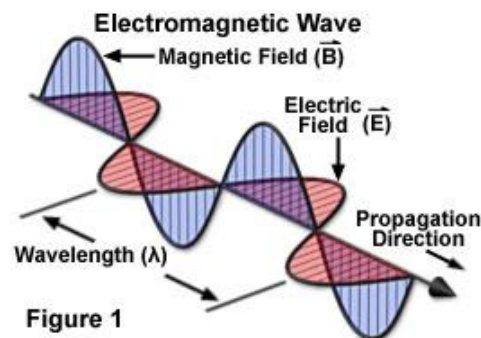
7. Les funcions d'ona

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin[kx \pm \omega t + \delta],$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \sin[kx \pm \omega t + \delta],$$

descriuen el cas particular d'una **ona electromagnètica harmònica plana polaritzada linealment**, que es **propaga segons l'eix x**. Es diu que està polaritzada linealment perquè els camps sempre oscil·len segons les direccions donades pels vectors

amplitud \vec{E}_0 i \vec{B}_0 , que són constants. En aquest cas l'anomenat **pla de vibració o de polarització**, que queda definit a partir de les **direccions de propagació i la de vibració del camp elèctric**, **no varia amb el temps**.



A la següent animació de Daniel Mentrard a GeoGebra se simula una ona electromagnètica. Observeu com els camps elèctric i magnètic són mútuament perpendiculars, vibren en fase i són perpendiculars a la direcció de propagació.

<https://www.geogebra.org/m/fmk46vcw>

A següent animació de Tom Walsh a GeoGebra es mostra clarament el pla de vibració d'una ona electromagnètica.

<https://www.geogebra.org/m/xhYwXSsH>

8. Les ones **transporten energia**. La **densitat instantània d'energia** (energia per unitat de volum, que s'expressa al SI en J/m³) $\eta(x,t)$ d'una ona electromagnètica és:

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2 \mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2[kx \pm \omega t + \delta]$$

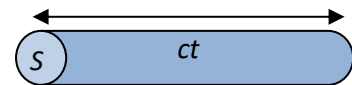
La **densitat mitjana** η és:

$$\eta = \langle \eta(x,t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{2c\mu_0}$$

9. La **intensitat mitjana** (potència per unitat de superfície, que al SI s'expressa en W/m²), que incideix sobre una **superfície** S és:

$$I = \frac{P}{S} = c\eta = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{c B_0^2}{2\mu_0}$$

10. Aquesta relació es pot deduir a partir de la densitat d'energia que hi ha dins un cilindre de secció S i longitud ct .



$$\eta = \frac{E}{V} = \frac{E}{ctS} \rightarrow E = \eta ctS \rightarrow$$

$$P = \frac{E}{t} = \eta cS \rightarrow$$

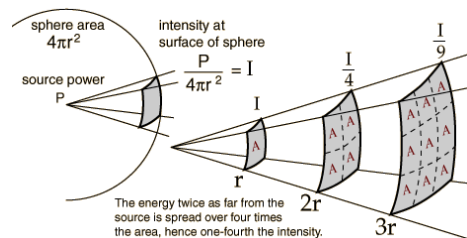
$$I = \frac{P}{S} = \eta c$$

Les expressions de les amplituds dels camps elèctric i magnètic són:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \rightarrow E_0^2 = \frac{2P}{c \varepsilon_0 S} \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{2I}{c \varepsilon_0}}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \mu_0 P}{c \varepsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{2 \mu_0 P}{c S}} = \sqrt{\frac{2 \mu_0 I}{c}}$$

11. Pel cas d'una emissora que **emet amb una potència P** , la **intensitat mitjana** que arriba a un punt que està a una **distància r** es pot determinar suposant que l'emissora emet **ones esfèriques** de forma isotròpica en les tres direccions. Com la superfície que abasta és $S = 4\pi r^2$, la intensitat és:



$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Les expressions de les amplituds dels camps elèctric i magnètic són:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 4\pi r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{P}{2\pi c \varepsilon_0}}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c S}} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c 4\pi r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 P}{2\pi c}}$$

Fer problema 7 de la col·lecció

7. Un camp elèctric sinusoïdal, de direcció paral·lela a l'eix y , es propaga pel buit en el sentit positiu de l'eix z . La seva freqüència és de 250 MHz i té un valor màxim de 4 V/m. Determineu:

- La longitud d'ona, el període, el nombre d'ones i la freqüència angular.
- L'expressió del camp elèctric $E(z,t)$.
- L'expressió del camp magnètic, $B(z,t)$.
- Els valors mitjans de la densitat d'energia i la intensitat de l'ona.

Fer problema 8 de la col·lecció

8. Una ona electromagnètica harmònica plana de 10 m de longitud d'ona es propaga pel buit en el sentit positiu de l'eix y . Se sap que el camp elèctric està orientat segons la direcció z i que la intensitat mitjana de l'ona és de 0.2 W/m^2 . Calculeu

- Els camps elèctric i magnètic en funció del temps.
- La potència incident en una superfície circular de radi 0.4 m perpendicular a l'eix y .

Fer problema 11 de la col·lecció

11. La intensitat de la llum del sol que incideix sobre la part superior de l'atmosfera terrestre s'anomena constant solar i val 1.35 kW/m^2 . Calculeu:

- El valor eficaç del camp elèctric i del camp magnètic deguts al Sol en aquesta regió.
- La potència mitjana emesa pel Sol.

Dades: Distància Sol-Terra = $1.49 \times 10^{11} \text{ m}$.

Fer problema 12 de la col·lecció

12. Un satèl·lit de comunicacions (S) situat en una òrbita a 36000 km d'alçada respecte la superfície terrestre emet ones electromagnètiques linealment polaritzades de freqüència $11.2 \times 10^9 \text{ Hz}$. La potència mitjana d'emissió és de 12 kW que es reparteix sobre una zona de la Terra de superfície $9 \times 10^6 \text{ km}^2$, que pot considerar-se plana i on és perfectament vàlida l'aproximació d'ones planes. Calculeu la intensitat mitjana de l'ona electromagnètica que arriba a una antena parabòlica (A) situada a la superfície de la Terra i la potència total mitjana que capta aquesta antena si el seu diàmetre és de 80 cm.

4.4 Espectre electromagnètic (1/2h) (en realitat 45')

Com la **velocitat** de les ones electromagnètiques al buit és c , λ i f estan directament relacionades:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

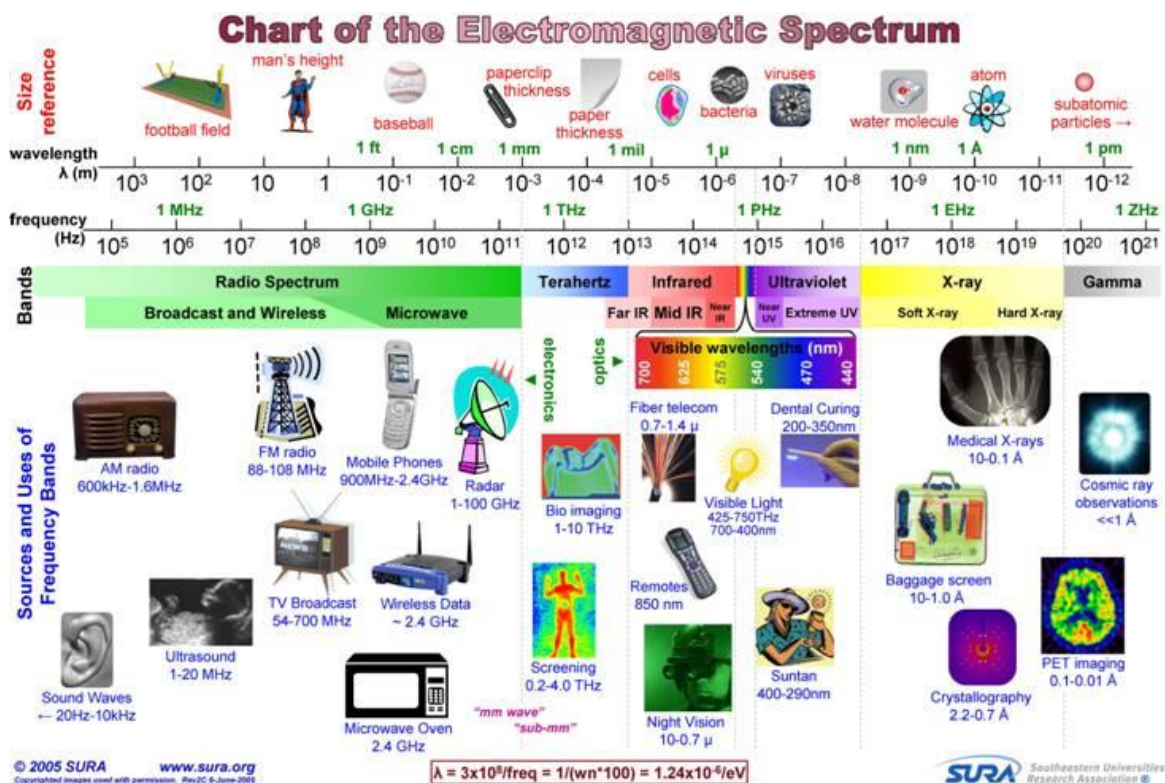
L'energia d'un fotó de freqüència f és:

$$E = hf.$$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ és la **constant de Planck**. Per tant, com **més gran sigui f major serà l'energia** de l'ona.

Les ones electromagnètiques es **produeixen** quan **s'acceleren càrregues** o quan els **electrons** dels àtoms o molècules experimenten **transicions** de nivells d'energia superiors a inferiors. Segons el valor de f o λ les ones electromagnètiques es **classifiquen** en:

- **Ones de radio:** Són generades per corrents elèctrics macroscòpics que oscil·len en les antenes. Per exemple, al connectar un generador de corrent altern. S'utilitzen en sistemes de comunicació de ràdio i TV. El rang va dels **milers de km (pocs Hz, que correspon a ones de radio llargues)** fins a **0.3 m (10^9 Hz = 1 GHz, que correspon a la radiació ultra alta UHF)**.
- **Microones:** Es generen mitjançant circuits electrònics o dispositius amb tubs de buit. El rang va del **0.3 m (1 GHz radar)** fins a **3 mm (10^{11} Hz = 100 GHz)**. En un forn microones es generen ones de freqüència igual a la pròpia de vibració de les molècules d'aigua (2.45 GHz), produint-se, per tant, un fenomen de ressonància que fa vibrar les molècules d'aigua de l'objecte a escalfar, moviment que es tradueix en calor, i per tant escalfament. Les microones també s'utilitzen en les comunicacions de telefonia mòbil, TDT, o les xarxes wireless (Wifi o Bluetooth), ja que tenen més amplada de banda. Les freqüències típiques de treball estan compreses entre 1 i 8 GHz (per exemple 2.4 GHz de Bluetooth).
- **Infraroges:** És la radiació que emeten els objectes pel fet de tenir una temperatura no nul·la. També n'emeten dispositius electrònics com díodes d'unió. El rang està comprés entre **0.3 mm = 300 μ m (10^{12} Hz = 1THz) i 3 μ m (10^{14} = 100THz)**. S'utilitzen en els comandaments a distància dels aparells domèstics.
- **Llum visible:** És deguda a les transicions dels electrons més externs. **El rang va dels 400 nm (750 THz violet) fins als 750 nm (400 THz vermell)**.
- **Llum ultraviolada:** És deguda a transicions electròniques en capes internes dels àtoms. El sol n'emet, però sortosament molta d'aquesta radiació és absorbida per la capa d'ozó. El rang està comprés entre **300 nm (10^{15} Hz = 1 PHz, Petahertz) i 3 nm (100 PHz)**. S'utilitza en el procés fotolitogràfic per fabricar circuits integrats.



- **Raigs X:** És deguda a transicions electròniques en les capes més internes dels àtoms. Com la longitud d'ona és semblant a la distància interatòmica travessen fàcilment els objectes. El rang de longituds d'ona va dels **3 nm (100 PHz) fins als 0.03 nm (10^{19} = 10 EHz, Exahertz)**. El procés de miniaturització a escala nanomètrica es fa amb fotolitografia de raigs X.
- **Raigs γ :** Són produïts per nuclis d'àtoms radioactius. Les longituds són menors que **3 pm i les freqüències són superiors als 100 EHz**, que en ser tan altes fan que junt amb els raigs X, es tracti d'una radiació molt perillosa pel cos humà.

Fer problema 10 de la col·lecció

10. Determineu la longitud d'ona de

- una ona de ràdio AM típica de 1000 kHz,
- una ona de ràdio FM típica de 100 MHz,
- un raig X de 10^{19} Hz.

Determineu la freqüència de

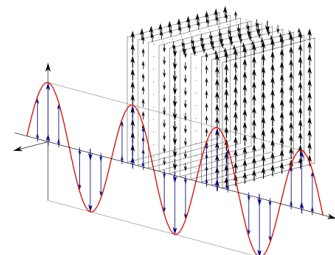
- una microona de 3 cm.
- l'espectre visible si el de longituds d'ona visibles va de 400 a 700 nm.

4.5 Polarització. Pantalles de cristall líquid (1h T i 30'P) (en realitat 1h30')

La **polarització** és un fenomen característic de les **ones transversals** (no de les longitudinals) relacionat amb com varia el **pla de vibració o de polarització** de l'ona amb el **temps**. El pla es defineix a partir de les **direccions de propagació i la de vibració**.

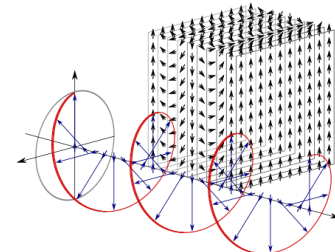
Pel cas de les **ones electromagnètiques** generalment es considera com a direcció de vibració la del **camp elèctric**. Segons com varia el pla de vibració amb el temps tenim:

1. Llum **polaritzada linealment** (per abús del llenguatge sovint es diu llum polaritzada): **el pla de vibració no varia** en el temps.
2. Llum **polaritzada circular o el·lípticament**: el pla de vibració descriu en el temps **una trajectòria circular o el·líptica**.



Al vídeo de Ruff s'expliquen les llums polaritzades lineal, circular i el·lípticament. Quan se superposen dues ones que es propaguen perpendicularment (blava i vermella) i en fase, l'ona resultant (verda) està linealment polaritzada. Si estan desfasades un quart d'ona (90°) s'obté llum polaritzada circularment.

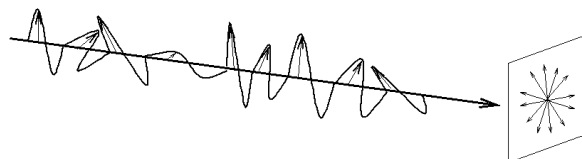
<https://www.youtube.com/watch?v=Fu-aYnRkUgg>



A l'animació de Nathaniel Cunningham a GeoGebra es mostra un dispositiu òptic (quarter-wave plate) que transforma llum linealment polaritzada en circular, produint un retard d'un quart d'ona en una de les components de la llum linealment polaritzada.

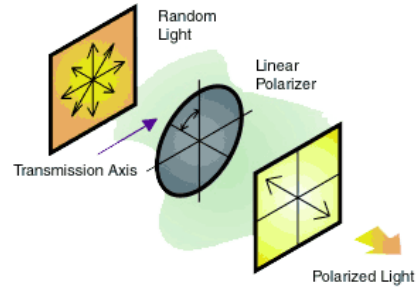
<https://www.geogebra.org/m/krvTxTaq>

3. Llum **natural o no polaritzada**: el **pla de vibració** descriu una trajectòria **aleatòria**. En una font hi ha un gran nombre d'àtoms o molècules



(Nombre d'Avogadro) que emeten llum. Com les orientacions del pla de vibració de la llum de cada emissor no estan correlacionades, la llum no està polaritzada.

Un polaritzador és un **dispositiu òptic** que **converteix llum natural en polaritzada** (lineal, circular o el·lípticament). Els polaritzadors artificials més coneguts, i utilitzats per exemple en les ulleres de sol, són els **polaroids**. Es tracta de làmines formades per molècules d'hidrocarburs de cadena llarga (per exemple, alcohol de polivinil dopat amb iodina) alineats, per construcció, de forma que quan s'envia llum polaritzada amb el camp elèctric paral·lel a les cadenes la làmina l'absorbeix totalment, mentre que si la llum està polaritzada perpendicularment no és absorbida.

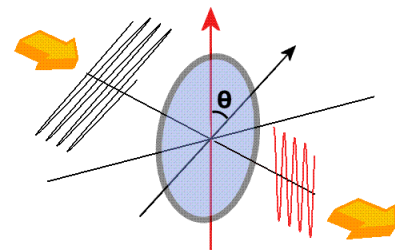


Si s'envia **llum natural** sobre un **polaritzador lineal**, a la sortida tindrem llum **polaritzada linealment**. La **direcció del pla de vibració** de la llum a la **sortida del polaritzador** indica la direcció de l'**eix de transmissió del polaritzador**. La relació entre les intensitats de la llum abans I_0 i després I de passar pel polaritzador és:

$$I = \frac{I_0}{2}$$

És a dir que el polaritzador absorbeix la **meitat de la intensitat** de la llum incident.

Si la llum incident és **linealment polaritzada**, i el seu **pla de vibració** forma un angle θ respecte l'**eix de transmissió** del polaritzador, a la **sortida** tindrem llum **polaritzada** amb el **pla de vibració segons l'eix de transmissió del polaritzador**. La **relació entre les intensitats** abans I_0 i després I de passar pel polaritzador ve donada per la **lei de Malus**:



$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

Al següent vídeo el professor Boyd Edwards experimenta amb dos polaritzadors.

https://www.youtube.com/watch?v=_nHW-wtqmZM

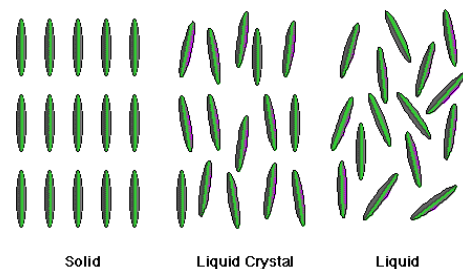
A les següents animacions d'Andrew Duffy i Tom Walsh se simula el comportament de la llum després de passar per diferents polaritzadors i podeu entendre millor les explicacions del vídeo anterior.

http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/polarized_light_onepolarizer.html

http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/polarized_light.html

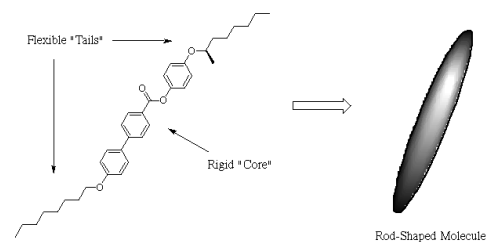
<https://www.geogebra.org/m/E6jZ52vK>

El **cristall líquid (LC)** és un **estat de la matèria** que està a mig camí entre el d'un **líquid** i el d'un **sòlid**. A l'estat sòlid hi ha una ordenació orientacional i posicional, mentre que a l'estat líquid no hi ha ordenació.



En un LC les **molècules es poden moure com en un líquid**, però **s'orienten segons una determinada direcció**. Això és així perquè aquestes són **allargades**, rígides al centre i flexibles als extrems.

Segons el tipus **d'ordre posicional** (si es distribueixen regularment segons una xarxa),



orientacional (si les molècules s'orienten majoritàriament segons una determinada direcció) o si l'ordre és de **curt o llarg abast**, els LC es troben a una determinada **fase**.

La **fase nemàtica** es caracteritza perquè **no hi ha ordre posicional**, però sí **orientacional de llarg abast**, de forma que les molècules poden fluir lliurement (com en un líquid) i s'orienten col·lectivament segons una determinada direcció.



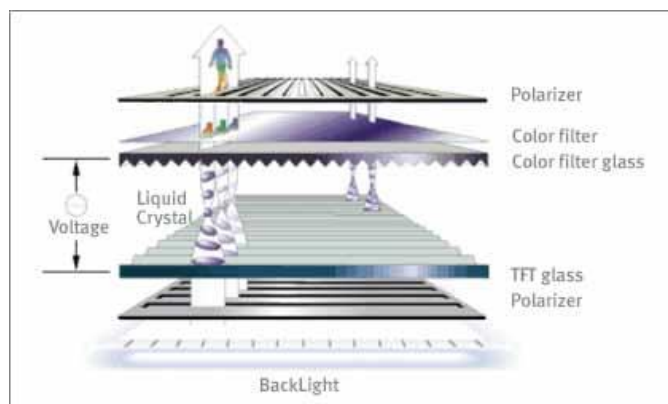
Les molècules d'un LC **s'orienten segons camps elèctrics i magnètics externs** i a la vegada **orienten el pla de vibració de la llum que la travessa**.

Als següents vídeos de la universitat de Kent i la National Science Foundation es fa una breu introducció als cristalls líquids.

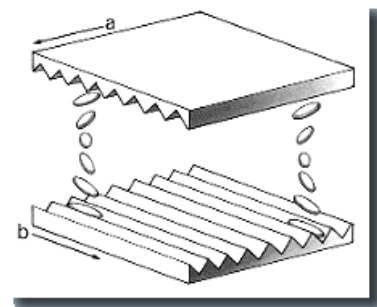
<https://www.youtube.com/watch?v=MuwDwVHVLio>

<https://www.youtube.com/watch?v=nAJgchCI3kg>

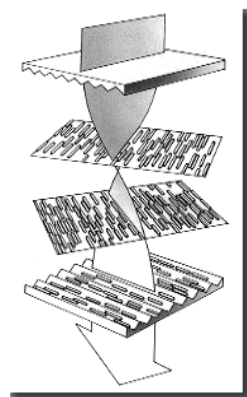
A cada punt (o píxel) d'una pantalla de cristall líquid hi ha una **cel·la** (Liquid Crystal Display, **LCD**) d'uns $10\ \mu\text{m}$ de gruix que actua com un **interruptor lumínic** deixant passar (o no) la llum, que consta de les següents parts:



1. Una font de llum que pot ser un LED, que està darrere de la pantalla o un mirall que reflecteixi la llum externa, i que també està darrere.
2. **Dos polaritzadors amb els seus eixos de transmissió creuats**, que formen un angle de 90° .
3. Un dipòsit on hi ha el LC. Les superfícies on incideix la llum, i que estan en contacte amb el LC, tenen unes estries longitudinals orientades paral·lelament a l'eix de transmissió del primer polaritzador. Pel cas de la segona superfície les estries estan orientades segons l'eix de transmissió del segon polaritzador. Per tant el **LC adopta una forma recargolada 90° o Twisted Nematic (TN)**.
4. Entre els polaritzadors i les superfícies estriades hi ha uns **elèctrodes transparents** que s'utilitzen per aplicar un camp elèctric.



Quan la **llum natural** incideix sobre el **primer polaritzador** es transforma en llum **linealment polaritzada**. A mida que aquesta travessa el LC **aquest va orientant el pla de polarització de la llum** de forma que quan arriba al **segon polaritzador** la seva **direcció és paral·lela a l'eix de transmissió**, i per tant en aquest cas el LCD **transmet la llum**. El cristall líquid es comporta com un conjunt de polaritzadors amb els eixos de transmissió girant de forma progressiva, de forma que el pla de polarització de la llum que passaria per ells giraria

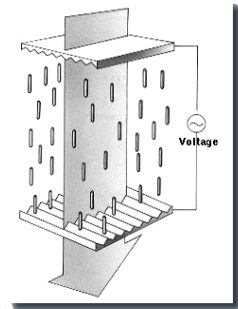


90°. Observem que per aquest sistema de N polaritzadors girant cadascun d'ells un angle de 90°/N, si a l'entrada del primer tenim una intensitat I_0 a la sortida del últim, aplicant la llei de Malus al conjunt, pel cas en que N és molt gran tindrem:

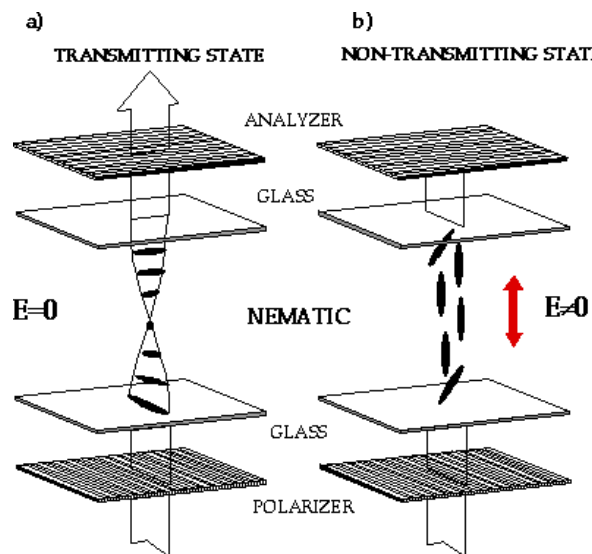
$$I = I_0 \cos^{2N} \left(\frac{90}{N} \right) = I_0$$

Per tant, la llum gira 90° i no s'atenua.

En canvi quan s'aplica un camp elèctric les molècules de cristall líquid s'orienten segons el camp aplicat, i es perd la disposició recargolada. Per tant, el pla de polarització de la llum no gira 90°, i el segon polaritzador no deixa passar la llum.



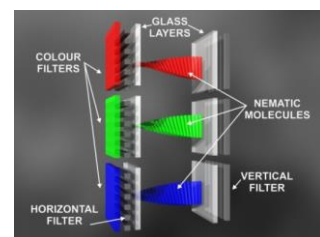
En resum:



La sensació de colors s'obté situant a cada pixel tres LCD amb filtres de diferents colors (vermell, verd i blau) que s'aniran activant en funció de les necessitats.

En aquest vídeo de In One Lesson s'explica el funcionament d'una pantalla de LCD.

<https://www.youtube.com/watch?v=0B79dGR19Tg>



Fer problema 15 de la col·lecció

15. Disposem de quatre làmines polaritzadores situades paral·lelament l'una a continuació de l'altra de manera que l'eix de transmissió d'una forma un angle de 25° amb l'eix de l'anterior. Si un feix de llum no polaritzada incideix perpendicularment sobre les làmines, quina fracció de la intensitat de la llum travessarà les quatre làmines?

4.6 Reflexió i refracció. Fibres òptiques (T 1h i P 1h)

Les ones electromagnètiques **no es propaguen pels conductors**, però **si ho fan en medis materials dielèctrics transparents**. Ho fan com en el buit però a una velocitat menor v . Per tant, estudiarem la propagació de la llum en aquests medis. L'índex de refracció es defineix com el quocient entre les velocitats de la llum al buit i al medi:

$$n = c/v$$

Com $c > v$, l'índex de refracció **sempre és > 1** .

La **frequència de la llum no canvia** quan aquesta es propaga per un medi dielèctric. Com ho fa la velocitat, la **longitud d'ona** també ho farà. La relació entre la longitud d'ona al medi λ i al buit λ_0 és:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda_0}{n}$$

A l'animació de MicroMagnet s'observa com canvia la longitud d'ona de la radiació quan aquesta entra en un medi de diferent índex de refracció. D'altra banda, observeu com el color, i per tant la freqüència, no canvien.

<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/speedoflight/index.html>

Substància	n (20°C)
Aire	1.0003
Aigua	1.333
Alcohol etílic	1.361
Gel	1.309
Quars	1.544
Diamant	2.417
Policarbonat	1.585

Fer problema 17 de la col·lecció

17. Quina és la velocitat de la llum a l'aigua ($n = 1.333$)? Tenint en compte que quan una ona passa d'un medi a un altre la seva freqüència no varia, quina és la longitud d'ona a l'aigua d'un feix monocromàtic de llum vermella que a l'aire té una longitud d'ona de 700 nm? Un nedador sota l'aigua veurà el mateix color o un de diferent?

Quan una ona electromagnètica arriba a la **superfície límit** entre **dos medis materials amb diferents índex de refracció** n_1 i n_2 , part de l'ona es **reflecteix** (retorna al primer medi) i part es **refracta** (es transmet al segon medi).

A les següents animacions de Ray Tuck a GeoGebra se simulen en 1 D un pols d'ona i una ona que experimenten un canvi de medi. Observeu com el pols i l'ona incidents es propaguen al segon medi i es reflecteixen. Si el segon medi té un índex de refracció més gran el pols i l'ona reflectides s'inverteixen, mentre que si el segon medi té un índex menor no hi ha inversió. Observeu també les amplituds de les ones reflectida i transmesa en ambdós casos.

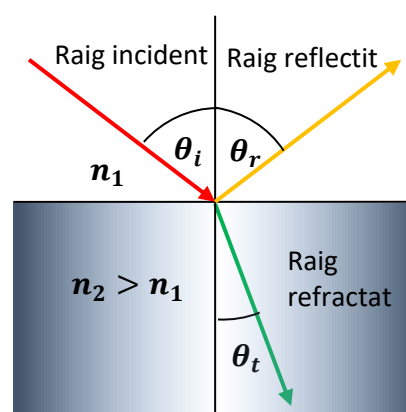
<https://www.geogebra.org/m/TK8VXFpz>

<https://www.geogebra.org/m/qKVuXMTq>

Les lleis que governen aquest fenomen són:

1. Els **raigs reflectit i refractat** es troben al **pla d'incidència** que ve definit pel **raig incident i la normal** (a la superfície de separació)
2. La **lleï de la reflexió**, que afirma que l'angle que formen els raigs reflectit i la normal (θ_r) és igual al que formen el raig incident i la normal (θ_i)

$$\theta_r = \theta_i$$



A la següent animació de Ray Tuck a GeoGebra se simula la llei de la reflexió. Observeu els raigs incident i reflectit, així com els fronts d'ona.

<https://www.geogebra.org/m/MSATnzWg>

3. La **lleï de la refracció** o de Snell, que indica que el raig refractat experimenta un **canvi de direcció** respecte a el raig incident, de manera que el quocient entre les funcions sinus dels angles que formen, respecte a la normal, els raigs refractat (θ_t) i incident (θ_i) és igual al quocient dels índexs de refracció:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Comentari: Si $n_2 > n_1$ (cas, per exemple, de la refracció aire-aigua) $\theta_t < \theta_i$

A la següent animació de Ray Tuck a GeoGebra se simula la llei de la reflexió. Observeu els raigs incident i transmes, així com els fronts d'ona.

<https://www.geogebra.org/m/w6TuKkzk>

A la següent animació de Walter Fendt podeu experimentar amb les lleis de la reflexió i la refracció.

https://www.walter-fendt.de/html5/phen/refraction_en.htm

Fer problema 19 de la col·lecció

19. Un dipòsit cilíndric totalment ple d'aigua ($n = 1.333$), obert per la seva part superior, té un diàmetre de 3 m. Quan els raigs de sol formen un angle de 30° amb l'horitzontal la llum deixa d'il·luminar el fons del dipòsit. Quina és l'alçada del dipòsit?

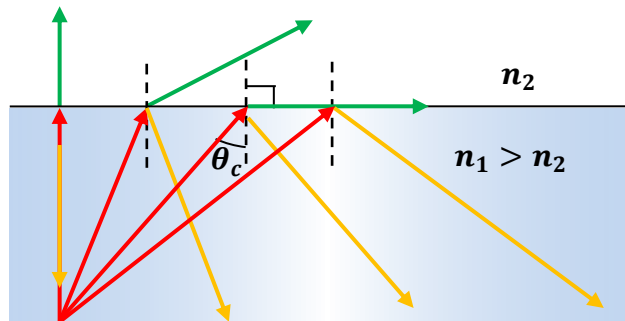
A la següent animació de Joe Rowing a GeoGebra se simula un raig que es propaga per un medi amb un índex de refracció n_1 i travessa un determinat material d'índex de refracció n_2 . Observeu que l'angle amb el que retorna al primer medi és igual a l'angle d'incidència quan entra al segon medi.

<https://www.geogebra.org/m/wqfrwjcq>

Si considereu la següent animació de Ray Tuck a GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/dJhr3jJ3>

observareu que pel cas en què l'índex de refracció del primer medi és més gran que el del segon ($n_1 > n_2$), la llum no es transmet al segon medi a partir d'un determinat angle (angle crític θ_c).



Per tant, **tota la llum es reflecteix al primer**. Aquest fenomen s'anomena **reflexió total interna**. L'angle crític es calcula imposant que l'angle de refracció sigui de 90° :

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ \rightarrow \theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Comentaris:

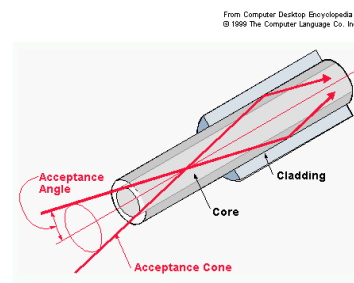
1. Només hi ha reflexió total interna si $n_1 > n_2$
2. Hi ha reflexió total per **angles d'incidència més grans que l'angle crític**.

Al següent vídeo el professor Boyd Edwards ens explica el fenomen de la reflexió total interna pel cas d'una interfície aigua-aire.

https://www.youtube.com/watch?v=ybvjcjndn_4

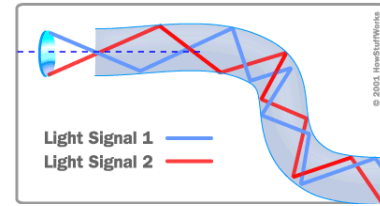
3. Una de les aplicacions més importants són les fibres òptiques.

Una **fibra òptica** és un cilindre de **material dielèctric transparent** (generalment de SiO_2 però de vegades també algun material plàstic) d'índex de refracció n_1 (generalment 1.48) que s'anomena **nucli (core)**. Està **recobert per una capa (cladding)** de **material dielèctric** (també transparent) d'índex de refracció n_2 (generalment 1.46) de forma que $n_1 > n_2$. El conjunt es protegeix amb una capa protectora. Si són de SiO_2 es pot augmentar o reduir l'índex de refracció dopant amb Al_2O_3 o GeO_2 (augmenta) o amb B_2O_3 o F (disminueix).



La **llum**, que generalment prové d'un LED o un làser, **es transmet pel nucli realitzant successives reflexions totals internes**. Per llargues distàncies s'utilitzen les unimodals

que tenen un nucli d'un diàmetre de 8 o 10 μm . Per distàncies més curtes s'utilitzen les multimodals que tenen diàmetres més grans. Un valor típic és la: 62.5/125, que indica una mides de 62.5 μm pel core i 125 pel cladding. Els cables convencionals estan formats per grups de fibres òptiques. S'utilitzen en el camp de les comunicacions ja que:



1. Permeten transmetre informació a llargues distàncies amb moltes **menys pèrdues** que, per exemple, un cable coaxial.
2. Tenen una **gran amplada de banda**
3. És **immune a interferències de camps elèctrics i magnètics** (per exemple, tempestes elèctriques)
4. **Pesa menys, ocupa menys espai i és més flexible** que un cable coaxial

Al següent vídeo el professor Boyd Edwards ens explica la reflexió total interna pel cas d'una fibra òptica.

A la següent animació de Geneviève Tulloue de la universitat de Nantes se simula una fibra òptica.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/optiqueGeo/dioptres/fibre_optique.html

Fer problema 21 de la col·lecció

21. A les fibres òptiques és essencial que la llum que es propaga pel nucli es reflecteixi totalment en la separació nucli-recobriment. Suposem que tenim una fibra amb nucli de quars d'índex de refracció 1.46 i un recobriment d'índex 1.4454.

- a) Calculeu l'angle crític per tal que es produeixi l'esmentada reflexió total interna.
- b) A l'entrada de la fibra, quin serà l'angle màxim que podrà formar un raig de llum amb l'eix de la fibra per tal que, un cop dins de la fibra, reboti totalment en les parets interiors?

Fer problema 22 de la col·lecció

22. Un cable de comunicacions rectilini de fibra òptica de 50 km està format per un nucli de quars amb un índex de refracció 1.46 i una capa envoltant de quars dopat amb B_2O_3 d'índex 1.457.

- a) Quin és l'angle crític?
- b) Si les reflexions totals internes es fan totes amb un angle de 87° i el diàmetre del nucli és de 100 μm , quin és el nombre de reflexions que hi ha en el cable?

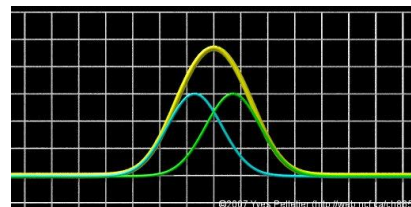
4.7 Interferències (1h30' T i P 30') (en realitat 1h)

La interferència és un **fenomen típicament ondulatori**.

L'experiment d'interferència de la doble esclatxa de Thomas Young (1801) demostra el **caràcter ondulatori de la llum**. La interferència es basa en el **principi de superposició** que, pel cas de les ones

electromagnètiques, afirma que en un punt i en un instant determinats els **camp elèctric i magnètic resultant** degut a dos o més generadors és la **suma vectorial** dels camps deguts a cada focus per separat. Així, pel cas del camp elèctric degut a dos focus tenim:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(x, t) + \vec{E}_2(x, t)$$



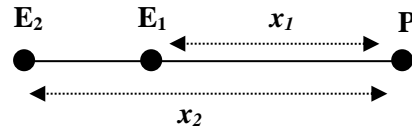
A la següent animació de Tom Walsh a GeoGebra se simula la superposició de dos polsos que es propaguen en sentits diferents.

<https://www.geogebra.org/m/dJrTcxYd>

Al següent vídeo el professor Boyd Edwards podem veure la superposició de dos polsos que es propaguen en sentits diferents pel cas d'un slinky.

<https://www.youtube.com/watch?v=N5MltLd05MI>

Per simplificar suposarem que sobre una pantalla incideix llum provinent de dos focus puntuals que estan a unes distàncies x_1 i x_2 de la pantalla, i que aquests emeten ones **harmòniques planes linealment polaritzades**, de la **mateixa amplitud**, amb la **mateixa polarització**, de la **mateixa longitud d'ona i freqüència**, i amb **fases inicials** diferents ϕ_1 i ϕ_2 . L'expressió dels dos camps elèctrics a un punt de la pantalla a l'instant t és:



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \sin \phi_1 ; \phi_1 = kx_1 - \omega t + \phi_1$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \sin \phi_2 ; \phi_2 = kx_2 - \omega t + \phi_2$$

Aplicant el **principi de superposició**, el camp resultant és:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos\left[\frac{k(x_2 - x_1) + \phi_2 - \phi_1}{2}\right] \sin\left[\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right]$$

L'ona resultant es propaga com si hagués recorregut la distància mitjana entre x_1 i x_2 , la fase inicial fos la mitjana de les fases inicials ϕ_1 i ϕ_2 , i la seva amplitud:

$$2\vec{E}_0 \cos\left[\frac{k(x_2 - x_1) + (\phi_2 - \phi_1)}{2}\right]$$

Experimentalment a la pantalla es mesura la intensitat **mitjana o irradiància**, que és proporcional a l'**amplitud al quadrat** del camp elèctric ($I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$).

Si definim $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = k(x_2 - x_1) + (\phi_2 - \phi_1)$ i la intensitat de cada font per separat és I_0 , tenim:

$$I \propto 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 4E_0^2 \left(\frac{1 + \cos \Delta\phi}{2}\right) = 2E_0^2 (1 + \cos \Delta\phi) \rightarrow$$

$$I = 2I_0 (1 + \cos \Delta\phi)$$

La diferència de fase és deguda a la **diferència de camins òptics** (x_2 i x_1 són diferents) **i/o a una diferència de fases inicials**:

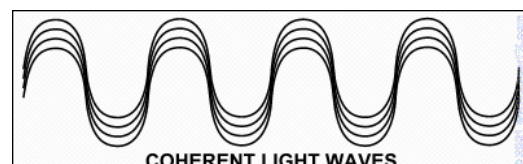
$$\Delta\phi = k(x_2 - x_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

Definint $\Delta x = x_2 - x_1$ i $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, tenim:

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} + \Delta\phi = \frac{2\pi n\Delta x}{\lambda_0} + \Delta\phi$$

On n és l'índex de refracció del medi i λ_0 és la longitud d'ona al buit. Si la **diferència de fases inicials** $\Delta\phi$ és **nul·la** (els focus emeten en fase) o és **constant en el temps** es diu que els focus **són coherents**.

En aquest cas:



1. La intensitat serà màxima $I = 4I_0$ (**interferència constructiva**) quan

$$\cos \Delta\phi = 1 \rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi n \Delta x}{\lambda_0} + \Delta\phi = 2m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dividint per $\frac{2\pi n}{\lambda_0}$ tenim, que la condició s'expressa com:

$$\Delta x + \frac{\lambda_0}{2\pi n} \Delta\phi = m \frac{\lambda_0}{n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Si $\Delta\phi = 0$, tenim que la condició per interferència constructiva és que la **diferència de camins sigui igual a un nombre enter de longituds d'ona**:

$$\Delta x = m \frac{\lambda_0}{n} = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

La intensitat serà nul·la $I = 0$ (**interferència destructiva**) quan

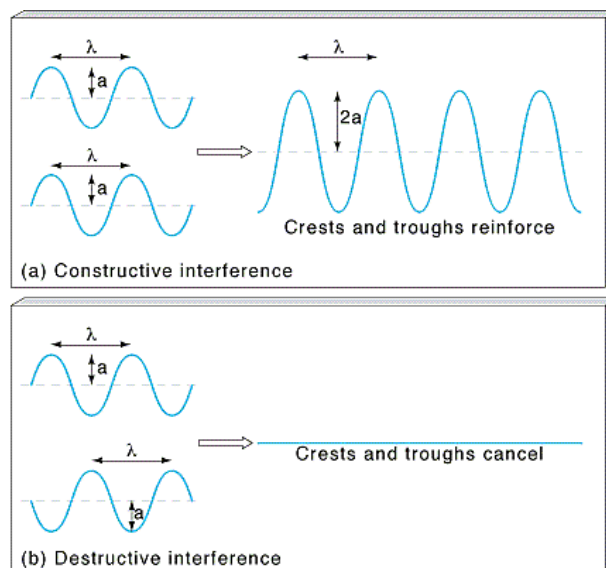
$$\cos \Delta\phi = -1 \rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi n \Delta x}{\lambda_0} + \Delta\phi = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dividint per $\frac{2\pi n}{\lambda_0}$ tenim, que la condició s'expressa com:

$$\Delta x + \frac{\lambda_0}{2\pi n} \Delta\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Si $\Delta\phi = 0$, tenim que la condició per interferència destructiva és que la **diferència de camins sigui igual a un nombre senar de semi-longituds d'ona**:

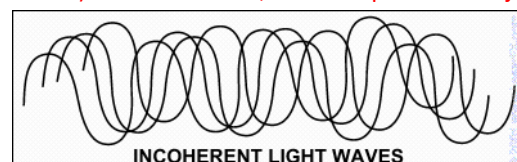
$$\Delta x = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{n} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$



A la següent animació de Ray Tuck a GeoGebra se simula la interferència constructiva i destructiva de dues ones (blava i verda) de la mateixa longitud d'ona (les amplituds poden ser diferents) que es propaguen a la mateixa direcció. Observem que quan les ones tenen la mateixa amplitud i desfasades una longitud d'ona (angle 0 o 360°) la interferència (ona vermella) és constructiva, mentre que si és mitja longitud d'ona (angle 180°) és destructiva.

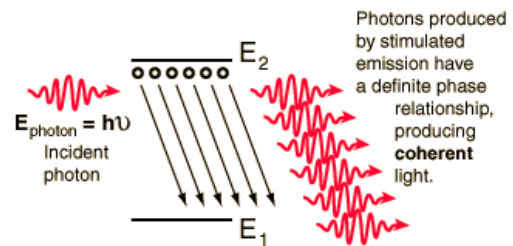
<https://www.geogebra.org/m/pB3DFry7>

Si la **diferència de fase varia aleatòriament amb el temps**, els focus són incoherents, com



per exemple el cas de la llum provinent de **dos làmpades diferents**. En aquest cas la mitjana en el temps del cos $\Delta\phi$ és nul, la intensitat a la pantalla és la suma de les dues intensitats $I = 2I_0$, i per tant **no hi ha interferència**.

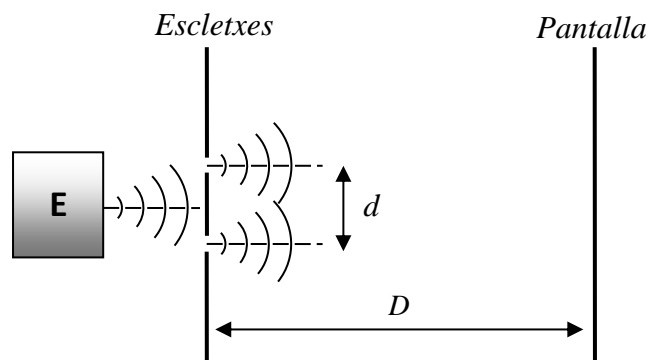
La **llum d'una bombeta és incoherent**, ja que és el resultat de la radiació dels electrons més externs d'un gran nombre d'àtoms diferents (nombre d'Avogadro), que al fer transicions entre estats diferents, emeten llum de diverses longituds d'ona i en instants de temps diferents i no correlacionats. Per contra, la llum d'un **làser és coherent**.



A la següent animació de l'empresa Zeiss s'introdueix el concepte de coherència comparant la llum provinent d'una làmpada amb la d'una escletxa prou estreta situada després de la làmpada.

<http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/tutorials/coherence/index.html>

A l'**experiment de Young** es fa interferir sobre una pantalla la llum provinent d'un únic focus que es fa passar per **dos escletxes diferents** prou estretes com perquè es comportin com generadors d'ones. Com en realitat la llum es genera a una única font, les dues escletxes es comporten com generadors d'ones coherents. Per tant en aquest cas el **desfasament és degut a la diferència de camins òptics** dels dos raigs.



Suposem que les **distàncies** entre les dues **escletxes**, aquestes i la **pantalla** i el **centre de la pantalla** i el **punt on estudiarem la interferència** són respectivament **d , D i y** .

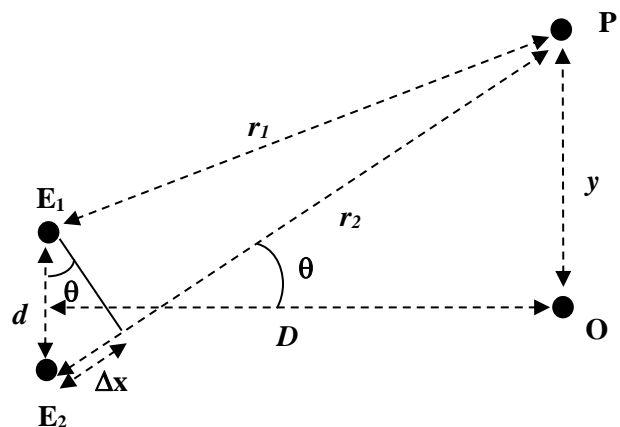
Si la distància de les escletxes a la pantalla D és prou gran ($D \gg d$) es pot considerar que els dos raigs són paral·lels i la **diferència de camins òptics** dels raigs és:

$$\Delta x = d \sin \theta$$

Si θ és prou petit ($D \gg y$), llavors $\sin \theta = \tan \theta = y/D$, i per tant $\Delta x = yd/D$, en un **punt y hi haurà respectivament interferència constructiva i destructiva si:**

$$\Delta x = \frac{yd}{D} = m \frac{\lambda_0}{n} = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$y = \frac{m\lambda_0 D}{nd} = \frac{m\lambda D}{d}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{interferència constructiva}$$



$$\Delta x = \frac{yd}{D} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{n} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$y = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{nd} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{d}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{interferència destructiva}$$

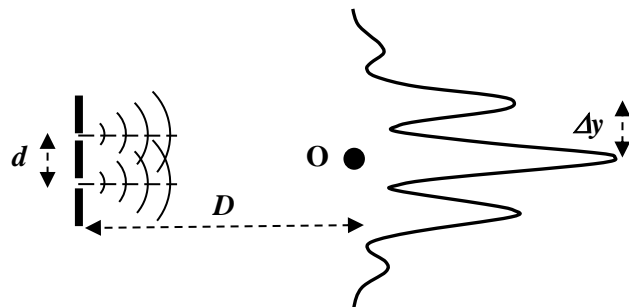
A la següent animació de Tom Walsh a GeoGebra se simula l'experiment de Young. En aquest podeu variar la longitud d'ona, la distància entre les esclatxes, la posició del punt on té lloc la interferència, així com la distància de les esclatxes a la pantalla. Observeu que si la diferència de camins (Path Difference) és igual a un nombre enter de longituds d'ona tenim interferència constructiva. Mentre que si la diferència és un nombre enter de semi-longituds d'ona és destructiva.

<https://www.geogebra.org/m/CwWDMWSG>

Comentaris:

1. A la pantalla apareixeran de forma alternada franges **clares i fosques**.
2. La distància relativa entre dues franges és:

$$\Delta y = \frac{\lambda_0 D}{nd}$$



3. Si D augmenta o d disminueix la distància entre les franges augmenta i viceversa.
4. L'experiment permet **determinar la longitud d'ona de la llum**.

A la següent animació de PhET podreu repassar molts dels conceptes que hem vist fins ara per ones mecàniques (a l'aigua i sonores) i electromagnètiques. Es comença per aspectes bàsics i es continua per la interferència de dos emissors i l'experiment de la doble esclatxa. També s'estudia la difracció (està fora de l'abast del curs). Si opteu per l'experiment de Young (Slits), considereu ones electromagnètiques, opció doble esclatxa. Varieu la distància de les esclatxes a la pantalla, la distància entre elles i l'amplada de les esclatxes (preneu una amplada molt petita). Observeu la figura a la pantalla (opcions screen i intensity). Observeu com la figura varia en funció de la separació entre les esclatxes.

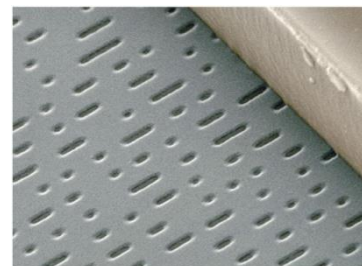
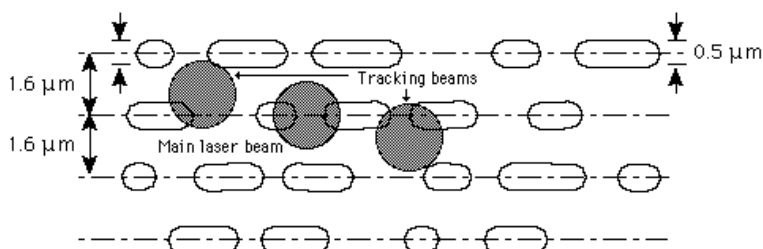
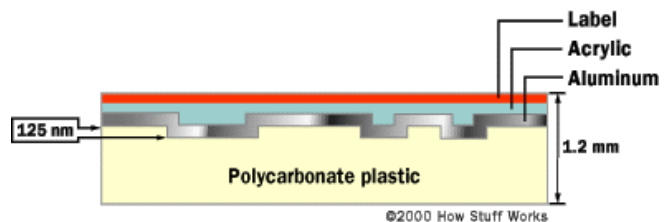
<http://phet.colorado.edu/en/simulation/wave-interference>

Al següent vídeo de VTPHysics es visualitza l'experiment de Young amb un làser que incideix sobre una doble esclatxa. A més es determina la longitud d'ona del làser.

<https://www.youtube.com/watch?v=oktUqpWfO4A>

Aplicació: procés de lectura en un dic òptic.

Un **CD-ROM** o un **DVD-ROM** és un disc de **plàstic** (poli-carbonat) al que durant l'etapa de fabricació se li han practicat una sèrie de **forats microscòpics**, que són els 0 i 1 d'informació, segons una estructura de **pistes** semblant a la d'un disc de vinil.



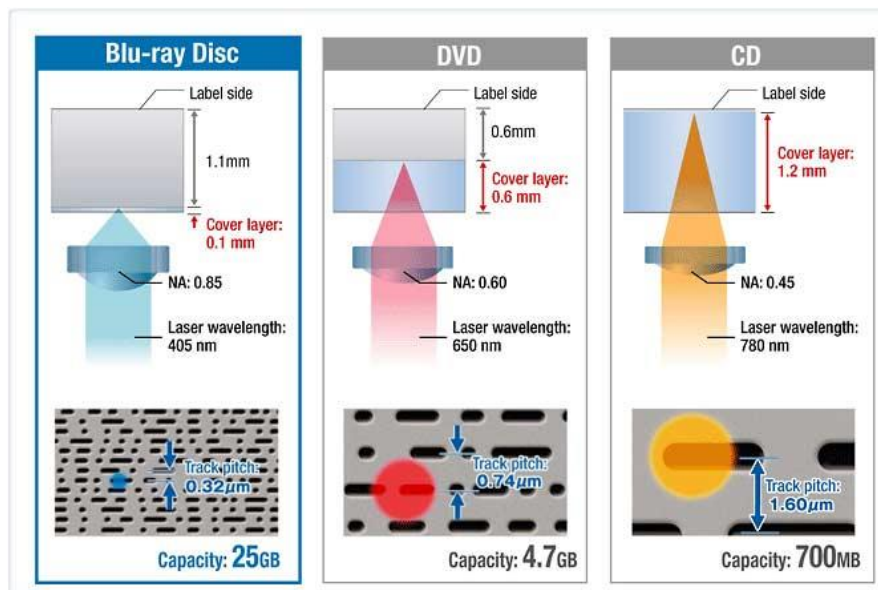
Aquesta capa es **recobreix amb un material reflectant** (Al) i per sobre es disposa una capa protectora de plàstic. En el procés de lectura es fa incidir llum coherent (làser) amb un sistema òptic sofisticat de forma que quan el feix de llum **incideix sobre un forat** també l'il·lumina el seu voltant. La fondària dels forats w es dissenya de forma que hagi interferència destructiva per la diferència de camins òptics entre la llum que va i ve a/del forat i la que va i ve a/del seu voltant, i que es recull al detector. Com aquest diferència val $2kw$, perquè hagi **interferència destructiva** cal:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi n\Delta x}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \rightarrow \frac{2\pi n 2w}{\lambda_0} = \pi \rightarrow$$

$$w = \frac{\lambda_0}{4n}$$

Per contra quan la llum incideix sobre una zona on **no hi ha forats**, no hi ha diferència de camins i hi haurà **interferència constructiva**.

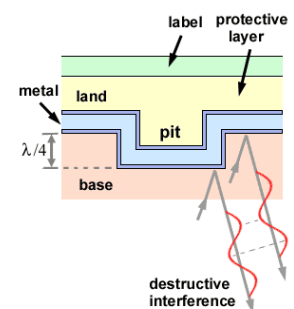
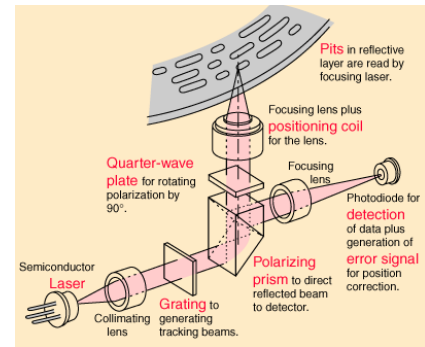
La diferència entre CD, DVD i Blu-rays disc rau en la diferent **mida dels forats** i la **distància entre pistes**, i per tant la **longitud d'ona de la llum** que s'utilitza per llegir la informació.



Al següent vídeo de InerciaUruguay es visualitza el procés de lectura en un disc òptic.

<https://www.youtube.com/watch?v=MPQEIGo4AHl>

Els discs òptics regrabables es caracteritzen perquè la capa on s'emmagatzema la informació consisteix en un aliatge que canvia la seva estructura segons com s'escalfa. Així, si s'escalfa a una temperatura moderada i després es deixa refredar, presenta una estructura cristal·lina, mentre que si es fa a una temperatura superior, adopta una estructura amorfa. Les propietats reflectants de les superfícies cristal·lines i amorfes són diferents: les primeres reflecteixen la llum, mentre que les segones les absorbeixen. En aquests discs el làser treballa de tres formes diferents: escriptura (escalfa les zones on



es vol gravar un 0 de forma que siguin amorfes), esborrat (escalfa tot el material amb una potència menor fins a convertir-lo en cristal·lí) i lectura (amb menys potència es fa reflectir la llum en les zones cristal·lines i amorfes, i es detecta la diferent reflectivitat).

Fer problema 23 de la col·lecció

23. Supposeu que tenim dues fonts coherents que emeten ones electromagnètiques en fase, amb el mateix vector amplitud (de mòdul $E_0 = 1 \text{ V/m}$) i amb una longitud d'ona de 1 m . Digueu quina serà l'amplitud de l'ona resultant en un punt que es troba a les següents distàncies de les fonts 1 i 2, respectivament:

- a) 20 m i 21 m
- b) 21 m i 21.5 m
- c) 22 m i 22.25 m

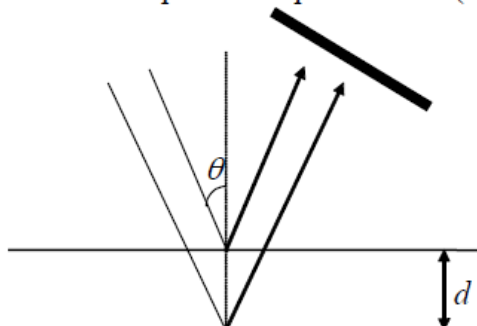
(Considereu que les ones són planes i que, per tant, la seva amplitud no varia amb la distància. Considereu també que les dues ones es troben polaritzades en la mateixa direcció.)

Fer problema 24 de la col·lecció

24. Repetiu el problema anterior suposant ara que les fonts també són coherents però emeten en oposició de fase (diferència de fase de 180°)

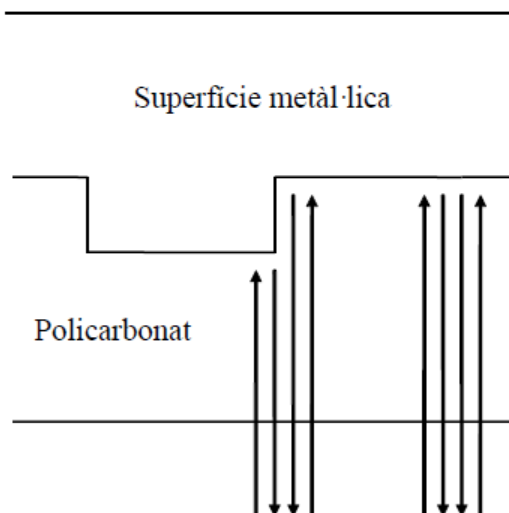
Fer problema 25 de la col·lecció

25. La figura següent representa un interferòmetre format per dos miralls, el superior semitransparent (deixa passar una part de la llum que incideix sobre seu). Si la distància entre ells és d i l'angle d'incidència és θ , trobeu quines són les condicions per tal d'observar un màxim o un mínim a la pantalla superior dreta. (Suposeu ones planes).



Fer problema 26 de la col·lecció

26. La profunditat dels forats de la superfície metàl·lica d'un CD-ROM és de $0.11 \mu\text{m}$. Aquesta superfície es troba recoberta de policarbonat ($n = 1.55$) de tal manera que quan la llum es reflecteix en una part plana hi ha interferència constructiva i quan ho fa en un esglaó hi ha interferència destructiva (vegeu la figura). Els dos estats de la llum reflectida s'interpreten com els dos bits. Quina ha de ser la freqüència del làser utilitzat per a la lectura?



4.8 Làser (30')

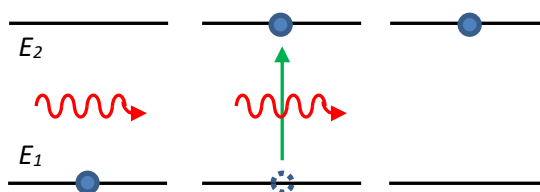
Els fenòmens **d'interferència** deixen clar que la llum és una **ona**. Per determinats fenòmens com, per exemple **l'efecte fotoelèctric**, cal adoptar, però, una descripció radicalment diferent que considera que la **llum** està formada per **partícules**, que anomenem **fotons**. L'energia de cada fotó d'un feix de llum de **frequència f** és:

$$E_{foto} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

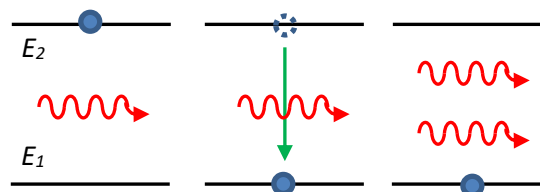
On $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s és la **constant de Planck**.

¿Com es crea la llum d'un làser? Per respondre cal estudiar els processos **d'absorció**, **emissió estimulada** i **emissió espontània** que poden aparèixer quan un feix de **llum** incideix sobre un **material** o aquest **emet espontàniament**.

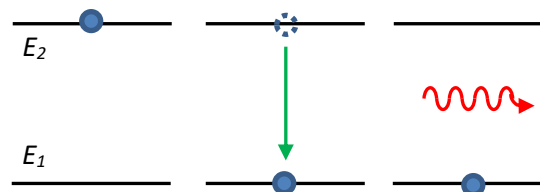
L'**absorció** consisteix en el procés pel que un **electró** d'un àtom o molècula que ocupa un nivell d'energia E_1 **absorbeix un fotó augmentant la seva energia** i pujant per tant a un nivell d'energia superior E_2 . Això només passa si **l'energia del fotó $E_{fotó}$** coincideix amb la **diferència entre els dos nivells $\Delta E = E_2 - E_1$** .



L'**emissió estimulada** és el procés pel qual un **electró** d'un àtom o molècula en un **estat excitat E_2** és **estimulat per un fotó incident** i cau a un estat de menor energia (o l'estat fonamental) E_1 **emetent un fotó de la mateixa energia, en la mateixa direcció i en fase amb el primer**. Per tant, **el fotó incident és amplificat**. Perquè es produeixi l'emissió estimulada cal **que l'energia dels dos fotons (l'emès i el que estimula) $E_{fotó}$** coincideixi amb la de la **diferència d'energia entre els dos nivells $\Delta E = E_2 - E_1$** .



L'**emissió espontània** és el procés pel qual un **electró** d'un àtom o molècula en un **estat excitat E_2** cau **espontàniament** a l'estat fonamental o a un estat de menor energia E_1 amb la consegüent **emissió d'un fotó d'energia $E_{fotó}$** igual a la **diferència d'energia entre els dos nivells $\Delta E = E_2 - E_1$** .



A la següent animació de PhET se simulen els processos d'absorció i d'emissió espontània i estimulada. Per això aneu a l'opció One Atom (absorption and emission) i considereu dos nivells d'energia. Ajusteu la diferència de nivells de forma que tinguem absorció; és a dir que la diferència de nivells coincideixi amb l'energia dels fotons. Observeu que si la vida mitjana (lifetime) és curta es produeix una emissió espontània (els fotons emesos no van en la direcció dels incidents), mentre que si és llarga es produeix l'estimulada (els electrons emesos es mouen en la mateixa direcció que els incidents).

<http://phet.colorado.edu/en/simulation/lasers>

Per qualsevol dels tres casos l'energia total E_{tot} i la potència P d'un feix de llum format per N fotons que incideix o és emès és:

$$E_{tot} = NE_{foto} = \frac{Nhc}{\lambda}$$

$$P = \frac{E_{tot}}{t} = nE_{foto} = n \frac{hc}{\lambda}$$

On $n = N/t$ és el **nombre de fotons que per unitat de temps** són emesos o absorbits.

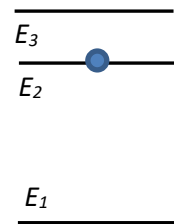
Un **làser** (acrònim de Light Amplification by Stimulated Emission Radiation) és un dispositiu que utilitza l'**emissió estimulada** per emetre un raig de **llum intens, coherent, col·limat** (feix estret) i **monocromàtic**.

Es basa en dos fenòmens físics:

1. **L'emissió estimulada** en un medi que anomenem **medi actiu**.
2. **Amplificació** en una cavitat ressonant.

El medi actiu està format per àtoms amb diferents nivells d'energia. Si E_1 és l'energia del **nivell fonamental** i E_2 la del **primer nivell excitat** i il·luminem el medi actiu hi haurà **absorció**, ja que generalment l'**estat fonamental està més poblat** que l'excitat. Com va demostrar Einstein el 1916, només **si la població del nivell excitat és més gran que la del fonamental, hi haurà emissió estimulada**.

Per aconseguir aquesta **inversió de població** es fa un **bombeig**, que consisteix en **proporcionar prou energia** als electrons del medi perquè pugin a un nivell d'energia E_3 **superior a E_2** , utilitzant una font externa (de llum o de corrent). El nivell E_3 és **poc estable** i, per tant, els electrons es desexciten ràpidament i ocupen el nivell E_2 **que és metaestable**. Els electrons estan en aquest estat el temps suficient com perquè hagi més electrons al nivell E_2 que al nivell fonamental, que hi hagi inversió de població, i per tant hagi emissió estimulada.



El primer làser, construït per Theodore Maiman el 1960, utilitzava com a medi un cristall dopat de robí amb **3 nivells d'energia**. En d'altres casos, com el làser de gas de Heli-Neó, el medi té **4 nivells d'energia**. Per aquests sistemes la inversió de població s'assoleix més fàcilment.

Aneu de nou a l'animació de PhET amb l'opció One Atom (absorption and emission) i considereu tres nivells d'energia. Ajusteu la diferència de nivells fonamental i mitjà de forma que la llum que prové de l'esquerra (vermella) exciti electrons al nivell intermedi. Feu el mateix amb la llum de dalt (blava), de forma que hi hagi electrons que passin del nivell fonamental al més excitat. Feu que la vida mitjana del nivell més alt sigui curta i la del nivell mitjà sigui llarga. D'aquesta forma aconseguim que l'emissió entre els nivells mitjà i el fonamental sigui estimulada (els fotons incident i emès tenen la mateixa direcció). A més, si ara aneu a l'opció Multiple Atoms (lasing) i activeu la llum de dalt de forma que hi hagi electrons que pugin del nivell inferior al més alt i feu que la vida mitjana d'aquest sigui baixa i la del nivell intermedi alta, veureu la inversió de població. És a dir hi ha més electrons al nivell intermedi que al fonamental.

<http://phet.colorado.edu/en/simulation/lasers>

Per que hagi amplificació cal que la llum estigui **confinada en un cavitat** ressonant amb **una superfície totalment reflectora i l'altra parcialment** (per exemple el 85%) de manera que deixi passar una determinada quantitat de llum, que és la que el làser emet. Les dimensions de la cavitat estan dissenyades perquè en l'equilibri la quantitat de llum emesa sigui igual a la que es crea.

El funcionament del làser es resumeix en els següents 5 processos:

1. **S'inicia el bombeig** i es fa pujar electrons a nivells d'energia superiors al fonamental.
2. Els àtoms es **des-exciten per emissió espontània**, emeten fotons amb diferents fases i direccions. La majoria d'aquests fotons es perden.
3. **Alguns electrons emesos es mouen en la direcció de l'eix de la cavitat** ressonant, i quedaran confinats dins ella, anant davant i darrere. Com el bombeig sempre hi és, en aquests trajectes els fotons interactuen amb els àtoms del medi actiu i provoquen **emissió estimulada**. Aquests nous fotons són idèntics en freqüència, fase i direcció als originals, i es crea una reacció en cadena.
4. El nombre de fotons creix exponencialment fins que s'arriba a un equilibri dinàmic. El **ritme de creació de fotons es compensa amb de sortida** per la cavitat, que constitueix el feix làser.
5. Durant tot el procés també hi ha **emissió espontània**, però és **negligible** comparada amb l'**estimulada**.

Aneu de nou a l'animació de PhET amb l'opció Multiple Atoms (lasing) i activeu la llum de dalt de forma que hi hagi electrons que pugin del nivell inferior al més alt i feu que la vida mitjana d'aquest sigui baixa i la del nivell intermedi alta, de forma que tinguem inversió de població. Activeu l'opció Enable Mirrors per tenir una cavitat ressonant i feu que la reflectivitat dels miralls sigui del 85%. Observeu com el làser comença a funcionar i emet en la direcció de la cavitat.

<http://phet.colorado.edu/en/simulation/lasers>

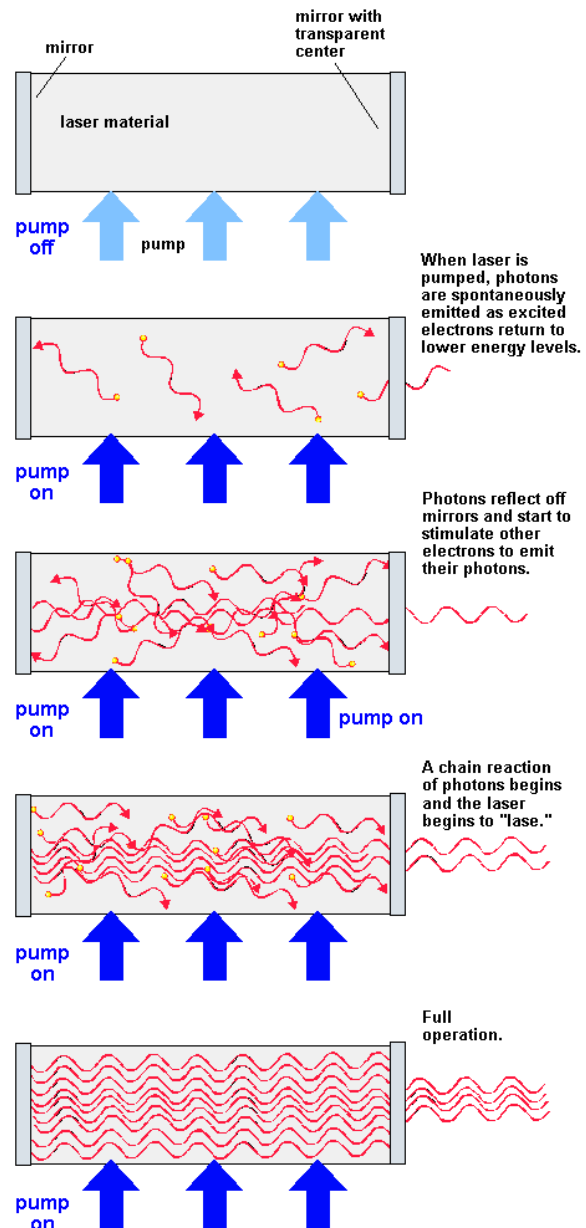
A la curta animació de ToutestQuantique es resumeix el fonament del làser.

https://www.youtube.com/watch?v=R_QOWbkc7UI

D'entre els diferents **tipus de làsers** podem destacar els de:

1. **Gas**: el medi actiu és un gas com He-Ne, d'Ar, CO₂. Pel cas del He-Ne el bombeig es fa per descàrrega elèctrica.
2. **Estat sòlid**: el medi actiu és un cristall dopat (com el de robí de Maiman del 1960). El bombeig es fa amb llum.
3. **Semiconductors**: el medi és un díode, i els nivells són les bandes de valència i de conducció de la unió pn. El bombeig es fa aplicant una tensió de polarització directa al díode. Són els més abundants: DVD, punters làser, codis de barres.

From Computer Desktop Encyclopedia
© 2001 The Computer Language Co., Inc.



Alguns exemples de làsers comercials

Potència	Aplicacions	Tipus
1-5 mW	Punters làser	Semiconductors
5-10 mW	DVD player	Semiconductors
250 mW	DVD burner	Semiconductors
1-20 W	Microtecnologia	Estat sòlid
30-100 W	Cirurgia	Gas (CO ₂)
100-3000 W	Tall de metalls	Gas (CO ₂)

Fer problema 27 de la col·lecció

27. Un làser d'heli-neó emet llum de longitud d'ona 632,8 nm i té una potència de 4 mW. Quants fotons per segon emet?

Fer problema 28 de la col·lecció

28. Un pols d'un làser de rubí té una potència mitjana de 10 MW i persisteix 1.5 ns. Si la longitud d'ona és 694.3 nm a) Quina és l'energia total del pols? b) Quants fotons s'emeten en un pols?