

Лабораторная работа 1.3.1

Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба

Балдин Виктор Б01-303

2 октября 2023 г.

1 Аннотация

Цель работы: экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одностороннего сжатия и чистого изгиба; по результатам эксперимента вычислить модуль Юнга.

В работе используются: в первой части - прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная трубка со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; во второй части - стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величин прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.

2 Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

2.1 Теоретические сведения

Растяжение проволоки соответствует напряженному состоянию вдоль одной оси, которое описывается формулой:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Эту формулу можно переписать также в следующем виде:

$$F = k \Delta l, \quad (2)$$

где $k = ES/l$ – жесткость проволоки. Измерения производятся на установке Лермантова. Направим зрительную трубку на зеркальце. Выведем формулу для расчета растяжения длины проволоки по показаниям шкалы прибора (см. рис. 1). Так как мы считаем проволоку слабо растяжимой, справедлива оценка $\Delta l \ll r$, где r – длина рычага. С учетом этого, угол наклона зеркальца к горизонтали можно найти как $\alpha = \Delta l/r$. С другой стороны, из соображений геометрической оптики угол α можно найти как угол между продолжениями соответствующих лучей:

$$\alpha = \frac{n}{2h}, \quad (3)$$

где n – показания шкалы, h – расстояние от шкалы до зеркальца.

Таким образом, удлинение проволоки можно выразить как:

$$\Delta l = n \frac{r}{2h} \quad (4)$$

Отсюда формулу (1) можно переписать как

$$F = \frac{ESr}{2lh} n \quad (5)$$

2.2 Методика измерений

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермонтова, схема которого изображена на рис. 1. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний – к

цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг r , связанный с зеркальцем З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркала.

Натяжение проволоки можно менять переключением грузов с площадки О на площадку М, не меняя при этом нагрузку на кронштейн, и, как следствие, его деформацию.

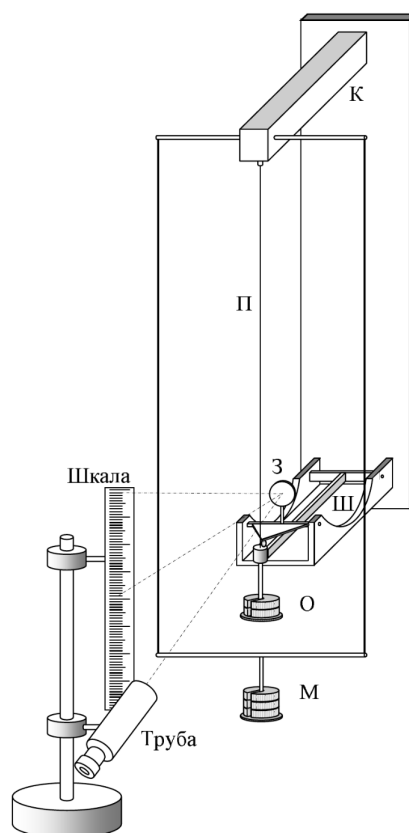


Рис. 1: Прибор Лермантова

2.3 Используемое оборудование

Параметры используемого оборудования представим в таблице:

Таблица 1: Оборудование

Прибор	Точность
Штангенциркуль	± 0.05 мм
Индикатор	± 0.01 мм
Рулетка	± 5 мм
Линейка	± 0.5 мм
Прибор Лермантова	± 1 мм

2.4 Результаты измерений и обработка данных

1. Сведем характеристики установки в таблицу:

Таблица 2: Параметры прибора Лермантова

$d_{\text{пр}}, \text{ мм}$	$r, \text{ мм}$	$l, \text{ см}$	$h, \text{ см}$	$\sigma_{\text{пр}}, \text{ Н/мм}^2$
0.46 ± 0.01	15 ± 1	177.6 ± 0.5	144.0 ± 0.5	900

2. Оценим, сколько грузов можно подвесить к проволоке. Для этого найдем площадь сечения проволоки и погрешность:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 0.17 \text{ мм}^2,$$

$$\sigma_S = 2S \frac{\sigma_d}{d} = 0.01 \text{ мм}^2$$

Предельная нагрузка на разрушение:

$$P_{\text{max}} = 0.3\sigma_{\text{пр}}S = 45,9 \text{ Н},$$

$$\sigma_{P_{\text{max}}} = 2.7 \text{ Н}$$

Согласно полученному значению, можно подвесить все грузы.

3. Теперь проверим предыдущую оценку на практике. Для этого будем подвешивать каждый раз на 1 груз больше и следить при помощи шкалы прибора, чтобы проволока возвращалась в исходное состояние. На практике деформация была замечена уже после подвешивания первых 6 грузов.

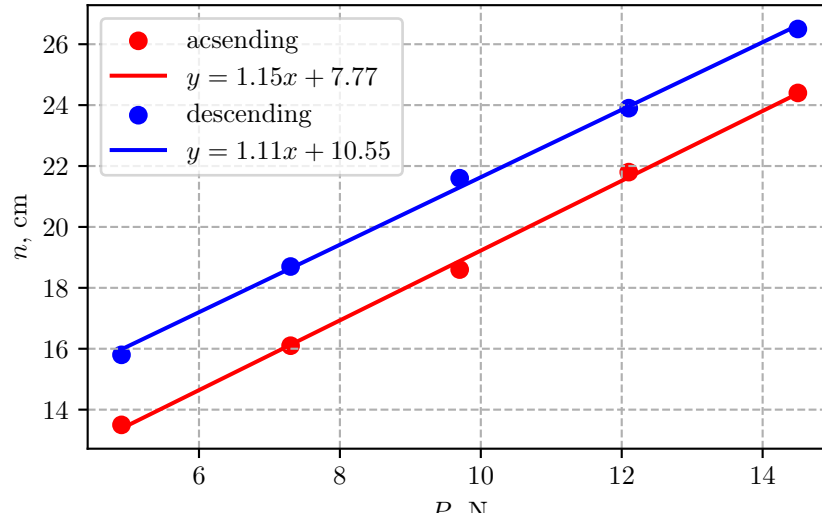
4. Перейдем к измерениям. Будем последовательно класть одни и те же грузы, потом поочередно их снимать по принципу стека. Проведем этот цикл 2 раза:

Таблица 3: Зависимость показаний шкалы от нагрузки

Δm , гр	P , Н	$n_1 \downarrow$, см	$n_1 \uparrow$, см	$n_2 \downarrow$, см	$n_2 \uparrow$, см
501.4	4.9	13.5	15.8	15.8	15.2
245.6	7.3	16.1	18.7	18.9	18.4
245.3	9.7	18.6	21.6	21.3	21.3
245.6	12.1	21.8	23.9	24.2	24.1
245.5	14.5	24.4	26.5	26.8	26.8

5. Построим графики зависимости $n(F)$ для первого и второго эксперимента.

Рис. 2: Графики зависимости для $n(F)$



По МНК можно найти коэффициент наклона графика k , который по формуле (5) равен:

$$k = \frac{2lh}{ESr} \quad (6)$$

Отсюда

$$E = \frac{2lh}{kSr} \quad (7)$$

В нашем случае логично использовать усредненное значение $\langle k \rangle = 1.13 \cdot 10^{-2}$ м/Н, т. к. у нас есть график для уменьшения и увеличения нагрузки. Погрешность можно рассчитать как

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k\sqrt{N-2}} \sqrt{\frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} - k^2} = 0.03$$

Найдем модуль Юнга и его погрешность:

$$E = 178 \text{ ГПа},$$

$$\varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_h^2 + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_S^2 + \varepsilon_r^2} \approx \sqrt{\varepsilon_k^2 + \varepsilon_S^2 + \varepsilon_r^2} \approx 0.10, \sigma_E = E\varepsilon_E \approx 18 \text{ ГПа}$$

3 Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

3.1 Теоретические сведения

Модуль Юнга материала стержня E связан с величиной прогиба y_{max} как:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{max}} \quad (8)$$

где P - нагрузка на стержень, l - расстояние между точками опоры, a - ширина балки, b - высота балки.

3.2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорными призмами А и Б (рис. 2). На ребра призм опирается исследуемый стержень В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами. Измерять величину прогиба можно с помощью индикатора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого циферблата.

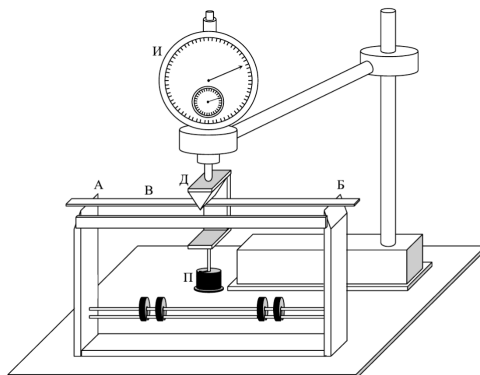


Рис. 3: Схема установки для измерения модуля Юнга

3.3 Используемое оборудование

Линейка, штангенциркуль для измерения параметров установки; индикатор для измерения стрелы прогиба.

Для уменьшения погрешности вследствие прогиба стола при изменении нагрузки на стержень, грузы перед началом эксперимента лучше расположить на рейке над нижней полкой опорной стойки.

3.4 Результаты измерений и обработка данных

1. Измерим расстояние между опорами $l = (50.1 \pm 0.5)$ см.
2. Измерим ширину a и высоту b балок из различных материалов при помощи штангенциркуля:

Таблица 4: Размеры исследуемых балок

	Дерево	Сталь	Латунь
a , мм	20.4	21.3	21.6
b , мм	9.9	3.9	3.9

3. Теперь опытным путем выясним, сколько грузов можно подвешивать к каждой балке. Для этого будем наблюдать, вернулась ли стрела индикатора в исходное положение (0), после убирания груза. Заметим, что каждый груз из набора имеет массу примерно 500

г, с небольшими отклонениями. Для дерева не возврат наступил уже после 3 грузов, для стали – после 7, для латуни – после 5.

4. Перейдем непосредственно к измерениям. Обозначим за Δm массу последнего положенного груза. Результаты измерений приведены в таблице 5.
5. Построим графики для каждого из материалов.

Рис. 4: Графики для деревянной балки

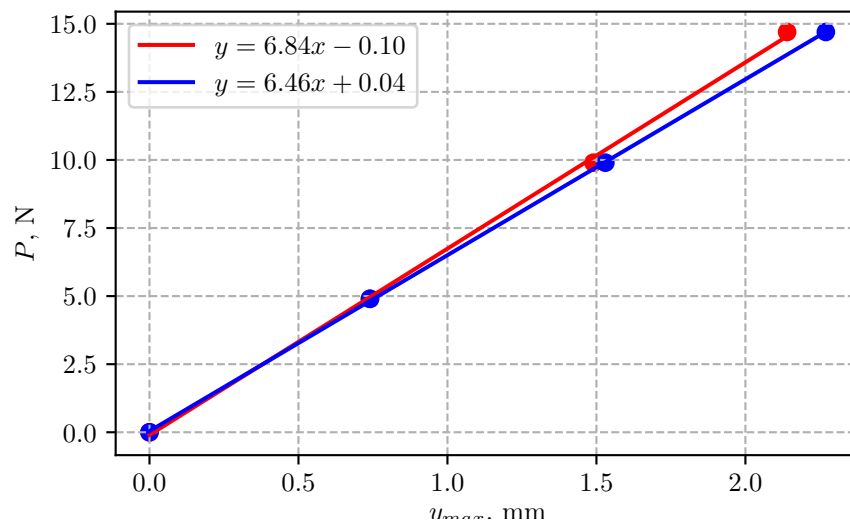


Рис. 5: Графики для стальной балки

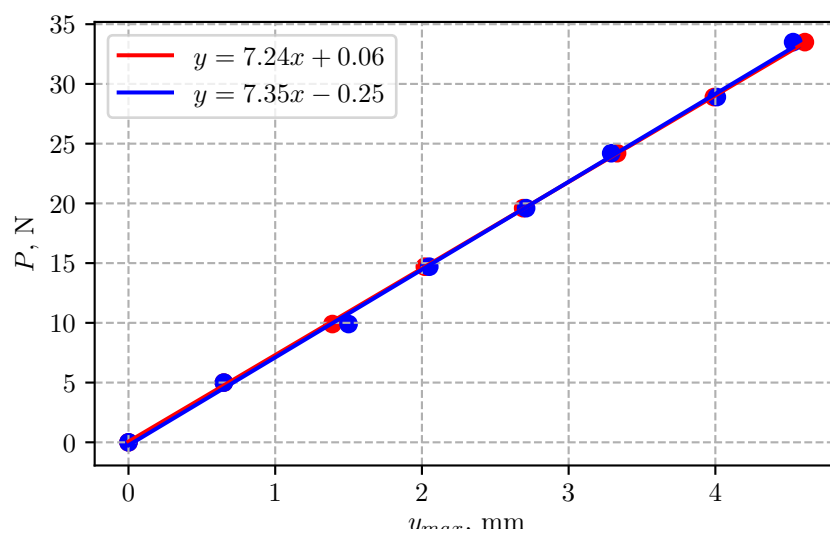


Рис. 6: Графики для латунной балки

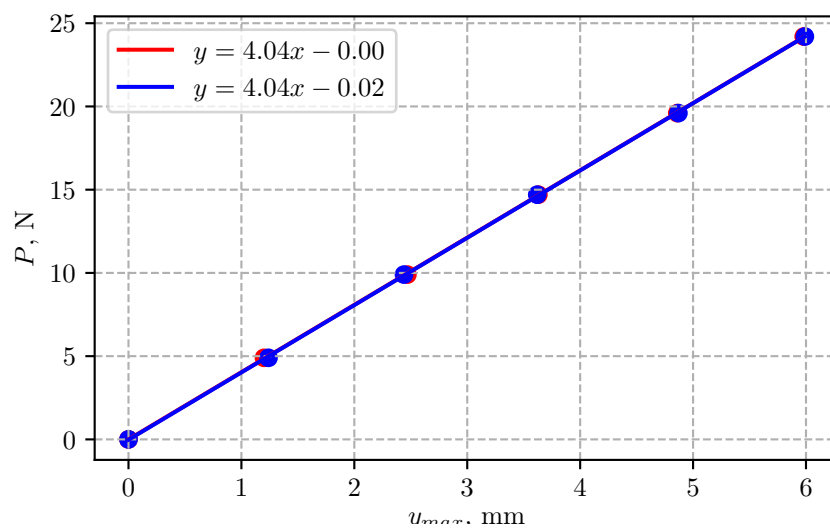


Таблица 5: Измерения зависимости $P(y_{max})$

Дерево								
y , мм	6.00	5.26	4.51	3.86				
y_{max} , мм	0.00	0.74	1.49	2.14				
Δm , г	0.0	503.3	511.0	482.5				
P , Н	0.0	4.9	9.9	14.7				
Перевернутое дерево								
y , мм	6.00	5.26	4.47	3.73				
y_{max} , мм	0.00	0.74	1.53	2.27				
Δm , г	0.0	503.3	511.0	482.5				
P , Н	0.0	4.9	9.9	14.7				
Сталь								
y , мм	9.00	8.35	7.61	6.98	6.31	5.67	5.01	4.39
y_{max} , мм	0.00	0.65	1.39	2.02	2.69	3.33	3.99	4.61
Δm , г	0.0	511.0	503.3	483.3	503.1	467.9	478.0	466.7
P , Н	0.0	5.0	9.9	14.7	19.6	24.2	28.9	33.5
Перевернутая сталь								
y , мм	9.00	8.35	7.50	6.95	6.29	5.71	4.99	4.47
y_{max} , мм	0.00	0.65	1.50	2.05	2.71	3.29	4.01	4.53
Δm , г	0.0	511.0	503.3	483.3	503.1	467.9	478.0	466.7
P , Н	0.0	5.0	9.9	14.7	19.6	24.2	28.9	33.5
Латунь								
y , мм	9.00	7.80	6.53	5.37	4.14	3.02		
y_{max} , мм	0.00	1.20	2.47	3.63	4.86	5.98		
Δm , г	0.0	503.3	511.0	482.5	503.1	467.9		
P , Н	0.0	4.9	9.9	14.7	19.6	24.2		
Перевернутая латунь								
y , мм	9.00	7.76	6.56	5.38	4.13	3.01		
y_{max} , мм	0.00	1.24	2.44	3.62	4.87	5.99		
Δm , г	0.0	503.3	511.0	482.5	503.1	467.9		
P , Н	0.0	4.9	9.9	14.7	19.6	24.2		

6. Модуль Юнга через угловой коэффициент γ можно вычислить по формуле

$$E = \frac{\gamma l^3}{4ab^3} \quad (9)$$

Отсюда погрешность:

$$\varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_\gamma^2 + (3\varepsilon_l)^2 + \varepsilon_a^2 + (3\varepsilon_b)^2} \approx \varepsilon_\gamma + 3\varepsilon_b$$

7. Сведем все средние значения угловых коэффициентов и модулей Юнга в таблицу:

Таблица 6: Значения модуля Юнга

Материал	Дерево	Сталь	Латунь
γ , Н/мм	6.65	7.30	4.04
ε_γ	0.02	0.02	0.01
a , мм	20.40	21.30	21.60
b , мм	9.9	3.9	3.9
E , ГПа	10	181	99
ε_E	0.05	0.10	0.09
σ_E , ГПа	1	17	9

4 Обсуждение результатов

Достаточно сравнить полученные результаты с табличными значениями модуля Юнга $E_{\text{ст}} = 180$ ГПа, $E_{\text{лт}} = 95$ ГПа (источник https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_modulus). Полученные значения очень близки к табличным.

5 Вывод

В результате работы были исследованы упругие деформации твердых тел. Подтверждена теоретическая модель, предсказывающая линейную зависимость. Получены значения модуля Юнга, практически совпадающие с табличными.