

# Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору  
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных  
технологий

Московский физико-технический институт  
Долгопрудный, 2024

### **Аннотация**

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств, в частности, исследование характера равновесия в них. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

# 1 Введение

*Точки Лагранжа*, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

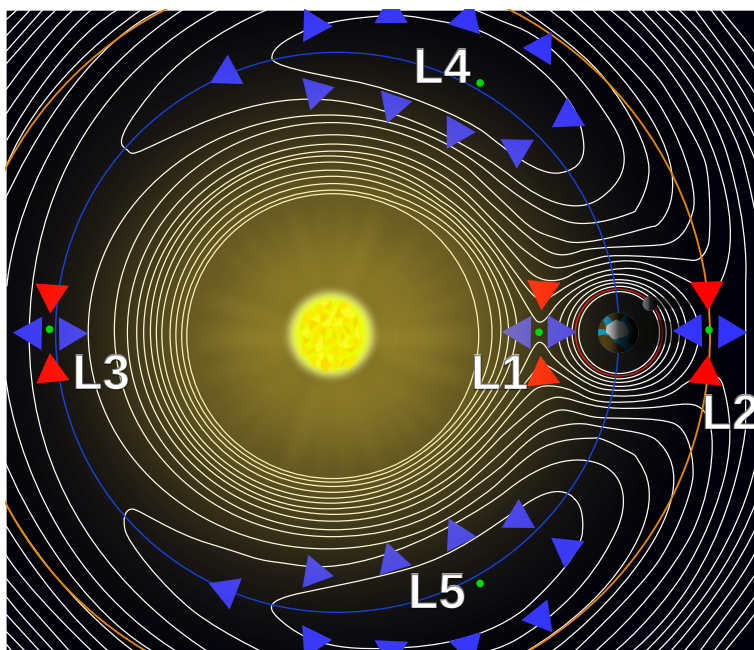


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange\\_points2.svg/1920px-Lagrange\\_points2.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png)

## 2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями [3]:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами  $M_1$  и  $M_2$  и третье тело массой  $m$ ,  $m \ll M_1$ ,  $m \ll M_2$ . В таком случае мы можем рассматривать движение  $M_1$  и  $M_2$  в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздействий вращаются относительно центра масс системы. Мы будем рассматривать случай, когда они вращаются по окружности. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и  $M_1$  и  $M_2$ . Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы  $M_1$  и  $M_2$  через  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  соответственно.

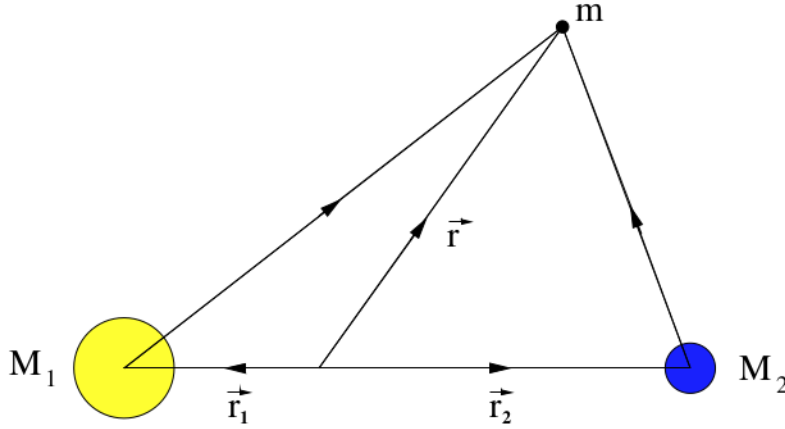


Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел [2]

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения

тела  $m$ , исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2)$$

Теперь из третьего закона Кеплера [5] найдем угловую скорость вращения системы  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \quad (3)$$

где  $R$  – расстояние между телами. Здесь используется, что  $M_1$  и  $M_2$  вращаются по окружностям радиусов  $r_1$  и  $r_2$  соответственно.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис:  $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$ ,  $\vec{i} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$ ,  $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$ . В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r}_1 &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, связанной с  $M_1$  и  $M_2$ .

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \quad (5)$$

Так как мы ищем решения, для которых  $\dot{\vec{r}} = 0$ , это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив  $\vec{a}$  из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида  $GM$  через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело  $m$  может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения  $(x, y)$  поставленной задачи можно найти из уравнения  $\vec{a}_\Omega = 0$ .

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равенство нулю компоненты по оси  $y$  ветвится на 2 случая.

## 2.1 L1, L2, L3

Для начала рассмотрим случай  $y = 0$ . Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену  $x = R(u + \beta)$ . В самом деле, так как из 4  $\alpha + \beta = 1$ , получаем  $x + \alpha R = (u + 1)R$ ,  $x - \beta R = uR$ .

Теперь подставим  $y$  в первое уравнение системы. Для краткости введем обозначения  $s_0 = \text{sign}(u)$ ,  $s_1 = \text{sign}(u + 1)$  (они получатся при раскрытии знаменателей). После преобразований получим следующее уравнение:

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 + ((1 - \alpha)(1 - s_1) - \alpha s_0)u^2 - 2\alpha s_0 u - \alpha s_0 = 0 \quad (7)$$

Заметим, что пара  $(s_0, s_1)$  может принимать одно из значений:  $(-1, 1)$  (между  $M_1$  и  $M_2$ ),  $(1, 1)$  (за  $M_2$ ) и  $(-1, -1)$  (за  $M_1$ ). Так как уравнение 7 пятой степени, для него по теореме Абеля – Руффини [4] не существует общего аналитического решения через  $\alpha$ .

Поэтому мы будем решать получившиеся уравнения численными методами. Для этого воспользуемся средствами библиотеки NumPy, предоставляющей программную имплементацию численного метода для решения полиномиальных уравнений произвольных порядков для языка Python3. При помощи данного несложного скрипта получим набор данных в виде таблицы, доступной по ссылке. До  $\alpha = 0.01$  идем с шагом  $10^{-4}$ , потом  $10^{-3}$ .

Построим графики  $x/R(\alpha)$  для  $L_1, L_2, L_3$  (см. рисунок 3). Отметим, что картина абсолютно симметрична относительно прямой  $\alpha = 0,5$ .

Отдельный интерес так же представляют аппроксимации полученных зависимостей для  $\alpha \ll 1$ . Их можно получить по набору точек, близких к 0. Источники [3] и [2] предлагают следующие приближенные решения для  $\alpha \ll 1$ :

$$\begin{aligned}
L_1 & \left( R \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \\
L_2 & \left( R \left( 1 + \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \\
L_3 & \left( -R \left( 1 + \frac{5}{12} \alpha \right), 0 \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

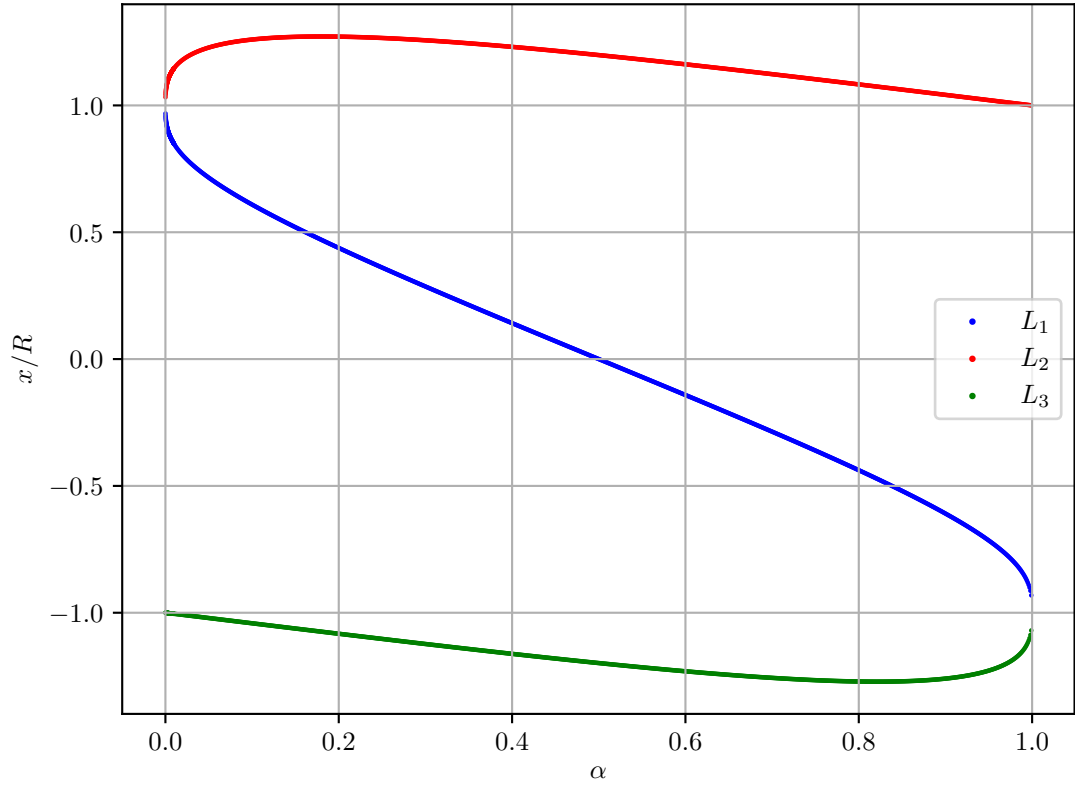


Рис. 3: Графики положения точек первых трех точек Лагранжа в зависимости от  $\alpha$

Построим графики с аппроксимациями (см. рисунок 4). Уже на этом

этапе видно, для малых  $\alpha$  (а в случае  $L_3$  – и для соизмеримых с 1) формулы 8 действительно дают неплохое приближение. Чтобы убедиться в этом, можно построить графики относительной ошибки  $\varepsilon(\alpha)$  для каждой точки Лагранжа. Графики представлены на рисунке 5.

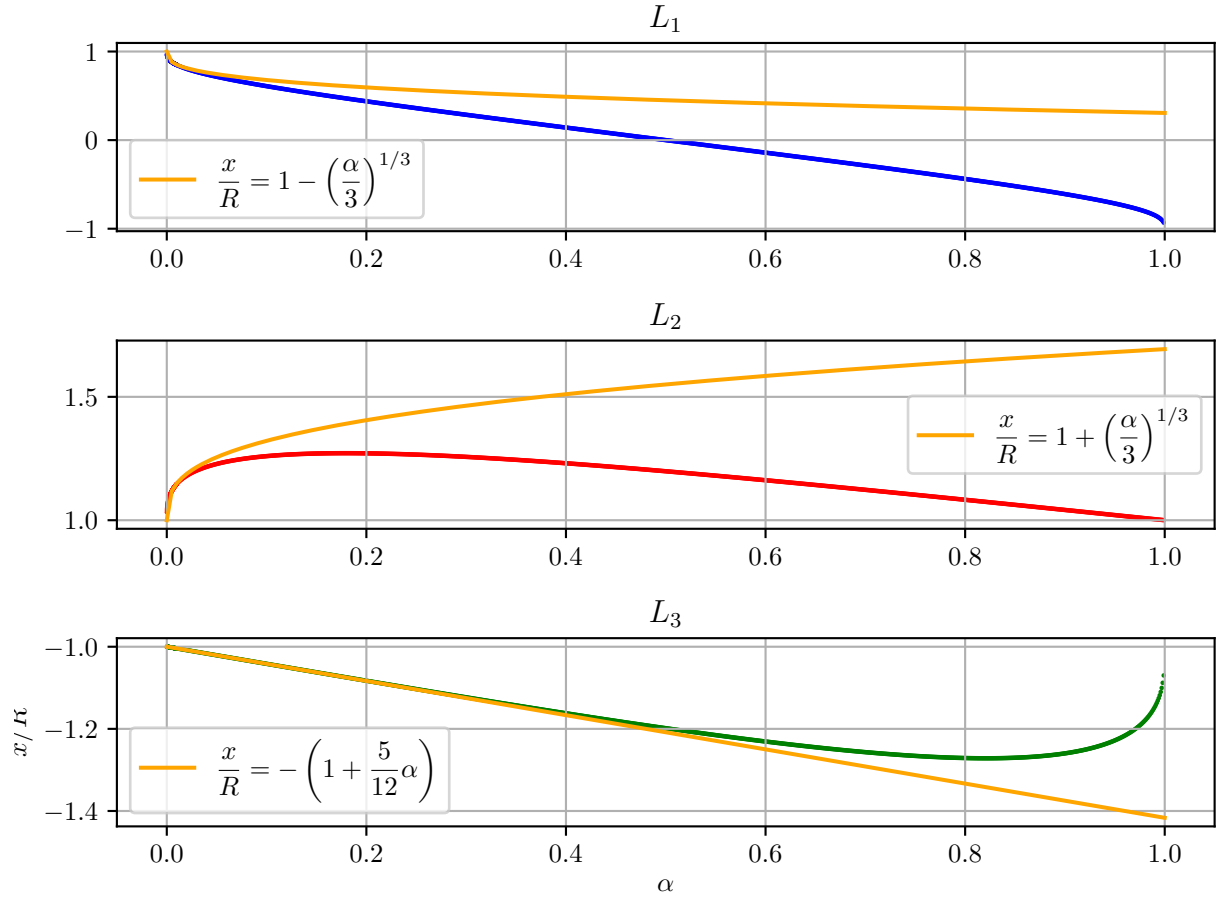


Рис. 4: Графики для  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  с аппроксимациями 8



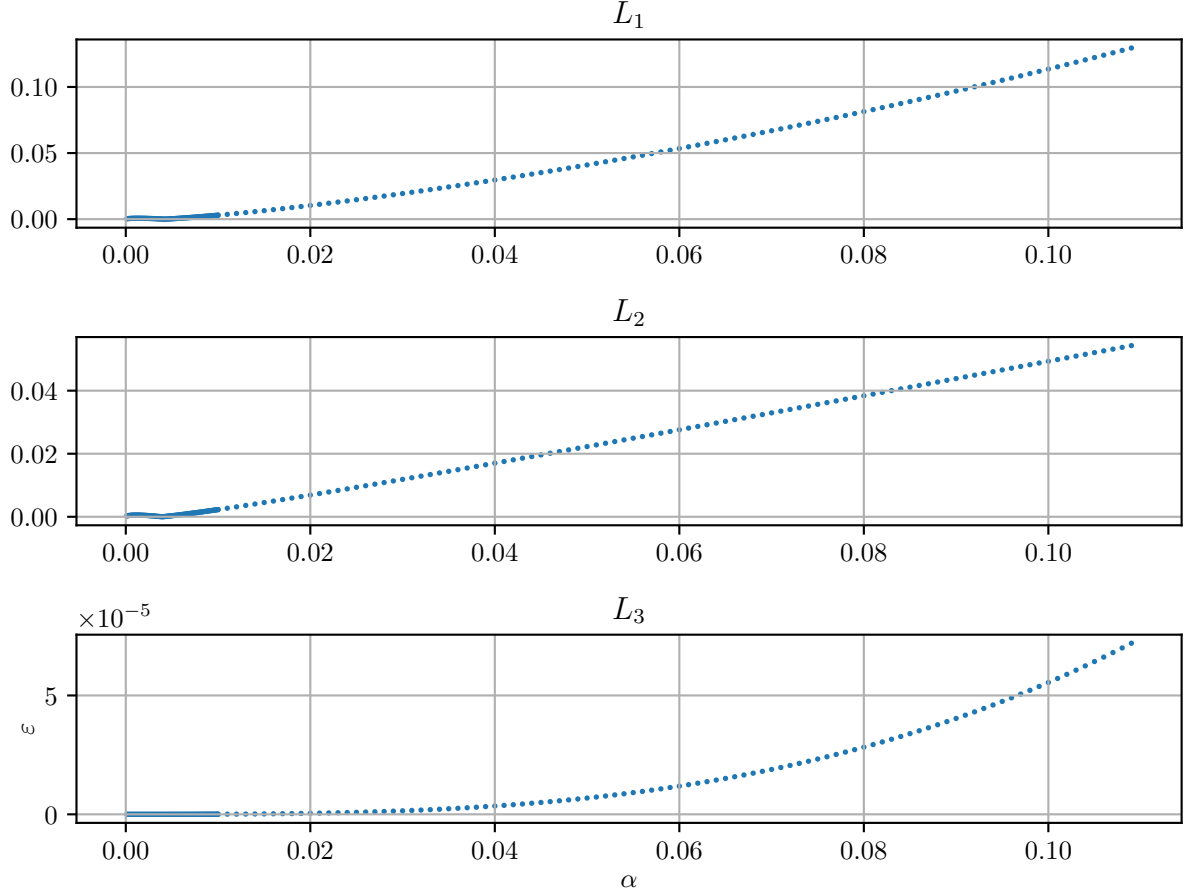


Рис. 5: Графики относительной ошибки аппроксимации 8 для  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$

По порядкам ошибок видно, что если для  $L_1$  и  $L_2$  аппроксимация по формулам 8 дает хорошую точность лишь для очень малых значений  $\alpha$ , при  $\alpha \sim 10^{-2}$  их уже можно применять лишь для совсем грубой оценки. Однако наличие корреляции отрицать все же нельзя.

С другой стороны, для  $L_3$  аппроксимация неожиданно оказывается достаточно хороша, что, впрочем, неплохо видно на графике 4. Поэтому построим расширенный график для точности, взяв диапазон  $(0, 0,2)$ . Этот график показан рисунке 6.

Как видно из графика, ошибка для  $L_3$  пренебрежимо мала на фоне ошибок вычисления  $L_1$  и  $L_2$  даже при  $\alpha = 0,2$ , тогда как аппроксимации для  $L_1$  и  $L_2$  уже становятся крайне сомнительными при этом значении.

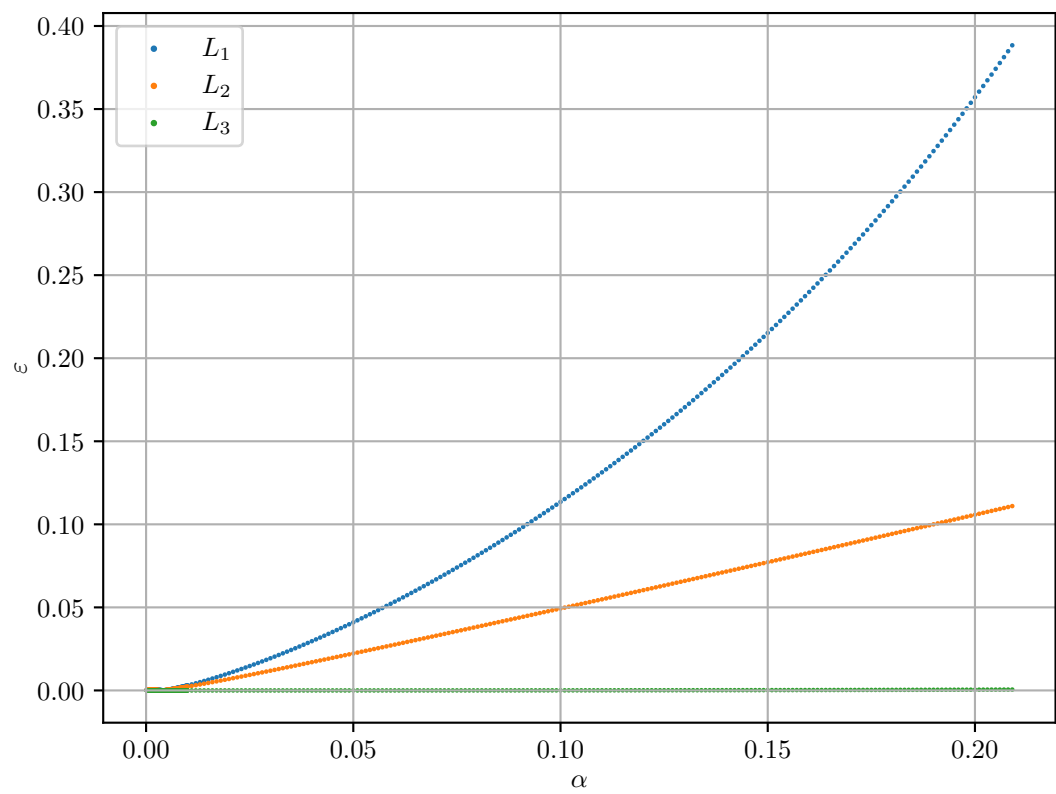


Рис. 6: Сравнение ошибок аппроксимации для  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  на промежутке  $(0, 0.2)$

Из всех вычислений можно сделать предварительный вывод, что проще всего расчету поддается  $L_3$ . Однако в случае очень малого значения  $\alpha$  (как, например, в системе Солнце – Земля) точность формул 8 можно считать досточной. Для системы Земля – Луна все уже несколько сложнее,  $\alpha = 0,012$ , так что мы теоретически получим ошибки  $\varepsilon_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_3 = 10^{-7}$  для  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  соответственно. При этом конечно нужно учитывать, что это лишь модель, и в реальности необходимо учесть еще и тяготение Солнца и, возможно, планет-гигантов. Так что здесь, вероятно, необходимы весьма существенные поправки, с этим связанные.

## 2.2 L4, L5

Вернемся теперь к уравнению 6 и вспомним про случай  $y \neq 0$ . Мы не будем решать уравнение напрямую. Вместо этого учтем, что результирующая сила, направленная к центру масс равна нулю, а так же равна нулю и перпендикулярная ей компонента, с надеждой на то, что это приведет к более простым уравнениям. Ортогональную компоненту вектора  $\vec{a}_\Omega$  относительно вектора  $\vec{r}$  можно найти как:

$$a_\Omega^\perp = \frac{|[\vec{a}_\Omega, \vec{r}]|}{r} \quad (9)$$

Путем преобразований получаем следующее:

$$a_\Omega^\perp = \frac{\alpha\beta y\Omega^2 R^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{1}{((x - \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x + \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \quad (10)$$

Из условия  $a_\Omega^\perp = 0$  получаем, что точка равновесия равноудалена от массивных тел. Это условие позволяет нам получить упрощенное выражение для проекции:

$$a_\Omega^\parallel = \frac{|(\vec{a}_\Omega, \vec{r})|}{r} = \Omega^2 R^3 \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{((x - \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \quad (11)$$

Из 10 и 11 получаем 2 точки, симметричные относительно оси  $x$ :

$$\begin{aligned} L_4 & \left( \frac{R}{2}(1-2\alpha), \frac{\sqrt{3}}{2}R \right), \\ L_5 & \left( \frac{R}{2}(1-2\alpha), -\frac{\sqrt{3}}{2}R \right) \end{aligned} \quad (12)$$

### 3 Анализ устойчивости равновесия

Следующей нашей целью будет исследование вида равновесия в точках Лагранжа. Пусть  $\delta x$ ,  $\delta y$  – малые отклонения от положения равновесия по соответствующим осям,  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$  – приобретенные проекции скорости на эти оси.

Введем вектор состояния для тела. Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства [2]:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} & 0 & 2\Omega \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} & -2\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix} \quad (13)$$

#### 3.1 Устойчивость L1 и L2

Точки  $L_1$  и  $L_2$  могут быть использованы для размещения космических аппаратов-обсерваторий в целях наблюдения за Солнцем. В частности, в точке  $L_1$  размещалась станция SOHO [2]. Поэтому исследование равновесия в этих точках является важной задачей.

Для того, чтобы проследить изменения вектора состояния, необходимо найти коэффициенты матрицы в выражении 13. Для этого вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Omega^2 \left( x - \frac{\beta(x + \alpha R)R^3}{((x + \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x - \beta R)R^3}{((x - \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \right) = \\ = \Omega^2 \left( 1 - \frac{\beta R^3(y^2 - 2(x - \alpha R)^2)}{((x + \alpha R)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{\alpha R^3(y^2 - 2(x - \beta R)^2)}{((x - \beta R)^2 + y^2)^{5/2}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Для  $L_1$  и  $L_2$  получим:

$$\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} = \mp 9\Omega^2, \quad \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} = \pm 3\Omega^2, \quad \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Вычислим характерное значение (скаляр, умножению которого на характерный вектор эквивалентно умножение на матрицу со следом  $\tau$  и определителем  $\Delta$ ):

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \pm \Omega \sqrt{1 + 2\sqrt{7}} \quad (16)$$

Это значит, что уравнение 13 эквивалентно уравнению

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \lambda_+ \vec{X}, \quad (17)$$

где  $\vec{X}$  – введенный нами ранее характеристический вектор тела. Поскольку  $\lambda_{\pm}$  действительны, уравнение 17 дает экспоненциально решение

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(0)e^{\lambda_+ t}, \quad (18)$$

То есть все компоненты вектора, в том числе и  $\delta x$  и  $\delta y$ , будут нарастать по этой зависимости. Значит,  $L_1$  и  $L_2$  являются точками *неустойчивого* равновесия. Характерное время отдаления от точки Лагранжа в этом случае составит

$$\tau = \frac{1}{\lambda_+} \approx \frac{2}{5\Omega} \quad (19)$$

Для системы Земля – Солнце  $\tau \approx 23$  дня. Это значит, что для аппарата, находящегося в  $L_1$  или  $L_2$ , оптимально корректировать траекторию с помощью двигателей раз в этот промежуток времени.

## 3.2 Устойчивость L3

На данный момент научного применения этой точке пока не нашли, так как она расположена за Солнцем. Однако в свое время существовали фантастические теории [1], что в  $L_3$  находится некая скрытая планета X. К сожалению, точка  $L_3$ , как и предыдущие две, экспоненциально неустойчива:

$$\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} = -3\Omega^2, \quad \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} = \frac{7M_2}{8M_1}\Omega^2, \quad \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

Собственное значение:

$$\lambda = \Omega \sqrt{\frac{3M_1}{8M_2}} \quad (21)$$

Следовательно, планета не успела бы даже сформироваться на такой орбите, характерное время  $\tau = 150$  лет. Однако стоит отметить, что  $L_3$  существенно «стабильнее»  $L_1$  и  $L_2$ .

### 3.3 Устойчивость L4 и L5

Эти точки отличаются от предыдущих, поскольку устойчивость равновесия в них обеспечивает сила Кориолиса. Аналогично:

$$\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} = \frac{3}{4}\Omega^2, \quad \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} = \frac{9}{4}\Omega^2, \quad \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} = \frac{3\sqrt{3}}{4}k\Omega^2, \quad (22)$$

где  $k = (M_1 - M_2)/(M_1 + M_2)$ .

$$\lambda_{\pm} = \pm i \frac{\Omega}{2} \sqrt{2 - \sqrt{27k^2 - 23}} \quad (23)$$

Точка  $L_4$  будет точкой устойчивого равновесия, если действительная часть корней [23](#) нулевая. В этом случае имеем комплексную экспоненту, которая эквивалентна тригонометрическим функциям, а значит, ограничена. Это достигается при  $k \geq \sqrt{23/27}$  или

$$M_1 \geq 25M_2 \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4/625}}{2} \right) \quad (24)$$

## 4 Заключение

В работе мы произвели расчет положений точек Лагранжа для произвольной системы двух тел при помощи численных и аналитических методов, вычислили точности различных аппроксимаций. Так же довольно ценны результаты анализа устойчивости равновесия, они необходимы для расчета запусков космических обсерваторий.

## Список литературы

- [1] What is a lagrange point? <https://science.nasa.gov/resource/what-is-a-lagrange-point/>.
- [2] Neil J. Cornish. The lagrange points. <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>, 1998.
- [3] S. Widnall. Lecture 118 - exploring the neighborhood: the restricted three-body problem. [https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16\\_07f09\\_lec18/](https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/), 2008.
- [4] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в решениях и задачах*. МНЦМО, 2001.
- [5] Сивухин Д. В. *Общий курс физики*, volume 1. Физматлит, 2005.