Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий
Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

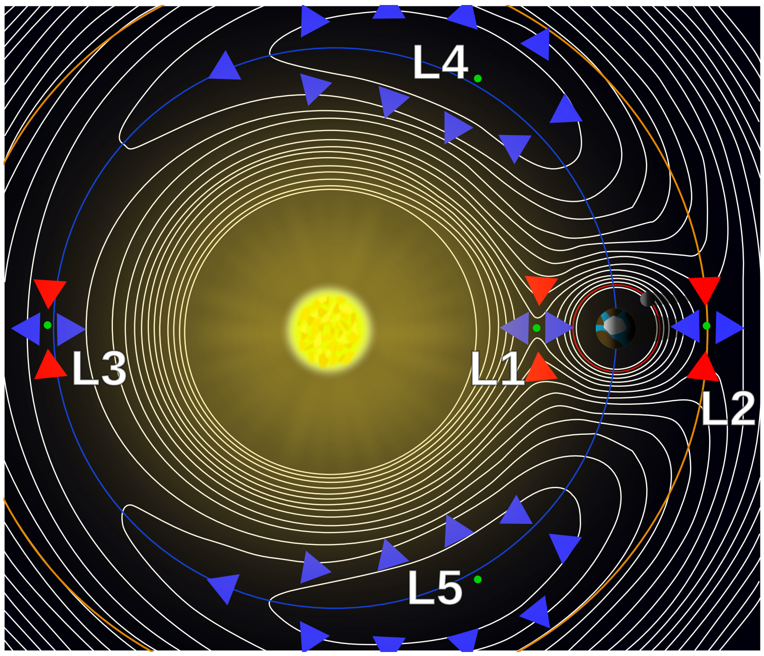

Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел
Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями [3]:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r_1}} = -Gm_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} - Gm_3\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|} \\ \ddot{\vec{r_2}} = -Gm_2\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|} - Gm_3\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|} \\ \ddot{\vec{r_3}} = -Gm_2\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|} - Gm_3\frac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами M_1 и M_2 и третье тело массой m, $m \ll M_1$, $m \ll M_2$. В таком случае мы можем рассматривать движение M_1 и M_2 в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздейстсвий вращаются относительно центра масс системы. Мы будем рассматривать случай, когда они вращаются по окружности. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и M_1 и M_2. Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы M_1 и M_2 через $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ соответственно.

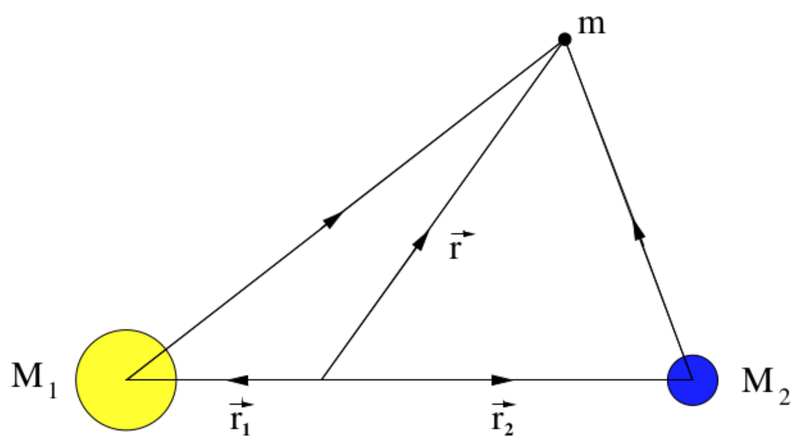

Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел [2]

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения тела m, исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r} - \vec{r_1}) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r} - \vec{r_2}) \tag{2}$$

Теперь из третьего закона Кеплера [5] найдем угловую скорость вращения системы M_1 и M_2:

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \tag{3}$$

где R – расстояние между телами. Здесь используется, что M_1 и M_2 вращаются по окружностям радиусов r_1 и r_2 соответственно.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2},\ \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{4}$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис: $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$, $\vec{i} = \frac{\vec{r_2}}{|\vec{r_2}|}$, $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$. В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r_1} &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r_2} &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, свзянной с M_1 и M_2.

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \tag{5}$$

Так как мы ищем решения, для которых $\dot{\vec{r}} = 0$, это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив $\vec{a}$ из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида GM через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело m может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения (x, y) поставленной задачи можно найти из уравнения $\vec{a}_\Omega = 0$.

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равенство нулю компоненты по оси y ветвится на 2 случая. Для начала рассмотрим случай $y = 0$. Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену $x = R(u+\beta)$. В самом деле, так как из 4 $\alpha+\beta = 1$, получаем $x + \alpha R = (u + 1)R$, $x - \beta R = uR$.

Теперь подставим y в первое уравнение системы. Для краткости введем обозначения $s_0 = \text{sign}(u)$, $s_1 = \text{sign}(u + 1)$ (они получатся при раскрытии знаменателей). После преобразований получим следующее уравнение:

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 - ((1 - \alpha)(1 - s_1) - \alpha s_0)u^2 - \alpha s_0 = 0 \quad (7)$$

Заметим, что пара (s_0, s_1) может принимать одно из значений: $(-1, 1)$ (между M_1 и M_2), $(1, 1)$ (за M_2) и $(-1, -1)$ (за M_1). Так как уравнение 7 пятой степени, для него по теореме Абеля – Руффини [4] не существует общего аналитического решения через α.

Поэтому мы будем решать получившиеся уравнения численными методами. Для этого напишем несложную программу на языке C с использованием библиотеки GSL (GNU Scientific Libarary, доступна для скачивания с https://www.gnu.org/software/gsl, распространяется под лицензией GNU GPL, разрешающей свободное использование в некоммерческих целях, текст лицензии доступен по адресу https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.txt). GSL предоставляет имплементацию численного метода для решения полиномиального уравнения общего вида [1]. Исходный код программы доступен в репозитории https://github.com/victorbaldin56/VPV/tree/main/2023/lagrange_solver. Для сборки из исходного кода необходимы установленные компилятор языка C/C++, система сборки GNU Make и библиотека GSL.

Меняя α в промежутке $[0, 1)$ с шагом 10^{-3} и решая уравнение 7 для каждого значения, получаем зависимость положений точек L_1, L_2 и L_3 от α. При этом L_1 соотвествует паре $(s_0, s_1) = (-1, 1)$, L_2 – $(1, 1)$, L_3 – $(-1, -1)$, как показано на рисунке 1. Полученный набор данных представлен в сгенерированной программой таблице https://github.com/victorbaldin56/VPV/blob/main/2023/lagrange_solver/output.csv. В таблице представлены корни уравнения, соответствующие L_1, L_2 и L_3.

При этом численными методами мы убеждаемся в том, что таких точек действительно лишь 3. Это позволяет проверить процедура отбора корней, при которой мы выбираем лишь такие корни u, что $\operatorname{Im} u = 0$ и $(\operatorname{sign}(u), \operatorname{sign}(u+1)) = (s_0, s_1)$.

Построим график $u_1(\alpha)$, где u_1 – корень, соответствующий положению L_1.

Список литературы

[1] General polynomic equations. https://www.gnu.org/software/gsl/doc/html/poly.html#general-polynomial-equations.

[2] Neil J. Cornish. The lagrange points. https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf, 1998.

[3] S. Widnall. Lecture l18 - exploring the neighborhood: the restricted three-body problem. https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/, 2008.

[4] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в решениях и задачах*. МНЦМО, 2001.

[5] Сивухин Д. В. *Общий курс физики*, volume 1. Физматлит, 2005.