

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных
технологий

Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

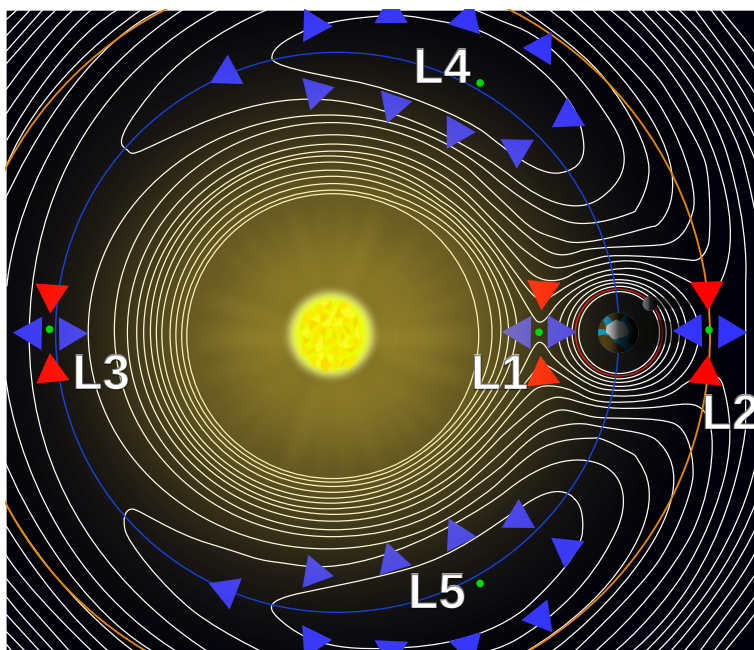


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями [2]:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами M_1 и M_2 и третье тело массой m , $m \ll M_1$, $m \ll M_2$. В таком случае мы можем рассматривать движение M_1 и M_2 в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздействий вращаются относительно центра масс системы. Мы будем рассматривать случай, когда они вращаются по окружности. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и M_1 и M_2 . Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы M_1 и M_2 через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 соответственно.

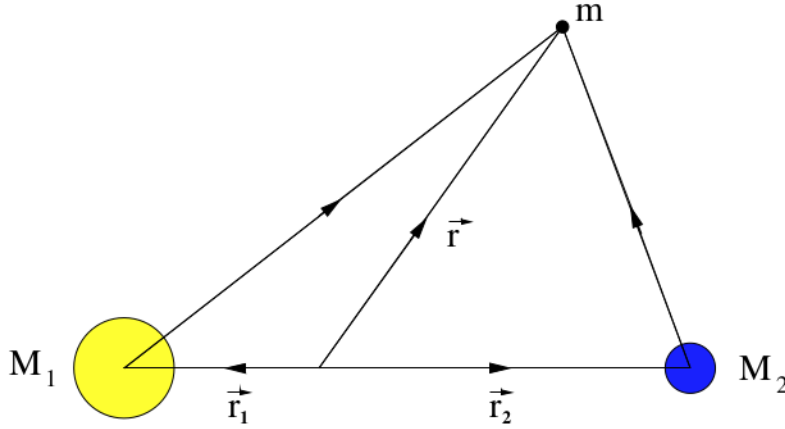


Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел [1]

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения

тела m , исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2)$$

Теперь из третьего закона Кеплера [4] найдем угловую скорость вращения системы M_1 и M_2 :

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \quad (3)$$

где R – расстояние между телами. Здесь используется, что M_1 и M_2 вращаются по окружностям радиусов r_1 и r_2 соответственно.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис: $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$, $\vec{i} = \frac{\vec{r}_2}{|r_2|}$, $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$. В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r}_1 &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, связанной с M_1 и M_2 .

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \quad (5)$$

Так как мы ищем решения, для которых $\dot{\vec{r}} = 0$, это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив \vec{a} из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида GM через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело m может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения (x, y) поставленной задачи можно найти из уравнения $\vec{a}_\Omega = 0$.

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равенство нулю компоненты по оси y ветвится на 2 случая. Для начала рассмотрим случай $y = 0$. Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену $x = R(u + \beta)$. В самом деле, так как из [4](#) $\alpha + \beta = 1$, получаем $x + \alpha R = (u + 1)R$, $x - \beta R = uR$.

Теперь подставим y в первое уравнение системы. Для краткости введем обозначения $s_0 = \text{sign}(u)$, $s_1 = \text{sign}(u + 1)$ (они получатся при раскрытии знаменателей). После преобразований получим следующее уравнение:

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 + ((1 - \alpha)(1 - s_1) - \alpha s_0)u^2 - 2\alpha s_0 u - \alpha s_0 = 0 \quad (7)$$

Заметим, что пара (s_0, s_1) может принимать одно из значений: $(-1, 1)$ (между M_1 и M_2), $(1, 1)$ (за M_2) и $(-1, -1)$ (за M_1). Так как уравнение [7](#) пятой степени, для него по теореме Абеля – Руффини [\[3\]](#) не существует общего аналитического решения через α .

Поэтому мы будем решать получившиеся уравнения численными методами. Для этого воспользуемся средствами библиотеки [NumPy](#), предоставляющей программную [имплементацию](#) численного метода для решения полиномиальных уравнений произвольных порядков для языка Python3. При помощи данного несложного [скрипта](#) получим набор данных в виде таблицы, доступной по [ссылке](#). До $\alpha = 0.01$ идем с шагом 10^{-4} , потом 10^{-3} .

Построим графики $x/R(\alpha)$ для L_1, L_2, L_3 (см. рисунок [3](#)). Отметим, что картина абсолютно симметрична относительно прямой $\alpha = 0,5$.

Отдельный интерес так же представляют аппроксимации полученных зависимостей для $\alpha \ll 1$. Их можно получить по набору точек, близких к 0. Источники [\[2\]](#) и [\[1\]](#) предлагают следующие приближенные решения для $\alpha \ll 1$:

$$\begin{aligned} L_1 & \left(R \left(1 - \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \\ L_2 & \left(R \left(1 + \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \\ L_3 & \left(-R \left(1 + \frac{5}{12} \alpha \right), 0 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

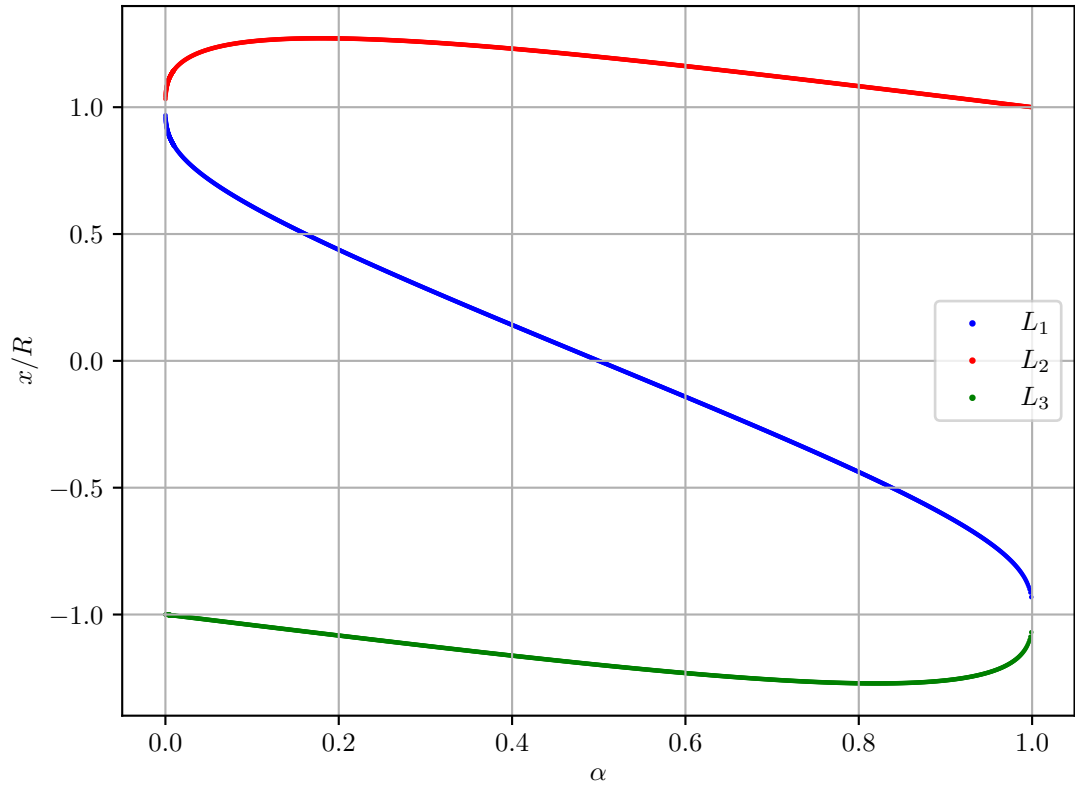


Рис. 3: Графики положения точек первых трех точек Лагранжа в зависимости от α

Построим графики с аппроксимациями (см. рисунок 4). Уже на этом этапе видно, для малых α (а в случае L_3 – и для соизмеримых с 1) формулы 8 действительно дают неплохое приближение. Чтобы убедиться в этом, можно построить графики относительной ошибки $\varepsilon(\alpha)$ для каждой точки Лагранжа.

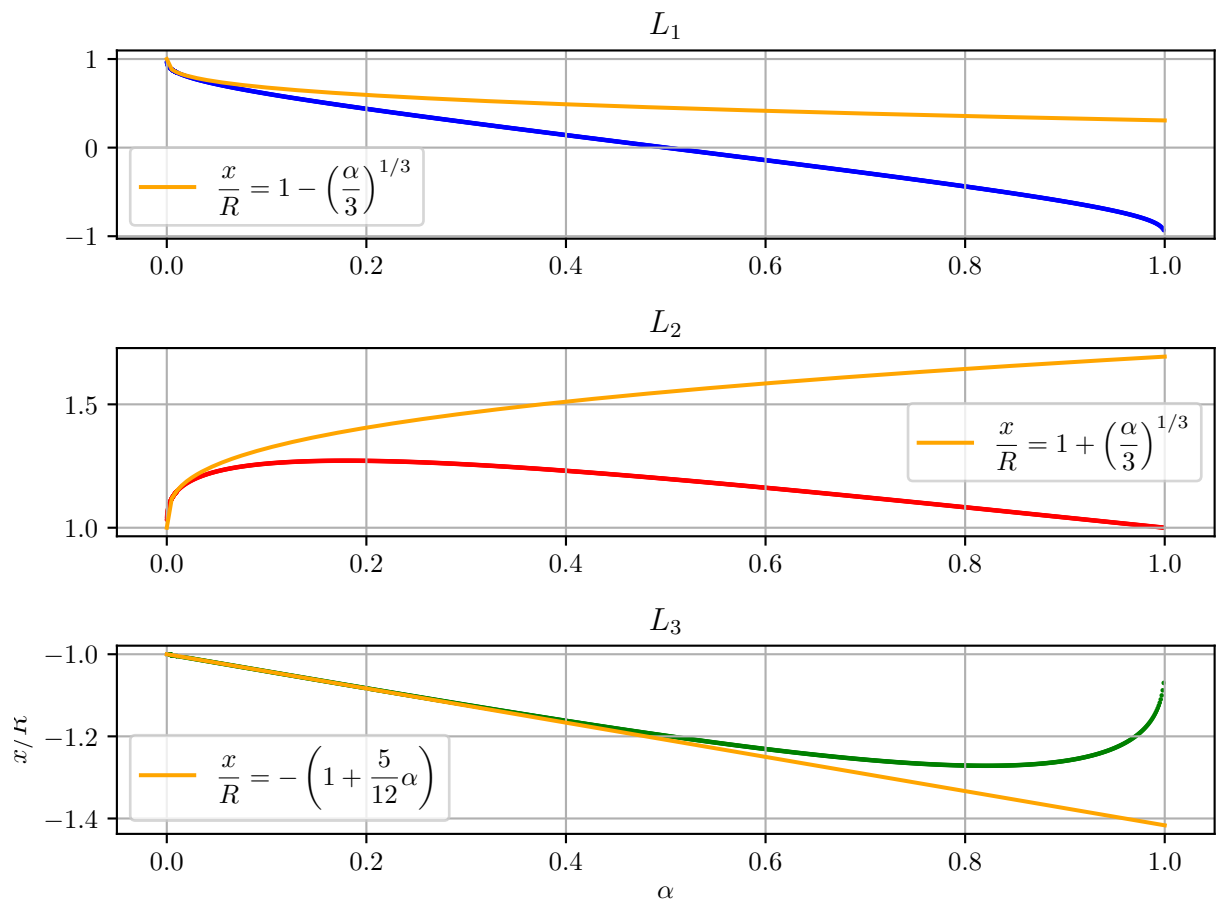


Рис. 4: Графики для L_1 , L_2 , L_3 с аппроксимациями 8

Список литературы

- [1] Neil J. Cornish. The lagrange points. <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>, 1998.
- [2] S. Widnall. Lecture 118 - exploring the neighborhood: the restricted three-body problem. https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/, 2008.
- [3] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в решениях и задачах*. МНЦМО, 2001.

- [4] Сивухин Д. В. *Общий курс физики*, volume 1. Физматлит, 2005.