

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных
технологий

Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

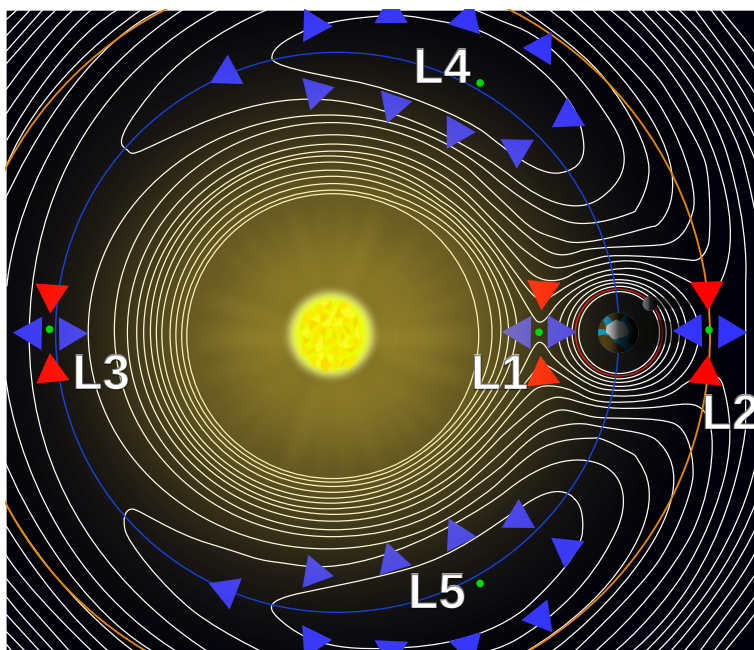


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями [2]:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами M_1 и M_2 и третье тело массой m , $m \ll M_1$, $m \ll M_2$. В таком случае мы можем рассматривать движение M_1 и M_2 в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздействий вращаются относительно центра масс системы. Мы будем рассматривать случай, когда они вращаются по окружности. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и M_1 и M_2 . Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы M_1 и M_2 через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 соответственно.

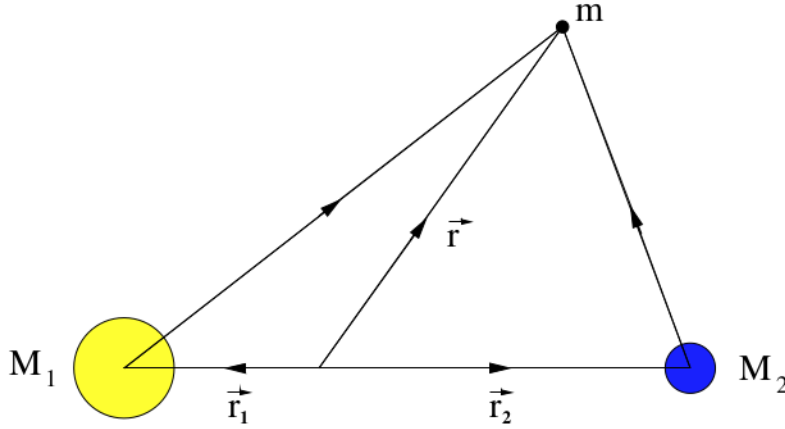


Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел [1]

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения

тела m , исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2)$$

Теперь из третьего закона Кеплера [4] найдем угловую скорость вращения системы M_1 и M_2 :

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \quad (3)$$

где R – расстояние между телами. Здесь используется, что M_1 и M_2 вращаются по окружностям радиусов r_1 и r_2 соответственно.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис: $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$, $\vec{i} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$, $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$. В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r}_1 &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, связанной с M_1 и M_2 .

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \quad (5)$$

Так как мы ищем решения, для которых $\dot{\vec{r}} = 0$, это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив \vec{a} из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида GM через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело m может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения (x, y) поставленной задачи можно найти из уравнения $\vec{a}_\Omega = 0$.

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равенство нулю компоненты по оси y ветвится на 2 случая. Для начала рассмотрим случай $y = 0$. Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену $x = R(u + \beta)$. В самом деле, так как из 4 $\alpha + \beta = 1$, получаем $x + \alpha R = (u + 1)R$, $x - \beta R = uR$.

Теперь подставим y в первое уравнение системы. Для краткости введем обозначения $s_0 = \text{sign}(u)$, $s_1 = \text{sign}(u + 1)$ (они получатся при раскрытии знаменателей). После преобразований получим следующее уравнение:

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 + ((1 - \alpha)(1 - s_1) - \alpha s_0)u^2 - 2\alpha s_0 u - \alpha s_0 = 0 \quad (7)$$

Заметим, что пара (s_0, s_1) может принимать одно из значений: $(-1, 1)$ (между M_1 и M_2), $(1, 1)$ (за M_2) и $(-1, -1)$ (за M_1). Так как уравнение 7 пятой степени, для него по теореме Абеля – Руффини [3] не существует общего аналитического решения через α .

Поэтому мы будем решать получившиеся уравнения численными методами. Для этого воспользуемся средствами библиотеки NumPy, предоставляющей программную имплементацию численного метода для решения полиномиальных уравнений произвольных порядков для языка Python3. При помощи данного несложного скрипта получим набор данных в виде таблицы, доступной по ссылке.

Построим графики $x/R(\alpha)$ для L_1, L_2, L_3 (см. рисунок 3).

Некоторый интерес так же представляют аппроксимации полученных зависимостей для $\alpha \ll 1$.

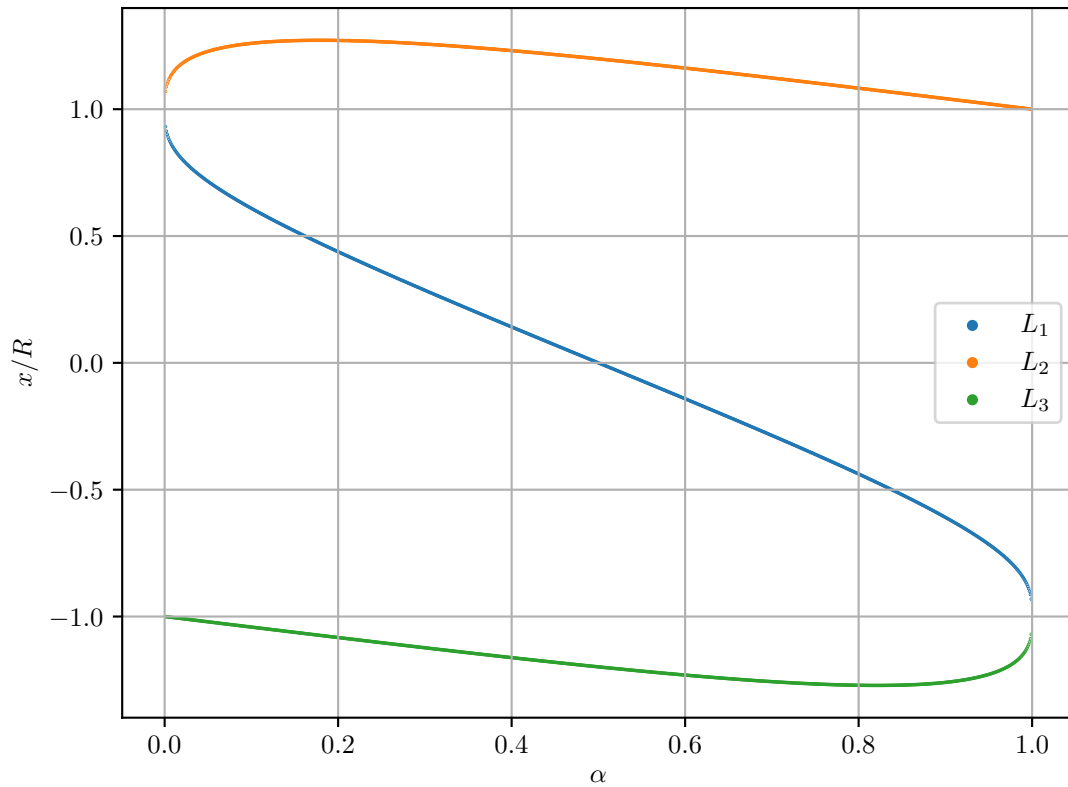


Рис. 3: Графики положения точек первых трех точек Лагранжа в зависимости от α

Список литературы

- [1] Neil J. Cornish. The lagrange points. <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>, 1998.
- [2] S. Widnall. Lecture 118 - exploring the neighborhood: the restricted three-body problem. https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/, 2008.
- [3] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в решениях и задачах*. МНЦМО, 2001.

- [4] Сивухин Д. В. *Общий курс физики*, volume 1. Физматлит, 2005.