

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных
технологий

Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Нахождение точек Лагранжа является частным случаем решения задачи трех тел для случая круговых орбит и малой массы одного из них. То есть, другими словами, два массивных тела равномерно вращаются вокруг общего центра масс. В этой ситуации существует 5 точек, в которых третье невесомое (обладающее пренебрежимо малой массой) тело может оставаться неподвижным в системе отсчета, связанной с массивными телами.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

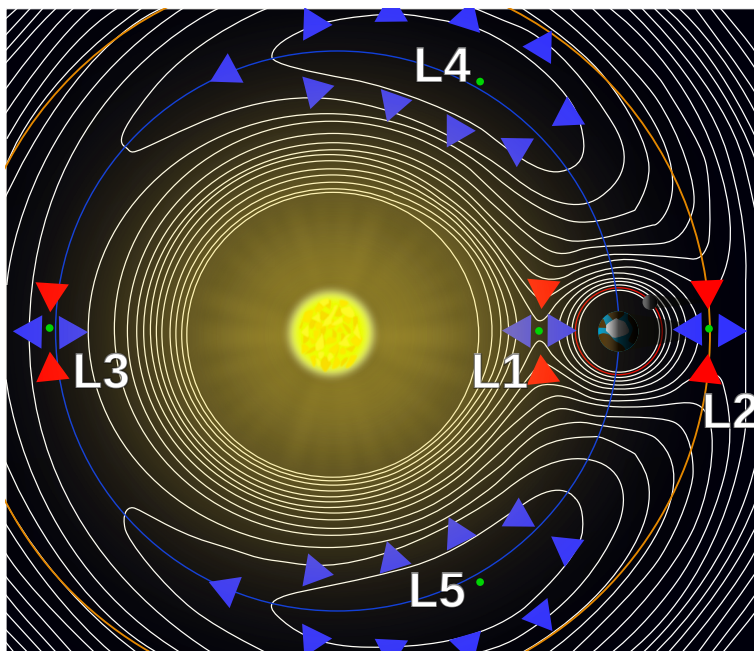


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Задача 3-х тел

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

3 Вычисление точек Лагранжа

Все точки Лагранжа находятся в плоскости орбит массивных тел. Их можно разбить на 2 подвида:

1. *Коллинеарные* (L_1, L_2, L_3) – расположены на прямой, соединяющей 2 массивных тела.
2. *Треугольные* или *тройные* (L_4, L_5).

Введем следующие обозначения: M_1, M_2 – массы массивных тел, m – масса малого тела, при этом $m \ll M_1, M_2, R$ – расстояние между телами.

Удобно найти расстояние до центра масс от каждого из тел. По определению центра масс

$$M_2(R - r_1) - M_1 r_1 = 0,$$

откуда

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} R$$

Введя обозначение

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2},$$

получим $r_1 = \alpha R$, $r_2 = (\alpha - 1)R$. Введем систему координат с началом координат в центре масс системы и осью, направленной от M_1 к M_2 .

3.1 Коллинеарные точки Лагранжа

L_1 – точка, находящаяся между двумя массивными телами. Запишем для массы m в этой точке второй закон Ньютона:

$$\frac{GM_1m}{(L_1 - r_1)^2} - \frac{GM_2m}{(L_1 - r_2)^2} = m\Omega^2r \quad (2)$$

Найдем угловую скорость вращения тел из третьего закона Кеплера:

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \quad (3)$$

Комбинируя 2 и 3 несложно свести это к следующему уравнению:

$$\frac{M_1}{(L_1 - r_1)^2} - \frac{M_2}{(L_1 - r_2)^2} = r \frac{M_1 + M_2}{R^3} \quad (4)$$

Как нетрудно видеть, это сводится к уравнению 5-й степени относительно r , что делает невозможным его общее алгебраическое решение. Поэтому получить формулу мы можем лишь приближенно для значений $\alpha \ll 1$, то есть для случая, когда масса $m \ll M_2 \ll M_1$.

В этом случае решение уравнения 4 принимает вид

$$L_1 = R \left(1 - \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right) \quad (5)$$

Хорошим примером системы, удовлетворяющей соотношению $\alpha \ll 1$, является система Земля – Солнце. В самом деле, $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-6}$, $R = 1,5 \cdot 10^8$ км. L_1 для этой системы лежит на расстоянии $R - L_1 \approx 1,5 \cdot 10^6$ км от Земли.

Очень схожим образом находится L_2 – точка Лагранжа, расположенная за менее массивным телом (M_2). Для нее при $\alpha \ll 1$ примерное решение

$$L_2 = R \left(1 + \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right) \quad (6)$$

Как можно видеть, L_1 и L_2 в этом случае симметричны относительно наименее массивного тела M_2 .

Несколько другой результат мы получим для точки L_3 :

$$L_3 = -R \left(1 + \frac{5}{12}\alpha \right) \quad (7)$$

Список литературы

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point
- [2] [https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/
resources/mit16_07f09_lec18/](https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/)
- [3] <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>