

# Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору  
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных  
технологий

Московский физико-технический институт  
Долгопрудный, 2024

### **Аннотация**

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

# 1 Введение

*Точки Лагранжа*, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

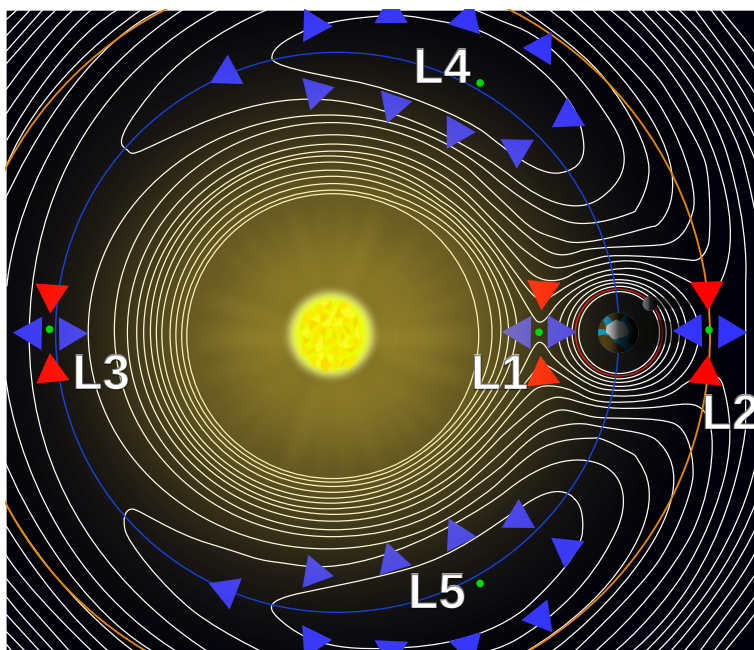


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange\\_points2.svg/1920px-Lagrange\\_points2.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png)

## 2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами  $M_1$  и  $M_2$  и третье тело массой  $m$ ,  $m \ll M_1$ ,  $m \ll M_2$ . В таком случае мы можем рассматривать движение  $M_1$  и  $M_2$  в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздействий вращаются относительно центра масс системы. Мы будем рассматривать случай, когда они вращаются по окружности. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и  $M_1$  и  $M_2$ . Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы  $M_1$  и  $M_2$  через  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  соответственно.

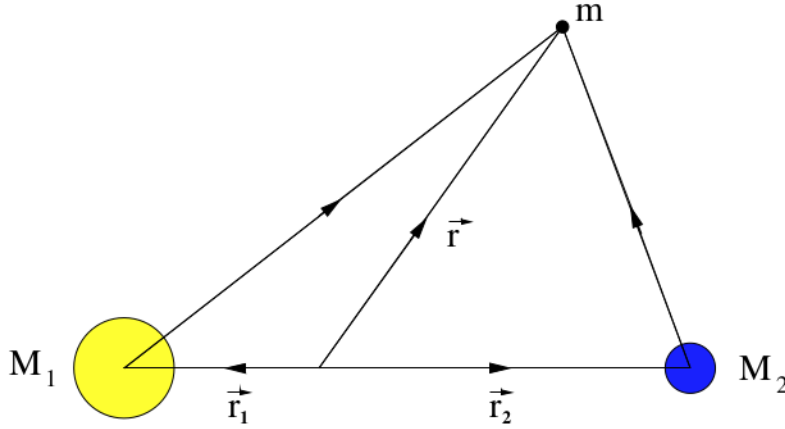


Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения

тела  $m$ , исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2)$$

Теперь из третьего закона Кеплера найдем угловую скорость вращения системы  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \quad (3)$$

где  $R$  – расстояние между телами. Здесь используется, что  $M_1$  и  $M_2$  вращаются по окружностям радиусов  $r_1$  и  $r_2$  соответственно.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис:  $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$ ,  $\vec{i} = \frac{\vec{r}_2}{|r_2|}$ ,  $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$ . В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r}_1 &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, связанной с  $M_1$  и  $M_2$ .

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \quad (5)$$

Так как мы ищем решения, для которых  $\dot{\vec{r}} = 0$ , это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив  $\vec{a}$  из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида  $GM$  через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело  $m$  может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения  $(x, y)$  поставленной задачи можно найти из уравнения  $\vec{a}_\Omega = 0$ .

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равенство нулю компоненты по оси  $y$  ветвится на 2 случая. Для начала рассмотрим случай  $y = 0$ . Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену  $x = R(u + \beta)$ . В самом деле, так как из 4  $\alpha + \beta = 1$ , получаем  $x + \alpha R = (u + 1)R$ ,  $x - \beta R = uR$ .

Теперь подставим  $y$  в первое уравнение системы. Для краткости введем обозначения  $s_0 = \text{sign}(u)$ ,  $s_1 = \text{sign}(u + 1)$  (они получатся при раскрытии знаменателей). После преобразований получим следующее уравнение:

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 - ((1 - \alpha)(1 - s_1) - \alpha s_0)u^2 - \alpha s_0 = 0 \quad (7)$$

Заметим, что пара  $(s_0, s_1)$  может принимать одно из значений:  $(-1, 1)$  (между  $M_1$  и  $M_2$ ),  $(1, 1)$  (за  $M_2$ ) и  $(-1, -1)$  (за  $M_1$ ). Так как уравнение 7 пятой степени, для него по теореме Абеля – Руффини не существует общего аналитического решения через  $\alpha$ .

Поэтому мы будем решать получившиеся уравнения численными методами.

## Список литературы

- [1] Д. В. Сивухин (2005) *Общий курс физики. Том 1: Механика*
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange\\_point](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point)
- [3] [https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16\\_07f09\\_lec18/](https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/)
- [4] <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>