# Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

**Балдин Виктор Б01-303**

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий
Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

**Аннотация**

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

# 1 Введение

*Точки Лагранжа*, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Нахождение точек Лагранжа является частным случаем решения задачи трех тел для случая круговых орбит и малой массы одного из них. То есть, другими словами, два массивных тела равномерно вращаются вокруг общего центра масс. В этой ситуации существует 5 точек, в которых третье невесомое (обладающее пренебрежимо малой массой) тело может оставаться неподвижным в системе отсчета, связанной с массивными телами.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

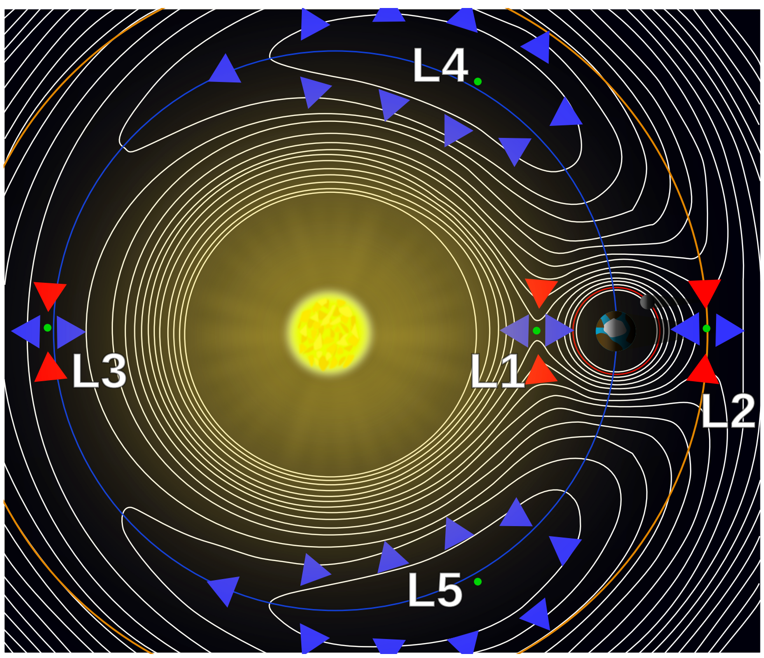


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел
*Источник:* `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png`

## 2 Задача 3-х тел

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r_1}} = -Gm_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} - Gm_3\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|} \\ \ddot{\vec{r_2}} = -Gm_2\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|} - Gm_3\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|} \\ \ddot{\vec{r_3}} = -Gm_2\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|} - Gm_3\frac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|} \end{cases} . \tag{1}$$

## 3 Вычисление точек Лагранжа

Все точки Лагранжа находятся в плоскости орбит массивных тел. Их можно разбить на 2 подвида:

1. *Коллинеарные* ($L_1$, $L_2$, $L_3$) – расположены на прямой, соединяющей 2 массивных тела.

2. *Треугольные* или *троянские* ($L_4$, $L_5$).

Введем следующие обозначения: $M_1$, $M_2$ – массы массивных тел, $m$ – масса малого тела, при этом $m \ll M_1, M_2$, $R$ – расстояние между телами.

Удобно найти расстояние до центра масс от каждого из тел. По определению центра масс

$$M_2(R - r_1) - M_1 r_1 = 0,$$

откуда

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} R$$

Введя обозначение

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2},$$

получим $r_1 = \alpha R$, $r_2 = (\alpha - 1)R$. Введем систему координат с началом координат в центре масс системы и осью, направленной от $M_1$ к $M_2$.

## 3.1 Коллинеарные точки Лагранжа

$L_1$ – точка, находящаяся между двумя массивными телами. Запишем для массы $m$ в этой точке второй закон Ньютона:

$$\frac{GM_1 m}{(L_1 - r_1)^2} - \frac{GM_2 m}{(L_1 - r_2)^2} = m\Omega^2 r \tag{2}$$

Найдем угловую скорость вращения тел из третьего закона Кеплера:

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \tag{3}$$

Это несложно получить, использую понятие *приведенной массы* $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. Тогда запишем второй закон Ньютона:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Отсюда следует, что движение можно моделировать так, что одно из тел неподвижно, при этом гравитационная постоянная равна $G' = G\left(1 + \frac{m}{M}\right)$, откуда и получается аналог третьего закона Кеплера в форме 3.

Комбинируя 2 и 3, несложно свести это к следующему уравнению:

$$\frac{M_1}{(L_1 - r_1)^2} - \frac{M_2}{(L_1 - r_2)^2} = r\frac{M_1 + M_2}{R^3} \tag{4}$$

Как нетрудно видеть, это сводится к уравнению 5-й степени относительно $r$, что делает невозможным его общее алгебраическое решение. Поэтому получить формулу мы можем лишь приближенно для значений $\alpha \ll 1$, то есть для случая, когда масса $m \ll M_2 \ll M_1$.

В этом случае решение уравнения 4 принимает вид

$$L_1 = R\left(1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right) \tag{5}$$

Хорошим примером системы, удовлетворяющей соотношению $\alpha \ll 1$, является система Земля – Солнце. В самом деле, $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-6}$, $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км. $L_1$ для этой системы лежит на расстоянии $R - L_1 \approx 1{,}5 \cdot 10^6$ км от Земли.

Очень схожим образом находится $L_2$ – точка Лагранжа, расположенная за менее массивным телом ($M_2$). Для нее при $\alpha \ll 1$ примерное решение

$$L_2 = R\left(1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right) \tag{6}$$

Как можно видеть, $L_1$ и $L_2$ в этом случае симметричны относительно наименее массивного тела $M_2$.

Несколько другой результат мы получим для точки $L_3$:

$$L_3 = -R\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right) \tag{7}$$

## Список литературы


[1] Д. В. Сивухин (2005) *Общий курс физики. Том 1: Механика*

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point

[3] https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/

[4] https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf