Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий
Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

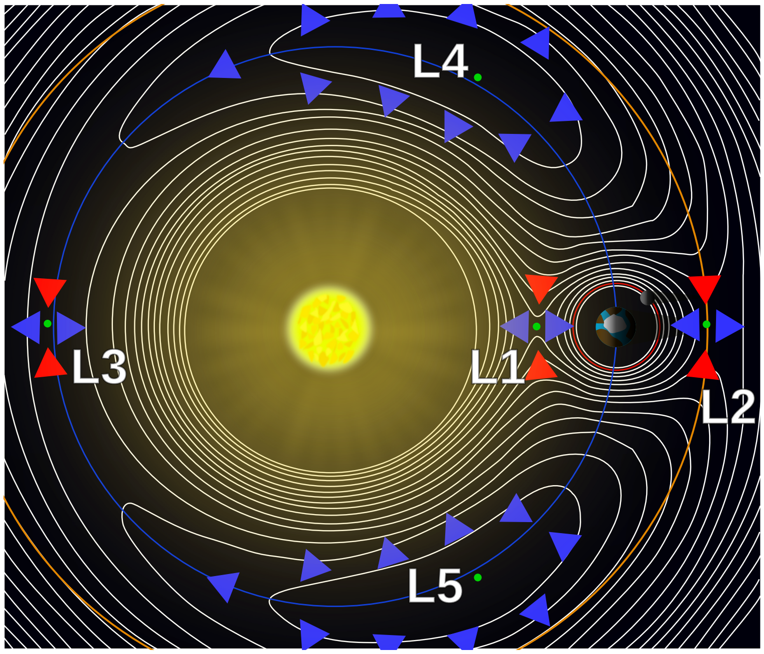

Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел
Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r_1}} = -Gm_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} - Gm_3\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|} \\ \ddot{\vec{r_2}} = -Gm_2\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|} - Gm_3\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|} \\ \ddot{\vec{r_3}} = -Gm_2\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|} - Gm_3\frac{\vec{r_3}-\vec{r_2}}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами M_1 и M_2 и третье тело массой m, $m \ll M_1$, $m \ll M_2$. В таком случае мы можем рассматривать движение M_1 и M_2 в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздейстсвий вращаются относительно центра масс системы. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и M_1 и M_2. Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы M_1 и M_2 через $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ соответственно.

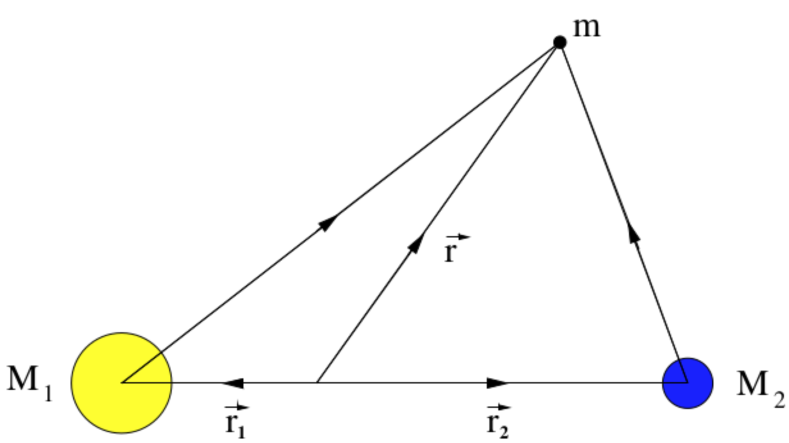

Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения тела m, исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r} - \vec{r_1}) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r} - \vec{r_2}) \tag{2}$$

Теперь из третьего закона Кеплера найдем угловую скорость вращения системы M_1 и M_2:

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \tag{3}$$

где R – расстояние между телами.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2},\ \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{4}$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис: $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$, $\vec{i} = \frac{\vec{r_2}}{|\vec{r_2}|}$, $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$. В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r_1} &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r_2} &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, свзянной с M_1 и M_2.

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \tag{5}$$

Так как мы ищем решения, для которых $\dot{\vec{r}} = 0$, это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив $\vec{a}$ из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида GM через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело m может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения (x, y) поставленной задачи можно найти из уравнения $\vec{a}_\Omega = 0$.

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равненство нулю компоненты по оси y ветвится на 2 случая. Для начала рассмотрим случай $y = 0$. Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену $x = R(u+\beta)$. В самом деле, так как из 4 $\alpha+\beta = 1$, получаем $x + \alpha R = (u + 1)R$, $x - \beta R = uR$.

Теперь подставим y в первое уравнение системы.

Список литературы

[1] Д. В. Сивухин (2005) *Общий курс физики. Том 1: Механика*

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point

[3] https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/

[4] https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf