

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных
технологий

Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

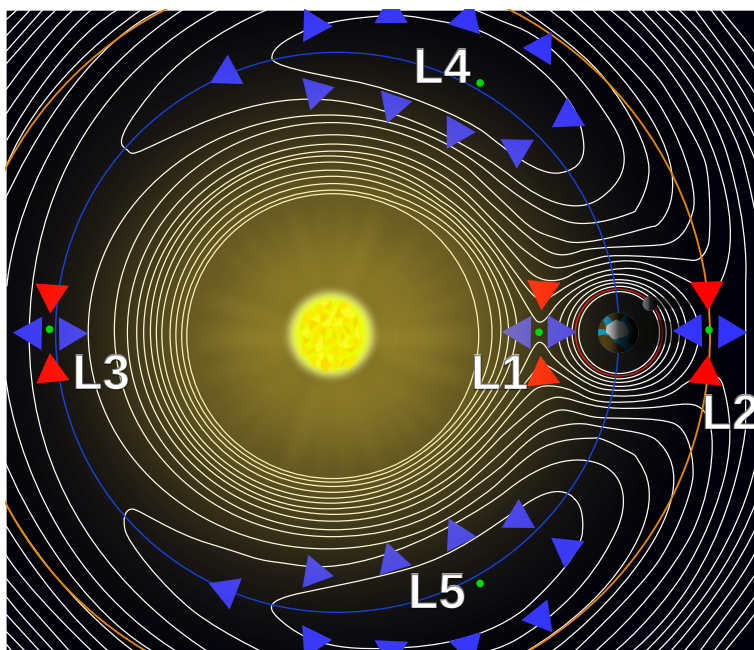


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Точки Лагранжа

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями [2]:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

Данная система имеет множество сложных решений, на которых мы не будем останавливаться. В нашу задачу входит частный случай задачи трех тел (англ. *restricted three-body problem*), в котором имеем 2 массивных тела массами M_1 и M_2 и третье тело массой m , $m \ll M_1$, $m \ll M_2$. В таком случае мы можем рассматривать движение M_1 и M_2 в рамках задачи двух тел, пренебрегая гравитационным воздействием третьего тела.

Как известно, два тела в отсутствии внешних гравитационных воздействий вращаются относительно центра масс системы. Мы будем рассматривать случай, когда они вращаются по окружности. Поэтому теперь мы можем поставить задачу конкретнее: найти все возможные положения третьего тела, при которых оно будет совершать вращение вокруг центра масс с той же угловой скоростью, что и M_1 и M_2 . Логично ввести систему координат с началом в центре масс системы. Обозначим радиус-векторы M_1 и M_2 через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 соответственно.

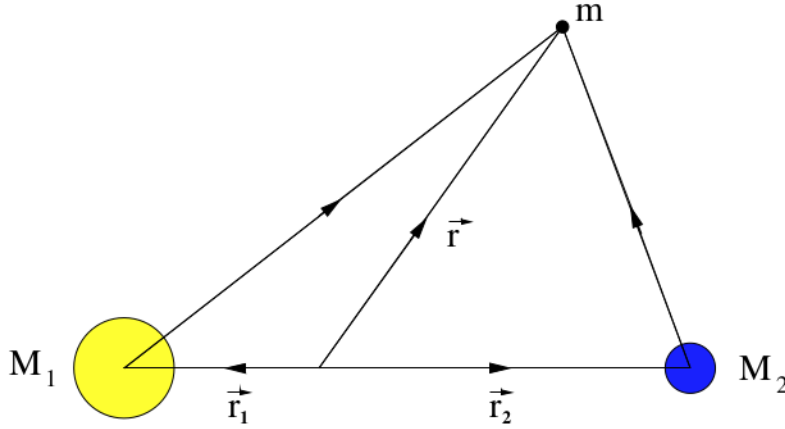


Рис. 2: Рассматриваемый частный случай задачи трех тел [1]

Понятно, что теперь мы можем написать уравнение для ускорения

тела m , исходя из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2)$$

Теперь из третьего закона Кеплера [4] найдем угловую скорость вращения системы M_1 и M_2 :

$$\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2), \quad (3)$$

где R – расстояние между телами. Здесь используется, что M_1 и M_2 вращаются по окружностям радиусов r_1 и r_2 соответственно.

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \beta = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

Для дальнейших рассуждений полезно ввести ортонормированный базис: $\vec{k} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$, $\vec{i} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$, $\vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$. В этом базисе:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{r}_1 &= -\alpha R\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= \beta R\vec{i} \end{aligned}$$

Теперь напишем ускорение тела в системе отсчета, связанной с M_1 и M_2 .

$$\vec{a}_\Omega = \vec{a} - 2[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] \quad (5)$$

Так как мы ищем решения, для которых $\dot{\vec{r}} = 0$, это позволяет нам избавиться от ускорения Кориолиса. Таким образом, подставив \vec{a} из 2 в формулу 5 и заменив комбинации вида GM через 3, получим:

$$\vec{a}_\Omega = \Omega^2 \begin{pmatrix} x - \frac{\beta(x+\alpha R)R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha(x-\beta R)R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \\ y - \frac{\beta y R^3}{((x+\alpha R)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha y R^3}{((x-\beta R)^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Так как точки Лагранжа являются точками, в которых тело m может пребывать в состоянии равновесия в данной вращающейся системе отсчета, все возможные решения (x, y) поставленной задачи можно найти из уравнения $\vec{a}_\Omega = 0$.

Получаем систему из двух уравнений. Несложно заметить, что равенство нулю компоненты по оси y ветвится на 2 случая.

2.1 L1, L2, L3

Для начала рассмотрим случай $y = 0$. Чтобы немного упростить уравнение, целесообразно сделать замену $x = R(u + \beta)$. В самом деле, так как из 4 $\alpha + \beta = 1$, получаем $x + \alpha R = (u + 1)R$, $x - \beta R = uR$.

Теперь подставим y в первое уравнение системы. Для краткости введем обозначения $s_0 = \text{sign}(u)$, $s_1 = \text{sign}(u + 1)$ (они получатся при раскрытии знаменателей). После преобразований получим следующее уравнение:

$$u^5 + (3 - \alpha)u^4 + (3 - 2\alpha)u^3 + ((1 - \alpha)(1 - s_1) - \alpha s_0)u^2 - 2\alpha s_0 u - \alpha s_0 = 0 \quad (7)$$

Заметим, что пара (s_0, s_1) может принимать одно из значений: $(-1, 1)$ (между M_1 и M_2), $(1, 1)$ (за M_2) и $(-1, -1)$ (за M_1). Так как уравнение 7 пятой степени, для него по теореме Абеля – Руффини [3] не существует общего аналитического решения через α .

Поэтому мы будем решать получившиеся уравнения численными методами. Для этого воспользуемся средствами библиотеки NumPy, предоставляющей программную имплементацию численного метода для решения полиномиальных уравнений произвольных порядков для языка Python3. При помощи данного несложного скрипта получим набор данных в виде таблицы, доступной по ссылке. До $\alpha = 0.01$ идем с шагом 10^{-4} , потом 10^{-3} .

Построим графики $x/R(\alpha)$ для L_1, L_2, L_3 (см. рисунок 3). Отметим, что картина абсолютно симметрична относительно прямой $\alpha = 0,5$.

Отдельный интерес так же представляют аппроксимации полученных зависимостей для $\alpha \ll 1$. Их можно получить по набору точек, близких к 0. Источники [2] и [1] предлагают следующие приближенные решения для $\alpha \ll 1$:

$$\begin{aligned}
&L_1 \left(R \left(1 - \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \\
&L_2 \left(R \left(1 + \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right), 0 \right), \\
&L_3 \left(-R \left(1 + \frac{5}{12} \alpha \right), 0 \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

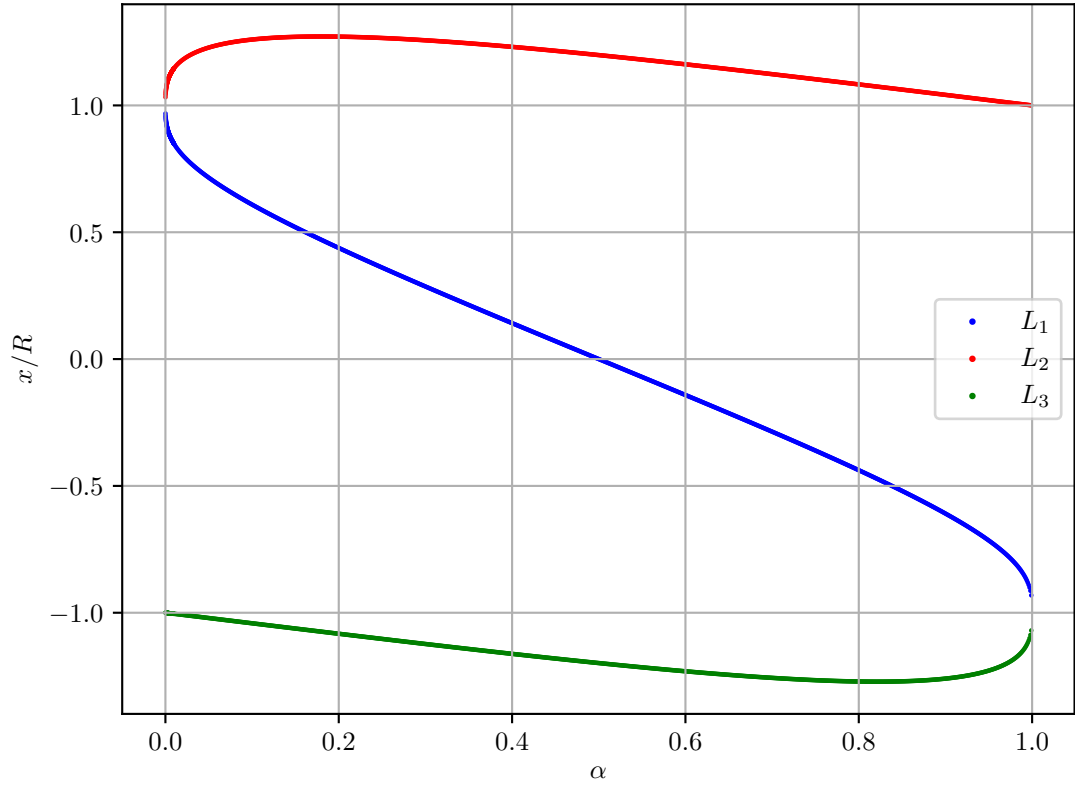


Рис. 3: Графики положения точек первых трех точек Лагранжа в зависимости от α

Построим графики с аппроксимациями (см. рисунок 4). Уже на этом

этапе видно, для малых α (а в случае L_3 – и для соизмеримых с 1) формулы 8 действительно дают неплохое приближение. Чтобы убедиться в этом, можно построить графики относительной ошибки $\varepsilon(\alpha)$ для каждой точки Лагранжа. Графики представлены на рисунке 5.

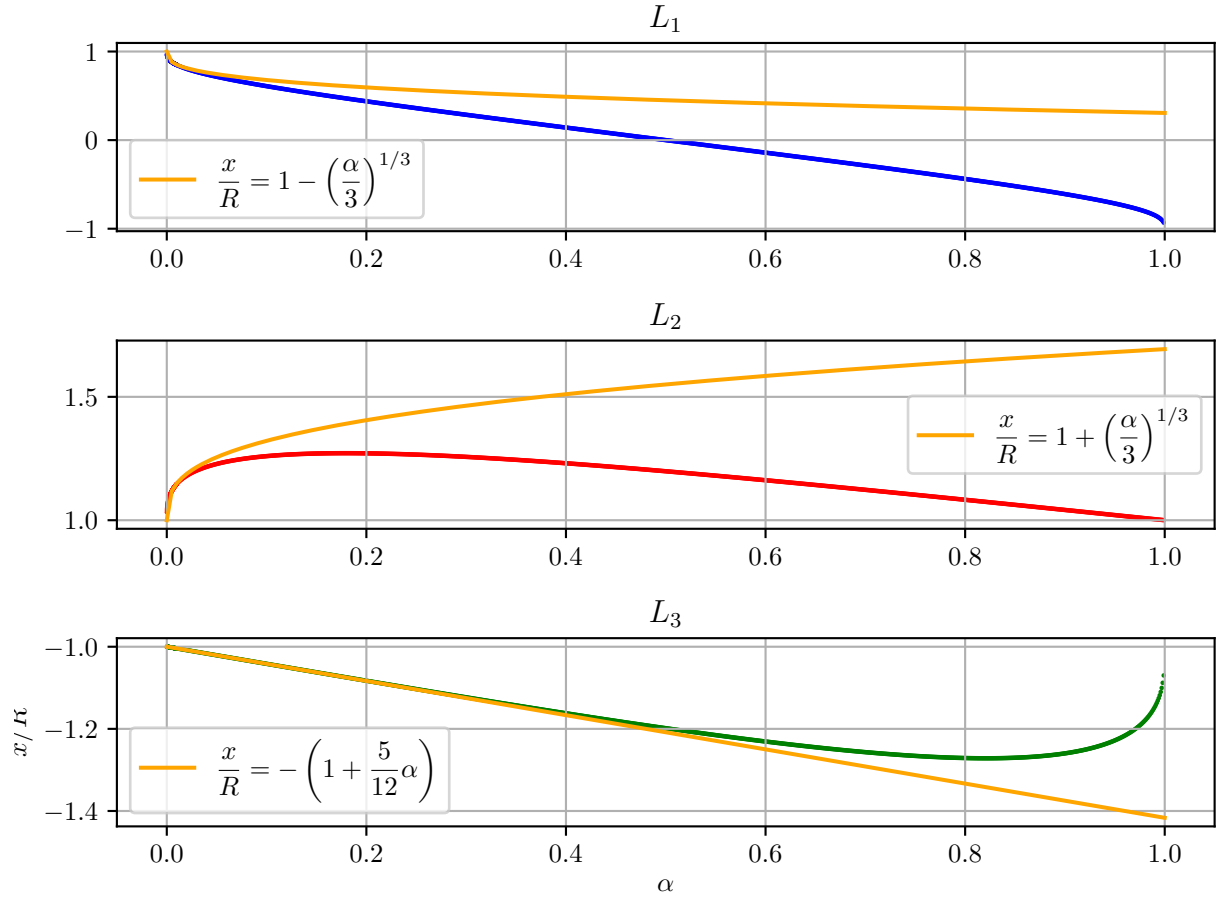


Рис. 4: Графики для L_1 , L_2 , L_3 с аппроксимациями 8

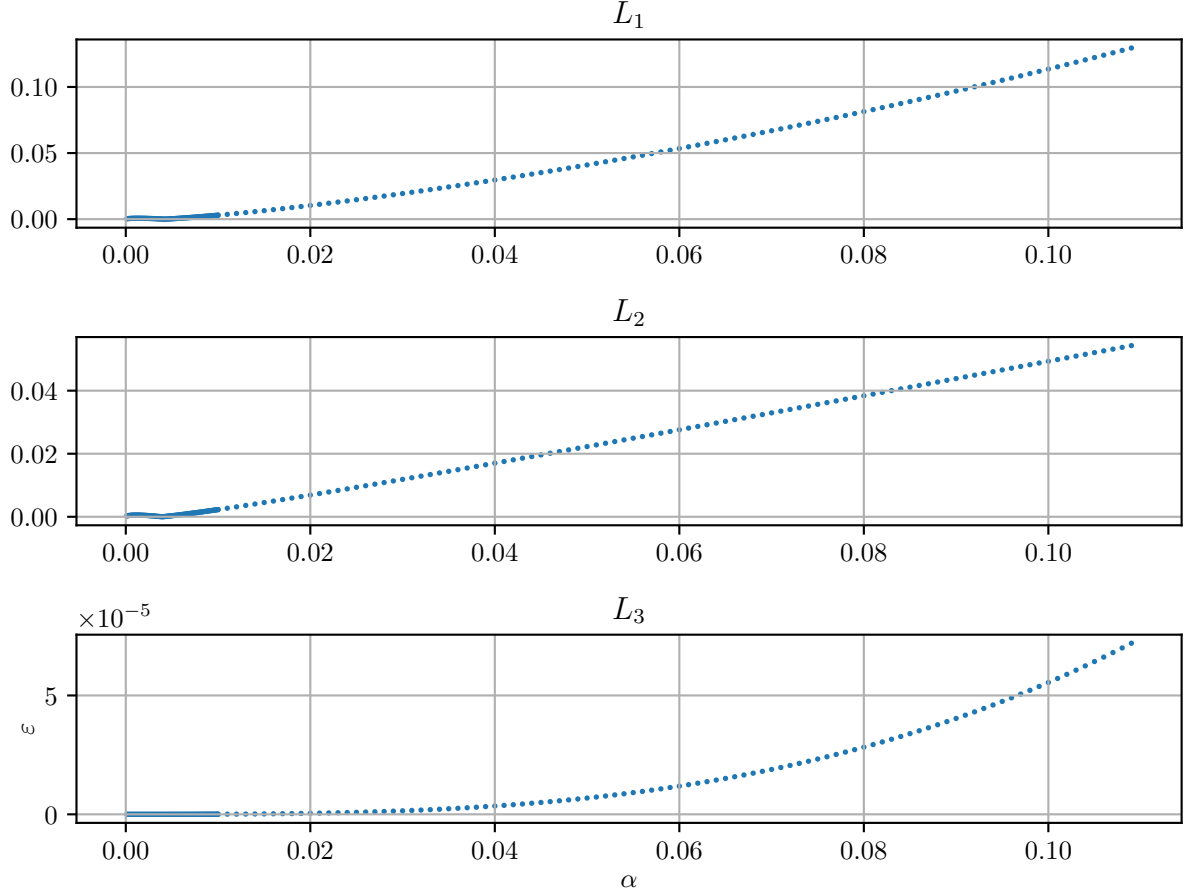


Рис. 5: Графики относительной ошибки аппроксимации 8 для L_1 , L_2 , L_3

По порядкам ошибок видно, что если для L_1 и L_2 аппроксимация по формулам 8 дает хорошую точность лишь для очень малых значений α , при $\alpha \sim 10^{-2}$ их уже можно применять лишь для совсем грубой оценки. Однако наличие корреляции отрицать все же нельзя.

С другой стороны, для L_3 аппроксимация неожиданно оказывается достаточно хороша, что, впрочем, неплохо видно на графике 4. Поэтому построим расширенный график для точности, взяв диапазон $(0, 0,2)$. Этот график показан рисунке 6.

Как видно из графика, ошибка для L_3 пренебрежимо мала на фоне ошибок вычисления L_1 и L_2 даже при $\alpha = 0,2$, тогда как аппроксимации для L_1 и L_2 уже становятся крайне сомнительными при этом значении.

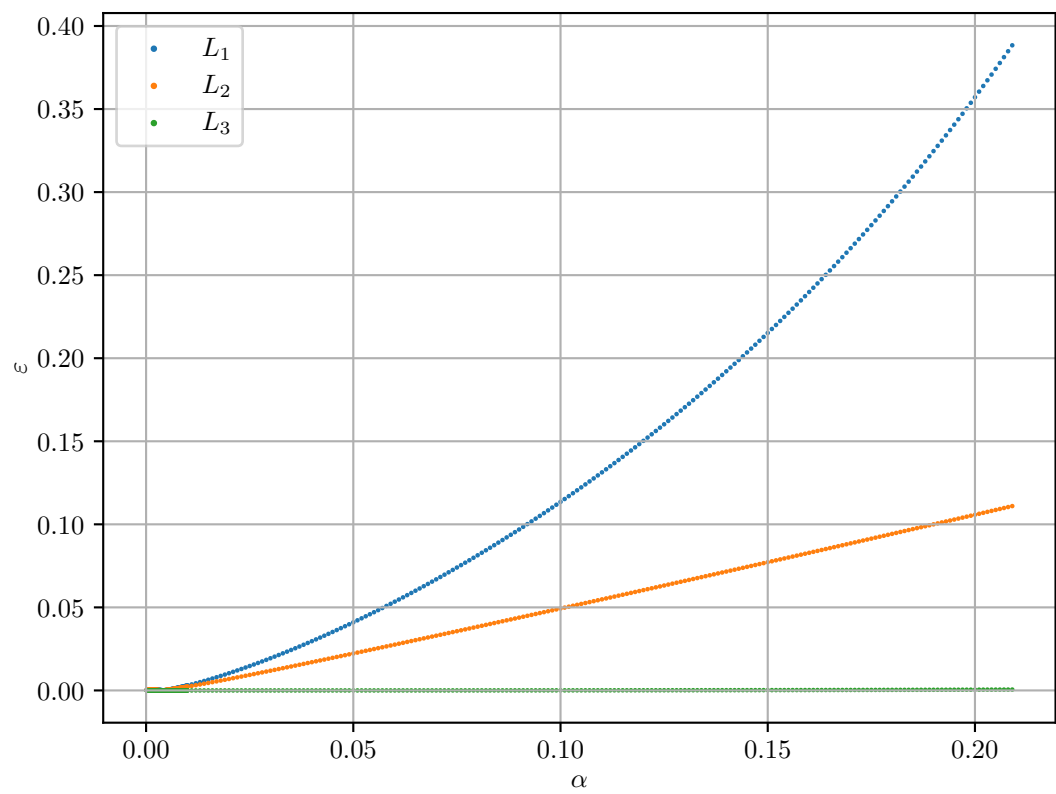


Рис. 6: Сравнение ошибок аппроксимации для L_1 , L_2 , L_3 на промежутке $(0, 0.2)$

Из всех вычислений можно сделать предварительный вывод, что проще всего расчету поддается L_3 . Однако в случае очень малого значения α (как, например, в системе Солнце – Земля) точность формул 8 можно считать досточной. Для системы Земля – Луна все уже несколько сложнее, $\alpha = 0,012$, так что мы теоретически получим ошибки $\varepsilon_1 = 4 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_3 = 10^{-7}$ для L_1 , L_2 , L_3 соответственно. При этом конечно нужно учитывать, что это лишь модель, и в реальности необходимо учесть еще и тяготение Солнца и, возможно, планет-гигантов. Так что здесь, вероятно, необходимы весьма существенные поправки, с этим связанные.

2.2 L4, L5

Вернемся теперь к уравнению 6 и вспомним про случай $y \neq 0$. Мы не будем решать уравнение напрямую. Вместо этого учтем, что результирующая сила, направленная к центру масс равна нулю, а так же равна нулю и перпендикулярная ей компонента, с надеждой на то, что это приведет к более простым уравнениям. Ортогональную компоненту вектора \vec{a}_Ω относительно вектора \vec{r} можно найти как:

$$a_\Omega^\perp = \frac{|[\vec{a}_\Omega, \vec{r}]|}{r} \quad (9)$$

Путем преобразований получаем следующее:

$$a_\Omega^\perp = \frac{\alpha\beta y\Omega^2 R^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{1}{((x - \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x + \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \quad (10)$$

Из условия $a_\Omega^\perp = 0$ получаем, что точка равновесия равноудалена от массивных тел. Это условие позволяет нам получить упрощенное выражение для проекции:

$$a_\Omega^\parallel = \frac{|(\vec{a}_\Omega, \vec{r})|}{r} = \Omega^2 R^3 \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{((x - \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \quad (11)$$

Из 10 и 11 получаем 2 точки, симметричные относительно оси x :

$$\begin{aligned} L_4 & \left(\frac{R}{2}(1 - 2\alpha), \frac{\sqrt{3}}{2}R \right), \\ L_5 & \left(\frac{R}{2}(1 - 2\alpha), -\frac{\sqrt{3}}{2}R \right) \end{aligned} \tag{12}$$

3 Анализ устойчивости равновесия

Список литературы

- [1] Neil J. Cornish. The lagrange points. <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>, 1998.
- [2] S. Widnall. Lecture 118 - exploring the neighborhood: the restricted three-body problem. https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/, 2008.
- [3] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в решениях и задачах*. МНЦМО, 2001.
- [4] Сивухин Д. В. *Общий курс физики*, volume 1. Физматлит, 2005.