

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Балдин Виктор Б01-303

Вопрос по выбору
Устный экзамен по общей физике



Физтех-школа радиотехники и компьютерных
технологий

Московский физико-технический институт
Долгопрудный, 2024

Аннотация

Данный вопрос по выбору включает в себя теоретические расчеты положения точек Лагранжа и обсуждение некоторых их интересных свойств. В работе используются материалы из различных открытых источников об истории исследований на эту тему и современном их состоянии.

Точки Лагранжа являются крайне важным объектом для изучения космического пространства в современной астрофизике. В частности, прямым образом их свойства используются для размещения космических аппаратов, предназначенных для наблюдений дальнего космоса.

Автор выражает надежду, что данная работа содержит актуальные сведения и благодарит экзаменационную комиссию за ее рассмотрение.

1 Введение

Точки Лагранжа, в некоторых источниках также *точки либрации* или *L-точки* – точки в системе двух тел, в которых третье тело может оставаться неподвижным относительно первых двух.

Нахождение точек Лагранжа является частным случаем решения задачи трех тел для случая круговых орбит и малой массы одного из них. То есть, другими словами, два массивных тела равномерно вращаются вокруг общего центра масс. В этой ситуации существует 5 точек, в которых третье невесомое (обладающее пренебрежимо малой массой) тело может оставаться неподвижным в системе отсчета, связанной с массивными телами.

Точки Лагранжа названы в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 году показал их существование.

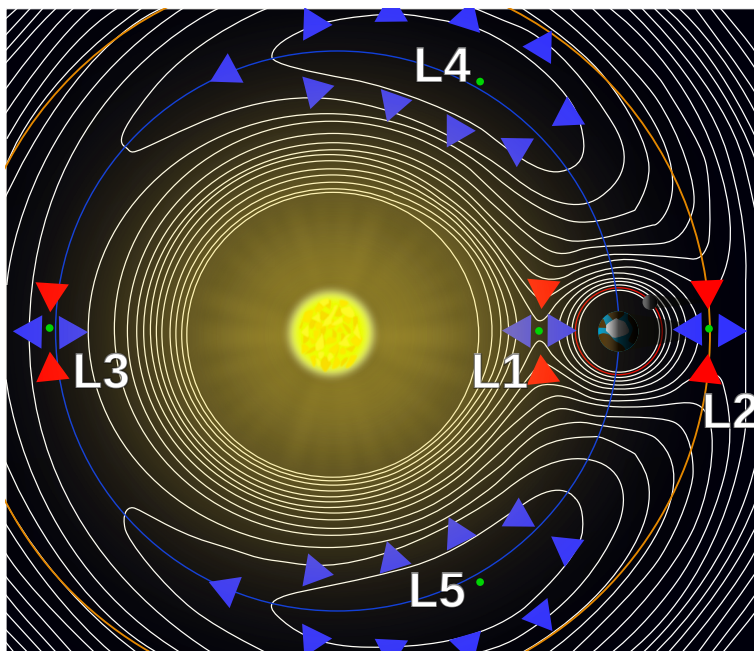


Рис. 1: 5 точек Лагранжа и гравитационные эквипотенциальные поверхности системы двух тел

Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ee/Lagrange_points2.svg/1920px-Lagrange_points2.svg.png

2 Задача 3-х тел

Для начала проведем краткое рассмотрение движения 3-х тел, связанных между собой гравитационными взаимодействиями. Это может быть описано в общем случае следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} . \quad (1)$$

3 Вычисление точек Лагранжа

Все точки Лагранжа находятся в плоскости орбит массивных тел. Их можно разбить на 2 подвида:

1. *Коллинеарные* (L_1, L_2, L_3) – расположены на прямой, соединяющей 2 массивных тела.
2. *Треугольные* или *тройные* (L_4, L_5).

Введем следующие обозначения: M_1, M_2 – массы массивных тел, m – масса малого тела, при этом $m \ll M_1, m \ll M_2$, R – расстояние между телами. Введем обозначение

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2},$$

получим $r_1 = \alpha R$, $r_2 = (\alpha - 1)R$. Введем систему координат с началом координат в центре масс системы и осью, направленной от M_1 к M_2 .

3.1 Коллинеарные точки Лагранжа

L_1 – точка, находящаяся между двумя массивными телами. Запишем для массы m в этой точке второй закон Ньютона:

$$\frac{GM_1 m}{(L_1 - r_1)^2} - \frac{GM_2 m}{(L_1 - r_2)^2} = m\Omega^2 r \quad (2)$$

Найдем угловую скорость вращения тел из третьего закона Кеплера:

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \quad (3)$$

Это несложно получить, используя понятие *приведенной массы* $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. Тогда запишем второй закон Ньютона:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Отсюда следует, что движение можно моделировать так, что одно из тел неподвижно, при этом гравитационная постоянная равна $G' = G \left(1 + \frac{m}{M}\right)$, откуда и получается аналог третьего закона Кеплера в форме 3.

Список литературы

- [1] Д. В. Сивухин (2005) *Общий курс физики. Том 1: Механика*
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point
- [3] https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/
- [4] <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/lagrange.pdf>