Llista de problemes 2

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2023

1. **Considerem la sèrie de Fourier d'una funció f en forma complexa $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt de funcions contínues a $[-\pi,\pi]$ amb sèries de Fourier absolutament convergent. Definim $\|f\|_{\mathcal{A}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(k)\right|$. Demostreu que:**

   (a) **La hipòtesi de convergència absoluta implica convergència uniforme de la sèrie de Fourier.**

   Vegem que satisfà la condició M-Weierstraß. Tenim que:

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right|<\infty$$

   Per tant, tenim convergència uniforme de la sèrie de Fourier.

   (b) **Si f és contínua (amb $f(-\pi)=f(\pi)$) i derivable a trossos amb $f'\in L^2$, llavors $f\in\mathcal{A}$. Doneu també una cota per a $\|f\|_{\mathcal{A}}$.**

   Recordant que $\widehat{f'}(n)=\mathrm{i}n\widehat{f}(n)$ i usant que $ab\leq\frac{1}{2}(a+b)^2$ tenim que:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right|&=\left|\widehat{f}(0)\right|+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{n}n\left|\widehat{f}(n)\right|\\&\leq\left|\widehat{f}(0)\right|+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{n^2}+n^2\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)\\&=\left|\widehat{f}(0)\right|+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f'}(n)\right|^2\\&=\left|\widehat{f}(0)\right|+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4\pi}{\|f'\|_2}^2\\&<\infty\end{aligned}$$

   on hem utilitzat Parseval i el fet que $f'\in L^2$. Una cota de $\|f\|_{\mathcal{A}}$ és:

$$\|f\|_{\mathcal{A}}\leq\left|\widehat{f}(0)\right|+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4\pi}{\|f'\|_2}^2=\left|\widehat{f}(0)\right|+\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{4\pi}{\|f'\|_2}^2$$

   (c) **Si $f,g\in\mathcal{A}$, llavors $fg\in\mathcal{A}$ i es compleix $\|fg\|_{\mathcal{A}}\leq\|f\|_{\mathcal{A}}\|g\|_{\mathcal{A}}$.**

   Com que tenim convergència absoluta, tenim convergència uniforme per l'apartat a). Cal veure però que aquesta convergència és cap a la funció. Com que g és contínua, tenim que $\lim\limits_{N\to\infty}\|S_Ng-g\|_1=0$. Per un resultat d'anàlisi funcional tenim que llavors existeix una parcial $(S_{N_k}g)$ que convergeix a g gairebé per tot quan $k\to\infty$. Per tant, podem escriure $g(t)\overset{\text{a.e.}}{=}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$ i llavors per convergència dominada tenim que podem intercanviar la suma amb la integral:

$$\widehat{fg}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(m)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)t}\,\mathrm{d}t=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(m)\widehat{f}(n-m)$$

Per tant, reordenant la següent sèrie (ja que és de termes positius) obtenim:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{fg}(n)\right| \leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}|\widehat{g}(m)|\left|\widehat{f}(n-m)\right| = \sum_{m\in\mathbb{Z}}|\widehat{g}(m)|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n-m)\right| = \|f\|_{\mathcal{A}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\widehat{g}(m)| = \|f\|_{\mathcal{A}}\|g\|_{\mathcal{A}}$$

2. **Sigui f la funció definida a $[-\pi,\pi]$ per $f(t)=|t|$. Comproveu que:**

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n=0\\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n\neq 0\end{cases}$$

Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Fourier proveu que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi} t\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n=0\\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Com que f té límits i derivades laterals en tots els punts de $[-\pi,\pi]$ podem escriure:

$$f(t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

Sigui $S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ i $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Fixem-nos que:

$$S_2=\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ senar}}}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ parell}}}\frac{1}{n^2}=S_1+\frac{1}{4}S_2 \implies S_1=\frac{3}{4}S_2 \tag{1}$$

Avaluant a $t=0$, com que f és contínua en aquest punt tenim que:

$$0=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}$$

Per tant:

$$-\frac{\pi^2}{4}=-S_2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-S_2-\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ senar}}}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ parell}}}\frac{1}{n^2}=-S_2-S_1+\frac{S_2}{4}=-\frac{3}{2}S_2$$

on en l'última igualtat hem usat (1). D'aquí deduïm que $S_2=\frac{\pi^2}{6}$ i per tant $S_1=\frac{3}{4}S_2=\frac{\pi^2}{8}$.

3. **Volem provar: *Si $f=0$ en $[a,b]\subseteq[-\pi,\pi]$, la seva sèrie de Fourier convergeix uniformement a zero en $[a+\delta,b-\delta]$ per $\delta>0$.***

Per tal de demostrar aquest resultat, proveu primer la següent adaptació del lema de Riemann-Lebesgue:

Si f és 2π-periòdica, integrable i acotada, i g és una funció monòtona a trossos i acotada, llavors:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

uniformement en x.

Recordem que una funció monòtona $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ és Lebesgue mesurable perquè $\forall r\in\mathbb{R}$ $\{f>r\}$ és un interval o el conjunt buit, que són ambdós mesurables. A més, si g és acotada, com que g està definida en un conjunt acotat, g és integrable Lebesgue. En el cas de ser monòtona a trossos, podem escriure g com:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g(x)\mathbf{1}_{[x_k,x_{k+1}]} =: \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$$

on cada $g_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{R}$ és monòtona i per tant, mesurable. Com que la suma de mesurables és mesurable, tenim que g és mesurable i integrable (perquè és acotada).

Suposem primer que $f(t) = \mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ i $g(t) = \mathbf{1}_{[c,d]}(t)$ amb $[a,b],[c,d]\subseteq[-\pi,\pi]$. Aleshores:

$$\begin{aligned} I := \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \int_{\max(-\pi,a-x,c)}^{\min(\pi,b-x,d)} \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\sin(\lambda\max(-\pi,a-x,c)) - \sin(\lambda\min(\pi,b-x,d))}{\lambda} \end{aligned}$$

Ara bé tenim que:

$$\frac{-2}{\lambda} \le I \le \frac{2}{\lambda}$$

que pel teorema del sandvitx se'n va a 0 quan $\lambda\to\infty$ independentment de x. Ara suposem que $g(t) = \sum_{k=1}^{N}\beta_k\mathbf{1}_{[c_k,d_k]}(t)$,on els $[c_k,d_k]\subseteq[-\pi,\pi]$ són dos a dos disjunts. Tenim que llavors:

$$I = \sum_{k=1}^{N}\beta_k \int_{\max(-\pi,a-x,c_k)}^{\min(\pi,b-x,d_k)} \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N}\beta_k \frac{\sin(\lambda\max(-\pi,a-x,c_k)) - \sin(\lambda\min(\pi,b-x,d_k))}{\lambda}$$

Ara bé tenim que:

$$\frac{-2N\min_{k\in\{1,\ldots,N\}}\beta_k}{\lambda} \le I \le \frac{2N\max_{k\in\{1,\ldots,N\}}\beta_k}{\lambda}$$

que pel teorema del sandvitx se'n va a 0 quan $\lambda\to\infty$ independentment de x. Finalment com que g és integrable, tenim que $\forall\varepsilon>0$ existeix una funció simple g_ε tal que $\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)-g_\varepsilon(t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon$. Però llavors, prenent $\varepsilon=\frac{1}{\lambda}$ tenim que:

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} (g(t)-g_\varepsilon(t))\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t + \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} |g(t)-g_\varepsilon(t)|\,\mathrm{d}t + \left| \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)-g_\varepsilon(t)|\,\mathrm{d}t + \left| \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le \frac{1}{\lambda} + \left| \int_{\max(-\pi,a-x)}^{\min(\pi,b-x)} g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

que se'n va a 0 uniformement en x quan $\lambda\to\infty$.

Ara suposem que f és una funció simple de la forma $f(x)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k\mathbf{1}_{[a_k,b_k]}$, on els $[a_k,b_k]\subseteq[-\pi,\pi]$ són dos a dos disjunts. Per la linealitat de la integral tenim que:

$$I=\sum_{k=1}^{M}\alpha\int\limits_{\max(-\pi,a_k-x)}^{\min(\pi,b_k-x)} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

Com que cada sumand ja em vist que se'n va a zero uniformement en x quan $\lambda\to\infty$, la suma (finita) també se n'hi va.

Ara, pel cas general, sabem que per a cada $x\in\mathbb{R}$ i $\forall\varepsilon>0$ podem trobar $f_{\varepsilon,x}$ esglaonada tal que

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f_{\varepsilon,x}(x+t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon$$

I llavors:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f_{\varepsilon,x}(x+t))g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{\varepsilon,x}(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

La primera integral està acotada per $\varepsilon\max_{t\in[-\pi,\pi]}|g(t)|$, que prenent $\varepsilon=\frac{1}{\lambda}$, tendeix a 0 quan $\lambda\to\infty$, a més independentment del punt x. L'altra integral ja hem vist que tendeix a 0 quan $\lambda\to\infty$. Per tant, la convergència és uniforme.

Demostrem ara el primer enunciat. Cal veure que

$$\sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}|S_Nf(x)|\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Recordem que podem escriure $S_Nf(x)$ com:

$$S_Nf(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_N(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{1}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)\,\mathrm{d}t$$

Fixem-nos que gairebé estem en les hipòtesis de poder aplicar el lema generalitzat de Riemann-Lebesgue, però d'entrada $\frac{1}{\sin(t/2)}$ no està acotat en un entorn del 0. Ara bé, notem que:

$$x+t\in[a,b]\iff a\leq x+t\leq b\iff a-(b-\delta)\leq t\leq b-(a+\delta)\iff -(b-a)+\delta\leq t\leq(b-a)-\delta$$

Per tant, quan $f(x+t)=0$, la t està en un interval que conté el 0 (per a $0<\delta<\frac{b-a}{2}$, que és fins on deixa de tenir sentit l'interval $[a+\delta,b-\delta]$) i per tant, considerant la funció acotada

$$g(t)=\frac{1}{\sin(t/2)}(1-\mathbf{1}_{[-(b-a)+\delta,(b-a)-\delta]}(t))+C\mathbf{1}_{[-(b-a)+\delta,(b-a)-\delta]}(t)$$

tenim que

$$S_Nf(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{1}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin((N+1/2)t)\,\mathrm{d}t$$

per a qualsevol $C\in\mathbb{R}^*$ i podem aplicar el lema anterior per demostrar la convergència uniforme.

4. **Comproveu que per $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, la sèrie de Fourier de $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-x)\alpha}$ a $[0,2\pi]$ ve donada per $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n+\alpha}$. Utilitzeu la identitat de Parseval per demsotrar que:**

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\alpha)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(n+\alpha)}-1}{-\mathrm{i}(n+\alpha)} \\
&= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}(n+\alpha)} \\
&= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}\frac{\sin(\pi\alpha)}{n+\alpha} \\
&= \frac{1}{n+\alpha}
\end{aligned}$$

Utilitzant identitat de Parseval tenim que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi}{\|f\|_2}^2$$

Ara bé:

$$\frac{1}{2\pi}{\|f\|_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$