1. Siguin

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinó,} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinó.} \end{cases}$$

   Proveu que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \qquad \text{i} \qquad \hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2,$$

   entenent que $\hat{f}(0) = 2$ i $\hat{g}(0) = 1$.

2. (a) Apliqueu la fórmula de sumació de Poisson a la funció g de l'exercici 1 per provar

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

   sempre que $\alpha \in \mathbb{R}$ però no entera.

   (b) Deduïu com a conseqüència que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)}$$

   sempre que $\alpha \in \mathbb{R}$ però no entera.

3. Suposeu que f és contínua a $\mathbb{R}$. Proveu que f i $\hat{f}$ no poden tenir les dues suport compacte a no ser que $f = 0$. Això es pot interpretar amb el mateix esperit que el principi d'incertesa.

4. Sigui ψ tal que $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$. Demostreu el principi d'incertesa de Heisenberg en dimensió d, i.e. proveu que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}.$$

5. (a) Donada $f[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)$, $n = 0, 1, 2, 3$, calculeu la seva Transformada Discreta de Fourier (DFT).

   (b) Sigui $f[n] = [1, 2, 0, 3, -2, 4, 7, 5]$ (manera ràpida d'escriure $f[0] = 1$. $f[1] = 2, \cdots, f[7] = 5$). Calculeu $\hat{f}[0]$, $\hat{f}[4]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} \hat{f}[k]$ i $\displaystyle\sum_{k=0} |\hat{f}[k]|^2$.