Llista de problemes 5 (Seminari)

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Abril de 2023

Exercici 1. *Calculeu la segona derivada distribucional de les funcions* $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ *i*

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Resolució. Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tenim que:

$$\langle T_f'', \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}[\varphi''(x) + \varphi''(-x)]\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}[\varphi'(x) - \varphi'(-x)]\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}[\varphi'(x) - \varphi'(-x)]\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}[\varphi(x) + \varphi(-x)]\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}[\varphi(x) + \varphi(-x)]\,\mathrm{d}x = -2\varphi(0) + \langle T_f, \varphi \rangle$$

Per tant, $T_f'' = T_f - 2\delta_0$. D'altra banda:

$$\langle T_g'', \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} (1 - x)[\varphi''(x) + \varphi''(-x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= (1 - x)[\varphi'(x) - \varphi'(-x)]\Big|_0^{1} + \int_0^{1} [\varphi'(x) - \varphi'(-x)]\,\mathrm{d}x = -2\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(-1)$$

Per tant, $T_g'' = -2\delta_0 + \delta_1 + \delta_{-1}$.

Exercici 2. *Resoleu l'equació diferencial distribucional* $(xT)' = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$.

Resolució. Observem que $\mathbf{1}_{(0,\infty)}$ és una solució particular de l'equació diferencial. Per tant, per la linealitat de la derivada tenim que $(xT - x\mathbf{1}_{(0,\infty)})' = 0$. Per l'exercici 3 de la llista anterior tenim que $xT - x\mathbf{1}_{(0,\infty)} = C_1$. És a dir, (usant que $x\text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$) tenim que:

$$x\left(T - \mathbf{1}_{(0,\infty)} - C_1\text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Ara justifiquem que si $xS = 0$, amb $S \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$, aleshores $S = C\delta_0$. Sigui $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\phi(0) = 0$. Aleshores $\varphi := \frac{\phi}{x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i tenim que:

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = \langle xT, \varphi \rangle = 0$$

Ara sigui $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qualsevol i $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\omega(0) = 1$. Aleshores $\phi := \psi - \psi(0)\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i satisfà $\phi(0) = 0$. Per tant, per la linealitat de T i usant el demostrat prèviament, tenim que:

$$T(\psi) = \langle T, \psi \rangle = \psi(0)\langle T, \omega \rangle =: \psi(0)C = C\delta_0(\psi)$$

És a dir, $T = C\delta_0$. Per tant, en el nostre cas:

$$T = \mathbf{1}_{(0,\infty)} + C_1\text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right) + C_2\delta_0$$

Exercici 3. *Proveu que tota distribució té una primitiva. És a dir, donada $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists S \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $T = S'$.*

Resolució. Sigui $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Aleshores ja vam veure a la llista passada que $\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\phi = \psi'$. Per tant, triem S tal que:

$$\langle S, \phi\rangle = \langle S, \psi'\rangle = -\langle S', \psi\rangle = -\langle T, \psi\rangle$$

Observem que amb aquesta definició de S tenim que:

$$\langle S', \phi\rangle = -\langle S, \phi'\rangle = -(-\langle T, \psi'\rangle) = \langle T, \phi\rangle$$

Ara sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qualsevol i sigui $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Aleshores tenim que $\phi := \varphi - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i integra 0. Per tant, pel vist anteriorment, si $\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{t} \omega(x)\,\mathrm{d}x$, aleshores definim S com:

$$\langle S, \varphi\rangle := -\left\langle T, \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\cdot} \omega(x)\,\mathrm{d}x \right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\langle T, \omega\rangle$$

Observem que tenim:

$$\langle S', \varphi\rangle = -\langle S, \varphi'\rangle = \left\langle T, \varphi - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\omega \right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\langle T, \omega\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Exercici 4.

a. Sigui $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ amb a un salt d'alçada s (i.e. $f(a^+) - f(a^-) = s$). Proveu que $T_f' = T_{f'\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}} + s\delta_a$.

b. De manera similar, si $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{(a_n)\})$ amb (a_n) una successió tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ i a_n són salts d'alçada s_n, llavors:

$$T_f' = T_{f'\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{(a_n)\}}} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \delta_{a_n}$$

Resolució.

a. Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tenim que:

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -f(a^-)\varphi(a) + f(a^+)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = s\varphi(a) + T_{f'\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}}(\varphi)$$

Per tant, $T_f' = T_{f'\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}} + s\delta_a$.

b. Com que la successió (a_n) és tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, entre dos punts $x < y$ reals no podem tenir infinits punts de la successió. Per tant, podem considerar la partició en intervals (I_k), donats per $I_k = (a_{n_k}, a_{n_{k+1}})$ que ens dona la successió entre dos termes (no necessàriament consecutius) de la successió. Aleshores, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tenim que:

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(f(a_{n_k}^+)\varphi(a_{n_k}) - f(a_{n_{k+1}}^-)\varphi(a_{n_{k+1}}) \Big) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n\varphi(a_n) + T_{f'\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{(a_n)\}}}(\varphi)$$

on hem pogut reordenar perquè la suma és finita, ja que φ té suport compacte. Per tant:

$$T_f' = T_{f'\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{(a_n)\}}} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \delta_{a_n}$$