Llista de problemes 4

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Abril de 2023

Exercici 1. *Són distribucions T_1, T_2 i T_3 definides com $T_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{1/k}}{k^2}$, $T_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{1/k}}{k}$ i T_3 tal que $\langle T_3, \varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^n \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?*

Resolució. Sigui $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tenim que

$$T_1(\varphi+\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{1/k}(\varphi+\psi)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(1/k)+\psi(1/k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(1/k)}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(1/k)}{k^2} = T_1(\varphi) + T_1(\psi)$$

on hem pogut reordenar perquè la sèrie absolutament convergent pel criteri M-Weierstraß ja que $|\varphi(1/k)+\psi(1/k)| \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty = C \in \mathbb{R}$. Per tant, T_1 és lineal. A més:

$$|T_1(\varphi)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi(1/k)|}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}\|\varphi\|_\infty$$

Per tant, T_1 és continu, per una proposició vista a classe.
Ara veurem que tant T_2 com T_3 no són distribucions. Sigui

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Sabem que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. A més, $\varphi(0) = \mathrm{e}^{-1}$ i $\varphi(1/k) \geq \varphi(1/2) = \mathrm{e}^{-4/3}$ per $k \geq 2$. Per tant:

$$T_2(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{1/k}(\varphi)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(1/k)}{k} \geq \mathrm{e}^{-4/3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$T_3(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^n \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi(n) - \varphi(0)] = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-1} = -\infty$$

Per tant, hem trobat un element de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que aplicat a T_2 i T_3 dona un resultat infinit (que no pertany a $\mathbb{C}$). Per tant, no poden ser distribucions.

Exercici 2. *Considereu la distribució $T = \log|x|$. Demostreu que $T' = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$. Calculeu T''.*

Resolució. Recordem primer que $\log|x|$ és localment integrable i que per tant té sentit considerar la seva distribució. Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tenim que:

$$\begin{aligned} \langle T', \varphi\rangle &= -\langle T, \varphi'\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} \log(x)(\varphi'(x) + \varphi'(-x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} \log(x)(\varphi(x) - \varphi(-x))'\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= -\log(x)(\varphi(x)-\varphi(-x))\Big|_0^\infty + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left\langle \text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

on en la penúltima igualtat hem usat que φ té suport compacte i que $\log(x)(\varphi(x)-\varphi(-x)) \sim Cx\log(x) \to 0$ per $x \sim 0$. Calculem ara $T'' = \left(\text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$:

$$\left\langle \left(\text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)\right)', \varphi \right\rangle = -\left\langle \text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi' \right\rangle$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^\infty \frac{[\varphi(x)+\varphi(-x)]'}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \left(\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} + \frac{2\varphi(0)}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

on en l'última igualtat hem fet servir que $\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0) \sim C\varepsilon^2$ per $\varepsilon \sim 0$ (surt fent Taylor). Per tant, la integral està ben definida al 0 (i també a l'infinit ja que podem acotar l'integrant per $\frac{4\|\varphi\|_\infty}{x^2}$). A més com que és lineal (per la linealitat de la integral), tenim que T'' és una distribució que ve donada per:

$$\varphi \longmapsto -\int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercici 3. *Sigui $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ tal que $T' = 0$. Demostreu que existeix una constant C tal que $\langle T, \varphi\rangle = C\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Resolució. Sigui $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Tenim que si

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

aleshores ψ té suport compacte, perquè φ té suport compacte i integra 0, i a més ψ és diferenciable i $\psi'(x) = \varphi(x)$ pel teorema fonamental del càlcul, i de fet és $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Per tant, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Llavors:

$$T(\varphi) = T(\psi') = -T'(\psi) = 0$$

ja que $T' = 0$ per hipòtesi. Per tant, $T(\varphi) = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ara prenem $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t = 1$ i sigui $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ arbitrària. Tenim que

$$\varphi := \omega - \phi\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

és una funció de $\mathcal{D}(\Omega)$ que integra 0. Per tant, pel que hem vist anteriorment i la linealitat de T obtenim:

$$0 = T(\varphi) = T\left(\omega - \phi \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\,\mathrm{d}t\right) = T(\omega) - T(\phi)\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

Per tant, la constant C és $C := T(\phi)$.

Exercici 4.

a. Calculeu la derivada distribucional de la funció $f(x) = [x]$.

b. Calculeu la derivada distribucional de la funció

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Resolució.

a. Assumim que $[x] = \lfloor x \rfloor$. Tenim que per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \lfloor x \rfloor', \varphi \rangle = -\langle \lfloor x \rfloor, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lfloor x \rfloor \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n \int_{n}^{n+1} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$$

Si suposem que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-N, N]$, tenim que:

$$\begin{aligned}
\langle \lfloor x \rfloor', \varphi \rangle &= -\sum_{n=-N-1}^{N} n[\varphi(n+1) - \varphi(n)] \\
&= -\left[-(-N-1)\varphi(-N-1) + \sum_{n=-N}^{N} [(n-1)\varphi(n) - n\varphi(n)] + N\varphi(N+1)\right] \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \varphi(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n(\varphi)
\end{aligned}$$

Per tant, $\lfloor x \rfloor' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$, que és una distribució perquè la suma és sempre finita.

b. Tenim que per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle g', \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle &= -\int_0^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left.\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\right|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}} + \frac{\varphi(0)}{x^{3/2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Per tant, com que la integral està ben definida en un entorn del 0 (ja que és de la forma $\frac{1}{\sqrt{x}}$) i com que també podem acotar l'integrant per $\frac{2\|\varphi\|_\infty}{x^{3/2}}$, tenim que també està ben definida a l'infinit i per tant és distribució (ja que també és lineal, per la linealitat del la integral). Així doncs, g' és la distribució donada per:

$$\varphi \longmapsto -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$