

## Llista de problemes 3

Víctor Ballester Ribó  
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica  
Grau en Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
Març de 2023

### Exercici 1. *Siguin*

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \quad i \quad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

*Proveu que*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \quad i \quad \widehat{g}(\xi) = \left( \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \right)^2$$

*entenent que*  $\widehat{f}(0) = 2$  *i*  $\widehat{g}(0) = 1$ .

*Resolució.* Tenim que si  $\xi = 0$ , aleshores  $\widehat{f}(0)$  i  $\widehat{g}(0)$  són respectivament les àrees del quadrat  $2 \times 1$  i del triangle amb base 2 i altura 1. Per tant,  $\widehat{f}(0) = 2$  i  $\widehat{g}(0) = 1$ . Pels altres casos, calculem  $\widehat{f}(\xi)$  i  $\widehat{h}(\xi)$ , on  $h(x) = f(x) - g(x) = |x|\chi_{[-1,1]}(x)$ .

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx & \widehat{h}(\xi) &= \int_{-1}^0 (-x)e^{-2\pi i\xi x} dx + \int_0^1 xe^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi i\xi x} dx & &= \int_0^1 xe^{2\pi i\xi x} dx + \int_0^1 xe^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \frac{e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i\xi} & &= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi\xi x) dx \\ &= \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} & &= \frac{2\pi\xi \sin(2\pi\xi) + \cos(2\pi\xi) - 1}{2\pi^2\xi^2} \end{aligned}$$

Per tant:

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{h}(\xi) = -\frac{\cos(2\pi\xi) - 1}{2\pi^2\xi^2} = \frac{(\sin(\pi\xi))^2}{\pi^2\xi^2}$$

on hem utilitzat la identitat trigonomètrica  $2(\sin(x))^2 = 1 - \cos(2x)$ .

### Exercici 2.

a. *Apliqueu la fórmula de sumació de Poisson a la funció  $g$  de l'exercici 1 per provar*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

*si*  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

b. *Deduïu com a conseqüència que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n + \alpha} = \frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)}$$

*si*  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

*Resolució.*

- a. Notem primer de tot que ens podem restringir a  $\alpha \in (0, 1)$  (perquè tenim convergència absoluta de la sèrie i podem reordenar). Observem que  $g$  és parella, per tant  $\widehat{g} = g$ . Aplicarem la fórmula de Poisson (general) a  $\widehat{g}$ . Fixem-nos que  $\widehat{g}$  és contínua i integrable. A més  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + n)$  convergeix uniformement per  $\xi \in [0, 1]$  per M-Weierstraß, ja que  $|\widehat{g}(\xi + n)| \leq \frac{1}{\pi^2(\xi + n)^2} \leq \frac{1}{2\pi^2 n^2}$  (per  $n$  prou gran), que ens dona una sèrie convergent. Finalment  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(n)| = g(0) = 1 < \infty$ . Per tant, la fórmula de sumació de Poisson ens diu que

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(\sin(\pi(n + \alpha)))^2}{\pi^2(n + \alpha)^2} = \frac{(\sin(\pi\alpha))^2}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + \alpha)^2}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ . D'aquí ja es desprèn el resultat.

- b. Aquí també podem suposar  $\alpha \in (0, 1)$  ja que fent una translació l'argument serveix igual. Com hem dit anteriorment la sèrie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{(n + \alpha)^2} \right|$  convergeix uniformement per  $\alpha \in [0, 1]$  per M-Weierstraß.

Definim  $f_n(\alpha) = \frac{1}{(n + \alpha)^2}$ . Tenim que  $f_n$  és integrable Riemann en  $[0, 1] \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$ . Vegem que també tenim integrabilitat de la funció  $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$  en  $[0, 1]$ .

Els problemes només els tenim en 0 i 1. A prop del 0, hem de controlar  $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2}$ . Tenim que:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} &= \frac{\pi^2}{(\pi\alpha - \frac{(\pi\alpha)^3}{6} + \dots)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \simeq \frac{\pi^2}{\pi^2\alpha^2 - \frac{\pi^4\alpha^4}{3} + \dots} - \frac{1}{\alpha^2} \simeq \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{\pi^2\alpha^2}{3} + \dots} - 1 \right) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\alpha^2} \left( \left[ 1 - \frac{\pi^2\alpha^2}{3} + \dots \right] - 1 \right) \simeq \frac{\pi^2}{3} + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Similarment a prop de 1, hem de controlar  $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$ . Fixem-nos que tenim certa simetria i ens podem estalviar càlculs. Canviant  $\alpha$  per  $\alpha - 1$  en la fórmula anterior, tenim que:

$$\frac{\pi^2}{3} + \dots \simeq \frac{\pi^2}{(\sin(\pi(\alpha - 1)))^2} - \frac{1}{(\alpha - 1)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ . Per tant tenim integrabilitat i llavors usant que  $\int \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} d\alpha = -\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + C$  deduïm que:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \right) d\alpha &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}} \int \frac{1}{(n + \alpha)^2} d\alpha \\ &= -\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1} + C = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}} \frac{1}{n + \alpha} \end{aligned}$$

Si ara fem el límit  $\alpha \rightarrow 0$  tindrem d'una banda que

$$-\frac{1}{\alpha - 1} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}} \frac{1}{n + \alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n + \alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$$

i d'altra banda que (per (1)):

$$-\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + \frac{1}{\alpha} = \int \left( \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) d\alpha \simeq \frac{\pi^2}{3} \alpha + \dots \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$$

Per tant  $C = 0$  i ja hem acabat.

**Exercici 3.** Supposeu que  $f$  és contínua a  $\mathbb{R}$ . Proveu que  $f$  i  $\widehat{f}$  no poden tenir les dues suport compacte a no ser que  $f = 0$ . Això es pot interpretar amb el mateix esperit que el principi d'incertesa.

**Resolució.** Supposem que  $f$  i  $\widehat{f}$  tenen suports compactes  $K_1 \subseteq [-(N - 1), N - 1] \subseteq [-N, N]$  i  $K_2 \subseteq [-M, M]$  respectivament per certs  $N, M \in \mathbb{N}$ . Aleshores fem la periodització de  $f$  amb període  $2N$  (que també l'anomenem  $f$ ). Llavors la seva sèrie de mitjanes de Fejér és:

$$\begin{aligned} \sigma_R f(x) &= \sum_{n=-R}^R \left( 1 - \frac{|n|}{R + 1} \right) \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} = \sum_{n=-M}^M \left( 1 - \frac{|n|}{R + 1} \right) \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} = \\ &= \sum_{n=-M}^M \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} - \frac{1}{R + 1} \sum_{n=-M}^M |n| \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{2N}} \end{aligned}$$

Ara bé, per la continuïtat de  $f$  i el teorema de Fejér, tenim que

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R f(x) = \sum_{n=-M}^M \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{2N}}$$

per a tot  $x \in \mathbb{R}$ . Observem que com que  $e^{\frac{2\pi i n x}{2N}}$  és analítica, i combinacions lineals (finites) de funcions analítiques són analítiques, tenim que  $f$  també ho és. Però  $f(x) = 0$  per  $x \in (N-1, N)$ . Per tant, pel principi de prolongació analítica, tenim que  $f = 0$ .

A posteriori m'he adonat que es pot fer més fàcil recordant que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  i té suport compacte (que és el cas), llavors  $\hat{f} \in C^\omega(\mathbb{R})$  i, pel mateix argument que hem fet, deduïm que  $f = 0$ .

**Exercici 4.** Sigui  $\psi$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 1$ . Demostreu el principi d'incertesa de Heisenberg en dimensions  $d$ :

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}$$

*Resolució.* Ometrem l'avaluació de les funcions a  $\mathbf{x}$  i a  $\boldsymbol{\xi}$  per tal de simplificar la lectura.

Estudiem primer la integral  $\int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 |\hat{\psi}|^2 d\boldsymbol{\xi}$ . Fixem-nos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 |\hat{\psi}|^2 d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \xi_j^2 |\hat{\psi}|^2 d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d 4\pi^2 \xi_j^2 |\hat{\psi}|^2 d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} \right|^2 d\boldsymbol{\xi} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} \right|^2 d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla \psi\|^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

on hem utilitzat el teorema de Plancherel en dimensió  $d$ . D'altra banda:

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^2 |\psi|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 |\hat{\psi}|^2 d\boldsymbol{\xi} \right) &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^2 |\psi|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla \psi\|^2 d\boldsymbol{\xi} \right) \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\| |\psi| \|\nabla \psi\| d\mathbf{x} \right)^2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz per integrals}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\| |\psi| \|\nabla \bar{\psi}\| d\mathbf{x} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\psi| |\langle \mathbf{x}, \nabla \bar{\psi} \rangle| d\mathbf{x} \right)^2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz per vectors}) \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re}(\psi \langle \mathbf{x}, \nabla \bar{\psi} \rangle) d\mathbf{x} \right)^2 \quad |z| \geq \operatorname{Re}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d x_j 2 \operatorname{Re} \left( \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial (|\psi|^2)}{\partial x_j} d\mathbf{x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left( d \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 d\mathbf{x} \right)^2 \\ &= \frac{d^2}{16\pi^2} \end{aligned}$$

on en l'antepenúltima igualtat hem usat que si  $\psi = A + iB$  aleshores  $\frac{\partial(A^2+B^2)}{\partial x_j} = 2AA_{x_j} + 2BB_{x_j} = 2\operatorname{Re}\left(\psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_j}\right)$  i en la penúltima igualtat hem usat el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial(|\psi|^2)}{\partial x_j} d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \int_{\mathbb{R}} x_j \frac{\partial(|\psi|^2)}{\partial x_j} dx_j = \\ &= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx_j = d \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

on hem utilitzat integració per parts i hem assumit que  $x_j |\psi|^2 \in L^1(\mathbb{R}) \forall j$  (com en el cas d'una variable). Anteriorment també hem assumit que  $\psi$  era diferenciable.

### Exercici 5.

- Donada  $f[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ , calculeu la seva DFT.
- Segui  $f[n] = (1, 2, 0, 3, -2, 4, 7, 5)$ . Calculeu  $\hat{f}[0]$ ,  $\hat{f}[4]$ ,  $\sum_{k=0}^7 \hat{f}[k]$ ,  $\sum_{k=0}^7 |\hat{f}[k]|^2$ .

*Resolució.*

- Tenim que:

$$\hat{f}[n] = \sum_{k=0}^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) e^{-\frac{2\pi i k n}{4}} = 1 - e^{-\pi i n} = 1 - (-1)^n$$

- Tenim que:

$$\begin{aligned} \hat{f}[0] &= \sum_{k=0}^7 f[k] = 20 \\ \hat{f}[4] &= \sum_{k=0}^7 f[k] e^{-\pi i k} = \sum_{k=0}^7 f[k] (-1)^k = -8 \end{aligned}$$

A més per la fórmula de sumació de Poisson i la identitat de Plancherel tenim que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^7 \hat{f}[k] &= 8f[0] = 8 \\ \sum_{k=0}^7 |\hat{f}[k]|^2 &= 8 \sum_{k=0}^7 |f[k]|^2 = 8 \cdot 108 = 864 \end{aligned}$$