Llista de problemes 2

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2023

1. **Considerem la sèrie de Fourier d'una funció f en forma complexa $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt de funcions contínues a $[-\pi,\pi]$ amb sèries de Fourier absolutament convergent. Definim $\|f\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(k)\right|$. Demostreu que:**

   (a) **La hipòtesi de convergència absoluta implica convergència uniforme de la sèrie de Fourier.**
   Vegem que satisfà la condició M-Weierstraß. Tenim que:
   $$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty$$
   Per tant, tenim convergència uniforme de la sèrie de Fourier.

   (b) **Si f és contínua (amb $f(-\pi) = f(\pi)$) i derivable a trossos amb $f' \in L^2$, llavors $f \in \mathcal{A}$. Doneu també una cota per a $\|f\|_{\mathcal{A}}$.**
   Recordant que $\widehat{f'}(n) = \mathrm{i}n\widehat{f}(n)$ i usant que $ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2$ tenim que:
   $$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right| &= \left|\widehat{f}(0)\right| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n} n \left|\widehat{f}(n)\right| \\ &\leq \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{n^2} + n^2\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right) \\ &= \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f'}(n)\right|^2 \\ &= \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4\pi}{\|f'\|_2}^2 \\ &< \infty\end{aligned}$$
   on hem utilitzat Parseval i el fet que $f' \in L^2$. Una cota de $\|f\|_{\mathcal{A}}$ és:
   $$\|f\|_{\mathcal{A}} \leq \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4\pi}{\|f'\|_2}^2 = \left|\widehat{f}(0)\right| + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi}{\|f'\|_2}^2$$

   (c) **Si $f, g \in \mathcal{A}$, llavors $fg \in \mathcal{A}$ i es compleix $\|fg\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}}\|g\|_{\mathcal{A}}$.**
   Com que tenim convergència absoluta, tenim convergència uniforme per l'apartat a). Cal veure però que aquesta convergència és cap a la funció. Com que g és contínua, tenim que $\lim_{N\to\infty} \|S_N g - g\|_1 = 0$. Per un resultat d'anàlisi funcional tenim que llavors existeix una parcial $(S_{N_k} g)$ que convergeix a g gairebé per tot quan $k \to \infty$. Per tant, podem escriure $g(t) \overset{\text{a.e.}}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$ i llavors per convergència dominada tenim que podem intercanviar la suma amb la integral:
   $$\widehat{fg}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(m)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(m)\widehat{f}(n-m)$$
   Per tant, reordenant la següent sèrie (ja que és de termes positius) obtenim:
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{fg}(n)\right| \leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)|\left|\widehat{f}(n-m)\right| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n-m)\right| = \|f\|_{\mathcal{A}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)| = \|f\|_{\mathcal{A}}\|g\|_{\mathcal{A}}$$

2. Sigui f la funció definida a $[-\pi,\pi]$ per $f(t)=|t|$. Comproveu que:

$$\widehat{f}(n)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } n=0\\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n\neq 0\end{cases}$$

Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Fourier proveu que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right]\\ &=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right]\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } n=0\\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Com que f té límits i derivades laterals en tots els punts de $[-\pi,\pi]$ podem escriure:

$$f(t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

Sigui $S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ i $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Fixem-nos que:

$$S_2=\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ senar}}}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ parell}}}\frac{1}{n^2}=S_1+\frac{1}{4}S_2\implies S_1=\frac{3}{4}S_2 \tag{1}$$

Avaluant a $t=0$, com que f és contínua en aquest punt tenim que:

$$0=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}$$

Per tant:

$$-\frac{\pi^2}{4}=-S_2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-S_2-\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ senar}}}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ parell}}}\frac{1}{n^2}=-S_2-S_1+\frac{S_2}{4}=-\frac{3}{2}S_2$$

on en l'última igualtat hem usat (1). D'aquí deduïm que $S_2=\frac{\pi^2}{6}$ i per tant $S_1=\frac{3}{4}S_2=\frac{\pi^2}{8}$.

3. Volem provar: *Si $f=0$ en $[a,b]\subseteq[-\pi,\pi]$, la seva sèrie de Fourier convergeix uniformement a zero en $[a+\delta,b-\delta]$ per $\delta>0$.*

Per tal de demostrar aquest resultat, proveu primer la següent adaptació del lema de Riemann-Lebesgue:

Si f és 2π-periòdica, integrable i acotada, i g és una funció monòtona a trossos i acotada, llavors:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t=0$$

uniformement en x.

Primer suposem que g és monòtona. Com que f és integrable, sabem que $\forall\varepsilon > 0$ podem trobar $f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{M} c_{k,\varepsilon}\mathbf{1}_{[a_{k,\varepsilon},b_{k,\varepsilon}]}$ esglaonada tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| \,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

Denotem per $\alpha_{k,\varepsilon} := \max(-\pi, a_{k,\varepsilon} - x)$ i $\beta_{k,\varepsilon} = \min(\pi, b_{k,\varepsilon} - x)$. Llavors:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x+t) - f_\varepsilon(x+t))g(t)\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \|g\|_\infty \int_{-\pi-x}^{\pi-x} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{M} |c_{k,\varepsilon}| \left|\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{[a_{k,\varepsilon},b_{k,\varepsilon}]}(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{M} |c_{k,\varepsilon}| \left|\int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&< \|g\|_\infty\varepsilon + \sum_{k=1}^{M} |c_{k,\varepsilon}| \left| g({\alpha_{k,\varepsilon}}^+) \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\xi_{k,\varepsilon}} \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t + g({\beta_{k,\varepsilon}}^-) \int_{\xi_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

on $\xi_{k,\varepsilon} \in [\alpha_{k,\varepsilon}, \beta_{k,\varepsilon}]$, pel teorema del valor mitjà per integrals. Finalment tenim que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &< \|g\|_\infty\varepsilon + \sum_{k=1}^{M} |c_{k,\varepsilon}| \left| g({\alpha_{k,\varepsilon}}^+) \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\xi_{k,\varepsilon}} \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t + g({\beta_{k,\varepsilon}}^-) \int_{\xi_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \|g\|_\infty\varepsilon + \sum_{k=1}^{M} |c_{k,\varepsilon}| \|g\|_\infty \left(\frac{|\cos(\lambda\alpha_{k,\varepsilon}) - \cos(\lambda\xi_{k,\varepsilon})|}{\lambda} + \frac{|\cos(\lambda\xi_{k,\varepsilon}) - \cos(\lambda\beta_{k,\varepsilon})|}{\lambda}\right) \\
&\leq \|g\|_\infty\varepsilon + \sum_{k=1}^{M} |c_{k,\varepsilon}| \|g\|_\infty \frac{4}{\lambda}
\end{aligned}$$

I triant per exemple $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$ tenim que això últim tendeix a 0 uniformement en x.

Si g és monòtona a trossos, aleshores $g(t) = \sum_{k=1}^{N} g_k\mathbf{1}_{[c_k,d_k]}(t)$ amb $g_k : [c_k, d_k] \to \mathbb{R}$ monòtona. Llavors, aplicant el que acabem de demostrar a cada g_k i utilitzant la linealitat de la integral provem el resultat general.

Demostrem ara el primer enunciat. Cal veure que

$$\sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]} |S_N f(x)| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Recordem que podem escriure $S_N f(x)$ com:

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)\,\mathrm{d}t$$

Fixem-nos que gairebé estem en les hipòtesis de poder aplicar el lema generalitzat de Riemann-Lebesgue, però d'entrada $\frac{1}{\sin(t/2)}$ no està acotat en un entorn del 0. Ara bé, notem que:

$$x + t \in [a, b] \iff a \leq x + t \leq b \iff a - (b - \delta) \leq t \leq b - (a + \delta) \iff -(b - a) + \delta \leq t \leq (b - a) - \delta$$

Per tant, quan $f(x + t) = 0$, la t està en un interval que conté el 0 (per a $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, que és fins on deixa de tenir sentit l'interval $[a + \delta, b - \delta]$) i per tant, considerant la funció acotada

$$g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)}(1 - \mathbf{1}_{[-(b-a)+\delta,(b-a)-\delta]}(t)) + C\mathbf{1}_{[-(b-a)+\delta,(b-a)-\delta]}(t)$$

tenim que

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{\sin(t/2)} \sin((N+1/2)t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin((N+1/2)t) \, \mathrm{d}t$$

per a qualsevol $C \in \mathbb{R}^*$ i podem aplicar el lema anterior per demostrar la convergència uniforme.

4. **Comproveu que per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la sèrie de Fourier de $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - x)\alpha}$ a $[0, 2\pi]$ ve donada per $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n+\alpha}$. Utilitzeu la identitat de Parseval per demsotrar que:**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)\alpha} \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\alpha)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(n+\alpha)} - 1}{-\mathrm{i}(n+\alpha)} \\
&= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}(n+\alpha)} \\
&= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\sin(\pi\alpha)}{n+\alpha} \\
&= \frac{1}{n+\alpha}
\end{aligned}$$

Utilitzant identitat de Parseval tenim que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} {\|f\|_2}^2$$

Ara bé:

$$\frac{1}{2\pi} {\|f\|_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$