**Anàlisi Harmònica**

Entrega 6 Més distribucions

1. Sigui $p(x)$ un polinomi. Llavors, existeix una distribució $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $p(x)T = 1$.

2. Sigui $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. El suport de $T$ es defineix com la intersecció de tots els $K$ tancats amb la propietat següent: si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ té support a $\mathbb{R}^n \backslash K$, llavors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

   Considereu l'espai $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ i el seu dual $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (i.e. l'espai dels funcionals lineals i continus sobre les funcions test $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$).

   És fàcil veure que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ si i només si existeixen $C > 0$ i $N$, $m$ naturals tals que
$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \leq N} |(\partial^\alpha \varphi)(x)|,$$
   per a tota $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

   (a) Demostreu que $T$ és una distribució amb suport compacte si i només si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

   (b) Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ està suportada en un punt $x_0$, llavors té la forma
$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^k \delta_{x_0}.$$

   (c) Deduïu que si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\hat{T}$ està suportada a $\xi_0$, llavors $T$ és una combinació lineal finita de funcions $(-2\pi i \xi)^\alpha e^{2\pi i \xi \cdot \xi_0}$ (sent $\alpha$ un multiíndex). En particular, si $\hat{T}$ està suportada a l'origen, llavors $T$ és un polinomi.

   (d) Deduïu que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\Delta u = 0$, llavors $u$ és un polinomi.