Llista de problemes 6

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Maig de 2023

Exercici 2. *Sigui $p(x)$ un polinomi. Llavors existeix una distribució $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ tal que $p(x)T = 1$.*

Resolució. Recordem d'un seminari anterior les distribucions $T_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m \log|x| \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ que satisfan $x^m T_m = 1$, $m \in \mathbb{N}$. Fent una translació tenim que les distribucions $S_{m,\alpha} := \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m \log|x-\alpha|$ satisfan ${(x-\alpha)}^m S_m = 1$ per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. Aleshores, fent la descomposició per fraccions simples de $p(x)$ tenim que

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{q_i(x)}{{(x-\alpha_i)}^{n_i}}$$

per a certs polinomis q_i tals que $\deg q_i < n_i$. Ara definim $T := \sum_{i=0}^{n} q_i(x) S_{n_i,\alpha_i}$. Aleshores tenim que:

$$p(x)T = p(x)\sum_{i=0}^{n} q_i(x) S_{n_i,\alpha_i} = p(x)\sum_{i=0}^{n} \frac{q_i(x)}{{(x-\alpha_i)}^{n_i}} = 1$$

Exercici 3. *Sigui $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. El* suport *de T es defineix com la intersecció de tots els tancats K amb la propietat següent: si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus K$, aleshores $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*
Considerem l'espai $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ i el seu dual $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$. És fàcil veure que $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$ si i només si existeixen $C > 0$ i $N, m \in \mathbb{N}$ tals que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha \varphi)(x)| \quad \textit{per a tota } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n).$$

a. *Demostreu que T és una distribució amb suport compacte si i només si $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$.*

b. *Si $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ està suportada en un punt x_0, llavors:*

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

c. *Deduïu que si $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\widehat{T}$ està suportada en ξ_0, llavors T és combinació lineal finita de funcions ${(-2\pi \mathrm{i}\xi)}^\alpha \mathrm{e}^{2\pi i\langle \xi,\xi_0\rangle}$. En particular, si $\widehat{T}$ està suportada a l'origen, llavors T és un polinomi.*

d. *Deduïu que si $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\Delta u = 0$, llavors u és un polinomi.*

Resolució.

a. Suposem primer que T és una distribució amb suport compacte K. Per definició si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus K$, tenim que $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Ara per a una $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ general, considerem una funció $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ per a tot $x \in K$. Aleshores, per a tota $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tenim que:

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi\psi\rangle + \langle T, \varphi(1-\psi)\rangle| = |\langle T, \varphi\psi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha(\varphi\psi))(x)|$$

per certes $C > 0$, $m, N \in \mathbb{N}$. La segona igualtat es deu al fet que $\varphi(1-\psi)$ té support contingut en $\mathbb{R}^n \setminus K$ i l'última desigualtat bé del fet que $\varphi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i, per tant, sobre aquestes funcions tenim continuïtat.

Ara suposem que $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$. Com que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, tenim que $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Per tant, T és una distribució i a més el seu suport K és tancat, perquè és intersecció de tancats. Cal veure que K és acotat. Si no ho fos, aleshores podríem trobar una successió $(x_n) \in K$ tal que $x_n \to \infty$. Per a construir aquesta φ, considerem una $(\phi_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

aleshores podríem trobar una $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ que tendís a ∞ dins de K, i per tant, tindríem que T no podria estar en $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$, que és una contradicció.

b. Tenim que:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \mathbf{1}_{\{x_0\}} + (1 - \mathbf{1}_{\{x_0\}})\varphi \rangle = \langle T, \varphi \mathbf{1}_{\{x_0\}} \rangle$$

c. De l'apartat anterior tenim que:

$$\widehat{T} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \widehat{\partial^\alpha \delta_{\xi_0}} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha (2\pi \mathrm{i} \xi)^\alpha \widehat{\delta_{\xi_0}} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha (2\pi \mathrm{i} \xi)^\alpha \mathrm{e}^{-2\pi i \xi \cdot \xi_0}$$

En particular si $\xi_0 = 0$, aleshores $\widehat{T} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha (2\pi \mathrm{i} \xi)^\alpha$, que és un polinomi en ξ.

d. Fent transformada de Fourier a l'equació obtenim:

$$0 = \widehat{\Delta u} = \sum_{i=0}^{n} \widehat{{\partial_i}^2 u} = \sum_{i=0}^{n} (2\pi \mathrm{i} \xi_i)^2 \widehat{u} = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}$$