

Llista de problemes 2

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2023

1. Considerem la sèrie de Fourier d'una funció f en forma complexa $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}$. Sigui \mathcal{A} el conjunt de funcions contínues a $[-\pi, \pi]$ amb sèries de Fourier absolutament convergent. Definim $\|f\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|$. Demostreu que:

- (a) La hipòtesi de convergència absoluta implica convergència uniforme de la sèrie de Fourier. Vegem que satisfà la condició M-Weierstraß. Tenim que:

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$$

Per tant, tenim convergència uniforme de la sèrie de Fourier.

- (b) Si f és contínua (amb $f(-\pi) = f(\pi)$) i derivable a trossos amb $f' \in L^2$, llavors $f \in \mathcal{A}$. Doneu també una cota per a $\|f\|_{\mathcal{A}}$.

Recordant que $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ i usant que $ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2$ tenim que:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} |\widehat{f}(n)| \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{n^2} + n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \right) \\ &= |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 \\ &= |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4\pi} \|f'\|_2^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

on hem utilitzat Parseval i el fet que $f' \in L^2$. Una cota de $\|f\|_{\mathcal{A}}$ és:

$$\|f\|_{\mathcal{A}} \leq |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4\pi} \|f'\|_2^2 = |\widehat{f}(0)| + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi} \|f'\|_2^2$$

- (c) Si $f, g \in \mathcal{A}$, llavors $fg \in \mathcal{A}$ i es compleix $\|fg\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}} \|g\|_{\mathcal{A}}$.

Com que tenim convergència absoluta, tenim convergència uniforme per l'apartat a). Cal veure però que aquesta convergència és cap a la funció. Com que g és contínua, tenim que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N g - g\|_1 = 0$. Per un resultat d'anàlisi funcional tenim que llavors existeix una parcial $(S_{N_k} g)$ que convergeix a g gairebé per tot quan $k \rightarrow \infty$. Per tant, podem escriure $g(t) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(m) e^{imt}$ i llavors per convergència dominada tenim que podem intercanviar la suma amb la integral:

$$\widehat{fg}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) e^{-int} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(m) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i(n-m)t} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(m) \widehat{f}(n-m)$$

Per tant, reordenant la següent sèrie (ja que és de termes positius) obtenim:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \leq \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)| |\widehat{f}(n-m)| = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n-m)| = \|f\|_{\mathcal{A}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)| = \|f\|_{\mathcal{A}} \|g\|_{\mathcal{A}}$$

2. Sigui f la funció definida a $[-\pi, \pi]$ per $f(t) = |t|$. Comproveu que:

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Fourier proveu que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 t e^{-int} dt + \int_0^{\pi} t e^{-int} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} t e^{int} dt + \int_0^{\pi} t e^{-int} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Com que f té límits i derivades laterals en tots els punts de $[-\pi, \pi]$ podem escriure:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} [e^{int} + e^{-int}] = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

Sigui $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ i $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Fixem-nos que:

$$S_2 = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ senar}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ parell}}} \frac{1}{n^2} = S_1 + \frac{1}{4} S_2 \implies S_1 = \frac{3}{4} S_2 \quad (1)$$

Avaluant a $t = 0$, com que f és contínua en aquest punt tenim que:

$$0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^n}{n^2}$$

Per tant:

$$-\frac{\pi^2}{4} = -S_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -S_2 - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ senar}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ parell}}} \frac{1}{n^2} = -S_2 - S_1 + \frac{S_2}{4} = -\frac{3}{2} S_2$$

on en l'última igualtat hem usat (1). D'aquí deduïm que $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ i per tant $S_1 = \frac{3}{4} S_2 = \frac{\pi^2}{8}$.

3. Volem provar: Si $f = 0$ en $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$, la seva sèrie de Fourier convergeix uniformement a zero en $[a + \delta, b - \delta]$ per $\delta > 0$.

Per tal de demostrar aquest resultat, proveu primer la següent adaptació del lema de Riemann-Lebesgue:

Si f és 2π -periòdica, integrable i acotada, i g és una funció monòtona a trossos i acotada, llavors:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

uniformement en x .

Primer suposem que g és monòtona. Com que f és integrable, sabem que $\forall \varepsilon > 0$ podem trobar $f_\varepsilon = \sum_{k=1}^M c_{k,\varepsilon} \mathbf{1}_{[a_{k,\varepsilon}, b_{k,\varepsilon}]}$ esglaonada tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| dt < \varepsilon$$

Denotem per $\alpha_{k,\varepsilon} := \max(-\pi, a_{k,\varepsilon} - x)$ i $\beta_{k,\varepsilon} = \min(\pi, b_{k,\varepsilon} - x)$. Llavors:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \sin(\lambda t) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x+t) - f_\varepsilon(x+t))g(t) \sin(\lambda t)| dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(x+t)g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{-\pi-x}^{\pi-x} |f(t) - f_\varepsilon(t)| dt + \sum_{k=1}^M |c_{k,\varepsilon}| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{[a_{k,\varepsilon}, b_{k,\varepsilon}]}(x+t)g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &= \|g\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| dt + \sum_{k=1}^M |c_{k,\varepsilon}| \left| \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &< \|g\|_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^M |c_{k,\varepsilon}| \left| g(\alpha_{k,\varepsilon}^+) \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\xi_{k,\varepsilon}} \sin(\lambda t) dt + g(\beta_{k,\varepsilon}^-) \int_{\xi_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \end{aligned}$$

on $\xi_{k,\varepsilon} \in [\alpha_{k,\varepsilon}, \beta_{k,\varepsilon}]$, pel teorema del valor mitjà per integrals. Finalment tenim que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \sin(\lambda t) dt \right| &< \|g\|_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^M |c_{k,\varepsilon}| \left| g(\alpha_{k,\varepsilon}^+) \int_{\alpha_{k,\varepsilon}}^{\xi_{k,\varepsilon}} \sin(\lambda t) dt + g(\beta_{k,\varepsilon}^-) \int_{\xi_{k,\varepsilon}}^{\beta_{k,\varepsilon}} g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \|g\|_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^M |c_{k,\varepsilon}| \|g\|_\infty \left(\frac{|\cos(\lambda \alpha_{k,\varepsilon}) - \cos(\lambda \xi_{k,\varepsilon})|}{\lambda} + \frac{|\cos(\lambda \xi_{k,\varepsilon}) - \cos(\lambda \beta_{k,\varepsilon})|}{\lambda} \right) \\ &\leq \|g\|_\infty \varepsilon + \sum_{k=1}^M |c_{k,\varepsilon}| \|g\|_\infty \frac{4}{\lambda} \end{aligned}$$

I triant λ tal que tot el segon sumand sigui menor que ε tenim que això últim és tant petit com vulguem independentment de x .

Si g és monòtona a trossos, aleshores $g(t) = \sum_{k=1}^N g_k \mathbf{1}_{[c_k, d_k]}(t)$ amb $g_k : [c_k, d_k] \rightarrow \mathbb{R}$ monòtona. Llavors, aplicant el que acabem de demostrar a cada g_k i utilitzant la linealitat de la integral provem el resultat general.

Demostrem ara el primer enunciat. Cal veure que

$$\sup_{x \in [a+\delta, b-\delta]} |S_N f(x)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Recordem que podem escriure $S_N f(x)$ com:

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{\sin(t/2)} \sin((N+1/2)t) dt$$

Fixem-nos que gairebé estem en les hipòtesis de poder aplicar el lema generalitzat de Riemann-Lebesgue, però d'entrada $\frac{1}{\sin(t/2)}$ no està acotat en un entorn del 0. Ara bé, notem que:

$$x+t \in [a, b] \iff a \leq x+t \leq b \iff a - (b-\delta) \leq t \leq b - (a+\delta) \iff -(b-a) + \delta \leq t \leq (b-a) - \delta$$

Per tant, quan $f(x+t) = 0$, la t està en un interval que conté el 0 (per a $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, que és fins on deixa de tenir sentit l'interval $[a+\delta, b-\delta]$) i per tant, considerant la funció acotada

$$g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} (1 - \mathbf{1}_{[-(b-a)+\delta, (b-a)-\delta]}(t)) + C \mathbf{1}_{[-(b-a)+\delta, (b-a)-\delta]}(t)$$

tenim que

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{\sin(t/2)} \sin((N+1/2)t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin((N+1/2)t) dt$$

per a qualsevol $C \in \mathbb{R}^*$ i podem aplicar el lema anterior per demostrar la convergència uniforme.

4. **Comproveu que per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la sèrie de Fourier de $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha}$ a $[0, 2\pi]$ ve donada per $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}$. Utilitzeu la identitat de Parseval per demostrar que:**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-t)\alpha} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)} e^{i\pi\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+\alpha)t} dt \\ &= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)} e^{i\pi\alpha} \frac{e^{-2\pi i(n+\alpha)} - 1}{-i(n+\alpha)} \\ &= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)} e^{i\pi\alpha} \frac{1 - e^{-2\pi i\alpha}}{2i(n+\alpha)} \\ &= \frac{1}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\sin(\pi\alpha)}{n+\alpha} \\ &= \frac{1}{n+\alpha} \end{aligned}$$

Utilitzant identitat de Parseval tenim que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2$$

Ara bé:

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} dx = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}$$