Llista de problemes 3

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2023

Exercici 1. *Siguin*

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \qquad i \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si\ |x| \leq 1 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Proveu que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \qquad i \qquad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2$$

entenent que $\widehat{f}(0) = 2$ *i* $\widehat{g}(0) = 1$.

Resolució. Tenim que si $\xi = 0$, aleshores $\widehat{f}(0)$ i $\widehat{g}(0)$ són respectivament les àrees del quadrat 2×1 i del triangle amb base 2 i altura 1. Per tant, $\widehat{f}(0) = 2$ i $\widehat{g}(0) = 1$. Pels altres casos, calculem $\widehat{f}(\xi)$ i $\widehat{h}(\xi)$, on $h(x) = f(x) - g(x) = |x|\chi_{[-1,1]}(x)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi}}{2\pi\mathrm{i}\xi} \\
&= \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\xi) &= \int_{-1}^{0} (-x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} x\cos(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi\xi\sin(2\pi\xi) + \cos(2\pi\xi) - 1}{2\pi^2\xi^2}
\end{aligned}$$

Per tant:

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{h}(\xi) = -\frac{\cos(2\pi\xi) - 1}{2\pi^2\xi^2} = \frac{\left(\sin(\pi\xi)\right)^2}{\pi^2\xi^2}$$

on hem utilitzat la identitat trigonomètrica $2\left(\sin(x)\right)^2 = 1 - \cos(2x)$.

Exercici 2.

a. *Apliqueu la fórmula de sumació de Poisson a la funció g de l'exercici 1 per provar*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\left(\sin(\pi\alpha)\right)^2}$$

si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b. *Deduïu com a conseqüència que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)}$$

si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Resolució.

a. Notem primer de tot que ens podem restringir a $\alpha \in (0,1)$ (perquè tenim convergència absoluta de la sèrie i podem reordenar). Observem que g és parella, per tant $\widehat{\widehat{g}} = g$. Aplicarem la fórmula de Poisson (general) a $\widehat{g}$. Fixem-nos que $\widehat{g}$ és contínua i integrable. A més $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + n)$ convergeix uniformement per $\xi \in [0,1]$ per M-Weierstraß, ja que $|\widehat{g}(\xi+n)| \leq \frac{1}{\pi^2(\xi+n)^2} \leq \frac{1}{2\pi^2 n^2}$ (per n prou gran), que ens dona una sèrie convergent. Finalment $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\widehat{g}}(n)\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)| = g(0) = 1 < \infty$. Per tant, la fórmula de sumació de Poisson ens diu que

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\sin(\pi(n+\alpha)))^2}{\pi^2(n+\alpha)^2} = \frac{(\sin(\pi\alpha))^2}{\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. D'aquí ja es desprèn el resultat.

b. Aquí també podem suposar $\alpha \in (0,1)$ ja que fent una translació l'argument serveix igual. Com hem dit anteriorment la sèrie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{1}{(n+\alpha)^2}\right|$ convergeix uniformement per $\alpha \in [0,1]$ per M-Weierstraß.

Definim $f_n(\alpha) = \frac{1}{(n+\alpha)^2}$. Tenim que f_n és integrable Riemann en $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,-1\}$. Vegem que també tenim integrabilitat de la funció $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$ en $[0,1]$.

Els problemes només els tenim en 0 i 1. A prop del 0, hem de controlar $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2}$. Tenim que:

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} &= \frac{\pi^2}{\left(\pi\alpha - \frac{(\pi\alpha)^3}{6} + \cdots\right)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \simeq \frac{\pi^2}{\pi^2\alpha^2 - \frac{\pi^4\alpha^4}{3} + \cdots} - \frac{1}{\alpha^2} \simeq \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{\pi^2\alpha^2}{3} + \cdots} - 1\right) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\alpha^2}\left(\left[1 - \frac{\pi^2\alpha^2}{3} + \cdots\right] - 1\right) \simeq \frac{\pi^2}{3} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Similarment a prop de 1, hem de controlar $\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$. Fixem-nos que tenim certa simetria i ens podem estalviar càlculs. Canviant α per $\alpha - 1$ en la fórmula anterior, tenim que:

$$\frac{\pi^2}{3} + \cdots \simeq \frac{\pi^2}{(\sin(\pi(\alpha-1)))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Per tant tenim integrabilitat i llavors usant que $\int \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + C$ deduïm que:

$$\begin{gathered}\int \left(\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}\right)\mathrm{d}\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \int \frac{1}{(n+\alpha)^2}\,\mathrm{d}\alpha \\ -\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} + C = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \frac{1}{n+\alpha}\end{gathered}$$

Si ara fem el límit $\alpha \to 0$ tindrem d'una banda que $-\frac{1}{\alpha-1} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \frac{1}{n+\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n+\alpha} \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$ i d'altra banda que (per (1)):

$$-\frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} + \frac{1}{\alpha} = \int \left(\frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}\alpha \simeq \frac{\pi^2}{3}\alpha + \cdots \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Per tant $C = 0$ i ja hem acabat.

Exercici 3. *Suposeu que f és contínua a $\mathbb{R}$. Proveu que f i $\widehat{f}$ no poden tenir les dues suport compacte a no ser que $f = 0$. Això es pot interpretar amb el mateix esperit que el principi d'incertesa.*

Resolució. Suposem que f i $\widehat{f}$ tenen suports compactes $K_1 \subseteq [-(N-1), N-1] \subseteq [-N,N]$ i $K_2 \subseteq [-M,M]$ respectivament per certs $N, M \in \mathbb{N}$. Aleshores fem la periodització de f amb període $2N$ (que també l'anomenem f). Llavors la seva sèrie de mitjanes de Fejér és:

$$\begin{aligned}\sigma_R f(x) &= \sum_{n=-R}^{R} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right) \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}} = \sum_{n=-M}^{M} \left(1 - \frac{|n|}{R+1}\right) \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}} = \\ &= \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}} - \frac{1}{R+1} \sum_{n=-M}^{M} |n| \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}}\end{aligned}$$

Ara bé, per la continuïtat de f i el teorema de Fejér, tenim que

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \sigma_R f(x) = \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}}$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$. Observem que com que $\mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{2N}}$ és analítica, i combinacions lineals (finites) de funcions analítiques són analítiques, tenim que f també ho és. Però $f(x) = 0$ per $x \in (N-1, N)$. Per tant, pel principi de prolongació analítica, tenim que $f = 0$.
A posteriori m'he adonat que es pot fer més fàcil recordant que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ i té suport compacte (que és el cas), llavors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$ i, pel mateix argument que hem fet, deduïm que $f = 0$.

Exercici 4. *Sigui ψ tal que $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$. Demostreu el principi d'incertesa de Heisenberg en dimensions d:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \left|\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi})\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}$$

Resolució. Ometrem l'avaluació de les funcions a $\mathbf{x}$ i a $\boldsymbol{\xi}$ per tal de simplificar la lectura.
Estudiem primer la integral $\int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \left|\widehat{\psi}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$. Fixem-nos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \left|\widehat{\psi}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} {\xi_j}^2 \left|\widehat{\psi}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} 4\pi^2 {\xi_j}^2 \left|\widehat{\psi}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} \left|\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\nabla}\psi\|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

on hem utilitzat el teorema de Plancherel en dimensió d. D'altra banda:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^2 |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \left|\widehat{\psi}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right) &= \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\|^2 |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\boldsymbol{\nabla}\psi\|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right) \\
&\geq \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\| |\psi| \|\boldsymbol{\nabla}\psi\| \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \qquad \text{(Cauchy-Schwarz per integrals)} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{x}\| |\psi| \left\|\boldsymbol{\nabla}\overline{\psi}\right\| \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi| \left|\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nabla}\overline{\psi}\rangle\right| \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \qquad \text{(Cauchy-Schwarz per vectors)} \\
&\geq \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re}(\psi \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nabla}\overline{\psi}\rangle) \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \qquad |z| \geq \operatorname{Re}(z)\ \forall z \in \mathbb{C} \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} x_j 2 \operatorname{Re}\left(\psi \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial(|\psi|^2)}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\left(d \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^2 \\
&= \frac{d^2}{16\pi^2}
\end{aligned}$$

on en l'antepenúltima igualtat hem usat que si $\psi = A + \mathrm{i}B$ aleshores $\frac{\partial(A^2+B^2)}{\partial x_j} = 2AA_{x_j} + 2BB_{x_j} = 2\operatorname{Re}\left(\psi \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_j}\right)$ i en la penúltima igualtat hem usat el teorema de Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial(|\psi|^2)}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d) \int_{\mathbb{R}} x_j \frac{\partial(|\psi|^2)}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d) \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \,\mathrm{d}x_j = d \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

on hem utilitzat integració per parts i hem assumit que $x_j|\psi|^2 \in L^1(\mathbb{R})\ \forall j$ (com en el cas d'una variable). Anteriorment també hem assumit que ψ era diferenciable.

Exercici 5.

a. Donada $f[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$, $n = 0, 1, 2, 3$, calculeu la seva DFT.

b. Sigui $f[n] = (1, 2, 0, 3, -2, 4, 7, 5)$. Calculeu $\widehat{f}[0]$, $\widehat{f}[4]$, $\sum_{k=0}^7 \widehat{f}[k]$, $\sum_{k=0}^7 \left|\widehat{f}[k]\right|^2$.

Resolució.

a. Tenim que:

$$\widehat{f}[n] = \sum_{k=0}^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kn}{4}} = 1 - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n} = 1 - (-1)^n$$

b. Tenim que:

$$\widehat{f}[0] = \sum_{k=0}^7 f[k] = 20$$

$$\widehat{f}[4] = \sum_{k=0}^7 f[k] \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} k} = \sum_{k=0}^7 f[k](-1)^k = -8$$

A més per la fórmula de sumació de Poisson i la identitat de Plancherel tenim que:

$$\sum_{k=0}^7 \widehat{f}[k] = 8 f[0] = 8$$

$$\sum_{k=0}^7 \left|\widehat{f}[k]\right|^2 = 8 \sum_{k=0}^7 |f[k]|^2 = 8 \cdot 108 = 864$$