

Llista de problemes 1

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Febrer de 2023

Exercici 1. *Escriuiu les sèries de Fourier de sinus i de cosinus de la funció*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{si } x \in (0, \pi/3) \\ 0 & \text{si } x \in (\pi/3, 2\pi/3) \\ -\frac{\pi}{3} & \text{si } x \in (2\pi/3, \pi) \end{cases}$$

Resolució. Per calcular la del sinus, fem l'extensió senar de f en $[-\pi, \pi]$ i llavors sabem que la seva sèrie de Fourier és

$$S_1 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

on $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$. Tenim que:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{\pi}{3} \sin(kx) dx - \frac{2}{\pi} \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\pi}{3} \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{3} \frac{1 + (-1)^k - \cos(k\pi/3) - \cos(2k\pi/3)}{k} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1 + (-1)^k - 2 \cos(k\pi/2) \cos(k\pi/6)}{k} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ és senar} \\ 0 & \text{si } k = 6\ell \\ \frac{1}{3\ell+1} & \text{si } k = 6\ell+2 \\ \frac{1}{3\ell+2} & \text{si } k = 6\ell+4 \end{cases} \end{aligned}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Així doncs:

$$S_1 f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\sin((6\ell+2)x)}{3\ell+1} + \frac{\sin((6\ell+4)x)}{3\ell+2} \right)$$

Si ara fem l'extensió parell de f en $[-\pi, \pi]$ obtenim la seva sèrie de Fourier en termes del cosinus:

$$S_2 f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad (1)$$

on $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$. Tenim que:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{3} \cos(kx) - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\pi}{3} \cos(kx) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{\sin(k\pi/3) + \sin(2k\pi/3)}{k} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\sin(k\pi/2) \cos(k\pi/6)}{k} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ és parell} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3(6\ell+1)} & \text{si } k = 6\ell+1 \\ 0 & \text{si } k = 6\ell+3 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3(6\ell+5)} & \text{si } k = 6\ell+5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Així doncs:

$$S_2 f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\cos((6\ell+1)x)}{6\ell+1} - \frac{\cos((6\ell+5)x)}{6\ell+5} \right)$$

Exercici 2. Sigui $f \in \mathcal{C}^k$ una funció 2π -periòdica. Demostreu que $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-k})$ quan $|n| \rightarrow \infty$ (i.e. existeix una constant $C > 0$ tal que $|\widehat{f}(n)| \leq C|n|^{-k}$).

Resolució. Demostrem per inducció sobre k que

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$$

El cas $k = 0$ és directe. Si suposem cert el cas $k-1$ tenim que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f^{(k)}}(n) &= \left\langle f^{(k)}(x), \frac{1}{2\pi} e^{inx} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} f^{(k-1)}(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k-1)}(x) e^{-inx} dx \\
 &= in \widehat{f^{(k-1)}}(n) \\
 &= (in)^k \widehat{f}(n)
 \end{aligned}$$

on hem fet integració per parts i hem fet servir la continuïtat de $f^{(k-1)}$ en els punts “d’unió” ($f^{(k-1)}(-\pi) = f^{(k-1)}(\pi)$) i la hipòtesi d’inducció en l’última igualtat. Per tant, com que sempre tenim que

$$|\widehat{g}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_1$$

i $\|f^{(k)}\|_1 = C < \infty$ perquè $f^{(k)}$ és contínua, deduïm que:

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k} \right| \leq C|n|^{-k}$$

Exercici 3. A l’interval $[-\pi, \pi]$ considereu la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \delta \\ 1 - \frac{|t|}{\delta} & \text{si } |t| \leq \delta \end{cases}$$

Demostreu que

$$f(t) = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\delta)}{n^2 \pi \delta} \cos(nt)$$

Resolució. La funció $f(t)$ és parella, per tant la seva sèrie de Fourier només tindrà els termes del cosinus. Aquests són els següents:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \left(1 - \frac{t}{\delta}\right) \cos(nt) dt \\ &= \begin{cases} 2 \frac{1 - \cos(n\delta)}{\pi n^2 \delta} & \text{si } n \neq 0 \\ \frac{\delta}{\pi} & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'aquí (i recordant l'expressió (1)) es desprèn automàticament el resultat ja que f és contínua i derivable excepte a un nombre finit de punts i la derivada està acotada. De fet, per aquest motiu la convergència de Sf a f és uniforme.

Exercici 4. Proveu que els coeficients de Fourier es poden escriure com

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right] \cos(kx) dx \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right] \sin(kx) dx$$

Deduïu que si f satisfà una condició Hölder d'ordre α , i.e. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, llavors els coeficients de Fourier satisfan

$$|a_k| \leq L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha} \quad |b_k| \leq L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}$$

Resolució. Per demostrar les igualtats és suficient veure que

$$a_k = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \cos(kx) dx \quad b_k = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \sin(kx) dx$$

Fent el canvi $y = x - \frac{\pi}{k}$ tenim que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \cos(kx) dx &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{k}}^{\pi - \frac{\pi}{k}} f(y) \cos(ky + \pi) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{k}}^{\pi - \frac{\pi}{k}} f(y) \cos(ky) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(y) \cos(ky) dy \\ &= a_k \end{aligned}$$

La penúltima igualtat es deu al fet que si g és T -periòdica i integrable, aleshores $\forall x \in \mathbb{R}$ tenim

$$\int_x^{x+T} g(x) dx = \int_0^T g(x) dx$$

Similarment:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \sin(kx) dx &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{k}}^{\pi - \frac{\pi}{k}} f(y) \sin(ky + \pi) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{k}}^{\pi - \frac{\pi}{k}} f(y) \sin(ky) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(y) \sin(ky) dy \\ &= b_k \end{aligned}$$

A partir d'aquestes igualtats si f satisfà la condició de Hölder tenim:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left| \left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right] \cos(kx) \right| dx \leq \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{|\pi|^\alpha}{k^\alpha} dx = L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha} \\ |b_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left| \left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right) \right] \sin(kx) \right| dx \leq \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{|\pi|^\alpha}{k^\alpha} dx = L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha} \end{aligned}$$