

## Llista de problemes 5

Víctor Ballester Ribó  
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica  
Grau en Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
Abril de 2023

**Exercici 1.** Calculeu la segona derivada distribucional de les funcions  $f(x) = e^{-|x|}$  i

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

*Resolució.* Sigui  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Tenim que:

$$\begin{aligned} \langle T_f'', \varphi \rangle &= \langle T_f, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi''(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} [\varphi''(x) + \varphi''(-x)] dx = e^{-x} [\varphi'(x) - \varphi'(-x)] \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-x} [\varphi'(x) - \varphi'(-x)] dx = e^{-x} [\varphi(x) + \varphi(-x)] \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} [\varphi(x) + \varphi(-x)] dx = -2\varphi(0) + \langle T_f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Per tant,  $T_f'' = T_f - 2\delta_0$ . D'altra banda:

$$\begin{aligned} \langle T_g'', \varphi \rangle &= \langle T_g, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi''(x) dx = \int_0^1 (1-x) [\varphi''(x) + \varphi''(-x)] dx = \\ &= (1-x) [\varphi'(x) - \varphi'(-x)] \Big|_0^1 + \int_0^1 [\varphi'(x) - \varphi'(-x)] dx = -2\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(-1) \end{aligned}$$

Per tant,  $T_g'' = -2\delta_0 + \delta_1 + \delta_{-1}$ .

**Exercici 2.** Resoleu l'equació diferencial distribucional  $(xT)' = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$ .

*Resolució.* Observem que  $\mathbf{1}_{(0,\infty)}$  és una solució particular de l'equació diferencial. Per tant, per la linealitat de la derivada tenim que  $(xT - x\mathbf{1}_{(0,\infty)})' = 0$ . Per l'exercici 3 de la llista anterior tenim que  $xT - x\mathbf{1}_{(0,\infty)} = C_1$ . És a dir, (usant que  $x \text{p.v.} \left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ) tenim que:

$$x \left( T - \mathbf{1}_{(0,\infty)} - C_1 \text{p.v.} \left( \frac{1}{x} \right) \right) = 0$$

Ara justifiquem que si  $xS = 0$ , amb  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , aleshores  $S = C\delta_0$ . Sigui  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi(0) = 0$ . Aleshores  $\varphi := \frac{\phi}{x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  i tenim que:

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = \langle xT, \varphi \rangle = 0$$

Ara sigui  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  qualsevol i  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tal que  $\omega(0) = 1$ . Aleshores  $\phi := \psi - \psi(0)\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  i satisfà  $\phi(0) = 0$ . Per tant, per la linealitat de  $T$  i usant el demostrat prèviament, tenim que:

$$T(\psi) = \langle T, \psi \rangle = \psi(0) \langle T, \omega \rangle =: \psi(0)C = C\delta_0(\psi)$$

És a dir,  $T = C\delta_0$ . Per tant, en el nostre cas:

$$T = \mathbf{1}_{(0,\infty)} + C_1 \text{p.v.} \left( \frac{1}{x} \right) + C_2 \delta_0$$

**Exercici 3.** Proveu que tota distribució té una primitiva. És a dir, donada  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\exists S \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tal que  $T = S'$ .

*Resolució.* Sigui  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 0$ . Aleshores ja vam veure a la llista passada que  $\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi = \psi'$ . Per tant, triem  $S$  tal que:

$$\langle S, \phi \rangle = \langle S, \psi' \rangle = -\langle S', \psi \rangle = -\langle T, \psi \rangle$$

Observem que amb aquesta definició de  $S$  tenim que:

$$\langle S', \phi \rangle = -\langle S, \phi' \rangle = -(-\langle T, \psi' \rangle) = \langle T, \phi \rangle$$

Ara sigui  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  qualsevol i sigui  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) dx = 1$ . Aleshores tenim que  $\phi := \varphi - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  i integra 0. Per tant, pel vist anteriorment, si  $\psi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^t \omega(x) dx$ , aleshores definim  $S$  com:

$$\langle S, \varphi \rangle := -\left\langle T, \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^{\cdot} \omega(x) dx \right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \langle T, \omega \rangle$$

Observem que tenim:

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle = \left\langle T, \varphi - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \omega \right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \langle T, \omega \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

**Exercici 4.**

- Sigui  $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$  amb  $a$  un salt d'alçada  $s$  (i.e.  $f(a^+) - f(a^-) = s$ ). Proveu que  $T'_f = T_{f' \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{a\}}} + s\delta_a$ .
- De manera similar, si  $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{(a_n)\})$  amb  $(a_n)$  una successió tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  i  $a_n$  són salts d'alçada  $s_n$ , llavors:

$$T'_f = T_{f' \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{(a_n)\}}} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \delta_{a_n}$$

*Resolució.*

- Sigui  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Tenim que:

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= -f(a^-) \varphi(a) + f(a^+) \varphi(a) + \int_{-\infty}^a f'(x) \varphi(x) dx + \int_a^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = s\varphi(a) + T_{f' \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{a\}}}(\varphi) \end{aligned}$$

Per tant,  $T'_f = T_{f' \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{a\}}} + s\delta_a$ .

- Com que la successió  $(a_n)$  és tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , entre dos punts  $x < y$  reals no podem tenir infinits punts de la successió. Per tant, podem considerar la partició en intervals  $(I_k)$ , donats per  $I_k = (a_{n_k}, a_{n_{k+1}})$  que ens dona la successió entre dos termes (no necessàriament consecutius) de la successió. Aleshores, si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , tenim que:

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f(x) \varphi'(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left( f(a_{n_k}^+) \varphi(a_{n_k}) - f(a_{n_{k+1}}^-) \varphi(a_{n_{k+1}}) \right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f'(x) \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \varphi(a_n) + T_{f' \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{(a_n)\}}}(\varphi) \end{aligned}$$

on hem pogut reordenar perquè la suma és finita, ja que  $\varphi$  té suport compacte. Per tant:

$$T'_f = T_{f' \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{(a_n)\}}} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \delta_{a_n}$$