Llista de problemes 6

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Maig de 2023

Exercici 2. *Sigui $p(x)$ un polinomi. Llavors existeix una distribució $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ tal que $p(x)T = 1$.*

Resolució. Recordem d'un seminari anterior les distribucions $T_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m \log|x| \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ que satisfan $x^m T_m = 1$, $m \in \mathbb{N}$. Fent una translació tenim que les distribucions $S_{m,\alpha} := \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m \log|x-\alpha|$ satisfan $(x-\alpha)^m S_m = 1$ per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. Aleshores, fent la descomposició per fraccions simples de $p(x)$ tenim que

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{(x-\alpha_i)^{n_i}} + \sum_{i=0}^{m} \frac{q_i(x)}{r_i(x)^{m_i}}$$

per a certs polinomis q_i i certes constants c_i. Els polinomis r_i representen els factors irreductibles de p, i per tant, com que no s'anul·len $\mathbb{R}$, $\frac{1}{r_i(x)^{m_i}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Ara definim $T := \sum_{i=0}^{n} c_i S_{n_i,\alpha_i} + \sum_{i=0}^{m} \frac{q_i(x)}{r_i(x)^{m_i}}$, que és una distribució ja que és una combinació lineal de distribucions. Tenim que:

$$p(x)T = p(x)\left(\sum_{i=0}^{n} c_i S_{n_i,\alpha_i} + \sum_{i=0}^{m} \frac{q_i(x)}{r_i(x)^{m_i}}\right) = p(x)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{(x-\alpha_i)^{n_i}} + \sum_{i=0}^{m} \frac{q_i(x)}{r_i(x)^{m_i}}\right) = 1$$

Exercici 3. *Sigui $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. El* suport *de T es defineix com la intersecció de tots els tancats K amb la propietat següent: si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus K$, aleshores $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*
Considerem l'espai $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ i el seu dual $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$. És fàcil veure que $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$ si i només si existeixen $C > 0$ i $N, m \in \mathbb{N}$ tals que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha \varphi)(x)| \quad \textit{per a tota } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

a. *Demostreu que T és una distribució amb suport compacte si i només si $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$.*

b. *Si $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ està suportada en un punt x_0, llavors:*

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

c. *Deduïu que si $T \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\widehat{T}$ està suportada en ξ_0, llavors T és combinació lineal finita de funcions $(-2\pi \mathrm{i}\xi)^\alpha \mathrm{e}^{2\pi i\langle \xi, \xi_0\rangle}$. En particular, si $\widehat{T}$ està suportada a l'origen, llavors T és un polinomi.*

d. *Deduïu que si $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ és tal que $\Delta u = 0$, llavors u és un polinomi.*

Resolució.

a. Suposem primer que T és una distribució amb suport compacte K. Per definició si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus K$, tenim que $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Ara considerem una funció $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ per a tot $x \in K$. Aleshores, per a tota $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tenim que:

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi\psi\rangle + \langle T, \varphi(1-\psi)\rangle| = |\langle T, \varphi\psi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in Q} |(\partial^\alpha(\varphi\psi))(x)|$$

per a tot compacte $Q \subseteq \Omega$ i certes constants $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$. La segona igualtat es deu al fet que $\varphi(1-\psi)$ té suport contingut en $\mathbb{R}^n \setminus K$ i la desigualtat bé del fet que $\varphi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i, per tant, sobre aquestes funcions tenim continuïtat. Si triem $Q = K$ tenim que $\sup_{x\in Q} |(\partial^\alpha(\varphi\psi))(x)| = \sup_{x\in K} |(\partial^\alpha\varphi)(x)|$ ja que $\varphi\psi = \varphi$ a K. Finalment, triant un $N \in \mathbb{N}$ suficientment gran perquè $K \subseteq \overline{B(0,N)}$ obtenim el resultat:

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |(\partial^\alpha\varphi)(x)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha\varphi)(x)|$$

Ara suposem que $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$. Com que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, tenim que $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Per tant, T és una distribució i a més el seu suport K és tancat, perquè és intersecció de tancats. Cal veure que K és acotat. Del fet que $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$, tenim que existeixen constants $C > 0$, $N, m \in \mathbb{N}$ tals que es satisfà (1). Ara bé, si K no fos acotat, aleshores podríem triar $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,N)}$ i $|\langle T, \varphi\rangle| > 0$, ja que si no poguéssim voldria dir que $\operatorname{supp} T \subseteq \overline{B(0,N)}$, que estaria acotat. Però això contradiu (1) ja que totes les seminormes $\sup_{|x|\leq N} |(\partial^\alpha\varphi)(x)|$ serien 0 perquè φ és nul·la dins de $\overline{B(0,N)}$. Amb això hem vist que no només K ha de ser acotat, sinó que ha d'estar contingut en $\overline{B(0,N)}$.

b. Sigui $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ una *bump function* que val 1 en $B(0,1)$ i 0 en $\mathbb{R}^n \setminus B(0,2)$. Expandint φ en sèrie de Taylor centrada a x_0 tenim que si $k \in \mathbb{N}$ (pendent a determinar), aleshores:

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(x_0)(x-x_0)^\alpha + R_{k,\varepsilon}(x)$$

on $R_{k,\varepsilon}(x) = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha\varphi(x_0 + c(x-x_0))}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$, amb $c \in (0,1)$ i $|x - x_0| \leq \varepsilon$, és el residu de Taylor. Fixem-nos que si denotem $a_\alpha := \dfrac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\langle T, (x-x_0)^\alpha\rangle$, aleshores:

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(-1)^\alpha\partial^\alpha\varphi(x_0) + \langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha\langle\partial^\alpha\delta_{x_0}, \varphi\rangle + \langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle$$

Hem de veure que $|\langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle| \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$. Definim $\omega_\varepsilon(x) := \omega((x-x_0)/\varepsilon)$, que val 1 en $B(x_0,\varepsilon)$ i 0 en $\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, 2\varepsilon)$. Clarament $R_{k,\varepsilon} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, i per tant, $R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per tant:

$$\langle T, R_{k,\varepsilon}\rangle = \langle T, R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon\rangle + \langle T, R_{k,\varepsilon}(1-\omega_\varepsilon)\rangle = \langle T, R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon\rangle$$

ja que $R_{k,\varepsilon}(1-\omega_\varepsilon)$ té suport a $\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$. Usant l'apartat anterior, tenim que $T \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n)$ i, per tant, $\exists C \in \mathbb{R}$ i $N, m \in \mathbb{N}$ tals que:

$$|\langle T, R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon\rangle| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{|x|\leq N} \left|\partial^\beta(R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon)(x)\right| = C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{\substack{|x|\leq N\\ |x-x_0|\leq 2\varepsilon}} \left|\partial^\beta(R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon)(x)\right|$$

Fent servir la regla de Leibniz per $\beta \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^d$ i usant que $|x-x_0| \leq 2\varepsilon$ tenim que:

$$\left|\partial^\beta(R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon)(x)\right| = \left|\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma\omega_\varepsilon\partial^{\beta-\gamma}R_{k,\varepsilon}\right| \lesssim \sum_{\gamma\leq\beta}\frac{1}{\varepsilon^{|\gamma|}}|\varepsilon|^{k+1-(|\beta|-|\gamma|)} \lesssim \varepsilon^{k+1-|\beta|}$$

on hem usat que $\left|\partial^{\beta-\gamma}(x-x_0)^\alpha\right| \simeq |x-x_0|^{|\alpha|-(|\beta|-|\gamma|)}$ i $|\alpha| = k+1$ i, per tant, $\left|\partial^{\beta-\gamma}R_{k,\varepsilon}\right| \lesssim |\varepsilon|^{k+1-(|\beta|-|\gamma|)}$ (també fent Leibniz). Per tant, com que $|\beta| \leq m$, triant $k = m$ tenim que:

$$|\langle T, R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon\rangle| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{\substack{|x|\leq N\\ |x-x_0|\leq 2\varepsilon}} \left|\partial^\beta(R_{k,\varepsilon}\omega_\varepsilon)(x)\right| \lesssim \sum_{|\beta|\leq m} \varepsilon^{m+1-|\beta|} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

c. De l'apartat anterior tenim que $\widehat{T} = \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha\partial^\alpha\delta_{\xi_0}$. Prenent $\mathcal{F}^{-1}$ a ambdós costats i usant que

$$\mathcal{F}^{-1}(\partial^\alpha\delta_{\xi_0}) = \mathcal{F}^3(\partial^\alpha\delta_{-\xi_0}) = \mathcal{F}^2((2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha\widehat{\delta_{\xi_0}}) = (-2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha\widehat{\delta_{-\xi_0}} = (-2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathrm{e}^{2\pi i\xi\cdot\xi_0}$$

obtenim:

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha\mathcal{F}^{-1}(\partial^\alpha\delta_{\xi_0}) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(-2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathrm{e}^{2\pi i\xi\cdot\xi_0}$$

En particular si $\xi_0 = 0$, aleshores $T = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(-2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha$, que és un polinomi en ξ.

d. Fent transformada de Fourier a l'equació obtenim:

$$0 = \widehat{\Delta u} = \sum_{i=0}^{n} \widehat{{\partial_i}^2 u} = \sum_{i=0}^{n} (2\pi \mathrm{i} \xi_i)^2 \widehat{u} = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}$$

Ara sigui $\varepsilon > 0$ i $B_\varepsilon := \overline{B(0,\varepsilon)}$. Considerem $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon$. Aleshores, la funció $\phi(\xi) := \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2}$ està ben definida is pertant a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En efecte, si $\xi \in B_{\varepsilon/2}$, com que totes les derivades de φ s'anul·len en $B_{\varepsilon/2}$, tenim que:

$$|\phi(\xi)| = \left| \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0) - \boldsymbol{\nabla}\varphi(0) \cdot \xi}{|\xi|^2} \right| \leq |H\varphi(\eta)| \frac{|\xi|^2}{2|\xi|^2} = 0$$

ja que $|\eta| \leq |\xi|$. Per tant, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i llavors:

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, |\xi|^2 \phi \rangle = \langle |\xi|^2 u, \phi \rangle = 0$$

Com que això és vàlid $\forall \varepsilon > 0$, tenim que $\widehat{u}$ té suport contingut a $\{0\}$ (i no pot ser $\varnothing$, perquè si no seria la solució trivial), i per tant, u és un polinomi, per l'apartat anterior.