Control discret de trajectòries mitjançant maniobres impulsives

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Càlcul numèric
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Juny de 2023

L'objectiu d'aquesta pràctica és resoldre el problema de calcular maniobres per impulsar un satèl·lit, des d'una posició i velocitat fins a unes altres. Per això primer farem diversos problemes d'exemple.

Abans de tot, per a el correcte ús del codi, cal donar permisos d'execució al fitxer `execute.sh`[1]:

```
chmod +x execute.sh
```

Part 1

Considerem el sistema diferencial que modela el moviment d'un pèndol forçat i amb fregament.

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -\sin r - \mu v + \sin(\omega t) \end{cases}$$

on $\mu, \omega \geq 0$. Si executem el codi amb

```
./execute.sh pendulum
```

obtindrem el següent gràfic, on es mostren diverses òrbites del sistema:

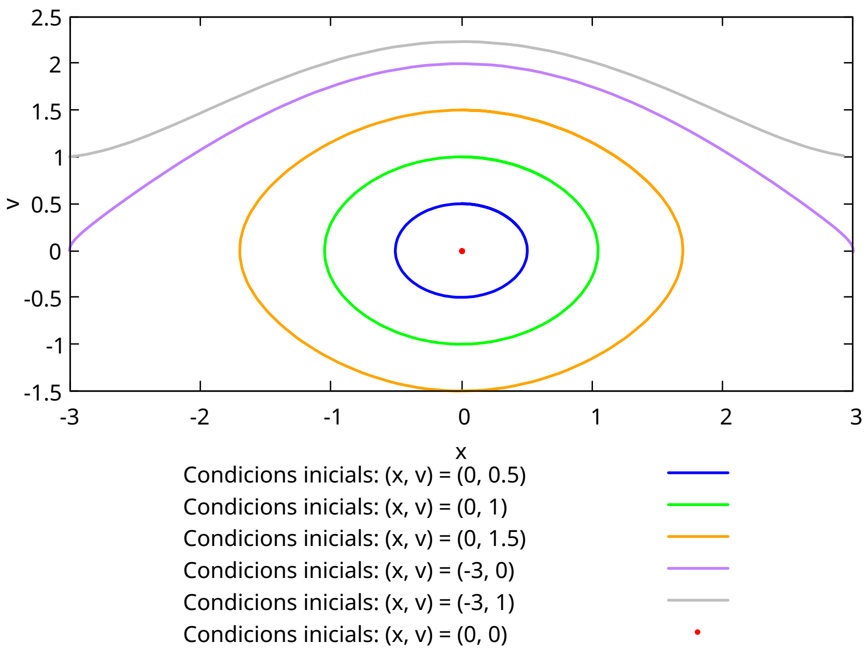

Figura 1: Òrbites del sistema del pèndol amb $\mu = 0$ i $\omega = 0$ partint de diversos punts inicials.

[1] Totes les instruccions que apareixen en aquest document són vàlides per a sistemes UNIX. Per a sistemes Windows, podrien variar lleugerament.

Ara considerem els següents problemes d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} y' = 2y/t \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}$$

Les solucions d'aquests dos problemes són fàcils d'obtenir i venen donades respectivament per:

$$y(t) = t^2 \qquad x(t) = \cos t + \sin t$$

L'objectiu d'aquesta part de la pràctica és calcular el flux d'aquests dos sistemes diferencials en el punt $t = 2$ i $t = 1$, respectivament. Executant

```
./execute.sh flow_sample
```

observem que els valors obtinguts són idèntics als reals: $y(2) = 4$ i $x(1) = \cos 1 + \sin 1 \simeq 1.3817732907$.

Considerem ara el sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = -\beta z + xy \end{cases}$$

amb $\sigma = 10$, $\rho = 28$ i $\beta = 2.6$. Si executem

```
./execute.sh lorenz
```

obtindrem el següent gràfic:

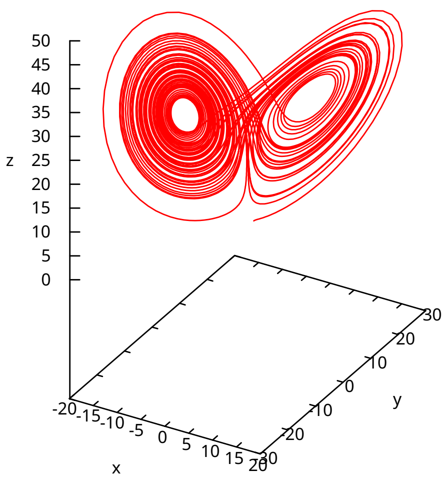

Figura 2: Òrbita del sistema de Lorenz partint de $(1.1, 0.36, 3.14)$.

Finalment, considerem el problema restringit dels tres cossos. En coordenades sinòdiques, el sistema ve donat per:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \end{cases}$$

on

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{v} &= (u, v, w)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a} &= 2(v, -u, 0)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\Omega(\mathbf{r}) \\ \Omega(\mathbf{r}) &= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) \\ \rho_1 &= \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}$$
$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

assumint $m_1 \geq m_2$. Si executem

```
./execute.sh rtbps
```

obtindrem el següent gràfic:

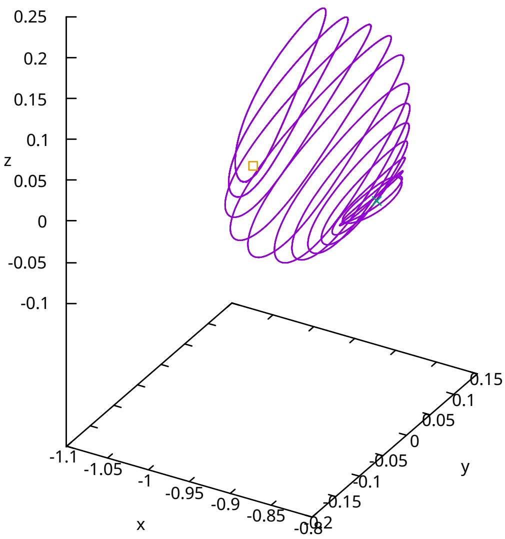

Figura 3: Continu d'òrbites periòdiques del sistema del problema restringit de 3 cossos. El quadrat groc correspon a la lluna i la creu blava al punt d'equilibri de Lagrange L_1. No hem dibuixat la Terra, situada en $(0.01215, 0, 0)$, perquè distorsionava la mida de la imatge.

Part 2

En aquesta part de la pràctica l'objectiu és implementar el càlcul de la diferencial del flux d'un sistema diferencial. Per a comprovar que el que hem fet és el correcte, compararem els valors numèrics de les derivades del flux mitjançant dos mètodes: a partir de les variacionals i calculant la derivada com una diferència finita centrada. Per a fer-ho, considerarem el següent sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = \alpha(1-r^2)x - y \\ y' = x + \alpha(1-r^2)y \end{cases}$$

on $r^2 = x^2 + y^2$. Si executem

```
./execute.sh ex2
```

obtindrem els següents erros entre els valors numèrics de les derivades del flux (usant una tolerància de 10^{-6} per Runge-Kutta i de 10^{-4} per la diferència finita centrada):

$$\phi_x^1 \to 5.40878 \times 10^{-11}$$
$$\phi_y^1 \to 3.15831 \times 10^{-10}$$
$$\phi_x^2 \to 5.04729 \times 10^{-10}$$
$$\phi_y^2 \to 3.9809 \times 10^{-10}$$

on el $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \phi^2)$ és el flux del sistema.

Part 4

En aquesta última part de la pràctica l'objectiu és trobar les maniobres $\Delta \mathbf{v}_0$ i $\Delta \mathbf{v}_1$ que permeten passar d'una posició i velocitat inicials $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)^{\mathrm{T}}$ donades a una posició i velocitat finals $(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)^{\mathrm{T}}$ també donades, en un temps Δt. Més precisament, volem trobar maniobres que permetin fer el següent:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\Delta \mathbf{v}_0]{\text{maniobra}} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{vol lliure}} \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\Delta \mathbf{v}_1]{\text{maniobra}} \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{vol lliure}} \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2} \left(\phi_{\Delta t/2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Per tant, cal trobar $\Delta \mathbf{v} = (\Delta \mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}_1)^{\mathrm{T}}$ tal que anul·lin la funció:

$$\mathbf{G}(\Delta \mathbf{v}) = \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2} \left(\phi_{\Delta t/2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}_f \end{pmatrix}$$

Això ho resoldrem mitjançant el mètode de Newton multidimensional. Per a fer-ho, necessitem calcular la matriu jacobiana de $\mathbf{G}$, que ho podrem fer a partir de les variacionals del flux. Per a trobar els iterats de Newton, usarem el mètode de Gauss per resoldre el sistema lineal associat.

Comencem primer amb un problema d'exemple, el del pèndol. Suposem que $r_0 = 1$, $v_0 = 0$, $r_f = 0$, $v_f = -\sqrt{2(1-\cos 1)} \simeq -0.95885108$ i $\Delta t = \pi/2$. Si executem la instrucció

```
./execute.sh ex43
```

obtindrem el següent resultat:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.0926981627735679 \\ 0.0062078732568572 \end{pmatrix}$$

amb una tolerància de 10^{-12}.

Finalment, si executem la instrucció

```
./execute.sh cmani_rtbp
```

obtindrem que les maniobres necessàries per passar del punt inicial

$$\begin{pmatrix} {\mathbf{r}_0}^{\mathrm{T}} \\ {\mathbf{v}_0}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8457719086638686 & 0.0593402867271311 7 & 0 \\ 0.0376952673882856 4 & 0.0151506257061370 1 & 0.0457779983468174 3 \end{pmatrix}$$

al punt final

$$\begin{pmatrix} {\mathbf{r}_f}^{\mathrm{T}} \\ {\mathbf{v}_f}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8518851062423166 & 0.06132143191581388 & 0.000512072515879493 9 \\ 0.0206128163364461 & 0.01844596878578819 & 0.04641615142301939 \end{pmatrix}$$

en un temps $\Delta t = 2.746177778348061$ són:

$$\begin{pmatrix} {\Delta \mathbf{v}_0}^{\mathrm{T}} \\ {\Delta \mathbf{v}_1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.326184791197963 \times 10^{-6} & -1.285657562239232 \times 10^{-5} & -1.545884623736697 \times 10^{-6} \\ -5.989126097485234 \times 10^{-6} & -1.071156972197014 \times 10^{-5} & -1.809272933729815 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$