El problema dels 2 cossos

Siguin 2 cossos de masses m_1 i m_2 que s'excerceixen una força mútua a causa dels seus respectius camps gravitacionals. Denotant $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ les posicions dels dos cossos, el potencial gravitacional que experimenta el primer cos depèn només de la distància que el separa del segón cos, i està donat per

$$U_1(X_1) = -\frac{G\,m_1 m_2}{|X_1 - X_2|}$$

i l'equació del moviment és:

$$m_1\ddot{X}_1 = -\nabla U_1(X_1) = -\frac{G\,m_1 m_2}{|X_1 - X_2|^3}(X_1 - X_2).$$

De forma anàloga, pel segón cos es té

$$U_2(X_2) = -\frac{G\,m_1 m_2}{|X_2 - X_1|}$$

i

$$m_2\ddot{X}_2 = -\nabla U_2(X_2) = -\frac{G\,m_1 m_2}{|X_2 - X_1|^3}(X_2 - X_1).$$

Definim ara les variables $X_0 = m_1 X_1 + m_2 X_2$ i $X = X_2 - X_1$, que es corresponen amb el centre de masses del sistema i en la posició relativa del cos 2 respecte el cos 1. Les equacions del moviment per aquestes noves variables són

$$\ddot{X}_0 = 0$$

i

$$\ddot{X} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|X|^3}X, \tag{1}$$

que estan desacoblades la qual cosa facilita en facilita l'anàlisi.

Propietats dinàmiques: conservació del moment angular

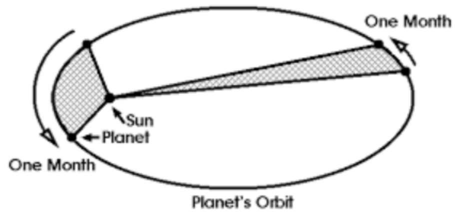
El **moment angular**, definit com el producte vectorial $K(t) := X(t) \wedge X'(t)$, es conserva. Per veure-ho obesrvem que

$$K'(t) = X'(t) \wedge X'(t) + X(t) \wedge X''(t) = 0$$

ja que $X''(t)$ és un múltiple de $X(t)$ (concretament $\ddot{X} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|X|^3}X$) i per tant $X(t) \wedge X''(t) = 0$.

Això implica que les trajectòries dels dos cossos estan contingudes a un pla, concretament al pla perpendicular al vector $K := K(0)$ que passa pel centre de masses.

En el pla del moviment, per tant, la dinàmica de X es pot descriure en coordenades polars. Així, si $X(t) = R(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))^\top$, es té $|K(t)| = |R(t)^2\theta'(t)|$, que equival a l'àrea que escombra un dels cossos quan es mou entorn de l'altre per unitat de temps, el que es coneix com a **velocitat alveolar**. Com $K(t)$ és constant, es dedueix que la velocitat alveolar també es conserva (i en particular es dedueix la segona llei de Kepler: que l'area escombrada d'un cos respecte l'altre en un cert interval de temps es constant). Així quan, per exemple, el segon cos està prop del primer, es mourà més ràpid que quan està més lluny com s'il·lustra en el següent gràfic:



S'il·lustra amb una òrbita el·líptica de (1) però el mateix passaria amb les òrbites paràboliques i hiperbòliques (1) (veure bibliografia epecialitzada per un ànalisi exhaustiu sobre les classes d'òrbites que pot presentar l'equació (1)).

Introduïnt $v(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))^\top$ i $v(t)^\perp = (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)))^\top$, es té $X(T) = R(t)v(t)$ i

$$X''(t) = R''(t)v(t) + 2R'(t)v'(t) + R(t)v''(t) = (R''(t) - R(t)\theta'(t)^2)v(t) + (2R'(t)\theta'(t) + \theta''(t))v(t)^\perp,$$

de manera que utilitzant (1) se segueix (pel fet que $v(t)$ i $v(t)^\perp$ són linealment independents) que

$$-\frac{G(m_1+m_2)}{R(t)^2} = R''(t) - R(t)\theta'(t)^2 \qquad \text{i} \qquad 0 = 2R'(t)\theta'(t) + \theta''(t).$$

Òrbites circulars

L'equació del moviment per $R(t)$ és, per tant,

$$R''(t) = -\frac{G(m_1+m_2)}{R(t)^2} + \frac{k^2}{R(t)^3} =: V(R(t), k)$$

on k és el "coeficient" del moment angular, donat per $k := R(t)^2\theta'(t) \equiv R(0)^2\theta'(0)$. En particular, els cossos giraran l'un respecte l'altre en òrbites circulars i a velocitat angular constant ω si R_c és un zero de $V(R_c, R_c^2\omega) = 0$.

Si ens trobem en aquesta situació en la que els cossos giren l'un respecte l'altre en òrbites circulars i prenem unitats temporals de manera que 2π unitats de temps es corresponguin al temps que un dels cossos triga en completar una volta entorn de l'altre (és a dir unitats temporals de manera que $\omega = 1$), aleshores (prenent coordenades espacials de manera que el pla de rotació sigui el pla x, y i l'origen de coordenades, i.e. X_0, és el centre de masses dels 2 cossos) es té que la posició dels cossos es descriu com

$$X_1(t) = A(t)X_1(0) \qquad \text{i} \qquad X_2(t) = A(t)X_2(0) \tag{2}$$

on

$$A(t)=\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t) & 0\\ \sin(t) & \cos(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Si, a més a més, prenem com a unitat de longitud la distància entre els dos cossos (és a dir prenem $R_c=1$), aleshores la constant de gravitació universals en aquestes unitats temporals i espacials és (utilitzant que $V(R_c,k)=0$ i $R_c=1$ i $k=R_c^2\omega=1$)

$$G=\frac{1}{m_1+m_2},$$

on les unitats de massa són les originals.

Problema restringit dels 3 cossos

Considerem 2 cossos primaris que es mouen en òrbites circulars l'un respecte l'altre com descriu l'equació ((2)) i prenem com a unitat de longitud la distancia entre els dos cossos. Suposem que a temps 0 els cossos es troben sobre l'eix de les x, concretament que el cos de massa m_1 es troba al punt $X_1(0)=(x_1(0),0,0)^\top$ i el cos de massa m_2 es troba a $X_2(0)=(x_2(0),0,0)^\top$. Imposar que el centre de masses és l'origen de coordenades i que la distancia entre els dos punts és 1 (és a dir que $m_1x_1(0)+m_2x_2(0)=0$ i $x_1(0)-x_2(0)=1$) equival a dir que

$$x_1(0)=\frac{m_2}{m_1+m_2}=:\mu \qquad \text{i} \qquad x_2(0)=\mu-1,$$

és a dir

$$X_1(0)=(\mu,0,0)^\top \qquad \text{i} \qquad X_2(0)=(\mu-1,0,0)^\top \tag{3}$$

Considerem ara un tercer cos que té una massa m molt petita en comparació a m_1 i m_2, de manera que pràcticament les òrbites dels dos cossos primaris no es veuen afectades per aquest tercer cos (de manera que té sentit aproximar les seves trajectòries amb la fórmula (2)). La dinàmica del tercer cos, per contra, sí està afectada pels cossos primaris. Concretament el potencial gravitacional que experimenta el tercer cos depèn de les distàncies que el separen dels cossos primaris, i està donat per (a partir d'ara utilitzem $X\in\mathbb{R}^3$ com la posició del tercer cos, res a veure amb la X de les seccions anteriors)

$$U(X)=-\frac{G\,mm_1}{|X-X_1|}-\frac{G\,mm_2}{|X-X_2|},$$

i l'equació del moviment és:

$$m\ddot{X}=-\nabla U(X)=-\frac{G\,mm_1}{|X-X_1|^3}(X-X_1)-\frac{G\,mm_2}{|X-X_2|^3}(X-X_2),$$

que es reescriu (utilitzant que $G=1/(m_1+m_2)$ en les unitats espacio-temporals que estem utilitzant) com

$$X''(t)=-\frac{1-\mu}{|X(t)-X_1(t)|^3}(X(t)-X_1(t))-\frac{\mu}{|X(t)-X_2(t)|^3}(X(t)-X_2(t)). \tag{4}$$

En l'equació anterior he fet explícita la variable temporal per emfatitzar que l'equació diferencial no és autonoma, ja que el camp depèn de les posicions dels cossos primaris que vairen al llarg del temps. Per tal d'estudiar la dinàmica del tercer emprant una equació diferencial ordinària autònoma considerem la variable $Y(t) = A(t)^{-1}X(t)$. Observem que aquesta nova variable ens dona la posició del tercer cos relativa als cossos primaris, concretament és la posició que té el tercer cos quan es desfant les voltes que han fet els cossos primaris.

En aquest punt és oportú fer alguns comentaris sobre $t \mapsto A(t)$. D'entrada observem que $A(t)$ és ortogonal per tot t, de manera que $|A(t)v| = |v|$ per tot $v \in \mathbb{R}^3$ on $|\cdot|$ és la norma euclidea i $A(t)^{-1} = A(t)^\top$. Després, derivatnt $A(t)$ per calcular $A'(t)$ i $A''(t)$ es comprova que

$$A(t)^\top A'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad A(t)^\top A''(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara, de $X(t) = A(t)Y(t)$ se segueix

$$X''(t) = A''(t)Y(t) + 2A'(t)Y'(t) + A(t)Y''(t), \tag{5}$$

i, utilitzant (4) i que $X_1(t) = A(t)X_1(0)$ i $X_2(t) = A(t)X_2(0)$,

$$\begin{aligned} X''(t) &= -\frac{1-\mu}{|A(t)(Y(t)-X_1(0))|^3}A(t)(Y(t)-X_1(0)) - \frac{\mu}{|A(t)(Y(t)-X_2(0))|^3}A(t)(Y(t)-X_2(0)) \\ &= -A(t)\left(\frac{1-\mu}{|Y(t)-X_1(0)|^3}(Y(t)-X_1(0)) - \frac{\mu}{|Y(t)-X_2(0)|^3}(Y(t)-X_2(0))\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Finalment, multiplicant a banda i banda les igualtats (5) i (6) per $A(t)^{-1} = A(t)^\top$, s'obté una equació autònoma per Y, que és (denotant $Y(t) = (x(t), y(t), z(t))^\top$)

$$Y''(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1-\mu}{|Y(t)-X_1(0)|^3}(Y(t)-X_1(0)) - \frac{\mu}{|Y(t)-X_2(0)|^3}(Y(t)-X_2(0)).$$

Aquesta equació es pot reescriure com apareix a la pràctica:

$$Y''(t) = 2\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla\Omega(Y(t))$$

amb

$$\Omega(Y) = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{|Y-X_1(0)|} + \frac{\mu}{|Y-X_2(0)|} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

on $Y = (x, y, z)^\top$ i $X_1(0)$ i $X_2(0)$ estan dondades a (3). Noteu que l'últim terme del potencial Ω és irrellavant des del punt de vista dinàmic (no afecta al gradient d'Ω), però té cert sentit físic ja que està relacionat amb l'energia del sistema format pels cossos primaris.