Control discret de trajectòries mitjançant maniobres impulsives

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Càlcul numèric
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Juny de 2023

L'objectiu d'aquesta pràctica és resoldre el problema de calcular maniobres per impulsar un satèl·lit, des d'una posició i velocitat fins a unes altres. Per això primer farem diversos problemes d'exemple.
Abans de tot, per a el correcte ús del codi, cal donar permisos d'execució al fitxer `execute.sh`[1]:

```
chmod +x execute.sh
```

Part 1

Considerem el sistema diferencial que modela el moviment d'un pèndol amb fregament i forçat.

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -\sin r - \mu v + \sin(\omega t) \end{cases}$$

on $\mu, \omega \geq 0$. Si executem el codi amb

```
./execute.sh pendulum
```

obtindrem el següent gràfic, on es mostren diverses òrbites del sistema: Ara considerem els següents problemes

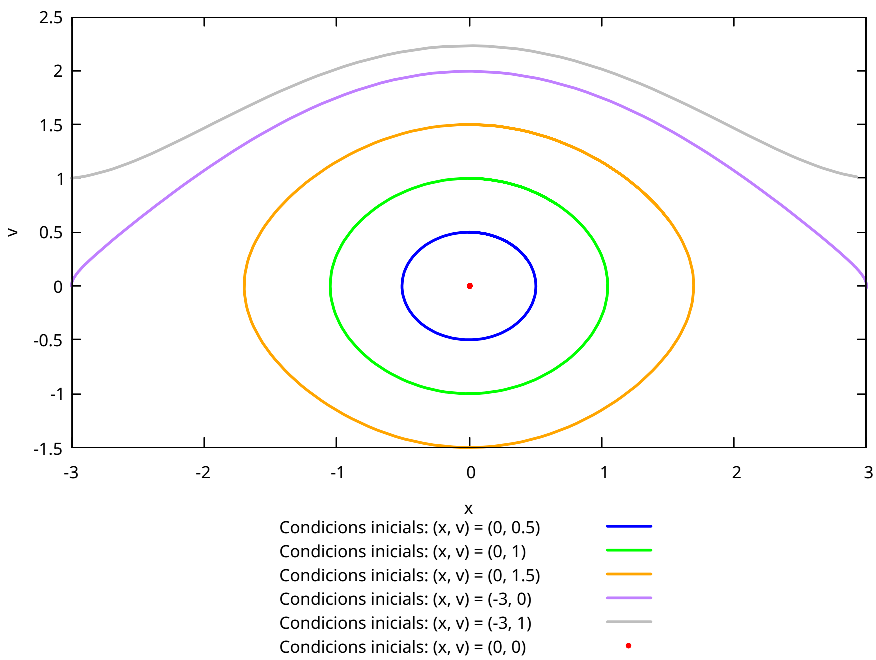

Figura 1: Òrbites del sistema del pèndol amb $\mu = 0$ i $\omega = 0$ partint de diversos punts inicials.

[1] Totes les instruccions que apareixen en aquest document són vàlides per a sistemes UNIX. Per a sistemes Windows, podrien variar lleugerament.

d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} y' = 2y/t \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}$$

Les solucions d'aquests dos problemes són fàcils d'obtenir i venen donades respectivament per:

$$y(t) = t^2 \qquad x(t) = \cos t + \sin t$$

L'objectiu d'aquesta part de la pràctica era calcular el flux d'aquests dos sistemes diferencials en el punt $t = 2$ i $t = 1$, respectivament. Executant

```
./execute.sh flow_sample
```

observem que els valors obtinguts són idèntics als reals: $y(2) = 4$ i $x(1) = \cos 1 + \sin 1 \simeq 1.3817732907$. Considerem ara el sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = -\beta z + xy \end{cases}$$

amb $\sigma = 10$, $\rho = 28$ i $\beta = 2.6$. Si executem

```
./execute.sh lorenz
```

obtindrem el següent gràfic: Finalment, considerem el problema restringit dels tres cossos. En coordenades

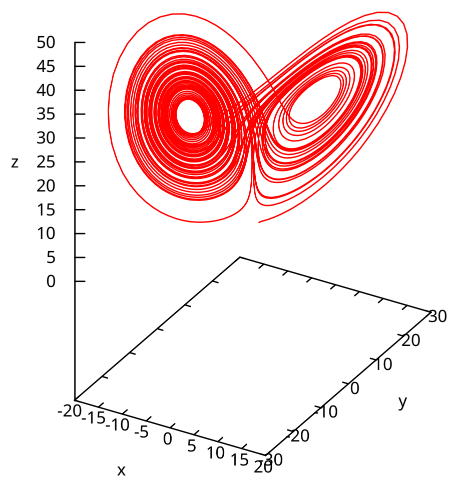

Figura 2: Òrbita del sistema de Lorenz partint de $(1.1, 0.36, 3.14)$.

sinòdiques, el sistema ve donat per:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \end{cases}$$

on

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{v} &= (u, v, w)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a} &= 2(v, -u, 0)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\Omega(\mathbf{r}) \\ \Omega(\mathbf{r}) &= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \\ \rho_1 &= \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2} \\ \mu &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

assumint $m_1 \geq m_2$. Si executem

```
./execute.sh rtbps
```

obtindrem el següent gràfic:

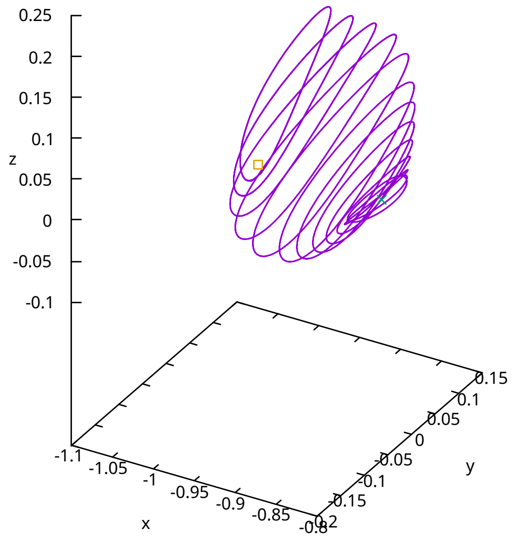

Figura 3: Continu d'òrbites periòdiques del sistema del problema restringit de 3 cossos. El quadrat groc correspon a la lluna i la creu blava al punt d'equilibri de Lagrange L_1. No hem dibuixat la Terra, situada en $(0.01215, 0, 0)$, perquè distorsionava la mida de la imatge.

Part 2

En aquesta part de la pràctica l'objectiu és implementar el càlcul de la diferencial del flux d'un sistema diferencial. Per a comprovar que el que hem fet és el correcte, compararem els valors numèrics de les derivades del flux mitjançant dos mètodes: a partir de les variacionals i calculant la derivada com una diferència finita centrada. Per a fer-ho, considerarem el següent sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = \alpha(1-r^2)x - y \\ y' = x + \alpha(1-r^2)y \end{cases}$$

on $r^2 = x^2 + y^2$. Si executem

```
./execute.sh ex2
```

obtindrem els següents erros entre els valors numèrics de les derivades del flux (usant una tolerància de 10^{-6} per Runge-Kutta i de 10^{-4} per la diferència finita centrada):

$$\begin{aligned} \phi_x^1 &\to 5.40878 \times 10^{-11} \\ \phi_y^1 &\to 3.15831 \times 10^{-10} \\ \phi_x^2 &\to 5.04729 \times 10^{-10} \\ \phi_y^2 &\to 3.9809 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

on el $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \phi^2)$ és el flux del sistema.

Part 4

En aquesta última part de la pràctica l'objectiu és trobar les maniobres $\Delta\mathbf{v}_0$ i $\Delta\mathbf{v}_1$ que permeten passar d'una posició i velocitat inicials $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)^{\mathrm{T}}$ donades a una posició i velocitat finals $(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)^{\mathrm{T}}$ també donades en un temps

Δt. Més precisament:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{v}_0\end{pmatrix} &\overset{\substack{\text{maniobra}\\ \Delta\mathbf{v}_0}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{v}_0+\Delta\mathbf{v}_0\end{pmatrix}\\
&\overset{\text{vol lliure}}{\longrightarrow} \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{v}_0+\Delta\mathbf{v}_0\end{pmatrix}\\
&\overset{\substack{\text{maniobra}\\ \Delta\mathbf{v}_1}}{\longrightarrow} \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{v}_0+\Delta\mathbf{v}_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \Delta\mathbf{v}_1\end{pmatrix}\\
&\overset{\text{vol lliure}}{\longrightarrow} \boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2}\left(\phi_{\Delta t/2}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{v}_0+\Delta\mathbf{v}_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \Delta\mathbf{v}_1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Per tant, cal trobar $\Delta\mathbf{v}=(\Delta\mathbf{v}_0,\Delta\mathbf{v}_1)^{\mathrm{T}}$ tal que anul·li la funció:

$$\mathbf{G}(\Delta\mathbf{v})=\boldsymbol{\phi}_{\Delta t/2}\left(\phi_{\Delta t/2}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{v}_0+\Delta\mathbf{v}_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \Delta\mathbf{v}_1\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}\mathbf{r}_f\\ \mathbf{v}_f\end{pmatrix}$$

Això ho resoldrem mitjançant el mètode de Newton multidimensional. Per a fer-ho, necessitem calcular la matriu jacobiana de $\mathbf{G}$, que ho podrem fer a partir de les variacionals del flux.
Comencem primer amb un problema d'exemple, el del pèndol. Suposem que $r_0=1$, $v_0=0$, $r_f=0$, $v_f=-\sqrt{2(1-\cos 1)}\simeq -0.95885108$ i $\Delta t=\pi/2$. Si executem la instrucció

```
./execute.sh ex43
```

obtindrem el següent resultat:

$$\Delta\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-0.0926981627735690\\ 0.0062078732568581\end{pmatrix}$$

amb una tolerància de 10^{-12}.