

Mesures de dissonància

Víctor Ballester Oriol Bosquet Carlo Sala

Taller de modelització

Grau en Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Maig 2021

Definicions prèvies

Definició (So simple)

Un *so simple* és una parella (f, a) on f és la freqüència del so i a és l'amplitud d'aquest.

Definició (So complex)

Un *so complex* (o nota musical) amb n harmònics és una parella $(F, A) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on $F = (f_1, \dots, f_n)$ són les freqüències de cada un dels harmònics i $A = (a_1, \dots, a_n)$ són les amplituds de cada un d'aquests.

Definició (Dissonància)

Qualitat de dos o més sons amb una relació de freqüències concreta, que sonen poc agradables a l'oïda humana.

Definició (Consonància)

Qualitat de dos o més sons amb una relació de freqüències concreta, que sonen agradables a l'oïda humana.

Primer model per a sons simples

Dissonància entre dues freqüències f_1 i f_2 :

$$\text{diss}(r) = \begin{cases} e^{\beta f_1(r-1+\gamma_{f_1})} & \text{si } 0 < r < 1 - \gamma_{f_1} \\ \cosh \left[\frac{\text{arccosh}(2)}{(\gamma_{f_1})^2} (r-1)^2 \right] - 1 & \text{si } 1 - \gamma_{f_1} < r < 1 + \gamma_{f_1} \\ e^{-\beta f_1(r-1-\gamma_{f_1})} & \text{si } 1 + \gamma_{f_1} < r \end{cases}$$

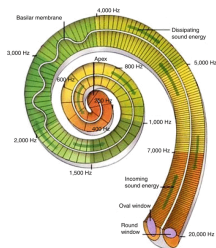
on β és una constant i $\gamma_{f_1} \propto \frac{1}{f_1}$.

Inconsistències i problemes del model:

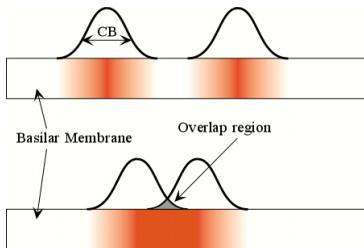
- No dependència de $f_2/f_1 \implies$ Mal comportament a freqüències altes
- Complexitat de la fórmula
- No dependència de l'amplitud dels sons

Teoria auditiva

Per tal d'introduir el nou model necessitem fer menció de l'**amplada de banda crítica**.



(a) Còclea ↗



(b) Membrana basilar ↗

- Dues freqüències que vibren a la mateixa zona de la membrana basilar són **dissonants**.
- Dues freqüències que no vibren a la mateixa zona de la membrana basilar són **consonants**.

Parametrització de l'amplada de banda crítica [1]:

$$CBW(f) = 1.72f^{0.65}$$

Segon model per a sons simples

Plomp i Levelt [2] van modelitzar empíricament les corbes de dissonància en relació amb la banda crítica.

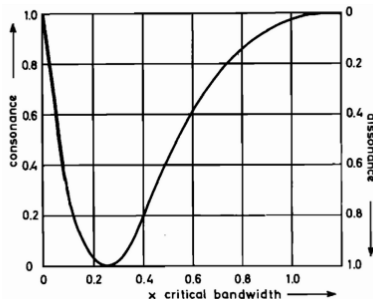


Figura: Resultats empírics de Plomp i Levelt [2]

Algunes equacions que aproximen aquest tipus de funcions són:

$$\delta_1(x) = e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} \quad [3] \quad \delta_2(x) = e^{-(\log(\beta x))^2} \quad \delta_3(x) = \beta x e^{-\beta x}$$

Considerem dos sons simples (f_1, a_1) i (f_2, a_2) :

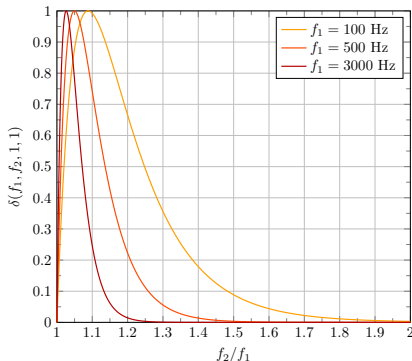
$$\delta(x) \Rightarrow \delta(f_1, f_2, a_1, a_2)$$

Imposant:

- 1 $\max \delta(f_1, f_2, 1, 1) = 1$ i que s'assoleixi quan $\frac{|f_1 - f_2|}{\text{CBW}(f_m)} = 0.25$, on $f_m = \frac{f_1 + f_2}{2}$.
- 2 $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2) \propto a_1 a_2$

Resulta:

$$\delta(f_1, f_2, a_1, a_2) = a_1 a_2 \frac{|f_2 - f_1|}{\text{CBW}(f_m) \cdot 0.25} e^{1 - \frac{|f_2 - f_1|}{\text{CBW}(f_m) \cdot 0.25}}$$



Model per a sons complexos

Considerem dos sons complexos $S_1 = (F_1, A_1) \in (\mathbb{R}^{n_1})^2$ i $S_2 = (F_2, A_2) \in (\mathbb{R}^{n_2})^2$:

$$F_1 = (f_1, 2f_1, \dots, n_1 f_1) \quad A_1 = (a_1, \dots, a_{n_1})$$

$$F_2 = (f_2, 2f_2, \dots, n_2 f_2) \quad A_2 = (a_1, \dots, a_{n_2})$$

Si definim $D(S_k)$ (dissonància intrínseca) com:

$$D(S_k) = D((F_k, A_k)) = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=i}^{n_k} \delta(if_k, jf_k, a_k, a_k)$$

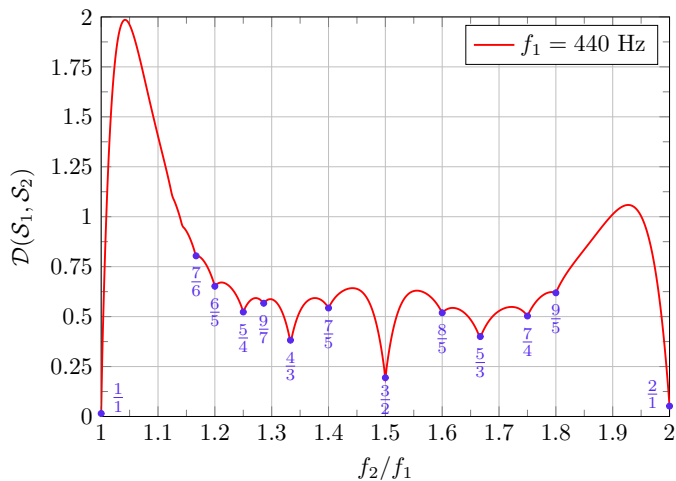
I $D(S_1, S_2)$ (dissonància comú) com:

$$D(S_1, S_2) = D((F_1, A_1), (F_2, A_2)) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \delta(if_1, jf_2, a_i, a_j)$$

Dissonància total $\mathcal{D}(S_1, S_2)$:

$$\mathcal{D}(S_1, S_2) = D(S_1) + D(S_2) + D(S_1, S_2).$$

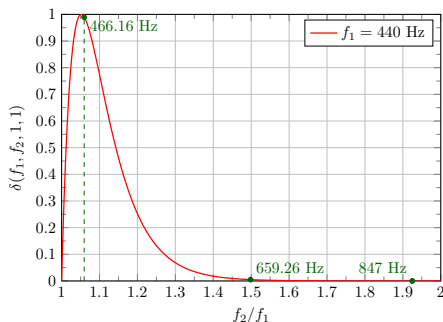
Si considerem $n_1 = n_2 = 7$, $a_k = \frac{1}{k^{0.4}}$ i fixem $f_1 = 440$ Hz:



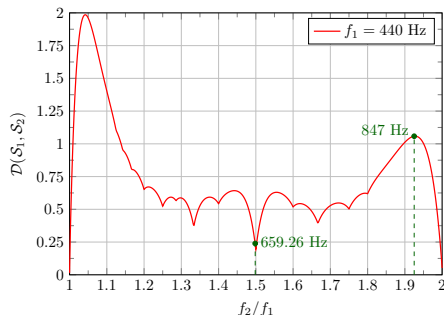
Aclariment

Diferència entre sons simples i sons complexos:

	$f_2 = 466.16 \text{ Hz}$	$f_2 = 659.26 \text{ Hz}$	$f_2 = 847 \text{ Hz}$
So simple	Play	Play	Play
So complex	dissonant	"no dissonant"	"no dissonant"
		Play	Play
		consonant	dissonant



(a) Sons simples



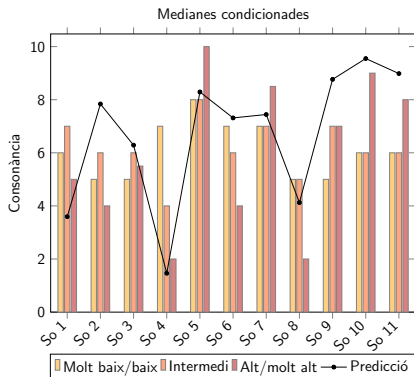
(b) Sons complexos

Verificació del model

Per tal de verificar el nostre model hem dut a terme un test.

- Cada persona valorava el seu nivell musical (molt baix, baix, intermedi, alt o molt alt).
- Hi havia 11 combinacions de dos sons complexos.
- S'havia de qualificar cada so d'1 (molt dissonant) a 10 (molt consonant).

En total vam aconseguir 190 respostes.






Possibles millores:

- Generalització de la fórmula per un nombre arbitrari de sons:

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) \implies \mathcal{D}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n)$$

- Considerar sons no harmònics
- Millorar la fiabilitat del test

Referències

- [1] William Hutchinson i Leon Knopoff. “The acoustic component of western consonance”. A: *Interface* 7.1 (1978), pàg. 1-29. .
- [2] R. Plomp i W. J. M. Levelt. “Tonal consonance and critical bandwidth”. A: *The journal of the Acoustical Society of America* 38.4 (1965), pàg. 548-560. .
- [3] William A. Sethares. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. 2a ed. Springer, 2005. ISBN: 1852337974. .