Mesures de dissonància

Víctor Ballester Oriol Bosquet Carlo Sala

Taller de modelització

Grau en Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Juny 2021

Objectiu del treball

És ben sabut que hi ha combinacions de notes musicals que sonen més bé que d'altres. Des de l'antiguitat se sap que això correspon al fet que certs paràmetres identificatius de les notes són proporcionals a nombres enters senzills.

L'objectiu del treball és donar una modelització matemàtica de com mesurar el grau de dissonància produït quan toquem dues (o més) notes musicals simultàniament.

Definicions prèvies

Definició (Dissonància)

Qualitat de dos o més sons amb una relació de freqüències concreta, que sonen poc agradables a l'oïda humana.

Definició (Consonància)

Qualitat de dos o més sons amb una relació de freqüències concreta, que sonen agradables a l'oïda humana.

Definicions prèvies

Definició (So simple)

Siguin $f \in (0, \infty)$ i $a \in [0, \infty)$. Anomenem *so simple* o *so pur* el parell $s = (f, a)$ on s és el so sinusoidal d'equació:

$$y_s(t) = a \sin(2\pi f t)$$

Denotem per $\mathcal{S}$ el conjunt de sons simples.

Definició (So complex)

Siguin $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ són simples tals que $s_i = (f_i, a_i)$ per $i = 1, \ldots, n$. Anomenem *so complex* el conjunt $\mathbf{X} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ tal que $\mathbf{X}$ és el so d'equació:

$$y_{\mathbf{X}}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{s_i}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t)$$

Denotem per $\mathcal{C}$ el conjunt de sons complexos.

Operacions definides sobre $\mathcal{C}$

Suposem $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}$, on $\mathbf{X} = \{(f_1, a_1), (f_2, a_2), \ldots, (f_n, a_n)\}$.

Definició

Definim la suma $\oplus$ entre sons complexos com l'aplicació:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\longmapsto \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} := \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \end{aligned}$$

Definició

Definim el producte $\cdot$ d'un so complex per un escalar com l'aplicació

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{C} \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (\mathbf{X}, \lambda) &\longmapsto \lambda \cdot \mathbf{X} := \mathbf{Z} \end{aligned}$$

on $\mathbf{Z} = \{(f_1, \lambda a_1), (f_2, \lambda a_2), \ldots, (f_n, \lambda a_n)\} \in \mathcal{C}$.

Model per a sons complexos

Suposem que tenim una funció δ de dissonància per a sons simples:

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{S} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s_1, s_2) &\longmapsto \delta(s_1, s_2) \end{aligned}$$

que satisfà:

1. $\delta(s_1, s_2) = \delta(s_2, s_1) \ \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$.
2. $\delta(\lambda \cdot s_1, s_2) = \lambda\delta(s_1, s_2) \ \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ i $\forall \lambda \in [0, \infty)$.
3. $\delta(s_1, \lambda \cdot s_2) = \lambda\delta(s_1, s_2) \ \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ i $\forall \lambda \in [0, \infty)$.

Definició

Definim la funció d de *dissonància relativa* entre $\mathbf{X} = \{s_i\}_{i=1}^n, \mathbf{Y} = \{r_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{C}$ com:

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta(s_i, r_j)$$

Mesura de dissonància de sons complexos

Definim la dissonància D d'un so complex $\mathbf{X}$ com:

$$D(\mathbf{X}) := d(\mathbf{X}, \mathbf{X})$$

Es pot comprovar que:

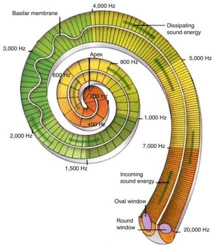
$$D(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}) = D(\mathbf{X}) + D(\mathbf{Y}) + 2d(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

O més en general, donats n sons complexos $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n \in \mathcal{C}$ es compleix que:

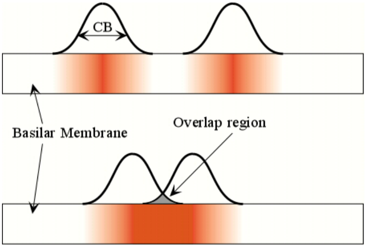
$$D(\mathbf{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\mathbf{X}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} d(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} d(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$$

Teoria auditiva

Per tal de crear la funció δ necessitem fer menció de **l'amplada de banda crítica**.



(a) Còclea



(b) Membrana basilar

- Dues freqüències que vibren a la mateixa zona de la membrana basilar són **dissonants**.
- Dues freqüències que no vibren a la mateixa zona de la membrana basilar són **consonants**.

Parametrització de l'amplada de banda crítica [1]:

$$\mathrm{CBW}(f) = 1.72 f^{0.65}$$

Tria de la funció δ

Plomp i Levelt [2] van modelitzar empíricament les corbes de dissonància en relació amb la banda crítica.

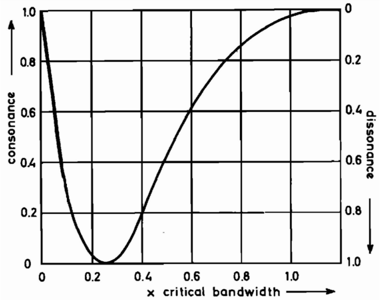


Figura: Resultats empírics de Plomp i Levelt [2]

Algunes equacions que aproximen aquest tipus de funcions són:

$$\delta_1(x) = e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} \text{ [3]} \qquad \delta_2(x) = e^{-(\log(\beta x))^2} \qquad \delta_3(x) = \beta x e^{-\beta x}$$

Considerem dos sons simples $s_1 = (f_1, a_1)$ i $s_2 = (f_2, a_2)$:

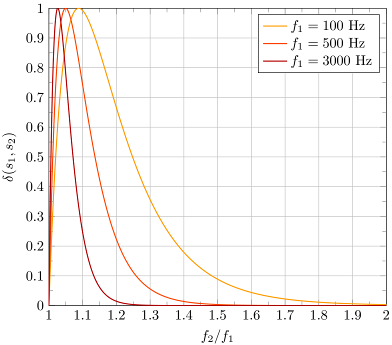
$$\delta(x) \implies \delta((f_1, a_1), (f_2, a_2))$$

Imposant:

1. $\delta(s_1, s_2) = \delta(s_2, s_1)$
2. $\max \delta((f_1, 1), (f_2, 1)) = 1$ i que s'assoleixi quan $\frac{|f_1 - f_2|}{\mathrm{CBW}(f_m)} = 0.25$, on $f_m = \frac{f_1 + f_2}{2}$
3. $\delta((f_1, a_1), (f_2, a_2)) \propto a_1 a_2$

Resulta:

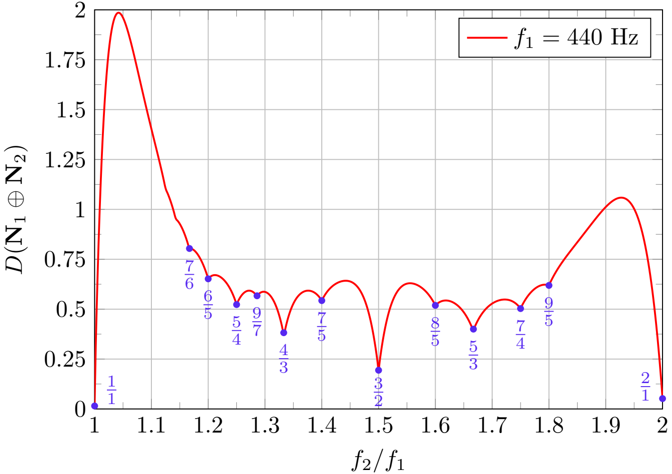
$$\delta((f_1, a_1), (f_2, a_2)) = a_1 a_2 \frac{|f_2 - f_1|}{\mathrm{CBW}(f_m) \cdot 0.25} e^{1 - \frac{|f_2 - f_1|}{\mathrm{CBW}(f_m) \cdot 0.25}}$$



Considerem dues notes musicals $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$ (amb 9 harmònics) de la forma:

$$\mathbf{N}_i = \left\{ (f_i, 1), \left(2f_i, \frac{1}{2^\alpha}\right), \ldots, \left(9f_i, \frac{1}{9^\alpha}\right) \right\} \quad \text{per } i = 1, 2,$$

suposant $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ amb $\alpha = 0.75$:

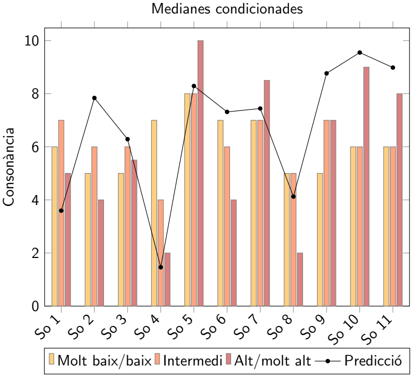


Verificació del model

Per tal de verificar el nostre model vam dur a terme un test.

- Cada persona valorava el seu nivell musical (molt baix, baix, intermedi, alt o molt alt).
- Hi havia 11 combinacions de dues notes musicals (tocades amb piano).
- S'havia de qualificar cada so d'1 (molt dissonant) a 10 (molt consonant).

En total vam aconseguir 190 respostes.



Conclusions i refinaments

Possibles millores:

- Estudiar una possible estructura d'espai vectorial darrere el conjunt de sons complexos
- Realitzar el test amb sons de diversos tipus d'instruments (de vent, de corda o de percussió)
- Millorar la fiabilitat del test

Referències

[1] William Hutchinson i Leon Knopoff. "The acoustic component of western consonance". A: *Interface* 7.1 (1978), pàg. 1 - 29. ↗.

[2] R. Plomp i W. J. M. Levelt. "Tonal consonance and critical bandwidth". A: *The journal of the Acoustical Society of America* 38.4 (1965), pàg. 548 - 560. ↗.

[3] William A. Sethares. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. 2a ed. Springer, 2005. ISBN: 1852337974. ↗.