

Mesures de dissonància

Víctor Ballester Oriol Bosquet Carlo Sala

Taller de modelització
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Març 2021

Enunciat i objectius

Podem resumir l'enunciat en 2 punts bàsics:

- Proposar una fórmula concreta per a la mesura del grau de dissonància.
- Comprovar que aquesta fórmula concorda amb les dades empíriques de la percepció de la dissonància.

Ens marquem 2 objectius:

- Donar una fórmula de creació pròpia al més acurada possible.
- Comprovar mitjançant un test fet a un grup divers de persones com s'entén la dissonància (o consonància).

Definició de dissonància i consonància

El diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans ens diu:

Dissonància. Qualitat de dos o més sons que formen una combinació inharmoniosa, poc agradable a l'orella.

Consonància. Qualitat de dos sons que, produïts simultàniament, formen un interval d'un acord perfecte.

Proposem nosaltres la nostra pròpia definició:

Dissonància. Qualitat de dos o més sons amb una relació de freqüències concreta, que sonen poc agradables a l'oïda humana.

Consonància. Qualitat de dos o més sons amb una relació de freqüències concreta, que sonen agradables a l'oïda humana.

A més distingirem dos tipus de sons:

So pur. Ona sinusoidal formada per una sola freqüència, amplitud i fase.

So complex. Suma d'un nombre arbitrari de sons purs. Si les freqüències relatives a aquests sons purs són totes múltiples d'una freqüència fonamental, el so complex s'anomena *harmònic* i els seus components, *harmònics*.

Un primer model simple

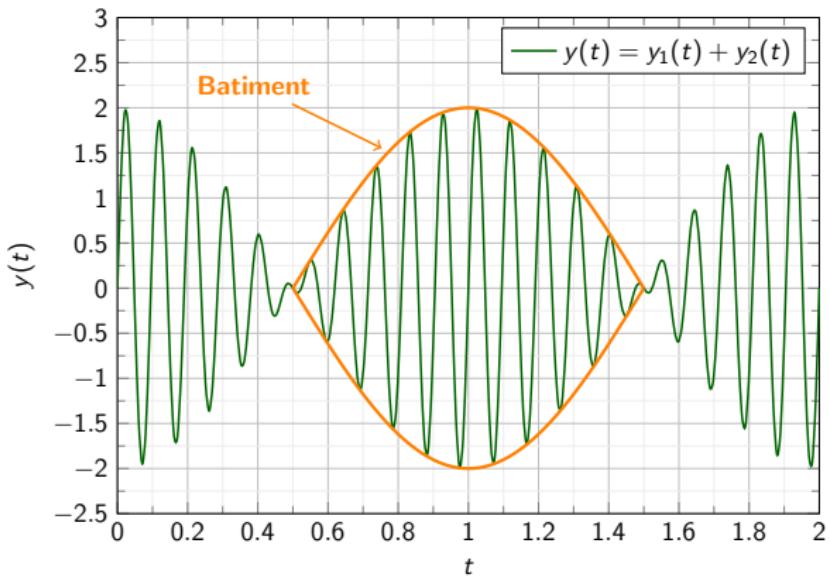
Considerem dos sons purs de mateixa amplitud A , freqüències f_1 i f_2 i angle de fase $\phi = 0$. És a dir, dos sons de la forma:

$$y_1(t) = A \sin(2\pi f_1 t) \quad y_2(t) = A \sin(2\pi f_2 t)$$

Si fem la superposició dels dos sons obtenim:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2A \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)$$

Si considerem $A = 1$, $f_1 = 10$ Hz i $f_2 = 11$ Hz:



Freqüència de batiment: $\frac{f_1-f_2}{2}$ Freqüència de propagació: $\frac{f_1+f_2}{2}$
Els batiments són el que ens provoca la dissonància.

Això es tradueix a:

- Si $|f_1 - f_2| < 10$ Hz: Interpretarem un únic so i podem distingir els batiments.
- Si 10 Hz $< |f_1 - f_2| < 60$ Hz: Els sons estan massa separats per ser interpretats com un de sol, però massa junts per distingir-se amb claredat. Es produeix **dissonància**.
- Si $|f_1 - f_2| > 60$ Hz: Podem distingir els dos sons. Es produeix **consonància**.

Analogia de la interpretació de dos sons purs

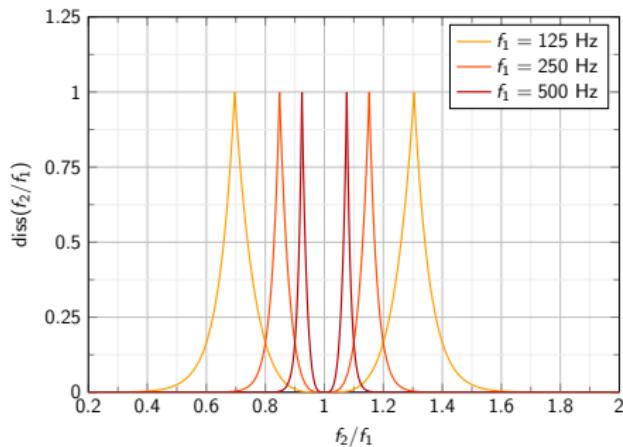
Veiem una analogia amb l'animació següent reproduïda a diferents fotogrames per segon.

Compare frames per second. 

Per calcular una fórmula, hem usat enginyeria inversa:

Estimar els valor que voldríem \rightarrow Crear una funció adequada

Fixada una freqüència f_1 , si fem variar $r := \frac{f_2}{f_1}$:



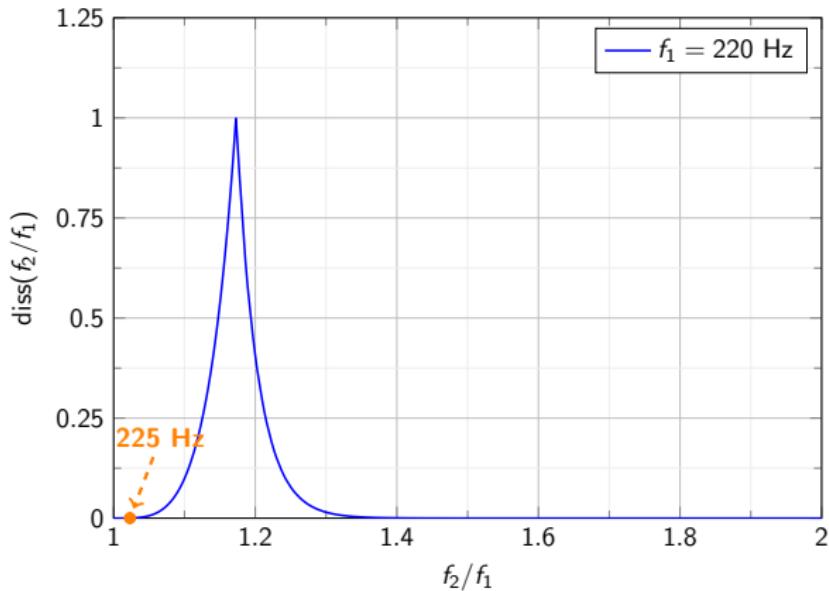
$$\text{diss}(r) = \begin{cases} e^{\beta f_1(r-1+\gamma_{f_1})} & \text{si } 0 < r < 1 - \gamma_{f_1} \\ \cosh \left[\frac{\operatorname{arccosh}(2)}{(\gamma_{f_1})^2} (r-1)^2 \right] - 1 & \text{si } 1 - \gamma_{f_1} < r < 1 + \gamma_{f_1} \\ e^{-\beta f_1(r-1-\gamma_{f_1})} & \text{si } 1 + \gamma_{f_1} < r \end{cases}$$

on β és una constant i $\gamma_{f_1} \propto \frac{1}{f_1}$.

Exemples

Escoltem ara els exemples següents partint de $f_1 = 220$ Hz.

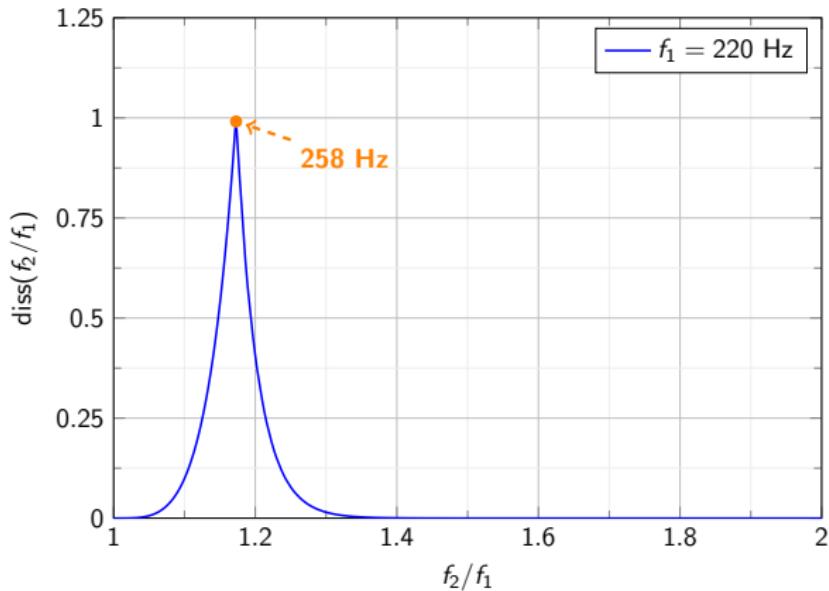
- $f_2 = 225$ Hz: Play



Exemples

Escoltem ara els exemples següents partint de $f_1 = 220$ Hz.

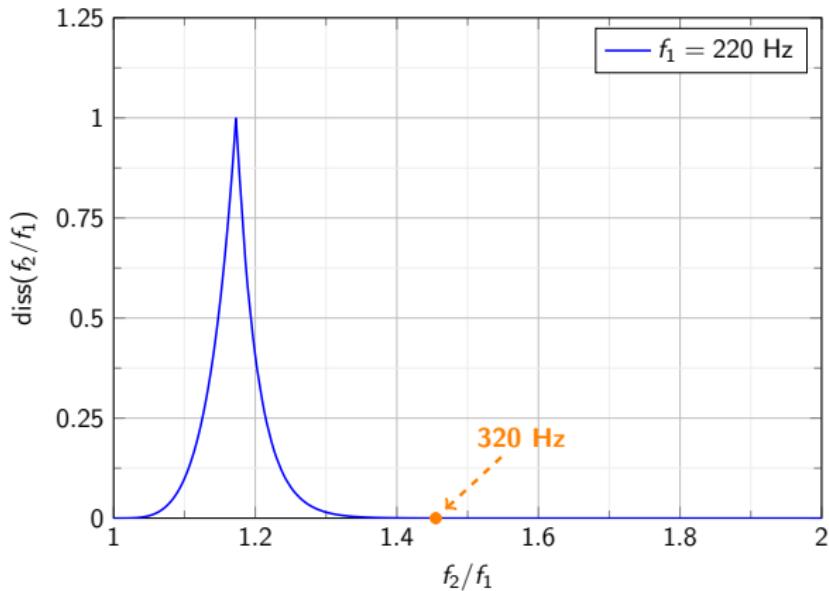
- $f_2 = 258$ Hz: Play



Exemples

Escoltem ara els exemples següents partint de $f_1 = 220$ Hz.

- $f_2 = 320$ Hz: Play

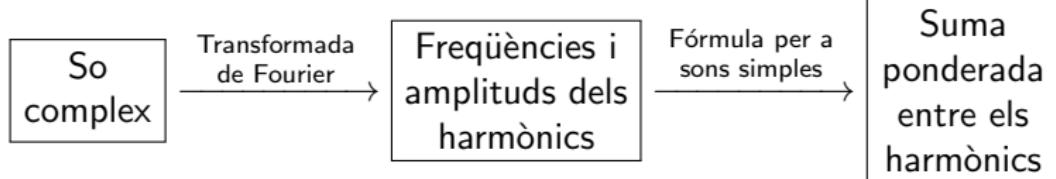


Possibles extensions

Tenim pensats dos refinaments:

- ① Estudiar com l'òïda humana interpreta els fenòmens auditius i si pot interferir substancialment en la fórmula proposada.
- ② Estudiar sons complexos, com el d'un instrument real.
Hi ha noves variables que entren en joc:
 - Els harmònics
 - L'amplitud de les ones

Idea de la construcció de la fórmula final:



Experiment final

Un cop trobada una fórmula per a la dissonància de sons complexos, hem pensat de fer un petit test per corroborar el nostre model.

El test tindrà l'aspecte següent:

- Anirà dirigit a un públic general (incloent persones amb oïda entrenada i no entrenada).
- Els preguntarem com de dissonant sonen diversos sons complexos.
- Compararem el nostre model amb els fets empírics.