

L'entorn orbital de la Terra està molt poblat. A mitjans del 2023, hi ha aproximadament 27 500 artefactes en òrbita al voltant de la Terra. D'aquests, uns 11 000 són satèl·lits actius, 2 300 són peces de coets (és a dir, unitats de propulsió utilitzades per posar els satèl·lits en òrbita), 13 700 són satèl·lits inactius (brossa espacial), i la resta són objectes no classificats. Amb el pas dels anys, la probabilitat de col·lisió entre dos naus espacials augmenta de manera contínua. Ja s'han produït col·lisions greus en el passat, com ara la col·lisió a alta velocitat entre els satèl·lits Iridium 33 i Kosmos-2251 el 2009.

La dinàmica orbital al voltant de la Terra és molt complexa. L'aproximació kepleriana proporciona resultats precisos només durant poques hores. És per això que cal afegir millores en aquest model. Les pertorbacions importants de l'aproximació kepleriana són el camp gravitatori real de la Terra (que no és kepleriana perquè la Terra no és ni una massa puntual ni una esfera amb densitat constant), la resistència atmosfèrica, els efectes de tercers cossos (com ara l'atracció gravitatòria de la Lluna i el Sol) i la pressió de radiació solar. Els models més precisos inclouen totes aquestes i més pertorbacions i són capaços de fer prediccions raonablement precises per a uns quants dies. Això fa possible mantenir un catàleg de naus espacials (tant actives com inactives) a través d'una xarxa global heterogènia d'estacions d'observació, que poden ser òptiques (telescopis) o basades en radar. Mantenir aquest catàleg actualitzat requereix observacions constants.

L'objectiu d'aquest treball és proporcionar una visió quantitativa de l'efecte que aquestes pertorbacions tenen de manera individual. Per això, es desenvoluparan matemàticament els models necessaris.

És ben conegut que la segona llei de Newton és vàlida només en sistemes de referència inercials, és a dir, sistemes de referència no accelerats. En la pràctica, no existeixen tals sistemes, ja que tots els objectes estan subjectes a *petites* acceleracions. No obstant això, per tal de poder integrar numèricament les equacions que descriuen la dinàmica dels satèl·lits, prendrem com a referència un sistema de referència *quasiinercial* centrat al centre de masses de la Terra, que és l'objecte celeste al voltant del qual orbiten tots els satèl·lits que considerarem al llarg d'aquest treball.

Ara bé, com que l'aproximació kepleriana de la Terra com a massa puntual o com a una distribució esfèrica de densitat constant no és vàlida si volem obtenir resultats precisos, caldrà tenir en compte la variació del camp gravitatori creat per la Terra en funció de la longitud i la latitud on es trobi el satèl·lit, un cop projectat sobre l'esfera terrestre. És precisament per aquest motiu que ens caldrà considerar un altre sistema de referència, d'igual importància que l'anterior, per tal de, en cada pas de la integració numèrica, poder situar el satèl·lit en el seu lloc exacte sobre la superfície terrestre i així determinar l'acceleració que experimenta a conseqüència de la gravetat terrestre. Aquest darrer sistema no serà en absolut inercial, ja que estarà subjecte a l'acceleració per rotació de la Terra, que en el nostre marc d'estudi no és negligible.

Per tal de convertir les posicions dels satèl·lits d'un dels sistemes a l'altre, ens caldrà tenir present tots els moviments que experimenta l'eix de rotació terrestre. A causa de la presència d'altres planetes del sistema solar (i altres pertorbacions més petites), el pla orbital de la Terra no és fix a l'espai, sinó que està sotmès a una petita variació anomenada *precessió planetària*. A més, l'atracció gravitatòria del Sol i la Lluna sobre l'equador de la Terra provoca que l'eix de rotació de la Terra precessi de manera similar a l'acció d'una baldufa amb un període d'aproximadament 26 000 anys. Aquest moviment s'anomena *precessió lunisolar*. D'altra banda, pertorbacions més petites en amplitud i període més curt (al voltant de 18,6 anys) superposades amb el moviment de precessió creen un moviment anomenat *nutació*. Per a la creació del nostre sistema de referència quasiinercial, el que hem fet és amitjanar aquestes últimes oscil·lacions.

A més, l'eix de rotació de la Terra experimenta un lleu moviment periòdic al voltant d'un eix de rotació de referència, que passa pel un pol de referència marcat per l'IERS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*). Aquest moviment s'anomena *moviment polar* i és causat per la redistribució de la massa de la Terra a causa de les variacions estacionals de l'atmosfera i els oceans.

D'altra banda, a l'hora de convertir les coordenades entre sistemes de referència i integrar el nostre sistema ens trobarem amb el problema de com definir apropiadament el temps. Com a éssers humans, estem naturalment interessats en com passa el temps i, per tant, la mesura correcta d'aquest esdevé una necessitat essencial per a nosaltres. Com que és el Sol qui governa la nostra activitat diària, és natural definir el temps a partir d'aquest.

Definim un *dia solar vertader* com el temps entre dos trànsits del sol pel nostre meridià local. Cal notar que la Terra ha de girar sobre si mateixa lleugerament més d'una revolució per completar un dia solar vertader. A més, a causa de l'òrbita no circular de la Terra al voltant del Sol, la durada d'un dia solar vertader no és constant, ja que la Terra ha de girar sobre si mateixa lleugerament més en el periheli que en l'afeli, per on hi passa més de pressa. Com a conseqüència, la posició vertadera del Sol no és idònia per una mesura precisa del temps. Així doncs, la introducció d'un *Sol mitjà* és necessària. Aquest es defineix com un Sol fictici que orbita la Terra a velocitat angular constant. El ritme de gir es pren de manera que el Sol vertader i el mitjà coincideixin en l'equinocci de primavera. D'aquí, podem definir el *dia solar mitjà* com el temps entre dos trànsits del Sol mitjà pel nostre meridià local. L'estàndard de temps més comú referent en aquesta mesura del temps és el Temps universal o UT. No obstant això, avui en dia hi ha altres estàndards de temps més precisos com ara el Temps atòmic internacional o TAI. Però, és el Temps universal coordinat o UTC el que governa el nostre dia a dia. Aquest actualment es defineix de forma que sigui tan precís com el TAI, però mantenint una diferència petita amb el Temps universal, de no més de 0,9 segons, per mantenir la coherència amb el *rellotge solar*. Els científics aconsegueixen això mitjançant la introducció de segons intercalars, que són segons que s'afegeixen a l'UTC a mitjans o finals d'any per mantenir petita la diferència amb l'UT. La conversió entre tots aquests sistemes de temps també serà necessària, ja que les dades que utilitzarem en aquest treball, els TLE, estan expressades en UTC.

Els TLE (de l'anglès, *Two-line element sets*) són fitxers de dues línies cadascun que contenen tots els paràmetres necessaris per localitzar amb exactitud on es troba un determinat satèl·lit. La freqüència de creació d'aquests TLE per les entitats corresponents depèn de diversos factors, com per exemple l'altura a la qual es troba el satèl·lit o la importància d'aquest, entre d'altres. Això, juntament amb els models utilitzats per continuar les òrbites dels satèl·lits, que és l'objecte d'estudi en aquest treball, és el que permet mantenir un catàleg actualitzat d'objectes en òrbita al voltant de la Terra.

Un cop havent considerat tots els canvis adequats de coordenades espacials i temporals, convé definir les equacions que governaran la dinàmica dels satèl·lits. Com hem mencionat anteriorment, necessitarem considerar un model de la Terra amb densitat no constant. Per això el que farem és expressar el potencial gravitatori de la Terra com una expansió en sèrie dels harmònics esfèrics, que són funcions definides sobre l'esfera. Això implica que mantindrem present l'aproximació de la Terra com una esfera, encara que hi ha extensions que milloren aquesta hipòtesi considerant harmònics el·lipsoïdals, però en aquest treball no ho hem considerat. La Teoria de Sturm-Liouville d'equacions diferencials de segon ordre ens afirma que la família d'harmònics esfèrics forma un sistema complet, en el sentit que qualsevol funció prou regular definida sobre l'esfera pot ser expressada com una sèrie de potències dels harmònics esfèrics. Finalment, a partir de certes recurrències per millorar la velocitat de càlcul i aquesta expressió del potencial,

podrem arribar a calcular l'acceleració que experimenta un satèl·lit en un punt de l'òrbita arran de la gravetat terrestre.

Durant l'apartat de simulació, no només hem considerat la força de la gravetat com a condicionant a l'acceleració del satèl·lit, sinó que també hem tingut en compte les acceleracions a causa de la Lluna i el Sol com a petites pertorbacions a l'acceleració de la Terra.

Les altres dues pertorbacions que hem afegit són la resistència per fregament atmosfèric i l'acceleració generada per la pressió solar. La primera afecta majoritàriament als satèl·lits d'òrbita baixa, amb altura inferior a 1 000 km per sobre del nivell del mar. Aquesta és causada per la interacció de la superfície del satèl·lit amb les partícules de l'atmosfera, és a dir, l'acceleració del satèl·lit vindrà afectada per un terme dependent del quadrat de la velocitat relativa del satèl·lit respecte al *fluid* de l'atmosfera. Hi ha una petita complicació amagada al considerar aquesta força: calcular la densitat de l'atmosfera com a funció de l'altura. No hem entrat gaire en detall per aquest tema, però hem seguit el model de Harris-Priester, que és vàlid per a baixes altituds (entre 100 i 1 000 km).

L'altra pertorbació considerada, la pressió per radiació solar, és la deguda als fotons provinents del Sol que xoquen contra les plaques dels satèl·lits i transmeten el seu moment en aquests darrers, contribuint així a la seva acceleració. El grau d'influència d'aquesta pertorbació, a diferència de l'anterior, creix a mesura que augmentem l'altura del satèl·lit i, a més, només afecta durant poc més de la meitat de l'òrbita, ja que quan el satèl·lit no es troba il·luminat pel Sol, perquè la Terra s'interposa, és a dir, el satèl·lit troba a l'*umbra*, no hi ha cap contribució a l'acceleració.

Arribats aquest punt, tots els ingredients ja estan llestos per ser utilitzats en la simulació. Per integrar el sistema d'equacions diferencial hem utilitzat el mètode de Runge-Kutta 7(8) amb una tolerància relativa de  $10^{-12}$ . A més, hem triat tres zones òrbitals molt diferents entre si: els satèl·lits d'òrbita baixa (LEO), que orbiten entre altituds menors a 1 000 km; els satèl·lits d'òrbita mitjana (MEO), que orbiten a altituds situades entre 1 000 i 35 780 km, i els satèl·lits d'òrbita geostacionària, que orbiten en òrbites al voltant dels 35 780 km per sobre del nivell del mar.

Els resultats obtinguts han estat una mica sorprenents. Primer de tot, hem observat que l'atracció gravitatòria de la Lluna i el Sol es fa notable en els satèl·lits MEO i GEO, mentre que la resistència atmosfèrica només és important en els satèl·lits LEO, com ja havíem predit anteriorment. En tots els casos estudiats, la pressió de la radiació solar ha augmentat les oscil·lacions dels errors, i per tant, per a una ampliació d'aquest treball, seria interessant considerar models més precisos per a aquesta. El model considerat per a la resistència atmosfèrica també és molt simple; considerar un model més realista també podria millorar els resultats d'aquest treball per a una futura extensió.

Finalment, cal mencionar que no hem tingut en compte la interacció gravitatòria d'altres planetes, com ara Venus, Mart o Júpiter, amb els satèl·lits en les nostres simulacions. Això és perquè, per als nostres propòsits, la influència dels altres planetes en els satèl·lits és negligible a causa de les seves grans distàncies de la Terra. En particular, per a les dates al voltant de l'1 de gener de 2023, que és aproximadament el temps inicial de totes les nostres integracions, la contribució d'aquests tres planetes era de l'ordre de  $10^{-11}$  m/s<sup>2</sup> per als satèl·lits MEO, la qual cosa és negligible en comparació amb l'ordre de magnitud de les pertorbacions de la Lluna i el Sol (aproximadament  $10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>).

## PREGUNTES:

1. No sé si posar tantes coses en cursiva, com en el text original