

# Propagació numèrica d'errors dels satèl·lits en òrbita terrestre

Víctor Ballester

Supervisor: Josep Maria Mondelo

Departament de Matemàtiques  
Facultat de Ciències

11 de juliol de 2023

**UAB**  
Universitat Autònoma  
de Barcelona

# Motivació

- Aproximadament 27 000 satèl·lits (actius i inactius) orbiten al voltant de la Terra.
- Diverses col·lisions involuntàries s'han produït en el passat.
- El model que considera la Terra com a massa puntual no és suficient. Necessitem un model més precís.

# Motivació

- Aproximadament 27 000 satèl·lits (actius i inactius) orbiten al voltant de la Terra.
- Diverses col·lisions involuntàries s'han produït en el passat.
- El model que considera la Terra com a massa puntual no és suficient. Necessitem un model més precís.

## **Objectius:**

- Desenvolupar un model per al potencial de la Terra.
- Predir la posició de satèl·lits considerant diverses pertorbacions.
- Estimar l'error de la trajectòria del satèl·lit.

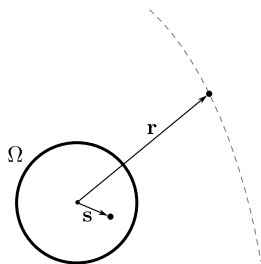
- 1 Equació per al geopotencial
- 2 Desviacions de l'eix de rotació de la Terra
- 3 Altres pertorbacions i sistema d'EDOs final
- 4 Resultats
- 5 Conclusions

# Equació per al geopotencial

Sigui  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  la regió que ocupa la Terra.

$$\mathbf{g} = - \int_{\Omega} G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \rho(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} = \nabla V$$

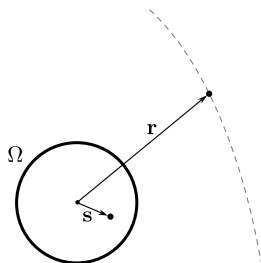
$$V = \int_{\Omega} G \frac{\rho(\mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|} d^3\mathbf{s}$$



# Equació per al geopotencial

Sigui  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  la regió que ocupa la Terra.

$$\mathbf{g} = - \int_{\Omega} G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \rho(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} = \nabla V$$
$$V = \int_{\Omega} G \frac{\rho(\mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|} d^3\mathbf{s}$$



## Teorema

*V satisfà el següent problema de valors de frontera exterior:*

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{a } \Omega^c \\ V = f & \text{a } \partial\Omega \\ \lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} V = 0 \end{cases}$$

*on  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  és el potencial gravitatori a la superfície de la Terra.*

Buscant la solució explícita fent separació de variables, trobem que

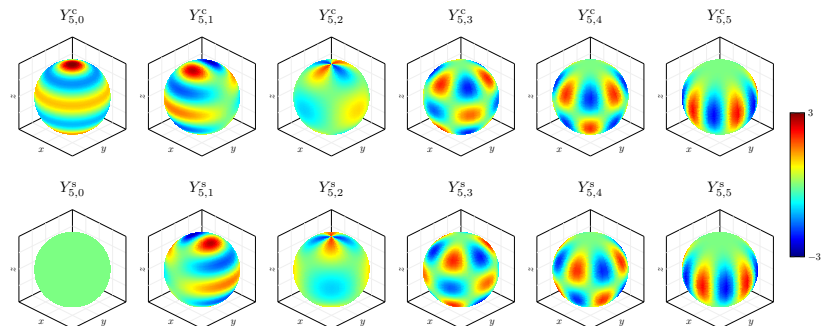
$$V = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} Y_{n,m}^c(\theta, \phi) + \bar{S}_{n,m} Y_{n,m}^s(\theta, \phi))$$

on

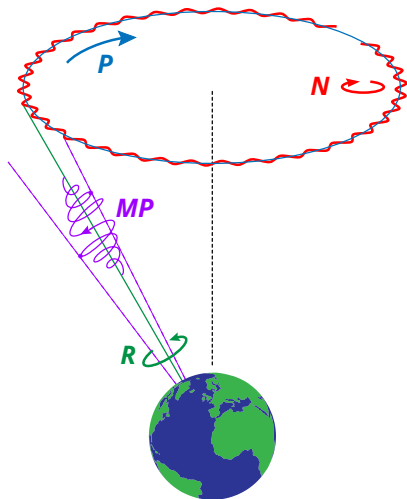
$$Y_{n,m}^c(\theta, \phi) = N_{n,m} P_{n,m}(\cos \theta) \cos(m\phi)$$

$$Y_{n,m}^s(\theta, \phi) = N_{n,m} P_{n,m}(\cos \theta) \sin(m\phi)$$

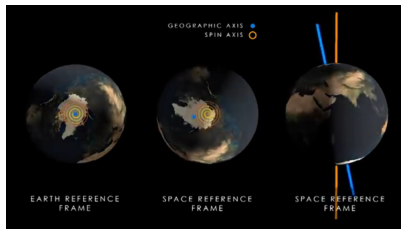
són els **harmònics esfèrics**.



# Desviacions de l'eix de rotació de la Terra



- Precessió
- Nutació
- Moviment polar
- Rotació



Font: [NASA Earth Orientation Animations](#)



## Altres pertorbacions

$\mathbf{r}$  = posició del satèl·lit respecte al centre de masses de la Terra

- Pertorbacions d'altres cossos (Lluna i Sol):

$$\frac{GM}{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \frac{GM}{\|\mathbf{s}\|^2}\mathbf{s}$$

# Altres pertorbacions

$\mathbf{r}$  = posició del satèl·lit respecte al centre de masses de la Terra

- Pertorbacions d'altres cossos (Lluna i Sol):

$$\frac{GM}{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \frac{GM}{\|\mathbf{s}\|^2}\mathbf{s}$$

- Fregament atmosfèric:

$$-\frac{1}{2}C_F \frac{A}{m}\rho\mathbf{v}_{\text{rel}}\mathbf{v}_{\text{rel}}$$

on  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{r}$

# Altres pertorbacions

$\mathbf{r}$  = posició del satèl·lit respecte al centre de masses de la Terra

- Pertorbacions d'altres cossos (Lluna i Sol):

$$\frac{GM}{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \frac{GM}{\|\mathbf{s}\|^2}\mathbf{s}$$

- Fregament atmosfèric:

$$-\frac{1}{2}C_F \frac{A}{m} \rho \mathbf{v}_{\text{rel}} \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

on  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{r}$

- Pressió per radiació solar:

$$-\nu P_{\odot} C_R \frac{A_{\odot}}{m} \frac{\mathbf{s}_{\odot} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{s}_{\odot} - \mathbf{r}\|}$$

# Sistema d'equacions diferencials ordinàries

Utilitzant el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 7(8) integrarem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_{\text{GP}} + \delta_{\text{F}}\mathbf{a}_{\text{F}} + \delta_{\text{R}}\mathbf{a}_{\text{R}} + \delta_{\text{sol}}\mathbf{a}_{\text{sol}} + \delta_{\text{lluna}}\mathbf{a}_{\text{lluna}} \end{cases}$$

# Sistema d'equacions diferencials ordinàries

Utilitzant el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 7(8) integrarem el sistema diferencial:

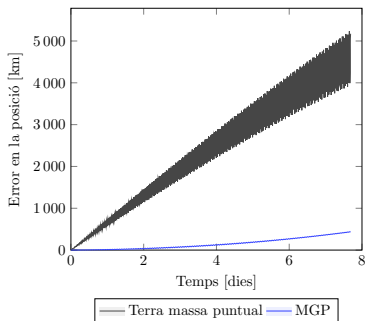
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_{\text{GP}} + \delta_{\text{F}}\mathbf{a}_{\text{F}} + \delta_{\text{R}}\mathbf{a}_{\text{R}} + \delta_{\text{sol}}\mathbf{a}_{\text{sol}} + \delta_{\text{lluna}}\mathbf{a}_{\text{lluna}} \end{cases}$$

Les conditions initiales proviennent de **TLEs** (*Two Line Elements sets*).

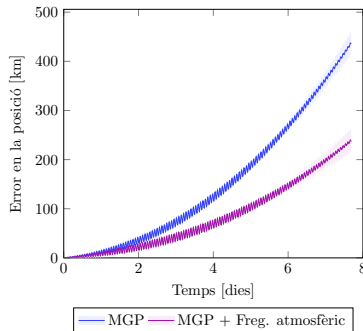
Línia	Número satèl·lit	Classe	Dissenyador internacional			Època (UTC)			$\dot{n}/2$ [rev/dia <sup>2</sup> ]	$\ddot{n}/6$ [rev/dia <sup>3</sup> ]	$B^*$ (terme de fregament)	Model	Número TLE	Còdigam																																																								
			Any	Llanç.	Peça	Any	Dia de l'any (com a fracció)																																																															
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	5	5	1	2	4	U		9	8	0	6	7	UR		2	3	0	8	6	.	1	6	7	7	8	9	9	4		S		.	0	1	5	4	0	4	0	7		S	.	1	4	1	0	2	-	2		S	.	2	6	6	3	4	-	2	0		0		9	9	9	1		Còdigam
Línia	Número satèl·lit	Inclinació $i$ [°]	Ascensió recta $\Omega$ [°]			Excentricitat $e$			Argument del periapsis $\omega$ [°]			Anomalia mitjana $M$ [°]			Moviment mitjà $n$ [rev/day]			Nombre de revolucions			Còdigam																																																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
2	5	5	1	2	4		5	1	.	6	2	3	7		5	.	0	0	1	7			0	0	1	0	7	5	7		1	8	8	.	3	8	6	9		1	7	1	.	6	9	6	3		1	6	.	0	1	8	7	8	1	9	9		1	3	7	9		2		Còdigam		

# Resultats - LEO (*Low Earth Orbit*)

- L'ISS fa aproximadament 16 òrbites al dia.
- Els satèl·lits LEO interactuen amb l'atmosfera.
- És difícil de predir el fregament atmosfèric.

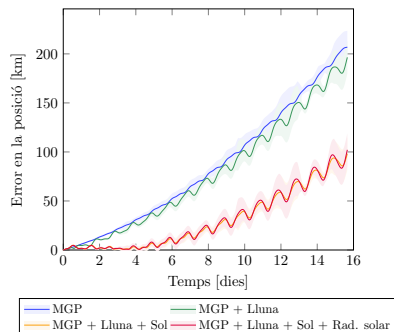


ISS



ISS

# Resultats - GEO (*Geostationary Earth Orbit*)



TDRS-3

- Afegint-hi la Lluna i el Sol, els errors es redueixen.
- La pressió per radiació solar augmenta les oscil·lacions.
- Maniobra al voltant del dia 13.

# Conclusions

- El model de la Terra com a massa puntual no és suficient per predir l'òrbita d'un satèl·lit durant uns quants dies.
- Afegint-hi la Lluna i el Sol, els errors es redueixen.
- La pressió per radiació solar augmenta les oscil·lacions dels errors.



# Conclusions

- El model de la Terra com a massa puntual no és suficient per predir l'òrbita d'un satèl·lit durant uns quants dies.
- Afegint-hi la Lluna i el Sol, els errors es redueixen.
- La pressió per radiació solar augmenta les oscil·lacions dels errors.

## **Possibles refinaments:**

- Millorar el modelatge del fregament atmosfèric i la pressió per radiació solar.
- Estudiar la influència de la inclinació i l'excentricitat en els errors.



Separació de variables:  $V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\begin{cases} \frac{(r^2 R')'}{R} = n(n+1) \\ \frac{1}{\Theta} \Theta'' = -m^2 \\ \frac{\sin \phi}{\Phi} (\sin \phi \Phi')' + n(n+1)(\sin \phi)^2 = m^2 \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N} \cup 0, m \leq n$$

Separació de variables:  $V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\begin{cases} \frac{(r^2 R')'}{R} = n(n+1) \\ \frac{1}{\Theta} \Theta'' = -m^2 \\ \frac{\sin \phi}{\Phi} (\sin \phi \Phi')' + n(n+1)(\sin \phi)^2 = m^2 \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N} \cup 0, m \leq n$$

Imposant condicions de frontera:

$$V = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} Y_{n,m}^c(\theta, \phi) + \bar{S}_{n,m} Y_{n,m}^s(\theta, \phi))$$

on

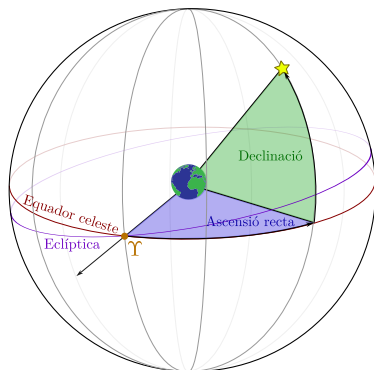
$$Y_{n,m}^c(\theta, \phi) = N_{n,m} P_{n,m}(\cos \theta) \cos(m\phi)$$

$$Y_{n,m}^s(\theta, \phi) = N_{n,m} P_{n,m}(\cos \theta) \sin(m\phi)$$

són els **harmònics esfèrics**.

# Esfera celeste

- Esfera abstracta de radi infinit centrada en la Terra.
- Tots els objectes celestes s'hi projecten de forma natural.



**Eix mitjà de rotació:** eix de rotació quan les pertorbacions de nutació es promitgen.

**Equador mitjà:** pla perpendicular a l'eix mitjà de rotació.

**Equinocci vernal mitjà ( $\bar{\gamma}$ ):** el punt d'intersecció entre l'equador mitjà amb l'eclíptica on el Sol creua l'equador celeste de sud a nord.

# Sistemes de referència inercials i no inercials

Data J2000: 1 de gener de 2000 a les 12:00 TT.

## Quasi-inercial:

- Eix  $x$ : apuntant cap a  $\overline{\Upsilon}$  de la data J2000
- Eix  $z$ : perpendicular a l'equador mitjà de la data J2000

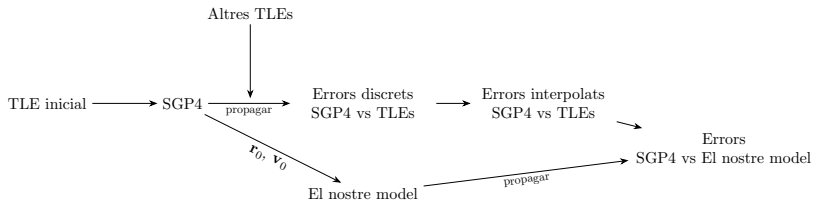
## No inercial (fix amb la Terra):

- Eix  $z$ : apuntant cap a l'IRP (*International Reference Pole*)
- Eix  $x$ : apuntant cap al meridià zero i situat en el pla perpendicular a l'eix  $z$

En ambdós sistemes, l'eix  $y$  s'escull de manera que la base  $(x, y, z)$  sigui positiva.

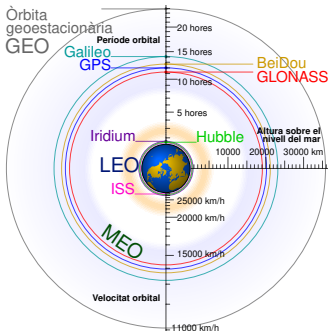
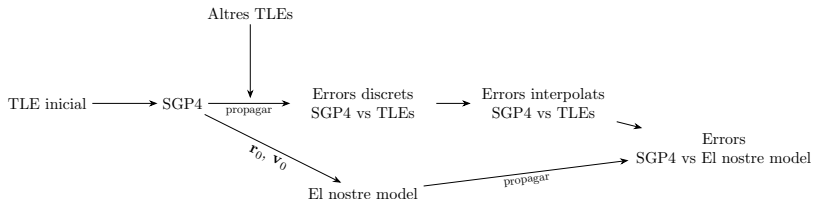
# Resultats

## Esquema de la nostra simulació:



# Resultats

## Esquema de la nostra simulació:

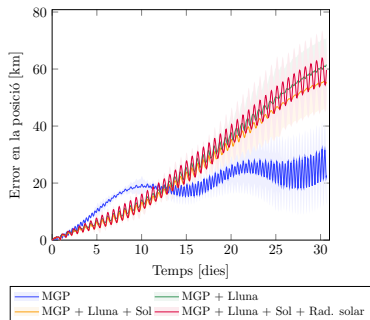


## Zones que hem estudiat:

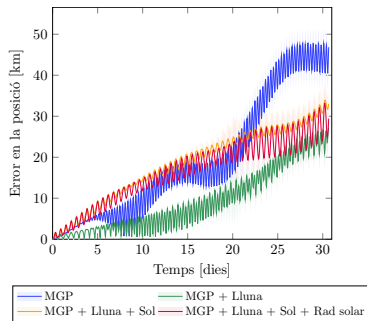
- Satèl·lits d'òrbita baixa (LEO)
- Satèl·lits d'òrbita mitjana (MEO)
- Satèl·lits d'òrbita geoestacionària (GEO)



# Resultats - MEO



Sirius-3



Galileo-20

- El model geopotential és molt oscil·latori.
- La Lluna i el Sol redueixen les oscil·lacions.
- La pressió per radiació solar augmenta les oscil·lacions.