

MODELITZACIÓ DE L'EVOLUCIÓ DE LA PANDÈMIA DE LA COVID-19

Víctor Ballester Ribó
NIU:1570866

Taller de modelització
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Febrer de 2021

Abstract

Sovint se'ns diu que per aturar la Covid-19 cal vacunar el 70% de la població. Ara bé, d'on surt aquest valor? Per què 70% i no 60% o 80%? A la primera part del treball intentarem donar resposta a aquestes preguntes. A la segona part, tenint en compte que al començament de la pandèmia segons quin públic va posar en dubte la necessitat de dur mascareta, farem una estimació sobre què hauria passat si no haguéssim portat mai mascareta.

1 Introducció i notació

Per tal de resoldre amb comoditat les qüestions que ens preguntem, ens veiem obligats primer de tot a fer una estimació real dels casos contagiats diaris, ja que suposem que en l'inici de la pandèmia no va ser igual el nombre de casos reals que el nombre de casos comptabilitzats i, per tant, això pot ser un problema per a la segona part del treball, on és fonamental el creixement inicial de la pandèmia. D'aquesta manera podrem calcular la vertadera taxa diària de contagis i modificant-la, en certa manera, podrem obtenir les respostes a les preguntes que ens fem. Per fer-ho adoptarem una variant del model SIRD en variable discreta [1], és a dir, usant la unitat d'un dia com a mesura¹.

Cal mencionar, a més, que el treball l'hem orientat a la comunitat catalana, és a dir, ens hem basat únicament en dades de Catalunya.

A continuació resumim tota la notació bàsica utilitzada al llarg del treball:

- N : Població de Catalunya, és a dir, $N \approx 7,727 \times 10^6$ [2].
- S_t : Nombre de persones susceptibles de contagiar-se en el dia t .
- I_t : Nombre de persones infectades en el dia t . A més $\Delta I_t := I_{t+1} - I_t$ és el nombre de persones que s'han infectat durant el dia t .
- K_t : Nombre de persones contagiades pel virus en el dia t . A més $\Delta K_t := K_{t+1} - K_t$ és el nombre de persones que s'han contagiat durant el dia t .
- H_t : Nombre de persones curades en el dia t (sense vacunar-se). A més $\Delta H_t := H_{t+1} - H_t$ és el nombre de persones que s'han curat durant el dia t .
- M_t : Nombre de defuncions a causa de la Covid-19 en el dia t . A més $\Delta M_t := M_{t+1} - M_t$ és el nombre de defuncions durant el dia t .
- J_t : Nombre de persones immunes a la Covid-19 en el dia t .
- V_t : Nombre de persones vacunades contra la Covid-19 en el dia t .

¹De fet, les dades reportades venen organitzades en dies.

- γ : Taxa diària de resolució. És a dir, γ és la taxa diària en què una persona infectada es cura o mor. Alternativament, $1/\gamma$ és el temps mitjà que dura la infecció en una persona.
- f : Factor de mortalitat del virus.
- κ_t : Taxa diària de contagi en el dia t .
- $\mathcal{R}_t := \kappa_t/\gamma$: Factor de reproducció del virus en el dia t .
- μ_t : Fracció de la població que duu mascareta el dia t .
- ν_1 : Probabilitat que el virus travessi la mascareta des de dins cap a fora.
- ν_2 : Probabilitat que el virus travessi la mascareta des de fora cap a dins.

Quan ha faltat notació més concreta en els apartats que venen a continuació, ja ha estat introduïda degudament.

2 Suposicions prèvies

Abans de començar a resoldre les qüestions, fem unes simplificacions que ens permetran resoldre més fàcilment els problemes:

1. La població de Catalunya està distribuïda homogèniament, de manera que no tindrem en compte zones amb més o menys concentració de persones.
2. Els valors γ i f els suposem constants.
3. Si una persona supera el virus, s'hi torna immune.
4. La vacuna és 100% eficient i l'efecte que té sobre un individu és immediat.
5. Totes les mascaretes són iguals i la gent que la porta la té sempre ben posada, és a dir, tapant boca i nas. A més, les persones que porten mascareta només en porten una.

3 Un primer model necessari

Abans de començar a respondre les preguntes que ens fem, descriurem un model que aproxima el comportament de la pandèmia per tal de facilitar després les respostes que donarem. L'objectiu és calcular ΔK_t en funció de ΔM_t , que és l'única dada que podem conèixer a priori [3]. Per fer això, comencem escrivint la següent relació entre els paràmetres descrits anteriorment:

$$K_t = I_t + H_t + M_t. \quad (1)$$

Aquí estem utilitzant la suposició 3. Equivalentment podem escriure l'equació (1) com:

$$\Delta K_t = \Delta I_t + \Delta H_t + \Delta M_t. \quad (2)$$

Ara bé, per la definició de γ i f , podem escriure les següents equacions:

$$\Delta M_t = f\gamma I_t, \quad \Delta H_t = (1 - f)\gamma I_t. \quad (3)$$

Així doncs, ja podem expressar l'equació (2) en termes de ΔM_t i, per tant, podem calcular ΔK_t per a cada dia t . Sabent això últim i tenint en compte que de la definició de κ_t es desprèn la igualtat $\Delta K_t = \kappa_t I_t$, podem calcular el valor de κ_t per a cada t , que és el que necessitarem en els apartats següents.

A la figura 1 es mostra la representació d'aquest model on hem fet servir els valors de $\gamma = 1/7$ dies⁻¹ i $f = 0,01$ [4, 5].

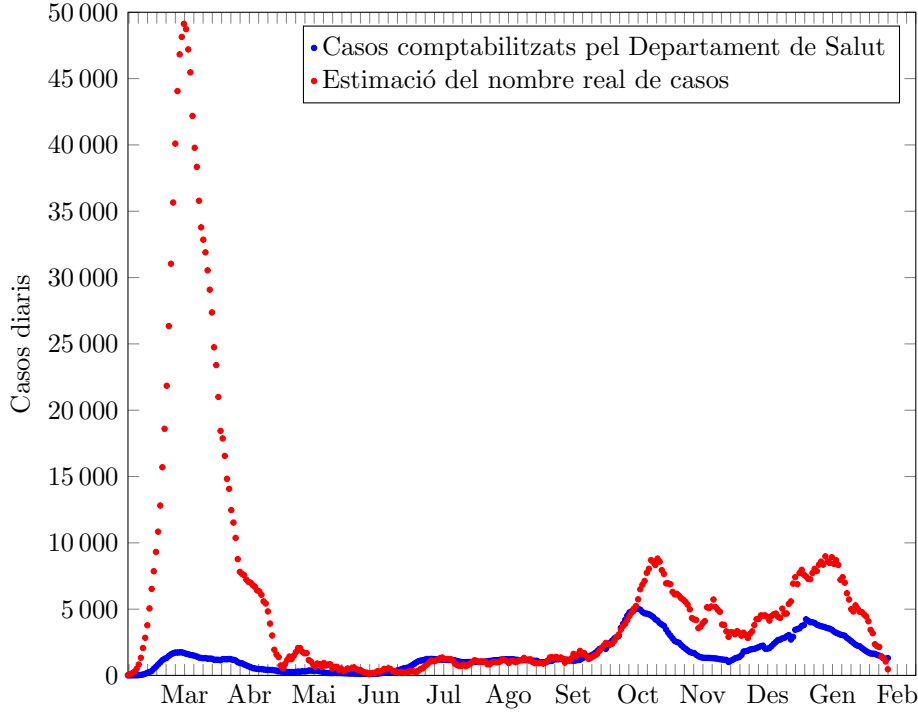


Figura 1: Comparació dels nous casos diaris estimats i dels comptabilitzats pel Departament de Salut de la Generalitat de Catalunya.

4 A quantes persones cal vacunar?

És clar que el creixement o decreixement de ΔK_t depèn de si \mathcal{R}_t és major o menor que 1, respectivament. Dit en altres paraules, si $\mathcal{R}_t > 1$, el virus s'estarà expandint; si $\mathcal{R}_t < 1$, el virus s'estarà extingint. Per tant, volem veure si amb $V_t/N \sim 0,7$ a partir d'un cert dia és possible aturar o no la pandèmia. Observem que podem escriure κ_t com:

$$\kappa_t = c \cdot p \cdot \frac{S_t}{N}, \quad (4)$$

on c és la mitjana de contactes diaris que té un individu, p és la probabilitat de transmissió del virus quan dues persones estan en contacte i S_t/N és la fracció de persones susceptibles el dia t . Si denotem per \mathcal{R}_0 al factor de reproducció aproximat del virus en els primers dies de la pandèmia, és a dir, quan $S_t/N \approx 1$, tenim que $\mathcal{R}_0 = c \cdot p / \gamma$ i, per tant:

$$\mathcal{R}_t = \frac{\kappa_t}{\gamma} = \frac{c \cdot p}{\gamma} \frac{S_t}{N} = \mathcal{R}_0 \frac{S_t}{N} = \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{J_t}{N}\right) \quad (5)$$

Ara bé, és clar que sempre tenim $J_t > V_t$ i d'altra banda perquè s'extingeixi el virus necessitem $\mathcal{R}_t < 1$. Unint aquestes dues expressions en l'equació (5) obtenim:

$$\frac{V_t}{N} \gtrsim 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}. \quad (6)$$

D'aquí deduïm que el nombre de vacunats depèn essencialment de \mathcal{R}_0 [6]. Per això és d'especial importància determinar-lo en el cas de Catalunya. Segons dades de [7], el valor mitjà de \mathcal{R}_0 és aproximadament de 3,28. Per tant, introduint aquest valor en l'equació (6) tenim que és necessari $V_t/N \gtrsim 0,7$. És a dir, que cal vacunar el 70% o més de la població per tal d'aturar la pandèmia. No obstant això, en [7, 8] es menciona que el factor \mathcal{R}_0 pot variar des de 2 fins a 4. Això ens porta a reconsiderar que el valor de V_t/N pot variar entre 0,5 i 0,75. Aleshores, s'hauria de vacunar com a mínim d'un 50% a un 75% de la població per tal d'aturar el virus.

Per contrastar aquest càlcul, hem fet una estimació sobre com variarien els infectats ΔK_t si en el període de 27 de desembre de 2020² a 14 de febrer de 2021 es vacunés un tant per cent de la població catalana. A la figura 2 es mostra aquesta estimació.

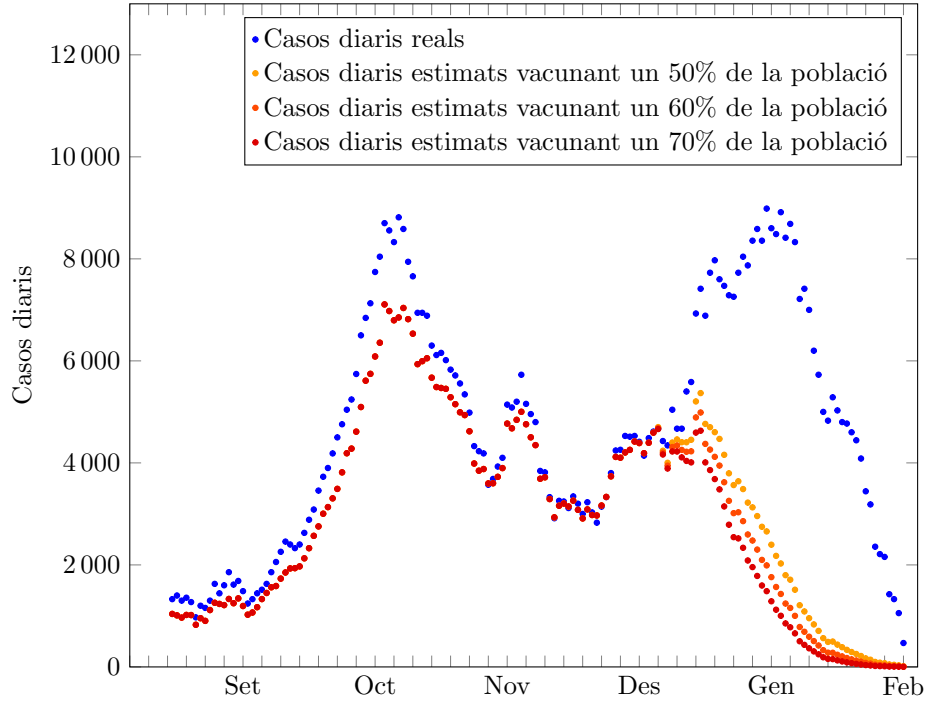


Figura 2: Comparació de l'evolució de la pandèmia en els casos on es vacuna el 50%, 60% o 70% de la població.

En aquesta figura observem un clar decreixement dels casos diaris en vacunar un 50% o més de la població en comparació amb els casos reals. Entre els tres casos on s'implementa la vacuna notem molt poca diferència. Això pot ser degut, en part, als pocs casos diaris del mes de gener en comparació amb els casos que vam tenir a la primera onada.

5 És necessari l'ús de mascaretes?

Per estudiar aquest segon tema, necessitem estudiar amb més detall la probabilitat de contagi entre parelles de persones que portin o no mascareta. Abans, però, farem una suposició extra per enfocar millor el problema. Suposarem que des del dia 1 de març de 2020 fins al dia 21 de maig de 2020³ el nombre μ_t de persones que porten mascareta creix linealment de 0 a 0,95, i a partir de llavors es manté constant en aquest últim valor, ja que estímem que sempre hi ha una petita fracció de la població que no es posa la mascareta. Per tant, ens interessa estudiar la probabilitat de contagi entre persones que usen o no la mascareta.

Per abordar millor el problema, convé separar les quatre possibles trobades entre un individu susceptible i un individu infectat. Com hem mencionat anteriorment, farem un model basat en el SIRD, que suposa que la taxa de contagis és proporcional al nombre de trobades entre susceptibles i infectats.

Denotem per S_t^M el nombre de susceptibles que porten mascareta en el dia t i S_t^{SM} el nombre de susceptibles que no en porten també en el dia t , i anàlogament per I_t^M i I_t^{SM} . Observem que $S_t^M = \mu_t S_t$, $S_t^{SM} = (1 - \mu_t) S_t$, $I_t^M = \mu_t I_t$ i $I_t^{SM} = (1 - \mu_t) I_t$. D'altra banda, tindrem que $\nu_2 S_t^M + S_t^{SM}$ persones seran susceptibles de ser contagiades per $\nu_1 I_t^M + I_t^{SM}$ persones. És a dir

²Segons dades de [3], el dia 27 de desembre és el dia que Catalunya comença per primera vegada a vacunar persones contra la Covid-19.

³Si recordem, el dia 21 de maig de 2020 va ser el dia que el Ministerio de Sanidad va fer obligatori l'ús de mascaretes a la via pública. És per això que hem emprat aquesta data anteriorment [9].

tindrem que:

$$(\nu_2 S_t^M + S_t^{SM})(\nu_1 I_t^M + I_t^{SM}) = [\nu_2 \mu_t S_t + (1 - \mu_t) S_t] [\nu_1 \mu_t I_t + (1 - \mu_t) I_t] = S_t I_t [\nu_1 \nu_2 \mu_t^2 + (\nu_1 + \nu_2) \mu_t (1 - \mu_t) + (1 - \mu_t)^2]. \quad (7)$$

Si anomenem $\xi_t := \nu_1 \nu_2 \mu_t^2 + (\nu_1 + \nu_2) \mu_t (1 - \mu_t) + (1 - \mu_t)^2$, tindrem que la nova taxa de contagis $\tilde{\kappa}_t$ per aquest model és:

$$\tilde{\kappa}_t = \frac{\kappa_t}{\xi_t}, \quad (8)$$

on κ_t és el valor que hem obtingut en cada dia t en el model descrit a l'apartat 3. El motiu d'haver dividit κ_t per ξ_t es deu al fet que κ_t depèn de totes les variables que involucren el contagi entre un susceptible i un infectat (confinament, ús de mascaretes, possibles variants del virus...) per a cada temps t . En aquest cas, dividint per ξ_t estem fent, en certa manera, que segueixi depenent de totes per igual, excepte de la que depèn de portar o no la mascareta. Així doncs, volem veure l'evolució de ΔK_t utilitzant aquesta nova $\tilde{\kappa}_t$ en comptes de κ_t . Per això cal primer donar un valor concret als coeficients ν_1 i ν_2 . Segons dades de [10, 11], hem decidit prendre els valors de $\nu_1 = 0,05$, $\nu_2 = 0,7$ que més o menys satisfan els tests fets a l'eficiència de mascaretes. Així doncs, a la figura 3 es mostra el desenvolupament del nombre de casos diaris si no haguéssim portat mai mascareta.

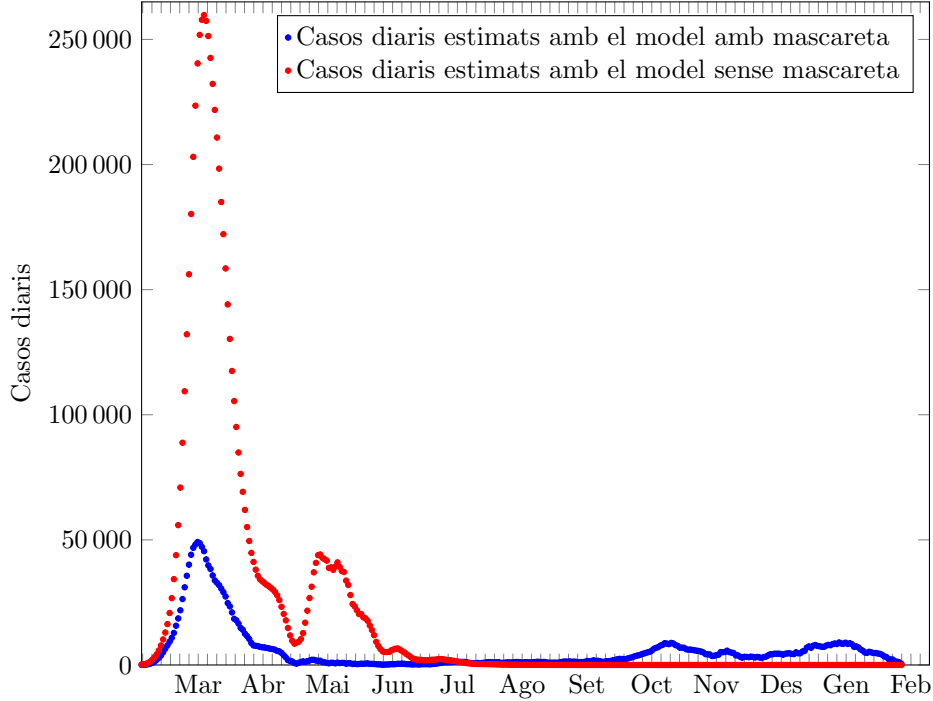


Figura 3: Comparació dels casos diaris previstos amb els dos models: l'un utilitzant mascareta i l'altre, no.

Com podem observar al gràfic hi ha una gran diferència de casos diaris en la primera onada de la pandèmia, i consegüentment també una gran diferència de defuncions. No obstant això, com que hem suposat que les persones curades esdevenen immunes al virus, podem observar que el creixement de ΔK_t és tan pronunciat en els primers mesos de la pandèmia que abans del mes d'agost gairebé tota la població de Catalunya ja ha estat contagiada. És per això que del mes d'agost en endavant el nombre de contagis diaris és gairebé nul.

6 Possibles refinaments

En un model més real podríem haver considerat una distribució probabilística de la població, en comptes de suposar-la homogènia. Seguint amb aquesta idea, també podríem haver considerat les

vies de comunicació més freqüents a Catalunya, per així determinar cap a on és més probable que s'expandeixi el virus.

En ambdós casos estudiats es podria haver considerat un temps mitjà d'immunitat δ . Tot i ser poc freqüent, s'han trobat casos de gent que s'ha tornat a contagiar [12]. En aquest cas, en el dia t , un nombre H_t/δ de persones passaria a ser novament susceptible de contagiar-se.

D'altra banda, certament no tothom utilitza el mateix tipus de mascaretes. És per això que, sense considerar-les totes, podríem estimar que s'usen principalment tres tipus de mascaretes: mascaretes de cotó, quirúrgiques i KN95, cadascuna amb uns respectius coeficients ν_1 , ν_2 i un cert tant per cent de la població que la usa [13].

Finalment, també podríem haver considerat una eficiència $\eta < 1$ de la vacuna, de manera que a $(1 - \eta)V_t$ persones la vacuna no els hauria servit de res.

7 Conclusions

Com a conclusions de la primera part, el que sabem amb certesa és que podem acotar la proporció mínima de vacunats entre un 50% i un 75%. Per tant podem afirmar gairebé amb completa seguretat que vacunant un 70% de la població seria suficient per acabar amb la pandèmia. De fet, en la gràfica 2 hem estimat que vacunant solament un 50% de la població ja produiria un descens notable dels casos diaris de Covid-19.

Pel que fa a la segona part del treball, hem pogut observar amb claredat que la mascareta és necessària, ja que en cas contrari, i mantenint tots els altres paràmetres igual, tot Catalunya hauria resultat infectada. I com a conseqüència d'això, s'hauria produït un major nombre de defuncions. Concretament, se n'haurien produït de l'ordre de tres vegades més. Això últim ens acaba confirmant la necessitat innegable de les mascaretes.

Referències

- [1] Wikipedia. *Compartmental models in epidemiology*. [↗](#). (accedit: 20/02/2021).
- [2] Vikipèdia. *Catalunya*. [↗](#). (accedit: 22/02/2021).
- [3] Generalitat de Catalunya. *Dades COVID*. [↗](#). (accedit: 20/02/2021).
- [4] Google News. *Coronavirus (COVID-19)*. [↗](#). (accedit: 23/02/2021).
- [5] Steffen E. Eikenberry, Marina Mancuso, Enahoro Iboi, Tin Phan, Keenan Eikenberry, Yang Kuang, Eric Kostelich i Abba B. Gumel. *To mask or not to mask: Modeling the potential for face mask use by the general public to curtail the COVID-19 pandemic*. Abr. de 2020. [↗](#).
- [6] Geoffrey P. Garnett. *Role of Herd Immunity in Determining the Effect of Vaccines against Sexually Transmitted Disease*. [↗](#). (accedit: 24/02/2021).
- [7] Ying Liu, Albert A Gayle, Annelies Wilder-Smith i Joacim Rocklöv. *The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus*. [↗](#). (accedit: 22/02/2021).
- [8] Ricardo Aguas, Rodrigo M. Corder, Jessica G. King, Guilherme Gonçalves, Marcelo U. Ferreira i M. Gabriela M. Gomes. *Herd immunity thresholds for SARS-CoV-2 estimated from unfolding epidemics*. [↗](#). (accedit: 23/02/2021).
- [9] Ministerio de Sanidad. *Uso obligatorio de mascarilla*. [↗](#). (accedit: 22/02/2021).
- [10] Beatrice Dupuy. *Graphic touts unconfirmed details about masks and coronavirus*. [↗](#). (accedit: 22/02/2021).
- [11] Nippon TV News 24 Japan. *Researchers test mask using coronavirus*. [↗](#). (accedit: 22/02/2021).
- [12] James Gallagher. *Covid immunity: Can you catch it twice?* [↗](#). (accedit: 23/02/2021).
- [13] University of Maryland Medical System. *Choosing the Right Coronavirus Mask Type*. [↗](#). (accedit: 22/02/2021).