Seminari 1
Processos de Ramificació

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Processos estocàstics
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2023

Exercici 1. *Demostreu que si (X_n) és un procés de Galton-Watson i $\mathbb{E}(Z_n^{(k)}) \leq 1$ aleshores tenim que $X_n \to 0$ quasi segurament.*

Resolució. Tenim que pel teorema de caracterització dels processos de Galton-Watson, com que $\mathbb{E}(Z_n^{(k)}) \leq 1$, la probabilitat d'extinció és 1. Per tant, $\mathbb{P}(\text{extinció}) = \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0\ \forall n \geq k\right) = 1$ i tenim les següents implicacions:

$$\mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0\ \forall n \geq k\right) = 1 \implies \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1 \implies X_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$$

on en la primera implicació hem utilitzat que les variables X_n prenen valors en un conjunt discret, i per tant, la successió (el límit de la qual existeix per Galton-Watson) ha de ser constant a partir d'un punt.

Exercici 2. *Denotem $m := \mathbb{E}(Z_{n+1}^{(k)})$ que suposem finita. Demostreu que:*

$$\mathbb{E}(X_n) = m^n$$

Deduïu el comportament límit del nombre mitjà d'individus. Observeu que, en particular, en el cas $m = 1$ tenim que $\mathbb{E}(X_n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i en canvi $X_n \to 0$ quasi segurament.

Resolució. Per hipòtesi totes les $Z_n^{(k)}$ tenen la mateixa distribució, que li direm Z. Llavors, pel teorema de Wald, tenim que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_n^{(k)}\right) = \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(Z) = m\mathbb{E}(X_{n-1})$$

Expandint aquesta recurrència i utilitzant que $\mathbb{E}(X_0) = 1$ ja que $X_0(\omega) = 1\ \forall \omega \in \Omega$ deduïm que:

$$\mathbb{E}(X_n) = m\mathbb{E}(X_{n-1}) = m^2\mathbb{E}(X_{n-2}) = \cdots = m^n\mathbb{E}(X_0) = m^n$$

Per tant:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 1 \\ 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } m < 1 \end{cases}$$

Exercici 3. *Calculeu el nombre esperat del total de descendents d'un individu.*

Resolució. Com que les generacions són independents el que ens demanen és equivalent a calcular el nombre esperat de descendents des del primer individu. Hem de calcular, doncs, el valor de:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)$$

Com que les variables X_n són positives, tenim que:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^n = \begin{cases} \frac{m}{1-m} & \text{si } m < 1 \\ \infty & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

Exercici 4. *Suposem ara que les variables aleatòries $Z_n^{(k)}$ tenen moment de segon ordre finit i sigui $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Z_n^{(k)})$. Proveu que:*

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & \textit{si } m = 1 \\ \sigma^2 m^{n-1}\left(\frac{1-m^n}{1-m}\right) & \textit{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Resolució. Em de fer servir la fórmula per la variància vista a la llista de problemes quan les sumes són aleatòries (i tot és independent). Tenim que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_n^{(k)}\right) = \mathbb{E}(X_{n-1})\mathrm{Var}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) = m^{n-1}\sigma^2 + m^2\mathrm{Var}(X_{n-1})$$

Continuant la recurrència, tenim que:

$$\mathrm{Var}(X_n) = m^{n-1}\sigma^2 + m^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) = \cdots = m^{n-1}\sigma^2(1 + m + \cdots + m^{n-1}) + m^{2n}\mathrm{Var}(X_0)$$

Com que $\mathrm{Var}(X_0) = 0$, tenim que:

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & \text{si } m = 1 \\ \sigma^2 m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1} & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Exercici 5. *Suposem ara que*

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^{(k)} + Y_{n+1}$$

on Y_n és un nombre aleatori d'immigrants que arriben a la generació n, independentment de les $Z_{n+1}^{(k)}$. Suposem que el nombre mitjà d'immigrants que arriben en cada generació és constant, és a dir $\mathbb{E}(Y_n) = \lambda\ \forall n \in \mathbb{N}$ i per un cert $\lambda > 0$. Aleshores:

$$\mathbb{E}(X_n) = \begin{cases} 1 + \lambda n & \textit{si } m = 1 \\ m^n + \lambda\frac{1-m^n}{1-m} & \textit{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Resolució. Tenim ara que $X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_n^{(k)} + Y_{n+1}$. Per tant, usant el teorema de Wald:

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Y_{n+1}) = m\mathbb{E}(X_{n-1}) + \lambda$$

Continuant amb la recurrència tenim que:

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = m^n\mathbb{E}(X_0) + \lambda(1 + m + \cdots + m^{n-1}) = m^n + \lambda(1 + m + \cdots + m^{n-1}) = \begin{cases} 1 + \lambda n & \text{si } m = 1 \\ m^n + \lambda\frac{1-m^n}{1-m} & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Exercici 6. *Suposem que les Y_n són variables aleatòries independents amb la mateixa distribució i que $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) > 0$. Aleshores la probabilitat d'extinció definitiva és 0.*

Resolució. Volem calcular

$$\mathbb{P}(\text{extinció}) = \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0\ \forall n \geq k\right) \leq \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_n = 0\ \forall n \geq k\right)$$

on la desigualtat és del fet que tenim la inclusió de conjunts $\{\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0\ \forall n \geq k\} \subseteq \{\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_n = 0\ \forall n \geq k\}$. Ara bé:

$$\mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_n = 0\ \forall n \geq k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right)$$

Veurem que totes les probabilitats $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right)$ són 0. Siguin $A_N := \bigcap_{n=k}^{N}\{Y_n = 0\}$. Observem que $A_{N+1} \subseteq A_N\ \forall N \geq k$. Per tant, pel lema de les interseccions decreixents, tenim que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} A_N\right) = \lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(A_N)$$

Ara bé, com que les variables Y_n són i.i.d., tenim que:

$$\mathbb{P}(A_N) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N}\{Y_n = 0\}\right) = \bigcap_{n=k}^{N}\mathbb{P}\left(Y_n = 0\right) = \mathbb{P}(Y_1 = 0)^{N-k+1}$$

que és estrictament menor que 1 per la hipòtesi inicial. Per tant, $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}(A_N) = 0$ i refent els càlculs deduïm que $\mathbb{P}(\text{extinció}) = 0$.