Seminari 2. Problemes relacionats amb el passeig aleatori

Processos Estocàstics

Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

1. Considerem dos punts $A := (a, \alpha)$ i $B := (b, \beta)$ tals que $b > a \geq 0$ i $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tots ells nombres naturals. Definim la reflexió de A en l'eix horitzontal t com el punt $A' := (a, -\alpha)$. Justifiqueu el resultat següent:

   Principi de reflexió: el nombre de trajectòries de A a B que toquen o creuen l'eix t és igual al nombre de totes les trajectòries de A' a B.

   Nota: Entenem com a trajectòria una línia trencada contínua que uneix els punts (a, s_a), $(a+1, s_{a+1})$, $(a+2, s_{a+2}), \ldots (b, s_b)$, on (en aquest cas) $s_a = \alpha$ i $s_b = \beta$ i on cada s_{j+1} és igual a $s_j \pm 1$. És a dir, la podem veure com una possible trajectòria d'un passeig aleatori. Aquestes trajectòries les podem representar simplement escrivint $(s_a,\, s_{a+1}, \ldots, s_b)$, ja que si coneixem aquests valors, coneixem perfectament el que fa la trajectòria.

2. Aplicacions del Principi de reflexió:

   Teorema de la votació: siguin n i x enters positius tals que existeixen dos enters positius n_1 i n_2 amb $n_1 + n_2 = n$ i $n_1 - n_2 = x$. Definim $N_{n,x} := \binom{n}{n_1}$. Proveu que existeixen exactament $\frac{x}{n} N_{n,x}$ trajectòries $(0, s_1, s_2, \ldots, s_n = x)$ que van de l'origen al punt (n, x) i són tals que $s_1 > 0, s_2 > 0, \cdots, s_n > 0$.

   Indicació: El nombre total de trajectòries que compleixen la propietat que volem és igual al nombre de trajectòries que uneixen el punt $(1, 1)$ amb (n, x) menys el nombre de trajectòries que els uneixen i alguna vegada toquen (o creuen) l'eix t.

   Aplicació: Suposem que en una votació amb dos partits, A i B, el partit A ha tret n_1 vots i el partit B n_2 vots amb $n_1 > n_2$. Quina és la probabilitat que en tot moment de l'escrutini el partit A vagi per endavant?

   Exemple: Feu els càlculs en el cas concret $n_1 = 1200$ vots i $n_2 = 800$ vots.

Variacions sobre el problema de la ruïna del jugador

3. Donat un passeig aleatori simple, sortint de 0, calculeu la probabilitat de visitar alguna vegada l'estat b, on b és un enter estrictament positiu.

   Indicacions: Usant les nostres notacions del problema de la ruïna del jugador, podem pensar que $b = a - z$, (on, rcordeu, z era el capital inicial del nostre jugador i $a - z$ era el capital de l'altre). Havíem calculat p_z que era la probabilitat que el nostre jugador no s'arruïni i arruïni a l'altre, expressat en termes del passeig aleatori associat:

$$p_z = P\{\exists n \geq 0 : S_n = b;\, S_m > -z, m = 0, 1, \ldots n-1\},$$

   (aquí S_n denota un passeig aleatori que surt de 0). Vam veure que

$$p_z = \frac{\left(p/q\right)^a - \left(p/q\right)^{a-z}}{\left(p/q\right)^a - 1} = \frac{\left(p/q\right)^{b+z} - \left(p/q\right)^b}{\left(p/q\right)^{b+z} - 1},$$

   si $p \neq q$ i

$$p_z = \frac{z}{a} = \frac{z}{b+z},$$

si $p = q = 1/2$. Si definim $C_z = \{\exists n \geq 0 : S_n = b; S_m > -z, m = 0, 1, \dots n-1\}$, comproveu que $C_z \subset C_{z+1}$ i que la unió per a tot $z > 0$ ens dóna l'esdeveniment del que volem calcular la probabilitat.

4. Suposem que dos jugadors A i B, amb fortuna conjunta a (amb $a \in \mathbb{N}$), juguen partides en què A pot guanyar una unitat (que perd B) amb probabilitat p, B pot guanyar una unitat amb probabilitat q i poden empatar (llavors no guanya res cap dels dos) amb probabilitat r. Suposem que aquestes probabilitats són estrictament positives i que $p + q + r = 1$. Suposem que les successives partides són independents. Definim $u(i)$ com la probabilitat que A guanyi el joc (és a dir, B s'arruïna), suposant que la fortuna inicial del jugador A fossin i unitats. Deduïu una equació en diferències per a $u(i)$. Resoleu aquesta equació, amb les condicions frontera adequades i calculeu la probabilitat que A guanyi el joc si la seva fortuna inicial eren z unitats.