



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

TRABAJO FIN DE GRADO  
DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

## Diseño de juegos en superficies curvas

### Autor

Víctor Bricio Blázquez

### Directores

Antonio Martínez López, Profesor del Departamento de Geometría y Topología  
Carlos Ureña Almagro, Profesor del Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS

Granada, Septiembre de 2020

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Víctor Bricio Blázquez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2019-2020, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 6 de septiembre de 2020

Fdo: Víctor Bricio Blázquez

# Índice general

Índice de figuras	v
Resumen	vii
Summary	ix
Introducción	xiii
1. Sobre su origen	xiii
2. Problema a abordar	xvi
Objetivos	xix
Desarrollo del trabajo	xxi
<b>I. Contenidos Matemáticos</b>	<b>1</b>
<b>1. Geometría hiperbólica en dimensión dos</b>	<b>3</b>
1.1. Modelos	3
1.1.1. Modelo del semiplano superior ( $\mathbb{H}$ )	3
1.1.2. Modelo de Poincaré ( $\mathbb{G}$ )	6
1.1.3. Modelo de Cayley-Klein ( $\mathbb{C}$ )	6
1.1.4. Modelo de Klein-Poincaré ( $\mathbb{K}$ )	7
1.1.5. Modelo de Weierstrass ( $\mathbb{W}$ )	7
1.1.6. Modelo de las coordenadas polares ( $\mathbb{P}$ )	8
1.1.7. Relación entre los modelos	8
1.2. Introducción a la geometría de Riemann en dimensión dos	10
1.2.1. Métricas Riemannianas y concepto de longitud	10
1.2.2. Cálculo en el dominio complejo	13
1.2.3. Isometrías	15
1.2.4. La métrica de Poincaré	16
1.3. Algunos hechos de la geometría hiperbólica	27
1.3.1. Suma de los ángulos interiores de un triángulo	27
1.3.2. Paralelogramos en el hiperbólico	28
1.3.3. Congruencia AAA	28
1.3.4. Triángulos uno-angulares	29
1.3.5. Triángulos ideales	31
1.3.6. Polígonos hiperbólicos	33
1.4. Geometría de curvatura constante en las superficies compactas orientables	34
1.4.1. Geometría en el Toro	34
1.4.2. Geometría en el 2-toro	35

1.4.3. Geometría en el 3-toro . . . . .	37
1.4.4. La fórmula de Gauss-Bonnet . . . . .	38
1.4.5. Superficies platónicas . . . . .	39
 <b>II. Contenidos Informáticos</b>	<b>45</b>
 <b>2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico</b>	<b>47</b>
2.1. Teselación hiperbólica . . . . .	47
2.2. Requisitos funcionales y no funcionales . . . . .	48
2.3. Planificación y presupuesto . . . . .	50
2.4. Análisis y diseño . . . . .	51
2.4.1. Construcción de una recta hiperbólica . . . . .	57
2.4.2. Construcción del polígono central . . . . .	61
2.4.3. Replicar el polígono central . . . . .	62
2.5. Implementación y pruebas . . . . .	68
2.5.1. Aplicación web: Hyperbolic Tessellation . . . . .	68
2.5.2. Aplicación web: Snake . . . . .	71
 <b>A. Código de las aplicaciones</b>	<b>81</b>
 <b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Índice de figuras

1.	Puesto que $\alpha + \beta$ mide menos que dos ángulos rectos, Euclides afirma que las dos rectas se cruzarán. . . . .	XIII
1.1.	Líneas hiperbólicas en $\mathbb{H}$ . . . . .	3
1.2.	Proyección estereográfica. . . . .	4
1.3.	Esfera de Riemann. . . . .	5
1.4.	Dos tipos de paralelismo con líneas hiperbólicas. . . . .	5
1.5.	Líneas hiperbólicas en el modelo de Poincaré. . . . .	6
1.6.	Líneas hiperbólicas en el modelo de Cayley-Klein. . . . .	7
1.7.	Líneas hiperbólicas en el modelo de Klein-Poincaré. . . . .	7
1.8.	Líneas hiperbólicas en el modelo de Weierstrass. . . . .	8
1.9.	Líneas hiperbólicas en el modelo de las coordenadas polares. . . . .	8
1.10.	Relación de todos los modelos. . . . .	9
1.11.	Métrica de Poincaré. . . . .	19
1.12.	Arco de circunferencia entre P y Q. . . . .	21
1.13.	Arcos geodésicos. . . . .	22
1.14.	Triángulo hiperbólico. . . . .	27
1.15.	Aquí hay dos triángulos, uno hiperbólico, con los lados morados y azul; y otro euclídeo, con los lados morados y rojo. . . . .	27
1.16.	Congruencia de triángulos. . . . .	28
1.17.	Sucesión de triángulos para dar uno uno-angular. . . . .	29
1.18.	Triángulo uno-angular. . . . .	29
1.19.	Sucesión de triángulos uno angulares de ángulo exterior creciente. . . . .	30
1.20.	Aditividad del área. . . . .	30
1.21.	Todos estos triángulos son congruentes. . . . .	31
1.22.	Calcular el área de un triángulo hiperbólico. . . . .	32
1.23.	Toro llano. . . . .	34
1.24.	Toro llano replicado en el plano. . . . .	35
1.25.	Toro llano replicado en el plano. . . . .	35
1.26.	2-Toro llano. . . . .	35
1.27.	2-Toro dividido en cuatro hexágonos. . . . .	36
1.28.	2-Toro en el Disco de Poincaré. . . . .	36
1.29.	3-Toro llano. . . . .	37
1.30.	Identificación del 1 con el 4. . . . .	40
1.31.	Identificación de lados opuestos. . . . .	41
1.32.	Identificación de lados 1 con 6. . . . .	42
1.33.	Cuártica de Klein. . . . .	42
1.34.	3-toro en una teselación hiperbólica. . . . .	43
2.1.	Diagrama de casos de uso. . . . .	51
2.2.	Diagrama de interacción del usuario con la aplicación de las teselaciones. . . . .	52

## Índice de figuras

2.3. Diagrama de interacción del usuario con el juego. . . . .	52
2.4. Diagrama de interacción temporal del juego. . . . .	52
2.5. Diagrama de clases. . . . .	57
2.6. Punto de partida para hacer una inversión. . . . .	58
2.7. Resultado de la inversión. . . . .	59
2.8. Construcción de una línea hiperbólica que no es un diámetro. . . . .	60
2.9. Construcción del polígono central de la teselación. . . . .	61
2.10. Diagrama que representa las reflexiones ReflectP, ReflectQ y Reflect2 en un ejemplo. . . . .	67
2.11. Se ven solo las fronteras de los polígonos (y los radios). Teselación {7,3}. . . . .	70
2.12. Se ven solo los dibujos interiores. Teselación {6,4}. . . . .	70
2.13. Aquí se pueden observar ambos. Teselación {4,5}. . . . .	71
2.14. Construcción de una circunferencia hiperbólica. . . . .	73
2.15. Resultado del juego en el 2-toro, los lados del mismo color están identificados en sentido opuesto. . . . .	76
2.16. Resultado del juego en el 2-toro, los lados del mismo color están identificados en sentido opuesto. . . . .	77

# Resumen

## Diseño de juegos en superficies curvas

Víctor Bricio Blázquez

**Palabras clave:** geometría hiperbólica, Disco de Poincaré, métricas Riemannianas, transformación de Möbius, teselación hiperbólica, característica de Euler, Lobachevsky y Bolyai.

En el siguiente trabajo se presentan los orígenes de la geometría hiperbólica, comenzando con *Los Elementos* de Euclides y sus cinco postulados, y terminando con los llamados padres de esta geometría: Lobachevsky y Bolyai.

Se muestran varios modelos para representarla, siendo uno de los más conocidos el modelo de Klein-Poincaré.

Se explican los conceptos de análisis complejo que fundamentan a la geometría hiperbólica. Se detallan las ideas de métricas riemannianas y longitudes en ellas, en particular la métrica de Poincaré, así como las isometrías que existen.

Además se exponen varios hechos de la geometría hiperbólica, como la suma de los ángulos interiores, la no existencia de paralelogramos o el cálculo de las áreas de los triángulos hiperbólicos.

Se explican la geometría toro, 2-toro y 3-toro asimismo conocemos la fórmula de Gauss-Bonnet y se explicitan tres casos más concretos de dos 2-toros y un 3-toro en el modelo de Klein-Poincaré. Estos se conocen como superficies platónicas.

Tras esta formalización de los contenidos se pasa a describir la nomenclatura de las teselaciones, nos van a interesar las hiperbólicas, y la clase principal que se va a utilizar para representar las mismas en el Disco de Poincaré.

En este trabajo se van a desarrollar dos aplicaciones distintas, la primera de ellas representa la teselación hiperbólica que el usuario elija. La otra se trata de un juego en el 2-toro, y como veremos en las próximas páginas, el 2-toro exige la geometría hiperbólica, luego el personaje del juego se mueve usando la distancia hiperbólica.

Además, se exponen algunas de las construcciones con regla y compás que son necesarias para la implementación de dichas teselaciones. Y a continuación, se detallan los algoritmos precisos para el desarrollo de estas teselaciones.

Finalmente se da forma a la aplicación del juego en el 2-toro, lo vemos en el Disco de Poincaré.





# Summary

## Game design on curved surfaces

Víctor Bricio Blázquez

**Key words:** hyperbolic geometry, Poincaré Disc, Riemannian metrics, Möbius transformation, hyperbolic tessellation, Euler characteristic, Lobachevsky and Bolyai.

In the next pages it is presented the birth of the hyperbolic geometry, starting with The Elements by Euclid and its five postulates. We note that the last of them has been problematic for centuries. Many mathematicians have tried to prove it based on the other four postulates. It was not until Lobachevsky and Bolyai that people understand that by denying the fifth postulate we obtained a completely new consistent geometry.

Several models of the hyperbolic geometry are shown, among which we highlight the half-plane model, the Klein- Poincaré model and the Weierstrass model. We use the last one to implement the hyperbolic tessellations that we can see on the Klein- Poincaré model. Also we determine the necessary projections to go from one model to another.

The complex analysis concepts that support hyperbolic geometry is explained, starting with the idea of Riemann metrics and the notion of distance. The distance in a metric is defined and we see some calculus to show the kind of distance we are dealing with. We develop some of the complex calculus that we need to build hyperbolic geometry. And before going into which metric is used to represent this geometry we need the concept of isometries and conformal applications. Then Poincaré metric is defined and we see that we can obtain the distance between two points in the unit disc, with the Poincaré metric using Möbius transformations. And the completeness of the unit disc equipped with the Poincaré metric is proved. Also we present how to build geodesic arcs between two points; and we define the concept of curvature, we exemplify it calculating the curvature with the euclidean metric, spherical metric and Poincaré metric. We build another example in order to show a distance calculated in the half-plan model, with the Poincaré metric.

Then some interesting facts of the hyperbolic geometry are explained. The sum of the interior angles in an hyperbolic triangle is always less than  $\pi$ , and we prove it. We also demonstrate the non-existence of parallelograms in the hyperbolic geometry. Another interesting fact is that in the hyperbolic geometry you cannot scale polygons. After that, the concept of an one-angular triangle is defined, with it we can prove that the area of an hyperbolic triangle is a continuous and increasing function. We define the concept of an ideal triangle and demonstrate the formula for the area of an hyperbolic triangle. The last interesting fact of the list is the description of the hyperbolic polygons, and so its area.

We introduce the Theorem of Classification of Compact Surfaces and define the Euler characteristic, to start commenting about the geometry of different compact surfaces.

## Summary

The first one is the torus. That surface has the euclidean geometry, and we explain how do we see it and how do we can replicate it on the plane.

The next compact surface is the 2-torus. We show two ways of seeing a 2-torus in a plane. The first one is the simplest one (the connected sum of two torus), but the second one shows us a manner of seeing the 2-torus in the Klein-Poincaré model, it is in the unit disc using hyperbolic geometry.

And the last compact surface is the 3-torus, to show this surface we use the connected sum of three torus.

After that we see a numerical description of the Euler characteristic and we introduce the Gauss-Bonnet formula, and its proof.

Finally present the concept of platonic surfaces. We describe two platonic surfaces of genus 2. One of them uses equilateral triangles of angle  $\pi/5$ . We can see how the edges are identified, this picture will be important because it will be shown in a game happening it that 2-torus surface.

The other one uses equilateral triangles of angle  $\pi/4$ . Just like before, the way the edges are identified is indicated. And after that a platonic surface of genus 3, based on Klein's Quartic Curve, is described. We described a 3-torus with its identifications. These three surfaces are meant to be seen in the unit disc with hyperbolic geometry.

After we have explained all mathematical ideas, we start describing how is defined a tessellation and its essential parameters. They are  $p$  and  $q$ , any tessellation is specified by these two numbers.  $p$  means the amount of edges the central polygon has, and  $q$  means the amount of polygons that meet at each vertex. The relation between  $p$  and  $q$  carries the geometry of the tessellation, and that relation is described.

At this project we are going to develop two different applications, one of them shows the hyperbolic tessellation the user want to see. And the other is a game built in the 2-torus, as we will see in the next pages the 2-torus has hyperbolic geometry, so the game's character moves with hyperbolic distance.

The we describe our requirements specification and planning route, so we can understand the way that has been decided the attack the two application we want to develop.

After that we make a analysis of the use cases and the interaction with the user of both applications. And we deeply describe two classes that are involved in. The simplest one is used to operate with imaginary numbers, that class is only used in the game application. However, the other class is used to build, draw and operate with the hyperbolic lines at the Poincaré Disc. This is the main data structure we need to develop both of our applications.

Next, the implementation of the hyperbolic lines is described, we can separate them in two types: these that are diameters of the boundary of the Poincaré Disc, and these that are orthogonal euclidean circumferences of the boundary of the Poincaré Disc. The first type of hyperbolic line is easy to draw, but not the second one. In order to draw it we define the concept of inversion with respect to a circumference. And then we show how to build that kind of line with a geometrical construction with ruler and compass.

To fabricate an hyperbolic tessellation we need to describe its central polygon, so that we can replicate it on the Poincaré Disc. To follow that objective we describe the calculus we need, this way we can draw the central polygon of an hyperbolic tessellation and use the [Dun86]

algorithm to reproduce the polygon. So, the three main algorithms of [Dun86] are detailed, including all the variables needed that our application uses. Also, we show two versions of the first algorithm because we have two distinct options when it comes to describe the boundary of the polygons at the hyperbolic tessellation.

Both applications are deeply explained. Starting with the application that makes hyperbolic tessellations. The user of this application can modify not only the parameters  $p$  and  $q$  of the tessellation, but the number of layers it has, both of the colors that are used to paint the different boundaries and the kind of boundary. The user can choose between the boundary of the polygons at the hyperbolic tessellation, a painting that represents the fundamental region of the tessellation and both of them.

Following with the game application, we describe how our character is moving at the Poincaré Disc, it can go only from one hyperbolic line to its perpendicular at the actual point. And we describe the mathematical ideas that we need to create these perpendicular lines. Then we explain how we are respecting the hyperbolic distance, we accomplish it using hyperbolic circumferences. So the way of creating an hyperbolic circumference with a geometrical construction with ruler and compass is described. And we explain the mathematical concepts that we need to build a 2-torus on the Poincaré Disc. And the main calculus we need to respect an hyperbolic line while crossing an edge identified with another. Also the way of building an hyperbolic line through a point and a tangent vector to the hyperbolic line at this point.

Finally, we explain our conclusions and next researches that can be done based on this document. All the bibliography is presented together.



# Introducción

## 1. Sobre su origen

Cerca del año 300 a.C., en Alejandría, el matemático Euclides escribió *Los Elementos*, un tratado de matemáticas y geometría que se compone de trece libros. En ellos el matemático habla de la geometría euclidiana, que se basa en los siguientes cinco postulados:

1. Para cualesquiera dos puntos del plano se puede trazar una línea recta que pasa por ellos.
2. Cualquier segmento se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Para cualesquiera dos puntos se puede trazar una circunferencia con centro uno de los puntos y radio la distancia entre ambos.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta corta a otras dos de forma que los ángulos interiores de un mismo lado miden menos que dos rectos, entonces las dos rectas acaban encontrándose al prolongarlas sobre dicho lado.

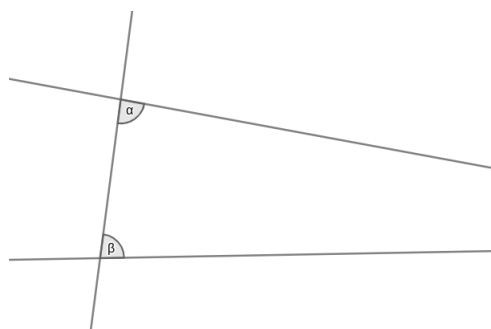


Figura 1.: Puesto que  $\alpha + \beta$  mide menos que dos ángulos rectos, Euclides afirma que las dos rectas se cruzarán.

Los primeros tres postulados sirven para describir la geometría clásica con regla y compás (ambos idealizados, pues se pueden extender indefinidamente). Con una regla podemos construir un segmento que una dos puntos dados (Postulado 1). Dado este segmento, podemos extenderlo indefinidamente con la regla en cualquier sentido (Postulado 2). Con un compás podemos situar la punta en un punto del plano y completar una circunferencia que pase por otro punto del plano (Postulado 3).

Los dos últimos postulados son diferentes. En lugar de afirmar la existencia de ciertas construcciones geométricas, describen relaciones que se deben mantener entre construcciones

geométricas ya existentes. El Postulado 4 afirma que, dados dos ángulos rectos que hayan sido construido, son iguales. Para interpretar esto, debemos conocer el uso que le daba Euclides a la palabra *igual*. Actualmente, cuando afirmamos que A es igual a B queremos decir que A y B son dos nombres distintos que tiene un mismo objeto matemático (ya sea un número, un ángulo, o lo que sea). Sin embargo, Euclides usaba el término de forma distinta: cuando él afirmaba que dos objetos geométricos era iguales quería decir que tenían el *mismo tamaño*. En la terminología moderna, cuando Euclides afirmaba que dos ángulos eran iguales, nosotros diríamos que miden lo mismo; cuando él decía que dos figuras, como triángulos o paralelogramos eran iguales, nosotros diríamos que tienen la misma área. Luego el Postulado 4 está afirmando que todos los ángulos rectos miden lo mismo.

Es muy importante entender porqué el Postulado 4 es necesario. La definición de Euclides de un ángulo recto se aplica solo a un ángulo que aparece en ciertas configuraciones (los ángulos que se forman cuando en la intersección de dos rectas se quiere que los ángulos adyacentes sean iguales); esto no nos permite concluir que la aparición de un ángulo recto en el plano este ligada necesariamente con la aparición de ángulos rectos en otro lado. Así que el Postulado 4 puede ser visto como la afirmación de un tipo de uniformidad en el plano: los ángulos rectos tienen el mismo tamaño en cualquier lugar.

El Postulado 5 dice, con lenguaje moderno, que si una recta cruza a otras dos de forma que la suma de los dos ángulos interiores en un lado resulte menos de  $\pi$  (menos de dos ángulos rectos), entonces, esas dos rectas se intersectarán en el mismo lado de la primera recta **1**. Intuitivamente, esto quiere decir si dos líneas empiezan a *apuntarse la una a la otra*, se cortarán. Este postulado se suele usar para probar las propiedades de las paralelas, también es conocido como el *postulado de las paralelas*.

*Los Elementos* de Euclides se convirtió en el libro de texto universal sobre geometría. Incluso desde tiempos antiguos se trabajó para mejorar a partir del tratado de geometría de Euclides.

El foco de atención durante casi doscientos años fue este Postulado 5, se consideraba el más problemático de los cinco. Mientras que los cuatro primeros postulados parecían ser evidentes para todo aquel que hubiera tenido cierta experiencia con las relaciones geométricas, el Postulado 5 es de un orden completamente distinto. Su enunciado es mucho más largo que el de los otros postulados. Mucho más importante, expresa una suposición acerca de configuraciones geométricas cuya evidencia no es tan fácil de reconocer como la de los otros cuatro. Sin embargo, es esperable que dos rectas que se apuntan la una a la otra acaben por cruzarse. El Postulado 5 tiene la apariencia de algo que deba ser probado, en lugar de ser aceptado como un axioma.

Durante siglos, los matemáticos estudiosos de Euclides consideraron el Postulado 5 como el eslabón más débil en su cadena de razonamiento. Muchos matemáticos intentaron y fallaron en sus intentos de probar el Postulado 5 a partir de los otros cuatro, o por lo menos reemplazarlo por otro más sencillo. De hecho, esta búsqueda motivó gran parte del desarrollo de la geometría desde Euclides.

El primer intento de probar el Postulado 5 que ha sobrevivido fue por Proclo (412-485 d.C.) un filósofo y matemático griego que vivió en Asia Menor al comienzo del Imperio Bizantino que escribió un importante comentario en *Los Elementos* de Euclides. Proclo opina que el Postulado 5 no es evidente, luego debe ser probado y aportó una prueba del mismo. Desafortunadamente, al igual que mucho intentos posteriores la prueba de Proclo se basaba

en una suposición sin probar. Euclides definió las rectas paralelas como dos rectas en el mismo plano que no se cortan, sin importar cuánto se extendieran. Proclo supuso que las paralelas eran siempre equidistantes.

Tras la caída del Imperio Romano el estudio de la geometría pasó al mundo islámico. A pesar de que los textos originales de *Los Elementos* se perdieron en el Renacimiento, las traducciones al árabe fueron ampliamente estudiadas en el Imperio Islámico. Más adelante volvieron a Europa para ser traducidos al latín y otras lenguas.

Durante los años 1000-1300 d.C. muchos matemáticos árabes tomaron el estudio de Postulado 5. El más importante de ellos fue el académico y poeta persa Omar Khayyam (1048-1123 d.C.) que criticó los intentos anteriores de la prueba del Postulado 5 y aportó la suya. Sin embargo, al igual que Proclo supuso que las paralelas eran siempre equidistantes.

Con la llegada del Renacimiento los europeos comenzaron a atacar el problema del Postulado 5. Uno de los grandes intentos fue proporcionado por el matemático italiano Giovanni Saccheri (1667-1733 d.C.). Saccheri quiso probar el resultado por reducción al absurdo. Y probó que si el Postulado 5 es falso entonces existirían rectas paralelas que se acercarían indefinidamente, pero nunca se encontrarían. Saccheri consideró que su resultado era erróneo y que la suposición inicial debía ser falsa.

Saccheri es recordado hoy no por su fallido intento de probar el Postulado 5, sino porque probó muchos resultados que ahora reconocemos como teoremas en un nuevo y misterioso sistema de geometría que ahora conocemos como **geometría no euclidiana**.

En 1795, el matemático escocés John Playfair (1748-1819 d.C.) publicó una edición de los seis primeros libros de *Los Elementos*, que editó para corregir algunas de las debilidades del original. Una de las modificaciones que hizo Playfair fue reemplazar el Postulado 5, con la siguiente formulación alternativa:

**Postulado de Playfair:** Dos rectas no pueden ser trazadas por el mismo punto, paralelas a las misma recta sin coincidir entre sí.

En otras palabras, dados una recta y un punto exterior a la recta existe una única recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta dada. Playfair mostró que su alternativa era equivalente al Postulado 5. Este postulado tiene una gran ventaja respecto al original, puesto que centra su atención en la existencia y unicidad de líneas paralelas, que (como aprendieron las generaciones posteriores) es la parte esencial del problema. La mayor parte de los tratados de geometría euclídea modernos incluyen la versión de Playfair del Postulado 5 original.

El siguiente evento en la historia de la geometría fue el desarrollo matemático más grande desde los tiempos de Euclides. En la década de 1820 de forma independiente y prácticamente a la vez, tres matemáticos distintos tuvieron una idea revolucionaria: quizá el motivo de que el Postulado 5 sea tan difícil de probar sea que existe una teoría geométrica completamente consistente en la que los cuatro primeros postulados son ciertos, mientras que el Postulado 5 es falso. Si esta especulación terminaba siendo cierta significaría que pretender probar el Postulado 5 a partir de los otros cuatro carecía de sentido.

En 1829, el matemático ruso Nikolai Lobachevsky (1792-1856 d.C.) publicó un artículo acerca de los fundamentos de lo que hoy conocemos como la *geometría hiperbólica*, en la que el Postulado 5 se asume falso. Mientras tanto, en Hungría János Bolyai (1802-1960 d.C.) el hijo de una eminencia matemática húngara, pasó los años 1820-1823 escribiendo un manuscrito

en el que conseguía lo mismo; su artículo fue publicado en 1832 como un apéndice de un libro de texto de su padre. Cuando el gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855 d.C.), un amigo del padre de Bolyai, leyó el artículo de Bolyai vio que él había llevado a cabo investigaciones similares a pesar de no haberlas publicado nunca.

Bolyai y Lobachevsky recibieron el crédito por haber descubierto la geometría hiperbólica basada en sus trabajos, y en vista de las grandes contribuciones de Gauss no hay duda de que Gauss tuvo la misma percepción que Bolyai y Lobachevsky.

En esencia, la principal contribución de estos matemáticos fue un cambio de actitud: mientras que Khayyam, Saccheri y los demás también probaron teoremas en la geometría no euclidiana, fueron Bolyai y Lobachevsky quienes les dieron forma. Sin embargo, a pesar de todo este trabajo, aun no había prueba de que la geometría no euclidiana fuera consistente. No fue hasta 1868, cuando Eugenio Beltrami (1835-1900 d.C.) probó por primera vez que la geometría no euclidiana era tan consistente como la euclídea. La eterna pregunta acerca del Postulado 5 de Euclides fue finalmente resuelta.

La versión de la geometría no euclidiana que estudiaron Lobachevsky, Bolyai, Gauss y Beltrami son equivalentes. Hoy la llamamos geometría hiperbólica. En la geometría hiperbólica el postulado de Playfair es falso, siempre es posible que dos o más rectas distintas pasen por el mismo punto y sean paralelas a una recta dada. Este trabajo desarrollará esta geometría.

Sin embargo, hay quien se puede preguntar si la teoría de las paralelas puede fallar de forma opuesta, es decir, en lugar de que existan dos o más paralelas que pasen por el mismo punto que no exista ninguna. Es fácil imaginarse una geometría en la que no existan paralelas, esta es la geometría esférica. Si tomamos las rectas en la esfera como la intersección de un plano que pase por el centro de la esfera con la esfera, no existen líneas paralelas. Sin embargo, esta geometría parece contradecir el Postulado 2, que afirma que todo segmento se puede extender indefinidamente. Aquí un segmento se podría extender hasta un círculo máximo, pero nada más.

## **2. Problema a abordar**

En este trabajo desarrollaremos toda una batería de herramientas necesarias para poder utilizar, de forma sólida, la geometría hiperbólica. El modelo de representarla principal será el modelo de Klein-Poincaré. Tras esto se abordará el estudio de las superficies platónicas, prestando especial atención a los modelos platónicos de género dos y tres.

Gracias a este estudio construiremos dos aplicaciones distintas:

- La primera de ellas consiste en una aplicación web que realiza la teselación hiperbólica pedida por el usuario. Este podrá modificar los parámetros de la teselación para obtener la que sea más de su agrado, y obtendrá un error en caso de que los parámetros no sean correctos.
- La segunda consiste en otra aplicación web en la que se visualizará un 2-toro y se realizará un juego sobre el mismo.



Ambas aplicaciones están pensadas para ser un software con carácter lúdico y divulgativo que facilita a los usuarios la comprensión de la geometría hiperbólica. Se ha procurado que sean los más portables posibles, el resultado ha sido dos aplicaciones web que pueden ser ejecutadas en cualquier navegador.

Para poder llevar a cabo ambas aplicaciones serán esenciales los conceptos de geometría, topología y análisis complejo que se van a desarrollar próximamente, por la parte de matemáticas; y los conceptos de informática gráfica y programación orientada a objetos que se van a exponer más adelante.

Las fuentes principales que he utilizado para la obtención de la parte matemática son las siguientes: [Hoh02], [Nemo4], [Ló20], [Mas], [Lev99], [Lee50], [Kra], [Wee] y [Bur11], y para la parte de informática: [Dun86], [Ló] y [URT].



## Objetivos

Los objetivos con respecto a la parte matemática se basaban en la descripción de varios de los distintos modelos para representar la geometría hiperbólica.

Dar el fundamento necesario para la descripción de la métrica a usar sobre el modelo de Klein-Poincaré, y la descripción de las distancias e isometrías que se tienen en este modelo.

Describir varios hechos relativos a la geometría hiperbólica, con alguna comparación con la geometría euclídea.

Conocer el concepto de superficie platónica y la presentación de superficies platónicas de género dos y tres.

Estos objetivos se han cumplido con algunas dificultades, debido a la gran abstracción de muchos de los conceptos, pero se han podido solventar de forma correcta.

Los objetivos con respecto a la parte informática se basaban en la creación de una aplicación de visionado de teselaciones hiperbólicas, basadas en los algoritmos de [Dun86] que pudiera ser fácilmente portable. Además de esta aplicación, también se quería hacer otra en la que se desarrollara un juego en alguna superficie hiperbólica.

Los conceptos matemáticos explicados han sido de vital importancia para la realización de ambas aplicaciones.

Con respecto a la primera, además de utilizar los algoritmos de [Dun86] de la forma en que el autor los presenta, en la aplicación aquí desarrollada se ha utilizado la forma del autor y se ha añadido otra opción. Mientras que el autor del artículo describe su algoritmo con unos resultados que obtienen un dibujo en la región fundamental de la teselación, y este se replica por el Disco de Poincaré, en el presente trabajo se han añadido también las fronteras de los polígonos que forman la teselación (y sus radios). En la aplicación que más adelante se presentará el usuario podrá elegir la forma que desea ver, o incluso ambas.

Para la segunda aplicación, se ha decidido que la superficie hiperbólica en la que se desarrollará el juego será un 2-toro. Hay numerosas formas de representar un 2-toro, la elegida será una de las superficies platónicas que se comentaron en los objetivos matemáticos. Se ha podido llegar al objetivo a pesar de la gran abstracción de los conceptos matemáticos necesarios para este fin.



## Desarrollo del trabajo

El trabajo consiste en el desarrollo de dos aplicaciones web que facilitan a los usuarios la comprensión de la geometría hiperbólica.

Tiene dos partes, en la primera se desarrollan los conceptos matemáticos necesarios para comprender la geometría hiperbólica. En la segunda, que se basa, en parte, en las ideas matemáticas desarrolladas con anterioridad, se describe la creación de estas dos aplicaciones.



**Parte I.**

**Contenidos Matemáticos**





# 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

## 1.1. Modelos

De entre los modelos que van a dar consistencia a la geometría hiperbólica vamos a destacar los siguientes:

### 1.1.1. Modelo del semiplano superior ( $\mathbb{H}$ )

El espacio subyacente de este modelo se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

Son los puntos del plano complejo que cumplen que la coordenada imaginaria es estrictamente positiva.

Hay dos tipos de líneas hiperbólicas:

- La intersección de  $\mathbb{H}$  y una recta euclídea en  $\mathbb{C}$  perpendicular al eje real.
- La intersección de  $\mathbb{H}$  y una circunferencia euclídea centrada en el eje real.

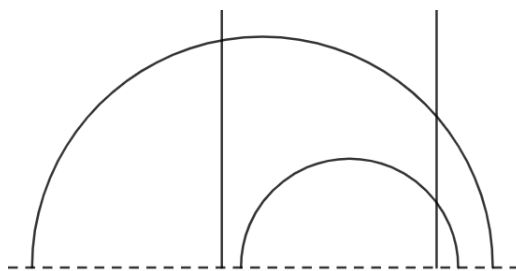


Figura 1.1.: Líneas hiperbólicas en  $\mathbb{H}$ .

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

### 1.1.1.1. Esfera de Riemann ( $\bar{\mathbb{C}}$ )

Con el objetivo de unificar estos dos tipos de líneas hiperbólicas definiremos la **Esfera de Riemann**.

Para ejemplificar el caso que nos ocupa deberemos imaginarnos la esfera unidad. Elegimos un punto de la esfera (N, que será el punto norte) al que llamaremos **centro de la proyección**, este será el punto que eliminaremos de la proyección. La proyección estereográfica establece una relación biyectiva entre los puntos de la esfera distintos de N y los puntos del plano  $z = 0$  de la siguiente forma: sea  $\alpha$  un punto de la esfera, la proyección de  $\alpha$  en el plano  $z = 0$  será la intersección de la recta que pasa por los puntos N y  $\alpha$  con el plano  $z = 0$ .

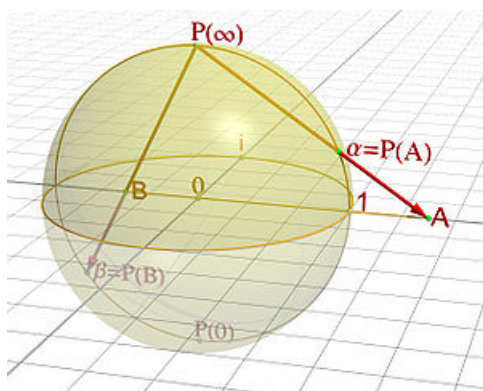


Figura 1.2.: Proyección estereográfica.

Vía la proyección estereográfica la esfera se puede identificar como:

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

En este caso, diremos que  $\bar{\mathbb{C}}$  es la esfera de Riemann.

**Definición 1.1.** Un **círculo** en  $\bar{\mathbb{C}}$  se puede entender de dos maneras:

- Un círculo euclídeo de  $\mathbb{C}$ .
- Una línea euclídea en  $\mathbb{C}$  con el  $\{\infty\}$ .

**Definición 1.2.** Un **disco** en  $\bar{\mathbb{C}}$  es una de las componentes del complemento en  $\bar{\mathbb{C}}$  de un círculo en  $\bar{\mathbb{C}}$ .

Para nosotros, el disco más importante de  $\bar{\mathbb{C}}$  será  $\mathbb{H}$ , este disco estará determinado el círculo que llamaremos  $\bar{\mathbb{R}}$ .  $\bar{\mathbb{R}}$  va a ser la frontera de  $\mathbb{H}$  con el infinito. Para verlo con más claridad podemos volver a la figura 1.1, la recta que está punteada representa el eje real,  $\mathbb{R}$ , y  $\bar{\mathbb{R}}$  es  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Ahora que vemos  $\mathbb{H}$  en  $\bar{\mathbb{C}}$ , nos podemos dar cuenta de que las líneas hiperbólicas de  $\mathbb{H}$  serán una intersección entre determinados círculos de  $\bar{\mathbb{C}}$  con  $\mathbb{H}$ .

**Definición 1.3.** Dos líneas hiperbólicas en  $\mathbb{H}$  son **paralelas** si son disjuntas.

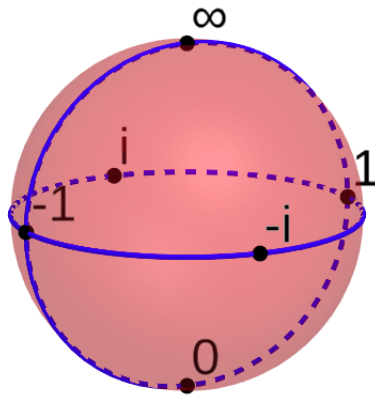


Figura 1.3.: Esfera de Riemann.



Figura 1.4.: Dos tipos de paralelismo con líneas hiperbólicas.

### 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

Con esta definición podemos pensar en dos tipos de paralelismo, pues dos líneas hiperbólicas distintas pueden tener un punto en común en la frontera en el infinito, o no tenerlo.

A las paralelas del primer caso, las que comparten un punto en la frontera, se las denomina simplemente **paralelas**. Mientras que a las del segundo caso se las denomina **ultraparalelas**.

#### 1.1.2. Modelo de Poincaré ( $\mathbb{G}$ )

En este modelo tendremos como espacio subyacente el siguiente:

$$S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Son los puntos de una esfera en los que la coordenada de la altura es estrictamente positiva.

En este caso, las líneas hiperbólicas serán secciones de semicircunferencia perpendiculares al plano XY (el plano del suelo).

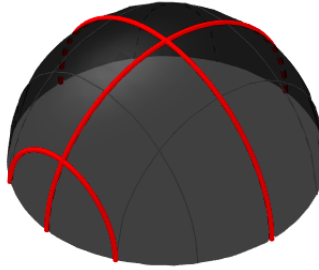


Figura 1.5.: Líneas hiperbólicas en el modelo de Poincaré.

#### 1.1.3. Modelo de Cayley-Klein ( $\mathbb{C}$ )

Para entender el modelo de Cayley-Klein primero debemos situarnos en el espacio que teníamos en el modelo de Poincaré.

Este espacio en  $\mathbb{R}^3$  debemos proyectarlo en un disco del plano XY con la siguiente función:

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y, 0)\end{aligned}$$

Este disco unidad será el espacio del modelo. En este modelo, las líneas hiperbólicas serán la proyección de las líneas hiperbólicas del modelo de Poincaré.

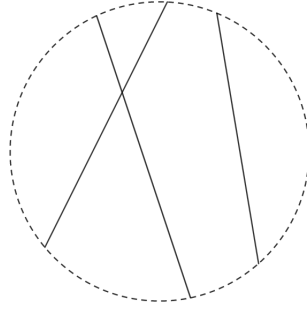


Figura 1.6.: Líneas hiperbólicas en el modelo de Cayley-Klein.

#### 1.1.4. Modelo de Klein-Poincaré ( $\mathbb{K}$ )

En este modelo tendremos como espacio el siguiente:

$$\mathbb{D}^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Tenemos el disco unidad abierto, al que también llamaremos Disco de Poincaré. En este caso las líneas hiperbólicas podrán ser:

- Diámetros de la circunferencia que es el borde del disco.
- Arcos de circunferencia, que estén contenidos en el disco, y que sean ortogonales al borde del disco.

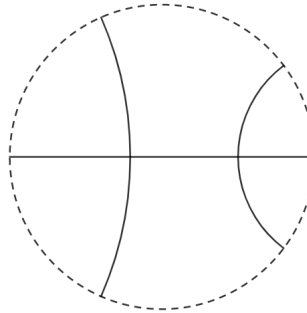


Figura 1.7.: Líneas hiperbólicas en el modelo de Klein-Poincaré.

#### 1.1.5. Modelo de Weierstrass ( $\mathbb{W}$ )

En este modelo, el espacio en el que se representará será el siguiente:

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

Es decir, es la hoja  $z > 0$  de este hiperboloide. Y en este caso, las líneas hiperbólicas serán las secciones de rama de hipérbola cuyo plano pase por el origen de coordenadas.

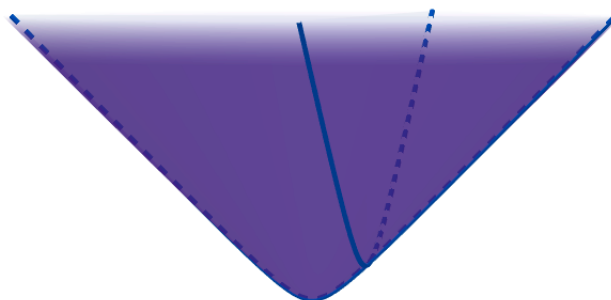


Figura 1.8.: Líneas hiperbólicas en el modelo de Weierstrass.

### 1.1.6. Modelo de las coordenadas polares ( $\mathbb{P}$ )

Este es un modelo muy poco conocido, para obtenerlo asignaremos a las coordenadas polares  $(r, \phi)$  en el plano hiperbólico, las coordenadas  $(\sinh(r), \phi)$ , y lo estableceremos en el plano  $z = 1$ . Las líneas hiperbólicas serán las líneas euclídeas que pasen por el centro del plano (N) y las ramas de las hipérbolas cuyas asíntotas pasen por el punto N.

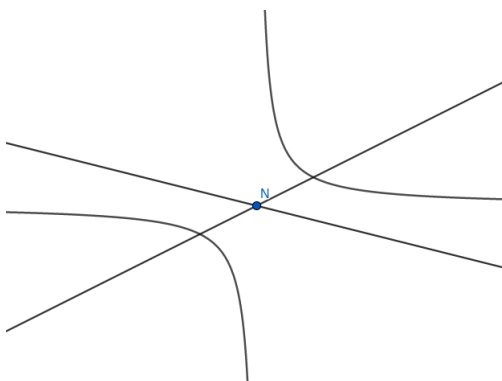


Figura 1.9.: Líneas hiperbólicas en el modelo de las coordenadas polares.

### 1.1.7. Relación entre los modelos

Diferentes proyecciones geométricas nos van a permitir pasar de un modelo a otro, y por tanto solo habrá que definir la geometría en uno de ellos y usar la proyección adecuada. Concretamente tenemos:

- El modelo de las coordenadas polares ( $\mathbb{P}$ ) es la proyección ortogonal del modelo de Weierstrass ( $\mathbb{W}$ ) sobre el plano  $z = 1$ ;

- El modelo de Cayley-Klein (C) lo podemos ver como una proyección central respecto del punto  $O(0,0,0)$  del modelo de Weierstrass (W) en el plano  $z = 1$ .
- El modelo de Poincaré (G) es una proyección central respecto del punto  $S(0,0,-1)$  del modelo de Weierstrass (W) en la semiesfera (con  $z > 0$ ) de centro el origen de coordenadas y radio unidad.
- El modelo de Klein-Poincaré (K) lo podemos ver como una proyección central respecto del punto  $S(0,0,-1)$  del modelo de Weierstrass (W) en el plano  $z = 0$ .
- El modelo de las coordenadas polares (P) es la proyección central de modelo de Poincaré (G) respecto al punto  $O(0,0,0)$  en el plano  $z = 1$ .
- El modelo de Klein-Poincaré (K) lo veremos como una proyección central respecto del punto  $S(0,0,-1)$  del modelo de Poincaré (G) en el plano  $z = 0$ .
- El modelo de Cayley-Klein (C) lo vamos a ver como una proyección ortogonal del modelo de Poincaré (G) en el plano  $z = 1$ ;
- El modelo del semiplano superior (H) es una proyección central respecto del punto  $M(0,1,0)$  del modelo de Poincaré (G) en un plano perpendicular al eje Y.

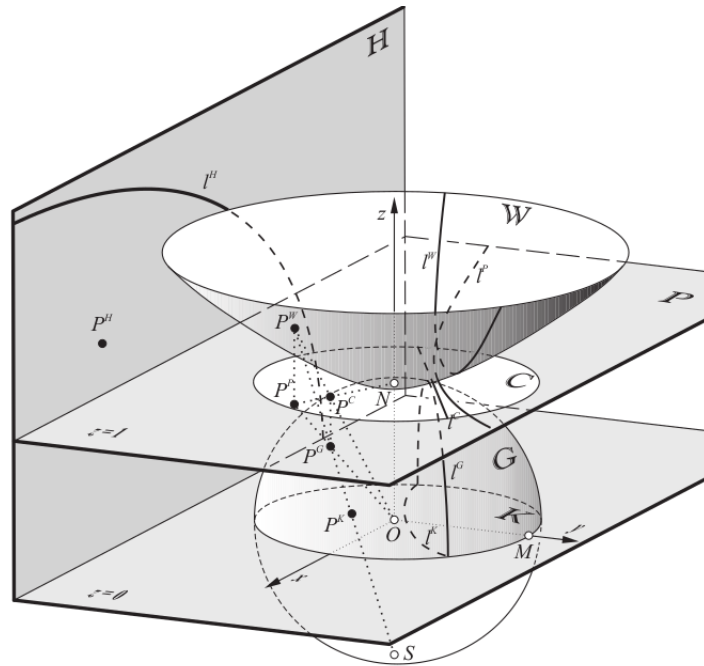


Figura 1.10.: Relación de todos los modelos.

## 1.2. Introducción a la geometría de Riemann en dimensión dos

### 1.2.1. Métricas Riemannianas y concepto de longitud

En el análisis clásico, una *métrica* es un objeto que se usa para medir distancias. Si  $\mathbb{X}$  es un conjunto, una métrica o distancia  $\mu$  para  $\mathbb{X}$  es una aplicación:

$$\mu : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

que  $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$  cumple:

- $\mu(x, y) = \mu(y, x)$
- $\mu(x, y) \geq 0$  y  $\mu(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$

Dados dos puntos  $P$  y  $Q \in \mathbb{R}^2$ , nos gustaría considerar la curva con menor longitud que conecte  $P$  y  $Q$ . La construcción de esta curva nos lleva a una ecuación diferencial, por lo que necesitaremos que nuestra métrica sea diferenciable.

Recordemos del cálculo multivariante, definíamos la longitud de arco de una curva diferenciable con derivada continua  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la siguiente forma:

$$l(\delta) = \int_a^b |\delta'(t)| dt$$

Esta definición asume que tenemos definido  $|\delta'(t)|$ , la longitud del vector tangente  $\delta'(t)$  a  $\delta$  en  $t$ . Riemann optó por definir una nueva métrica, en la geometría diferencial, dando una forma de medir los vectores tangentes.

De forma que a la palabra *métrica* le podemos dar un nuevo significado, íntimamente relacionado con el otro. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un dominio, una **métrica** en  $\Omega$  es una función continua  $\rho(z)$  en  $\Omega$  que es dos veces diferenciable en  $\{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$ . Si  $z \in \Omega$  y  $\xi \in \mathbb{C}$  es un vector, entonces definimos la *longitud* de  $\xi$  en  $z$  como:

$$||\xi||_{\rho, z} \equiv \rho(z)|\xi|$$

donde  $|\xi|$  es la longitud euclídea.

Normalmente nuestras métricas serán estrictamente positivas, pero de forma ocasional será conveniente permitir a la métrica tener ceros aislados. Estos aparecerán como los ceros de las funciones holomorfas (funciones derivables en  $\mathbb{C}$ ).

Vamos a considerar la siguiente métrica conocida como **métrica de Poincaré**:

Sea  $\mathbb{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , el disco unidad. Defino  $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ . Esta es la métrica que usaremos en el modelo de Klein-Poincaré, donde, por ejemplo tendremos:

- $||\xi||_{\rho, (1/2+0i)} = \rho((1/2+0i))|\xi| = \frac{4}{3}|\xi|$   
lo que significa que en el punto  $(1/2+0i)$  la norma de un vector tendrá un valor de  $\frac{4}{3}$  de su norma euclídea.



- $||\xi||_{\rho, (0+0i)} = \rho((0+0i))|\xi| = |\xi|$   
lo que significa que en el punto  $(0+0i)$  la norma de un vector coincidirá con su norma euclídea.

El hecho de que la longitud de un vector varíe con el punto desde el que parte es algo contradictorio con lo que hemos aprendido en cálculo. Un vector siempre ha tenido una dirección y una magnitud, pero no una posición. Ahora, un vector va a tener una posición, y la forma de calcular su magnitud va a depender de esta posición.

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un dominio y  $\rho$  una métrica. Si  $\delta : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva diferenciable con derivada continua. Definimos la **longitud en la métrica  $\rho$**  como:

$$l_{\rho}(\delta) = \int_a^b ||\delta'(t)||_{\rho, \delta(t)} dt$$

La longitud de una curva diferenciable con derivada continua definida a trozos, es la suma de las longitudes de las partes.

Nótese que esta definición es completamente análoga a la definición de longitud de arco clásica. También se puede observar, tras un cambio de variable, que la longitud de la curva es independiente de su parametrización. Algunas fuentes notarán la longitud de arco como sigue:

$$l_{\rho}(\delta) = \int_a^b \rho(z) |dz|$$

Tomemos  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  el disco unidad y  $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ , la métrica de Poincaré en  $\mathbb{K}$ . Fijo un  $\epsilon > 0$ , calculemos la longitud de la siguiente curva:  $\delta(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 1 - \epsilon$ .

$$\begin{aligned} l_{\rho}(\delta) &= \int_0^{1-\epsilon} ||\delta'(t)||_{\rho, \delta(t)} dt = \\ &= \int_0^{1-\epsilon} \frac{|\delta'(t)|}{1-|\delta(t)|^2} dt = \\ &= \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \log \left[ \frac{2-\epsilon}{\epsilon} \right] \end{aligned}$$

Si nos fijamos, cuando  $\epsilon$  es muy pequeña,  $l_{\rho}(\delta)$  es muy grande. De hecho

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} l_{\rho}(\delta) = +\infty$$

Después de hacer este cálculo, queda visto que, con la métrica de Poincaré, la frontera del disco está infinitamente lejos de su centro, al menos, con esta curva  $\delta$ .

Nótese que si tomamos  $\rho(z) = 1$  obtendremos la distancia euclídea de la curva.

En un curso riguroso sobre la geometría de Riemann se probaría que, para una métrica completa, las curvas de menor longitud siempre existen (geodésicas). En esta situación, evitaremos este tipo de abstracción, pero comentaremos el siguiente ejemplo:

1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

**Ejemplo:**

Sea el disco unidad  $\mathbb{K}$  con la métrica de Poincaré  $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ . Fijamos  $\epsilon > 0$ . Probaremos que todas las curvas diferenciables con derivada continua de la forma:

$$\mu(t) = t + iw(t), \quad 0 \leq t \leq 1 - \epsilon$$

que satisfacen  $\mu(0) = 0$  y  $\mu(1 - \epsilon) = 1 - \epsilon + 0i$ , la que tiene menor longitud es  $\delta(t) = t$  donde  $w(t)$  es una función diferenciable con derivada continua de variable real.

De hecho, para cualquier candidato  $\mu$  tenemos:

$$\begin{aligned} l_\rho(\mu) &= \int_0^{1-\epsilon} \|\mu'(t)\|_{\rho, \mu(t)} dt = \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1 - |\mu(t)|^2} |\mu'(t)| dt = \\ &= \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1 - t^2 - (w(t))^2} (1 + [w'(t)]^2)^{1/2} dt \end{aligned}$$

Sin embargo

$$\frac{1}{1 - t^2 - (w(t))^2} \geq \frac{1}{1 - t^2} \quad y \quad (1 + [w'(t)]^2)^{1/2} \geq 1$$

Luego podemos concluir que:

$$l_\rho(\mu) \geq \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1 - t^2} dt = l_\rho(\delta)$$

Es decir, podemos afirmar que, con la métrica de Poincaré, la curva con distancia menor entre un punto del eje real (interior al disco) y el centro del Disco de Poincaré es el segmento de recta que une dichos puntos, cuya distancia hiperbólica será la longitud de dicho segmento con la métrica de Poincaré. Esta será la distancia entre los dos puntos.

Notemos que con pequeñas modificaciones este argumento se puede extender a curvas diferenciables con derivada continua a trozos  $t + iw(t)$ .

De hecho, si una curva diferenciable con derivada continua a trozos que conecta el punto  $0 \in \mathbb{K}$  a  $(1 - \epsilon) + 0i \in \mathbb{K}$  no es de la forma  $\mu(t) = t + iw(t)$ , entonces por comparaciones elementales será de una longitud mayor que una curva de la forma de  $\mu$ .

Esta discusión sugiere que teniendo una métrica  $\rho$  en un dominio plano  $\Omega$ , y  $P$  y  $Q$  elementos de  $\Omega$ , podemos definir  $\mathcal{C}_\Omega(P, Q)$  como la colección de todas las curvas diferenciables con derivada continua a trozos  $\delta : [0, 1] \rightarrow \Omega$  tales que  $\delta(0) = P$  y  $\delta(1) = Q$  la **distancia p-métrica** de  $P$  a  $Q$  como sigue:

$$d_\rho(P, Q) = \inf\{l_\rho(\delta) : \delta \in \mathcal{C}_\Omega(P, Q)\}$$

Una vez más, si tomamos  $\rho(z) = 1$ , la métrica euclídea, y el plano como  $\Omega$ , entonces  $d_\rho(P, Q)$  es la distancia euclídea usual de  $P$  a  $Q$ .

Como conclusión, podemos afirmar que si tomamos la métrica de Poincaré en el disco unidad, si  $P = 0$  y  $Q = R + io$ , entonces  $d_\rho(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+R}{1-R} \right)$ .

### 1.2.2. Cálculo en el dominio complejo

Con el objetivo de hacer cálculos de forma más sencilla y eficiente, vamos a definir dos operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

En análisis complejo es más conveniente usar estos operadores que usar  $\partial/\partial x$  y  $\partial/\partial y$ , por el siguiente motivo.

Sea  $f(z) = u(z) + iv(z)$  una función diferenciable con derivada continua de variable compleja en un dominio plano  $\Omega$ . Nótese lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \text{ en } \Omega \iff \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(z) + iv(z)) = 0 \text{ en } \Omega$$

Separando esta ecuación en la parte real y la imaginaria se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v, \quad \frac{\partial}{\partial x} v = -\frac{\partial}{\partial y} u$$

Estas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que podemos concluir que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0 \text{ en } \Omega \iff f \text{ es holomorfa en } \Omega.$$

Observamos también, que si  $f$  es holomorfa entonces:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\ &= \lim_{\mathbb{R} \ni s \rightarrow 0} \frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Este es el concepto de derivada compleja, como vemos, para las funciones holomorfas es lo mismo que  $\frac{\partial f}{\partial z}$

Por último, veamos el operador de Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

que también puede ser escrito como sigue:

$$\Delta = 4 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Para poder hacer derivadas complejas necesitaremos conocer las herramientas de las derivadas. Las propiedades lineales, como son la suma y el producto por escalares, de  $\frac{\partial}{\partial z}$  y  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  y la regla del producto son sencillas de obtener. Sin embargo, la regla de la cadena es un poco más sutil, es como sigue:

**Proposición 1.1.** Sean  $f$  y  $g$  funciones diferenciables con derivada continua, si  $f \circ g$  está bien definida en un conjunto abierto  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ , entonces:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z)$$

**Demostración:**

Vamos a hacer la prueba de la primera igualdad, la segunda se hará de forma análoga. Tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (f \circ g)$$

Podemos escribir  $g(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  funciones de variable real, y aplicar el cálculo de la regla de la cadena para  $\frac{\partial}{\partial x}$  y  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Obtendremos lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - i \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

Después, usando las identidades:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

La expresión anterior, tras unos cálculos un poco largos y tediosos, pasará a ser la fórmula deseada. **QED**

**Corolario 1.1.** Si  $f \circ g$  es holomorfa entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Este es uno de los ejemplos de la utilidad de usar esta notación.

## 1.2.3. Isometrías

En cualquier materia matemática siempre existen los morfismos, esto es, funciones que preservan las propiedades que están siendo estudiadas. En la geometría euclídea, los morfismos serán los movimientos rígidos, pues preservan distancias y ángulos. Para la geometría de Riemann estos serán conocidos como isometrías.

**Definición 1.4.** Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dominios planos y sea  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una función diferenciable con derivada continua con únicamente ceros aislados. Supongamos que  $\Omega_2$  está dotado de una métrica  $\rho$ . Definimos el *pullback* de la métrica  $\rho$  bajo la aplicación  $f$  como la métrica de  $\Omega_1$  dada por:

$$f^*\rho(z) = \rho(f(z)) \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$$

Hay que notar que el pullback de una métrica bajo el conjugado holomorfo de una función holomorfa  $f$  será la métrica cero.

Hemos diseñado la definición de pullback de forma que los pullbacks holomorfos serán de gran interés y lo veremos un poco más adelante.

**Definición 1.5.** Sean  $\Omega_1, \Omega_2$  dominios planos dotados de las métricas  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , respectivamente. Sea:

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

una aplicación uno a uno, diferenciable con derivada continua. Si

$$f^*\rho_2(z) = \rho_1(z) \quad \forall z \in \Omega_1$$

diremos que  $f$  es una **isometría** del par  $(\Omega_1, \rho_1)$  al par  $(\Omega_2, \rho_2)$ .

La definición de una isometría es muy natural desde el punto de vista de la geometría diferencial, pero no es intuitiva. La siguiente proposición relacionará la noción de isometría con términos más familiares.

**Proposición 1.2.** Sean  $\Omega_1, \Omega_2$  dominios y  $\rho_1, \rho_2$  métricas en estos dominios. Si

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

es holomorfa y es una isometría de  $(\Omega_1, \rho_1)$  a  $(\Omega_2, \rho_2)$ , entonces se tienen las siguientes tres propiedades:

- a) Si  $\delta : [a, b] \rightarrow \Omega_1$  es una curva diferenciable con derivada continua entonces también lo es  $f_*\delta \equiv f \circ \delta$  y

$$l_{\rho_1}(\delta) = l_{\rho_2}(f_*\delta)$$

.

- b) Si  $P$  y  $Q$  son elementos de  $\Omega_1$  entonces

$$d_{\rho_1}(P, Q) = d_{\rho_2}(f(P), f(Q))$$

- c)  $f^{-1}$  es también una isometría.

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

### Demostración:

(b) es una consecuencia inmediata de (a), y (c) basta con aplicar definiciones sucesivas.

Probemos (a):

Por definición:

$$\begin{aligned} l_{\rho_2}(f_*\delta) &= \int_a^b \|(f_*\delta)'(t)\|_{\rho_2, f_*\delta(t)} dt \\ &= \int_a^b \left\| \frac{\partial f}{\partial z}(\delta(t)) \delta'(t) \right\|_{\rho_2, f_*\delta(t)} dt \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena, vemos lo que resulta del integrando:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(\delta(t)) \right| \|\delta'(t)\|_{\rho_2, f_*\delta(t)} &= \left| \frac{\partial f}{\partial z}(\delta(t)) \right| \|\delta'(t)\|_{\rho_2(f(\delta(t)))} \\ \|\delta'(t)\|_{f^*\rho_2, \delta(t)} &= \|\delta'(t)\|_{\rho_1, \delta(t)} \end{aligned}$$

Puesto que  $f$  es una isometría. Si ahora sustituimos en la fórmula de la longitud de  $f_*\delta$  obtenemos:

$$l_{\rho_2}(f_*\delta) = \int_a^b \|\delta'(t)\|_{\rho_1, \delta(t)} dt = l_{\rho_1}(\delta)$$

Y así finaliza la prueba. **QED**

No es difícil ver que cualquier movimiento rígido orientado positivamente del plano Euclídeo, a saber rotaciones, traslaciones y sus composiciones (no las reflexiones, puesto que son conjugadas holomorfas) son isometrías de la métrica euclídea. Ahora veremos las isometrías orientadas del Disco de Poincaré.

### 1.2.4. La métrica de Poincaré

Hemos comentado un poco acerca de la métrica de Poincaré, veámosla con más detalle. La métrica de Poincaré en el disco  $\mathbb{K}$  unidad es:

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

(Como dato a tener en cuenta, no hay consenso en cuál es la constante que va en el numerador; muchas referencias usan el 2).

En esta sección usaremos las palabras *aplicación conforme*, para hacer referencia a una aplicación holomorfa, de una región plana a otra, que sea biyectiva.

Para conocer las aplicaciones conformes comencemos por saber lo que dice el **principio del módulo máximo**:

Sea  $F$  una función holomorfa en un conjunto abierto  $U$  que contenga al disco cerrado  $\overline{D}(P, r)$ . Entonces la fórmula de la integral de Cauchy afirma:

$$F(P) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(P, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - P} d\xi$$

Parametrizando la frontera del disco por  $\gamma(t) = P + re^{it}$  y escribiendo la definición de integral de línea obtenemos:

$$F(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(P + re^{it}) dt$$

**Teorema 1.1.** (Lema de Schwarz): Si  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  es holomorfa y  $F(0) = 0$ , entonces:

$$|F(z)| \leq |z| \quad |F'(0)| \leq 1$$

Si se da alguna de las dos igualdades para algún  $z \neq 0$ , entonces  $F$  es una rotación:  $F(z) \equiv e^{i\tau} * z$  para algún  $\tau \in \mathbb{R}$ .

**Demostración:**

La función

$$G(z) = \begin{cases} \frac{F(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ F'(z) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Es holomorfa en  $\mathbb{K}$ . Aplicando el principio del módulo máximo a  $G$  en el disco  $\{z: |z| \leq 1 - \epsilon\}$  para  $\epsilon > 0$  tenemos:

$$|G(z)| \leq (1 - \epsilon)^{-1}$$

cuando  $|z| \leq 1 - \epsilon$ . Haciendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$  obtenemos  $|G(z)| \leq 1$  en  $\mathbb{K}$ , que es equivalente a la conclusión deseada. De forma similar se obtiene que  $|F'(0)| \leq 1$ .

Por unicidad, nótese que  $|F(z)| = |z|$  para algún  $z \neq 0$  implica que  $|G(z)| = 1$ . El principio de módulo máximo fuerza a  $G$  a ser una constante de módulo 1, luego  $F$  es una rotación. La unicidad para la derivada se obtiene de forma similar. **QED**

**Teorema 1.2.** Sea  $F$  una aplicación conforme del disco unidad en sí mismo. Entonces existe un número complejo  $a$  de módulo menor que 1 y  $\tau \in \mathbb{R}$  tal que:

$$F(\xi) = \phi_a \circ \rho_\tau(\xi)$$

**Demostración:**

Sea  $F(0) = b$ , y consideremos la función  $G \equiv \phi_b \circ F$ . Entonces  $G$  es una aplicación conforme del disco en sí mismo y  $G(0) = 0$ .

El lema de Schwarz nos dice que  $|G'(0)| \leq 1$ . Pero vamos a aplicar el lema de Schwarz a  $G^{-1}$  para obtener que  $|1/G'(0)| = |(G^{-1})'(0)| \leq 1$ . Luego concluimos  $|G'(0)| = 1$ . La unicidad del lema de Schwarz nos afirma de  $G(\xi) = \rho_\tau(\xi)$  para algún  $\tau$ . Esto es equivalente a:

$$F = \phi_{-b} \circ \rho_\tau$$

Tomando  $a = -b$  finaliza la prueba. **QED**

Con esto podemos ver que toda aplicación conforme es composición de transformaciones de Möbius y rotaciones.

**Proposición 1.3.** Sea  $\rho$  a métrica de Poincaré en el disco  $\mathbb{K}$ . Sea  $h : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  una aplicación conforme del disco. Entonces  $h$  es una isometría del par  $(\mathbb{K}, \rho)$  al par  $(\mathbb{K}, \rho)$ .

1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

**Demostración:**

Tenemos que:

$$h^* \rho(z) = \rho(h(z)) |h'(z)|$$

Ahora tenemos dos casos posibles:

- Si  $h$  es una rotación, entonces  $h(z) = \mu z$ , para algún  $\mu \in \mathbb{C}$  de módulo 1. Que cumple  $|h'(z)| = 1$  y

$$h^* \rho(z) = \rho(h(z)) = \rho(\mu z) = \frac{1}{1 - |\mu z|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} = \rho(z)$$

- Si  $h$  es una transformación de Möbius entonces:

$$h(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

, para  $a \in \mathbb{K}$ .

Pero entonces tenemos lo siguiente:

$$|h'(z)| = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2}$$

y

$$\begin{aligned} h^* \rho(z) &= \rho\left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right) |h'(z)| = \frac{1}{1 - \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right|^2} \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \\ &= \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2} = \frac{1 - |a|^2}{1 - |z|^2 - |a|^2 + |a|^2 |z|^2} = \rho(z) \end{aligned}$$

Puesto que cualquier aplicación de  $\mathbb{K}$  en  $\mathbb{K}$  es una composición de aplicaciones de una de las dos formas anteriores, la proposición está demostrada. **QED**

Sabemos entonces que las aplicaciones conformes del disco en el disco preservan la distancias de Poincaré. Para entender lo que esto significa, tomemos la siguiente transformación de Möbius:

$$\phi(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

$\phi$  no preserva la distancia euclídea, pero si lo hace con la de Poincaré. Como vemos en la siguiente figura:

**Proposición 1.4.** Si  $P$  y  $Q$  son puntos del disco  $\mathbb{K}$ , entonces la distancia de Poincaré es:

$$d_\rho(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \left| \frac{P - Q}{1 - \bar{P}Q} \right|}{1 - \left| \frac{P - Q}{1 - \bar{P}Q} \right|} \right)$$

**Demostración:**

Definimos:

$$\phi(z) = \frac{z - P}{1 - \bar{P}z}$$



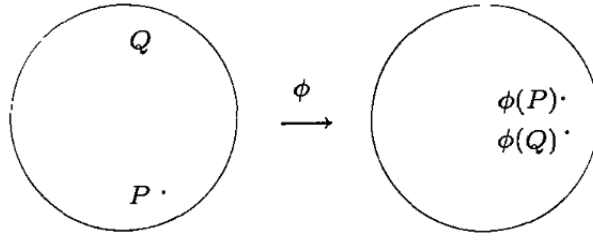


Figura 1.11.: Métrica de Poincaré.

una transformación de Möbius en el disco. Entonces tenemos lo siguiente:

$$d_\rho(P, Q) = d_\rho(\phi(P), \phi(Q)) = d_\rho(0, \phi(Q))$$

Puesto que sabíamos calcular la distancia entre los puntos situados en el eje de abscisas (dentro del disco) y que hemos visto que las transformaciones de Möbius preservan las distancias hiperbólicas podremos calcular las distancias de dos puntos. Para ello necesitamos encontrar una transformación de Möbius que nos lleve estos dos puntos al eje Y, y aquí podremos aplicar los conocimientos anteriores:

$$d_\rho(0, \phi(Q)) = d_\rho(0, |\phi(Q)|)$$

puesto que hay una rotación del disco que nos lleva  $\phi(Q)$  a  $|\phi(Q)|$

Así que, finalmente obtenemos:

$$|\phi(Q)| = \left| \frac{P - Q}{1 - \bar{P}Q} \right|$$

Otra de las razones por las que la métrica de Poincaré es muy útil es porque induce la misma topología que la topología de la métrica euclídea usual.

**Proposición 1.5.** *La topología inducida en el disco con la métrica de Poincaré es la topología plana usual.*

**Demostración:**

La base de entornos para la topología de la métrica de Poincaré se tiene con las siguientes bolas:

$$B(0, r) = \{z : d_\rho(0, z) < r\}$$

Sin embargo, usando la proposición anterior, estas bolas son iguales que en los discos euclídeos:

$$\{z : |z| < \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1}\}$$

Estos son discos de una base de entornos del origen en la topología euclídea. Luego las dos topologías son iguales en el origen. El origen puede ser movido a otro punto  $a \in \mathbb{K}$  por una transformación de Möbius:

$$z \rightarrow \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

Puesto que la métrica de Poincaré es invariante bajo transformaciones de Möbius, y puesto que las transformaciones de Möbius llevan discos a discos, las dos topologías son iguales en cada punto. **QED**

Uno de los hechos más llamativos acerca de la métrica de Poincaré en el disco es que convierte al disco en un espacio métrico completo. Esto puede parecer extraño, pero la razón es bien sencilla: no hay frontera. Al igual que el plano con la métrica euclídea es completo, la frontera está infinitamente lejos. Veamos esto:

**Proposición 1.6.** *El disco unidad  $\mathbb{K}$ , equipado con la métrica de Poincaré, es un espacio métrico completo.*

**Demostración:**

Sea  $p_j$  una sucesión de Cauchy en la métrica de Poincaré. Entonces la sucesión está acotada por la métrica. Luego  $\exists M > 0$  y finita que cumple:

$$d_\rho(0, p_j) \leq M, \forall j$$

Lo que se traduce a:

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |p_j|}{1 - |p_j|} \right) \leq M$$

Resolviendo para  $|p_j|$  obtenemos:

$$|p_j| \leq \frac{e^{2M} - 1}{e^{2M} + 1} < 1$$

Luego la sucesión está contenida en un subconjunto relativamente compacto del disco. Un cálculo muy similar nos lleva a que la sucesión debe ser Cauchy en la métrica euclídea. Además converge a un punto límite del disco, como es requerido para la completitud. **QED**

Calculemos ahora la curva con menor longitud que une dos puntos dados  $P$  y  $Q$  del disco con la métrica de Poincaré.

**Proposición 1.7.** *Sean  $P$  y  $Q$  elementos del disco unidad, la curva con menor longitud de Poincaré que une  $P$  y  $Q$  es:*

$$\delta_{P,Q}(t) = \frac{t \frac{Q-P}{1-Q\bar{P}} + P}{1 + t\bar{P} \frac{Q-P}{1-Q\bar{P}}} \quad 0 \leq t \leq 1$$

**Demostración:**

Definimos una transformación de Möbius:

$$\phi(z) = \frac{z - P}{1 - \bar{P}z}$$

Hasta ahora sabemos el camino más corto que salga del origen, la curva  $\tau(t) \equiv t\phi(Q)$  es la curva más corta desde  $\phi(P) = 0$  hasta  $\phi(Q)$ , con  $0 \leq t \leq 1$ . Aplicando la isometría  $\phi^{-1}$  a  $\tau$  obtenemos lo siguiente:

$$\phi^{-1} \circ \tau(t) = \frac{(t\phi(Q) + P)}{(1 + t\bar{P}\phi(Q))}$$

es el camino más corto de P a Q. Puesto que  $\phi^{-1} \circ \tau = \delta_{P,Q}$ , hemos terminado. **QED**

Analicemos las curvas que hemos descubierto en esta proposición. Primero, fijémonos que la curva  $\delta_{P,Q}$  es la imagen bajo una transformación fraccional lineal de una parte de una línea, la traza de  $\delta_{P,Q}$  es o un segmento o un arco de una circunferencia. De hecho, si P y Q son colineales con el o, entonces la fórmula de  $\delta_{P,Q}$  se reduce a un segmento, sino,  $\delta_{P,Q}$  traza un arco de una circunferencia euclídea. ¿Pero cuál es esta circunferencia?

Si hacemos t tender al infinito, nos queda el punto  $1/\bar{P}$ . Ahora, es un cálculo simple, pero largo, determinar el centro euclídeo y el radio de la circunferencia que es determinada por los puntos P, Q y  $1/\bar{P}$  (nótese que, por simetría, esta circunferencia pasará también por  $1/\bar{Q}$ ). Este arco de circunferencia se puede ver en la siguiente figura:

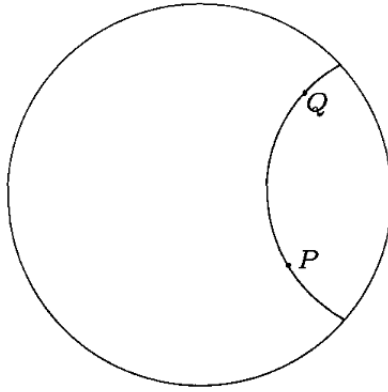


Figura 1.12.: Arco de circunferencia entre P y Q.

Como podemos ver, el segmento  $\{t + 0i : -1 \leq t \leq 1\}$  es ortogonal a la frontera de  $\mathbb{K}$ , por lo que los arcos circulares de la proposición anterior son también ortogonales a la frontera de  $\mathbb{K}$  en los puntos de intersección.

En la siguiente figura podremos ver algunos de estos *arcos geodésicos*:

Veamos ahora que la métrica de Poincaré está caracterizada por la propiedad de invarianza bajo aplicaciones conformes.

**Proposición 1.8.** Si  $\bar{\rho}(z)$  es una métrica en  $\mathbb{K}$  tal que cualquier aplicación conforme del disco es una isometría del par  $(\mathbb{K}, \bar{\rho})$  al par  $(\mathbb{K}, \bar{\rho})$ , entonces  $\bar{\rho}$  es un múltiplo constante de la métrica de Poincaré.

**Demostración:**

La hipótesis garantiza que si  $z_0 \in \mathbb{K}$  está fijo y

$$h(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$$

entonces:

$$h^* \bar{\rho}(0) = \bar{\rho}(0)$$

Esto es lo mismo que:

$$|h'(0)| \bar{\rho}(h(0)) = \bar{\rho}(0)$$

1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

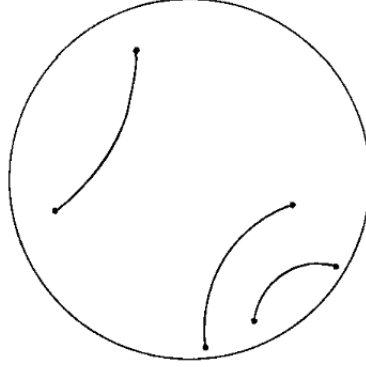


Figura 1.13.: Arcos geodésicos.

o

$$\bar{\rho}(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2} \bar{\rho}(0) = \bar{\rho}(0) \rho(z_0)$$

Luego vemos que  $\bar{\rho}$  es múltiplo de  $\rho$ . **QED**

Hemos visto entonces que la métrica de Poincaré es la métrica correcta para el análisis complejo en el disco, una pregunta natural es determinar qué otras aplicaciones preservan la métrica de Poincaré.

**Proposición 1.9.** Sea  $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  diferenciable con derivada continua y  $\rho$  la métrica de Poincaré. Si  $f$  es una isometría del par  $(\mathbb{K}, \rho)$  al par  $(\mathbb{K}, \rho)$ , entonces  $f$  es holomorfa. Puesto que  $f$  es, por definición de isometría, biyectiva, podemos concluir que  $f$  es una composición de una transformación de Möbius y una rotación.

**Demostración:**

Supongamos que  $f(0) = 0$ . Para un  $R > 0$ , definimos  $C_R$  el conjunto de puntos de  $\mathbb{K}$  que tienen una distancia de Poincaré  $R$  del 0. Puesto que la métrica de Poincaré es invariante bajo rotaciones (las rotaciones son aplicaciones holomorfas del disco en el disco), sabemos que  $C_R$  es una circunferencia euclídea (sin embargo, esta circunferencia tendrá un radio euclídeo de  $\frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}$ , no  $R$ ). Puesto que  $f(0) = 0$  y  $f$  preserva la métrica, sabemos que  $f(C_R) = C_R$ . Sea  $P \in C_R$ . Entonces:

$$\frac{|f(P) - f(0)|}{|P - 0|} = \frac{|f(P)|}{|P|} = 1$$

Haciendo  $R$  tender a  $0^+$  podemos concluir que  $f$  es conforme en el origen, es decir,  $f$  preserva la longitud infinitesimal.

Ahora nos desharemos de la suposición inicial de que  $f(0) = 0$ . Tomemos un  $z_0 \in \mathbb{K}$  arbitrario y fijamos  $w_0 = f(z_0)$ . Definimos:

$$\phi(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad \psi(z) = \frac{z - w_0}{1 - \bar{w}_0 z}, \quad g = \psi \circ f \circ \phi$$

Entonces  $g(0) = 0$  y  $g$  es una isometría (ya que tanto  $\psi$ , como  $f$  como  $\phi$  lo son); por lo que  $g$  es conforme en el origen. Pero  $\phi$  y  $\psi$  son conformes en todos los puntos. Con lo que podemos concluir que  $f$  es conforme en  $z_0$ . Como resultado,  $f$  es holomorfa o conjugada holomorfa. Puesto que  $f$  es una isometría  $\partial f / \partial \bar{z}$  nunca es 0, luego  $f$  es holomorfa. **QED**

Con ésto vemos que hay muchas isometrías en el disco unidad con la métrica de Poincaré. Por otro lado, las isometrías son objetos muy rígidos. Están determinadas completamente por su comportamiento de primer orden en un punto. Mientras que una demostración de esto va más allá de lo que buscamos en este trabajo, podremos hacer una prueba de este resultado para la métrica de Poincaré en el disco.

**Proposición 1.10.** Sea  $\rho$  la métrica de Poincaré en el disco. Sea  $f$  una aplicación diferenciable con derivada continua del disco en el disco. Partamos de que  $f$  es una isometría del par  $(\mathbb{K}, \rho)$  al par  $(\mathbb{K}, \rho)$ . Si  $f(0) = 0$  y  $\partial f / \partial z(0) = 1$  entonces  $f(z) \equiv z$ .

**Demostración:**

Por la proposición anterior  $f$  es holomorfa. Puesto que  $f$  preserva el origen y es biyectiva,  $f$  debe ser una rotación. Ya que  $f'(0) = 1$ ,  $f$  es la identidad. **QED**

**Corolario 1.2.** Sean  $f$  y  $g$  isometrías del par  $(\mathbb{K}, \rho)$  al par  $(\mathbb{K}, \rho)$ . Sea  $z_0 \in \mathbb{K}$  y supuesto que  $f(z_0) = g(z_0)$  y  $(\partial f / \partial z)(z_0) = (\partial g / \partial z)(z_0)$ . Entonces  $f(z) \equiv g(z)$ .

**Demostración:**

Sabemos que  $g^{-1}$  es una isometría. Si  $\psi$  es una transformación de Möbius que lleva al 0 a  $z_0$ , entonces  $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ \psi(z)$  satisface la hipótesis de la proposición. Como resultado  $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ \psi(z) \equiv z \circ g(z) \equiv f(z)$ . **QED**

Sea  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$  un dominio plano y  $\rho$  una métrica en  $\mathbb{U}$ , la curvatura de la métrica  $\rho$  en  $z \in \mathbb{U}$  se define como:

$$\mathcal{K}_{\mathbb{U}, \rho}(z) = \mathcal{K}(z) \equiv \frac{-\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2}$$

(Aquí, los ceros de  $\rho(z)$  serán singularidades en la curvatura,  $\mathcal{K}$  estará indefinida en esos puntos.)

Puesto que  $\rho$  es dos veces diferenciable, con segunda derivada continua, esta definición tiene sentido. Asigna a cada  $z \in \mathbb{U}$  una cantidad numérica. El hecho más importante sobre  $\mathcal{K}$  es su invarianza conforme.

**Lema 1.1.** Sea  $f$  una función holomorfa distinta de cero en un dominio plano  $\Omega$ . Entonces:

$$\Delta(\log(|f|^2)) = 0$$

Es decir,  $\log(|f|^2)$  es armónico.

**Demostración:**

Fijemos  $P \in \Omega$  y sea  $\mathbb{U} \subseteq \Omega$  un entorno de  $P$  en el que  $f$  tiene un logaritmo holomorfo. En  $\mathbb{U}$  tenemos:

$$\Delta(\log(|f|^2)) = \Delta(\log f + \log \bar{f}) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log f + 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \bar{f} = 0$$

1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

**Proposición 1.11.** Sean  $\mathbb{U}$  y  $\mathbb{V}$  dominios planos, y  $h : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$  una aplicación conforme (en particular,  $h'$  nunca se anula). Si  $\rho$  es una métrica en  $\mathbb{V}$  entonces:

$$\mathcal{K}_{\mathbb{U}, h^* \rho}(z) = \mathcal{K}_{\mathbb{V}, \rho}(h(z)), \quad \forall z \in \mathbb{U}$$

**Demostración:**

Hagamos el cálculo:

$$\mathcal{K}_{\mathbb{U}, h^* \rho}(z) \equiv \frac{-\Delta \log[\rho(h(z))|h'(z)|]}{[\rho(h(z))|h'(z)|]^2} = \frac{-\Delta \log[\rho(h(z))] - \Delta[\log|h'(z)|]}{[\rho(h(z))|h'(z)|]^2}$$

Por el lema anterior, el segundo término del numerador se anula. Luego nos queda:

$$\frac{-[\Delta \log \rho|_{h(z)}]|h'(z)|^2}{[\rho(h(z))|h'(z)|]^2} = \frac{-\Delta \log \rho|_{h(z)}}{\rho(h(z))^2} = \mathcal{K}_{\mathbb{V}, \rho}(h(z))$$

De hecho, esta demostración nos prueba algo más general. Si  $\mathbb{U}, \mathbb{V}$  son dominios y  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$  una aplicación holomorfa (no necesariamente biyectiva), entonces se da lo siguiente. Si  $\rho$  es una métrica en  $\mathbb{V}$ , entonces:

$$\mathcal{K}_{f^* \rho}(z) = \mathcal{K}_{\rho}(f(z))$$

en cada punto  $z \in \mathbb{U}$  en los cuáles  $f'(z) \neq 0$  y  $\rho(f(z)) \neq 0$ . **QED**

Desde el punto de vista geométrico, cualquier cantidad diferencial que sea invariante es de gran interés. Pero, ¿por qué hemos llamado a  $\mathcal{K}$  curvatura? La respuesta es que una construcción estándar en la geometría de Riemann da a cualquier métrica de Riemann una cantidad llamada curvatura de Gauss. En la geometría euclídea esta cantidad coincide con la intuición que tenemos de lo que la curvatura debería ser. En escenario más abstractos, las ecuaciones estructurales de Cartan nos llevan a una cantidad llamada curvatura que es invariante pero que tiene un contenido menos intuitivo. En el plano complejo, el cálculo de la curvatura de Gauss nos lleva a la fórmula que hemos usado para definir  $\mathcal{K}$ . Uno de los hechos amables de la geometría diferencial elemental en la teoría de funciones complejas es que no requiere de toda la maquinaria geométrica que nos lleva a la fórmula de  $\mathcal{K}$  para poder usarla.

Comencemos calculando la curvatura de la métrica euclídea:

**Ejemplo:**

Sea  $\mathbb{U}$  un dominio plano con la métrica euclídea  $\rho(z) \equiv 1$ . Por definición, vemos que  $\mathcal{K}(z) \equiv 0$ . Esto debería ser esperado, para la métrica euclídea no varía de un punto a otro.

**Ejemplo:**

La métrica

$$\sigma(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}$$

en  $\mathbb{C}$  se llama la *métrica esférica*. Después de un cálculo directo vemos que la curvatura de  $\sigma$  es igual a 1. Es un teorema básico en la geometría de Riemann el hecho de que la esfera es la única variedad de curvatura constante positiva.

Calculemos ahora la curvatura de la métrica de Poincaré en el disco, tengamos en cuenta que cualquier punto del disco se puede llevar a otro por una transformación de Möbius, y puesto que la curvatura es una invariante conforme, esperamos que la curvatura sea constante.

**Proposición 1.12.** Sea el disco unidad con la métrica de Poincaré,  $\forall z \in \mathbb{K}$  se tiene que  $\mathcal{K} = -4$ .

**Demostración:**

Notemos lo siguiente:

$$-\Delta \log(\rho(z)) = \Delta \log(1 - |z|^2)$$

Ahora, podemos escribir  $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  (como vimos en la sección 1.2.2), y  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Así que obtenemos:

$$= -\frac{4}{(1 - |z|^2)^2}$$

Por lo que  $\mathcal{K}(z) = -4$ . **QED**

Usando la aplicación conforme

$$f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$f(z) \rightarrow \frac{i(z+1)}{1-z}$$

del disco al al semiplano superior, podemos pasar la geometría del disco a la del semiplano superior con curvatura constante negativa. Para hallar la métrica que tendíamos en el semiplano superior haremos lo siguiente, que vimos al comenzar la sección 1.2.3:

$$f^*(\rho(w)) = \rho(f(w)) \left| \frac{\partial f}{\partial w} \right|$$

Para ello necesitaremos la inversa de  $f$ , tras unos cálculos sencillos:

$$f^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}$$

De forma que:

$$f^*(\rho(w)) = \frac{2}{1 - \left| \frac{w-i}{w+i} \right|^2} * \frac{2}{|w+i|^2} = \frac{|w+i|^2}{2\text{Im}(w)} * \frac{2}{|w+i|^2} = \frac{1}{\text{Im}(w)}$$

En el modelo del semiplano superior la métrica se calcula así:  $\tilde{\rho}(w) = \frac{1}{\text{Im}(w)}$

**Ejemplo:**

Fijo  $\epsilon > 0$  y  $R > 0$ , calculemos la longitud de la siguiente curva:  $\delta(t) = it$ ,  $\epsilon \leq t \leq R$ , (puesto que conocemos  $\mathbb{H}$ , esta curva debería tener longitud infinita):

$$l_{\tilde{\rho}}(\delta) = \int_{\epsilon}^R \|\delta'(t)\|_{\tilde{\rho}, \delta(t)} dt = \int_{\epsilon}^R \frac{|\delta'(t)|}{\text{Im}(\delta(t))} dt = i \int_{\epsilon}^R \frac{1}{t} dt = i(\log(R) - \log(\epsilon))$$

Tenemos los siguientes casos:

1. *Geometría hiperbólica en dimensión dos*

- Fijado  $R > 0$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} l_{\bar{\rho}}(\delta) = \infty$
- Fijado  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} l_{\bar{\rho}}(\delta) = \infty$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+, R \rightarrow \infty} l_{\bar{\rho}}(\delta) = \infty$

Como esperábamos.



## 1.3. Algunos hechos de la geometría hiperbólica

### 1.3.1. Suma de los ángulos interiores de un triángulo

Si nos quedamos con el modelo del disco de Klein-Poincaré, los triángulos que obtendremos serán similares al triángulo de la siguiente figura:

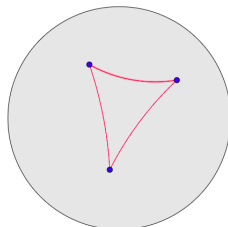


Figura 1.14.: Triángulo hiperbólico.

Como podemos ver, y como hemos visto en la sección anterior, los lados de un triángulo hiperbólico (en el disco) no van a ser segmentos rectos, desde el punto de vista euclídeo, a menos que uno de los puntos del segmento sea el centro.

Sin embargo, siempre vamos a encontrar una transformación conforme que nos lleve uno de los vértices del triángulo al centro. En este caso, el triángulo, tendrá dos lados rectos desde el punto de vista euclídeo (los que parten del vértice que está en el centro).

Veámos un ejemplo en la siguiente figura.

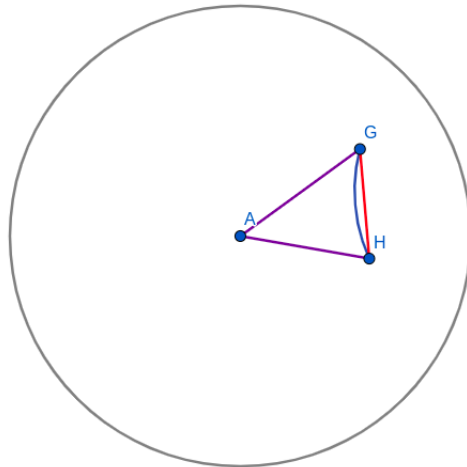


Figura 1.15.: Aquí hay dos triángulos, uno hiperbólico, con los lados morados y azul; y otro euclídeo, con los lados morados y rojo.

Sabemos que en el plano euclídeo la suma de los ángulos del triángulo con el lado rojo será de  $\pi$ , y puesto que en el modelo de Klein-Poincaré los ángulos se miden igual que en el euclídeo, la suma de los ángulos del triángulo con el lado azul no va a llegar a  $\pi$ .

### 1.3.2. Paralelogramos en el hiperbólico

Los paralelogramos, por definición, tienen cuatro lados y son paralelos dos a dos. Esto significa que la suma de sus ángulos internos ha de ser necesariamente  $2\pi$ , algo que no es posible ya que al descomponer el paralelogramo en dos triángulos, la suma de sus ángulos internos sería siempre menor que  $2\pi$ .

Este no es el único concepto que solo va a existir como límite. A lo largo de esta sección hablaremos también de los triángulos uno-angulares y de los triángulos ideales, que solo se entienden como límite de una sucesión de otras figuras.

### 1.3.3. Congruencia AAA

Veamos que en geometría hiperbólica no existe el concepto de semejanza, y por consiguiente no se podrá hacer un objeto a escala diferente de su tamaño real. Fijémonos en la siguiente figura:

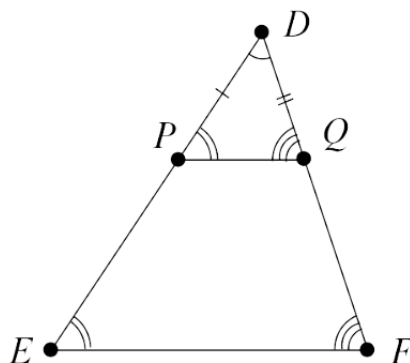


Figura 1.16.: Congruencia de triángulos.

Es claro que en la geometría plana, los triángulos  $\triangle PDQ$  y  $\triangle EDF$  son congruentes, pues comparten un ángulo, y los otros dos ángulos son iguales (al ser  $PQ$  paralela a  $EF$ ). Pero si lo miramos desde el punto de vista hiperbólico y nos centramos en el cuadrilátero inferior ( $EPQF$ ), vemos lo siguiente:

- Denotemos como  $\alpha$  al ángulo  $\angle DPQ$  y  $\beta$  al ángulo  $\angle DQP$ .
- El ángulo  $\angle PEF$  mide  $\alpha$  y el ángulo  $\angle EFQ$  mide  $\beta$ , al ser  $PQ$  y  $EF$  paralelos.
- En el cuadrilátero, el ángulo  $\angle EPQ$  tiene valor  $\pi - \alpha$  y el ángulo  $\angle FQP$  tiene valor  $\pi - \beta$ .
- Al sumar los cuatro ángulos obtenemos  $2\pi$ , pero un cuadrilátero está formado por dos triángulos. Sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que  $\pi$ , luego la suma de los ángulos de un cuadrilátero debe valer menos de  $2\pi$ .

Luego si hay una correspondencia entre los vértices de dos triángulos hiperbólicos que conserva ángulos, dichos triángulos han de ser congruentes.

Veamos ahora unos tipos de triángulos especiales que tenemos en el hiperbólico y sus áreas hiperbólicas:

#### 1.3.4. Triángulos uno-angulares

Sin pérdida de generalidad, podemos llevarnos uno de los vértices de un triángulo al centro del disco, de forma que el triángulo original y el que tiene un vértice en el centro sean isomorfos.

Un triángulo **uno-angular** (también llamado  $\frac{2}{3}$  Triángulo ideal) de ángulo exterior  $\alpha$  es la región encerrada por dos rayos hiperbólicos que forman un ángulo de  $\pi - \alpha$  en un punto y la línea hiperbólica que une los finales de estos rayos, y pueden definirse como límite de una sucesión de triángulos que tienden al borde:

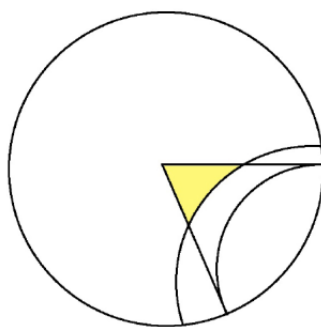


Figura 1.17.: Sucesión de triángulos para dar uno uno-angular.

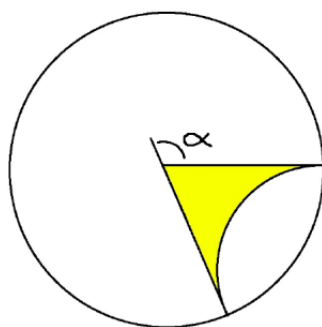


Figura 1.18.: Triángulo uno-angular.

Obsérvese que dos triángulos uno angulares de  $\angle$  exterior  $\alpha$  siempre son isométricos y por tanto congruentes.

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

Denotemos como  $\mathcal{A}(\Delta ABC)$  el área del triángulo  $\Delta ABC$ .

Como veremos en la siguiente figura, el área de un triángulo hiperbólico uno-angular va a ser continua y creciente en el ángulo exterior:

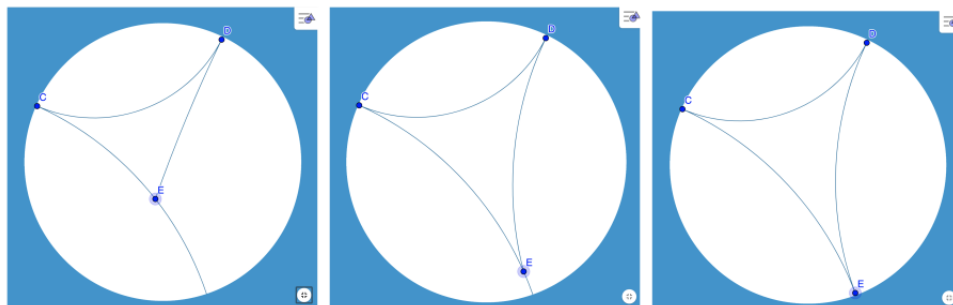


Figura 1.19.: Sucesión de triángulos uno angulares de ángulo exterior creciente.

Podemos ver que el área crece de forma continua a medida que se aumenta el ángulo exterior de triángulo, hasta que (en la tercera imagen) este ángulo se hace  $\pi$ .

Con la figura 1.20 obtendremos que el área es una función aditiva:

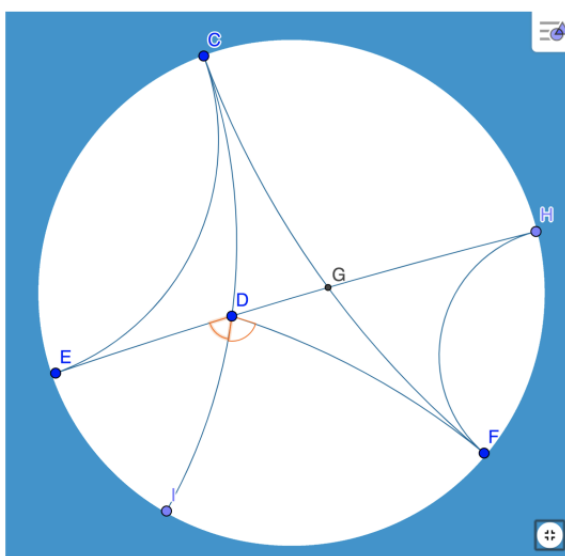


Figura 1.20.: Aditividad del área.

- Defino los ángulos  $\angle EDI$  con valor  $\alpha$  e  $\angle IDF$  con valor  $\beta$ .
- $\Delta ECD$  es uno-angular de ángulo exterior  $\alpha$ .
- $\Delta CDF$  es uno-angular de ángulo exterior  $\beta$ .

- $\Delta H D F$  es uno-angular de ángulo exterior  $\alpha + \beta$ .
- $\Delta C E G$  y  $\Delta G H F$  son isométricos pues son uno-angulares con el mismo ángulo exterior y por tanto tienen la misma área.
- $\mathcal{A}(\Delta D G F) + \mathcal{A}(\Delta G H F) = \mathcal{A}(\Delta H D F) = \mathcal{A}(\Delta(D G F)) + \mathcal{A}(\Delta(C E G)) = \mathcal{A}(\Delta(C E D)) + \mathcal{A}(\Delta(C F D))$
- Luego  $\mathcal{A}(\alpha + \beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$ .

Luego la función área es aditiva en  $\alpha$  y por tanto es  $\mathbb{Q}$ -lineal. Por continuidad será  $\mathbb{R}$ -lineal y por consiguiente se puede escribir:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \rho^2 \alpha$$

donde  $\alpha$  es el ángulo exterior del triángulo uno-angular.

### 1.3.5. Triángulos ideales

Los triángulos ideales son aquellos que tienen todos sus vértices en el borde del disco (en el infinito), los definimos como un límite de triángulos uno-angulares que tienden a tener el tercer vértice en el infinito. En la figura 1.21 se puede observar esta sucesión. Como consecuencia de lo que hemos visto en la sección anterior el área de un triángulo ideal es  $\rho^2 \pi$ . Y al igual que antes, todos los triángulos ideales serán congruentes.

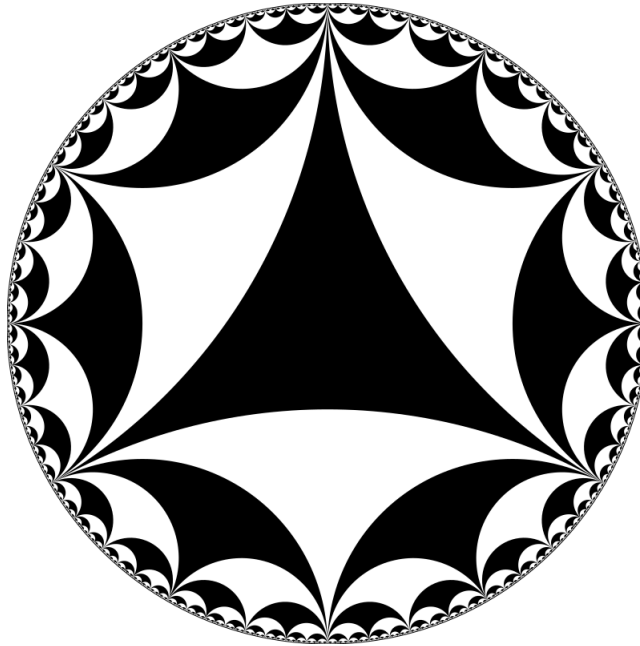


Figura 1.21.: Todos estos triángulos son congruentes.

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

### 1.3.5.1. Triángulos hiperbólicos

Ahora pasaremos a ver cuál es el área de un triángulo hiperbólico cualesquiera.

En la figura 1.22 queremos calcular el área del triángulo  $\Delta ABC$ . Sea  $\mathcal{A}(\Delta ABC)$  el área del triángulo  $\Delta ABC$ , podemos ver que se da la siguiente igualdad:

$$\mathcal{A}(\Delta DEF) = \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(\Delta ADE) + \mathcal{A}(\Delta BDF) + \mathcal{A}(\Delta CEF)$$

- $\mathcal{A}(\Delta DEF)$ : Este es un triángulo ideal, luego, como hemos visto antes, su área es  $\rho^2\pi$ .
- $\mathcal{A}(\Delta ADE)$ : Este es un triángulo uno-angular, como hemos visto antes, su área es el ángulo  $\rho^2q$ .
- $\mathcal{A}(\Delta BDF)$ : Este es un triángulo uno-angular, como hemos visto antes, su área es el ángulo  $\rho^2s$ .
- $\mathcal{A}(\Delta CEF)$ : Este es un triángulo uno-angular, como hemos visto antes, su área es el ángulo  $\rho^2t$ .

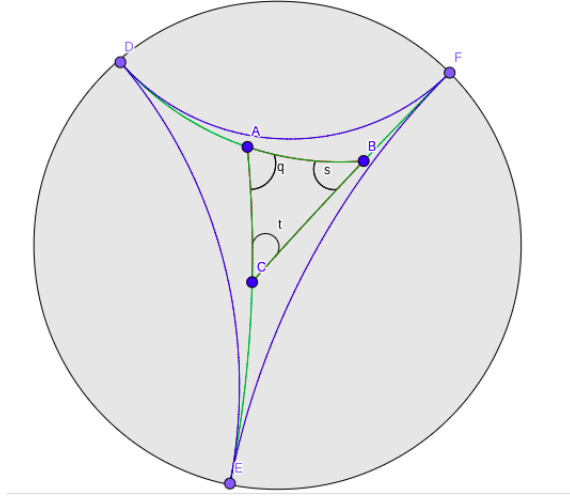


Figura 1.22.: Calcular el área de un triángulo hiperbólico.

La igualdad anterior quedaría de la siguiente forma:

$$\rho^2\pi = \mathcal{A}(\Delta ABC) + \rho^2(q + s + t)$$

luego hemos visto que el área del triángulo  $\Delta ABC$  es  $\rho^2(\pi - q - s - t)$ .

Es decir, el área de un triángulo hiperbólico será:

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \rho^2(\pi - \text{la suma de los ángulos interiores})$$

Por esto se ve que se cumple la desigualdad que habíamos comentado:

- Como en el caso esférico  $\rho^2$  se puede interpretar geométricamente como  $-1/\mathcal{K}$ .

### 1.3.6. Polígonos hiperbólicos

Para cualesquiera polígono euclídeo este se puede triangular, es decir, se puede hacer una partición del área del polígono en triángulos que cumplan las siguientes características:

- La unión de los triángulos es el polígono original.
- Los triángulos tienen como vértices los vértices del polígono original.
- Una pareja de triángulos cumple una única afirmación de las siguientes:
  - Son disjuntos.
  - Comparten un lado.
  - Comparten un vértice.

Una **diagonal** de un polígono se define como un segmento que conecta dos vértices del polígono, se encuentra en su interior y no es uno de sus lados.

Todo polígono con más de tres vértices tiene una diagonal. De forma que para triangular un polígono basta con tomar una diagonal y hacer inducción hasta que los polígonos resultantes sean triángulos.

Al igual que se puede triangular un polígono plano, también los podremos hacer con un polígono hiperbólico. Nótese que en la definición dada de triangulación no hay ninguna referencia al tipo de geometría que se está usando.

Conocemos la relación entre la suma de los ángulos de un triángulo y la geometría que estamos usando. Con ésto, podremos adaptar la fórmula que conocemos de la suma interior de los ángulos de un polígono euclídeo a un polígono hiperbólico:

- En el plano euclídeo tenemos lo siguiente:

$$\text{La suma de los ángulos interiores de un polígono} = (n - 2)\pi$$

.

- Luego en el plano hiperbólico será así:

$$\text{La suma de los ángulos interiores de un polígono} < (n - 2)\pi$$

Podemos conocer, gracias a una triangulación, el área de un polígono hiperbólico:

$$\text{Área} = (n - 2)\pi - \text{La suma de los ángulos interiores}$$

## 1.4. Geometría de curvatura constante en las superficies compactas orientables

Veamos antes de nada que significa el concepto de orientabilidad: una superficie compacta  $S$  es **orientable** si ningún subconjunto de  $S$  es homeomorfo a la Cinta de Möbius.

En caso de que exista algún subconjunto de  $S$  homeomorfo a la Cinta de Möbius se dirá que  $S$  es **no orientable**.

**Teorema 1.3.** *El Teorema de clasificación de superficies compactas [Mas] afirma que toda superficie compacta es homeomorfa a uno de los siguientes tres elementos:*

- La esfera.
- Suma conexa de  $n$  toros, con  $n \geq 1$ .
- Suma conexa de  $m$  proyectivos, con  $m \geq 1$ .

**Definición 1.6.** La **característica de Euler** es un invariante topológico asociado a cualquier teselación (o descomposición poligonal) de la superficie.

### 1.4.1. Geometría en el Toro

Comencemos estudiando el caso de Toro.

Como veremos en la siguiente figura, un toro se puede expresar como un cuadrado con los lados opuestos identificados en sentido contrario. Podemos ver que los cuatro vértices se identifican en el mismo punto. De forma que un entorno del punto  $P$  sería lo que se ve en la figura de color azul.

Se trata de cuatro partes del entorno y en cada una de ellas tenemos un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ .

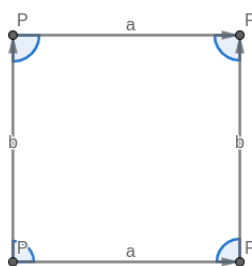


Figura 1.23.: Toro llano.

Si uniéramos las cuatro partes en un punto, podríamos replicar este cuadrado por todo el plano euclídeo, como en las siguientes figuras.

Es por esto que decimos que la geometría del toro es la geometría euclídea. El toro, como identificación se puede expandir en el plano. Esto no va a ocurrir en el siguiente caso.



#### 1.4. Geometría de curvatura constante en las superficies compactas orientables

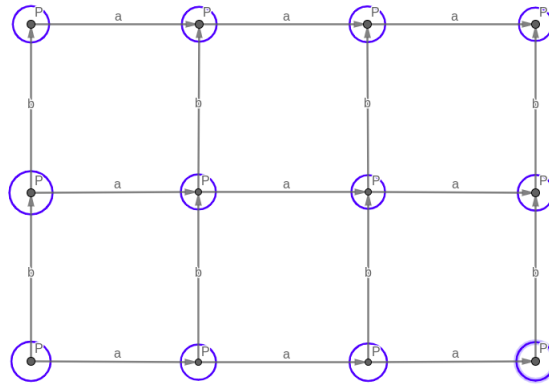


Figura 1.24.: Toro llano replicado en el plano.

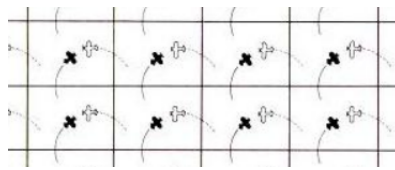


Figura 1.25.: Toro llano replicado en el plano.

#### 1.4.2. Geometría en el 2-toro

En este caso, el 2-toro se puede expresar como la suma conexa de dos toros y por tanto como la superficie obtenida de un polígono de 8 lados identificados como vemos en la figura 1.26:

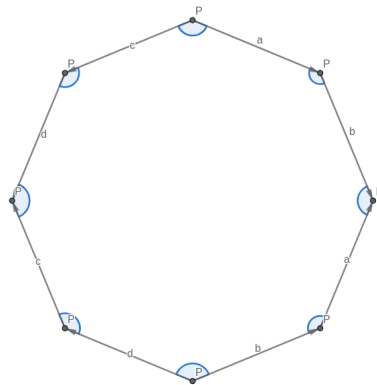


Figura 1.26.: 2-Toro llano.

Tenemos un octógono con los ocho vértices identificados en el mismo punto. De forma que un entorno del punto P sería lo que se ve en la figura de color azul.

Vemos ocho partes del entorno y con un ángulo de  $\frac{3\pi}{4}$ .

En este caso, para poder unir estas ocho partes del entorno en un mismo punto, como

## 1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

hicimos en el caso del toro llano, necesitaremos un octógono regular de ángulo  $\frac{\pi}{4}$ , algo que no conseguiremos encontrar en el plano euclídeo. Para poder hacer lo que queremos hacer necesitaremos adoptar la geometría hiperbólica. Tomaremos un octógono regular hiperbólico de ángulo  $\frac{\pi}{4}$ , con lo que tendría un área de  $(8 - 2)\pi - 2\pi = 4\pi$

Otro ejemplo para el 2-toro lo vemos en la figura 1.27:

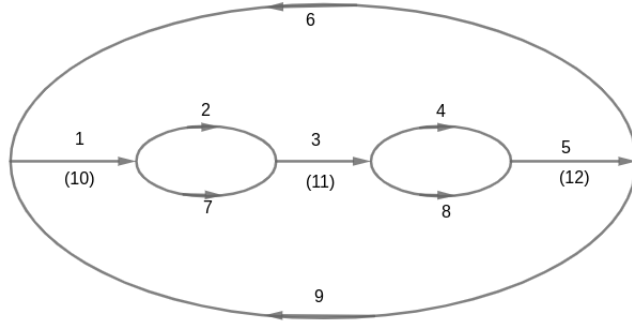


Figura 1.27.: 2-Toro dividido en cuatro hexágonos.

Vemos un 2-toro dividido en cuatro hexágonos iguales. Los lados de éstos están numerados del 1 al 12, como notación he puesto los números 10, 11 y 12 entre paréntesis para simbolizar que estos lados están en la parte de atrás.

Estos cuatro hexágonos los podemos ver en el Disco de Poincaré en la figura 1.28:

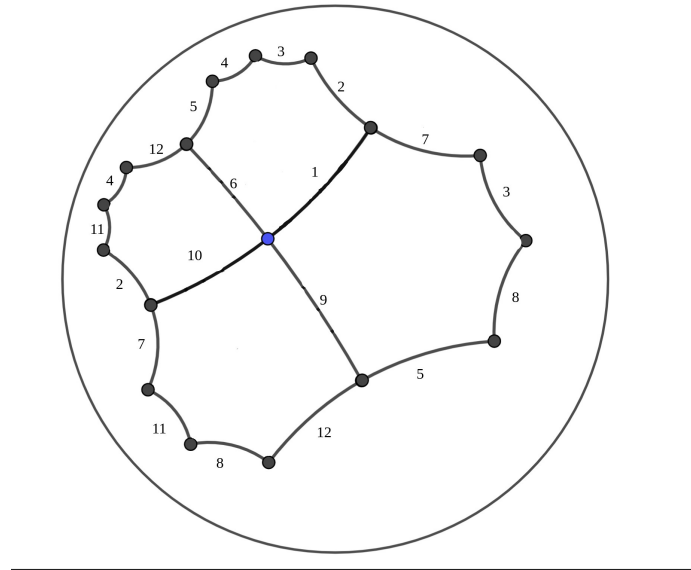


Figura 1.28.: 2-Toro en el Disco de Poincaré.

Tenemos hexágonos regulares de ángulo  $\pi/2$  (pues se juntan cuatro en cada vértice), luego deben ser hiperbólicos. Su área sería de  $(6 - 2)\pi - 2\pi = 2\pi$ .

Para respetar los sentidos de la figura 1.28, debemos entender los hexágonos superior e inferior en sentido antihorario, y los hexágonos derecho e izquierdo horario.

Veamos un ejemplo, los dos hexágonos que vemos (los otros dos se verían desde atrás) en la figura 1.27 tienen los lados 1-2-3-4-5-6 y 1-7-3-8-5-9, que son los hexágonos superior y derecho, respectivamente, de la figura 1.27.

Además, esta es una de las teselaciones del plano hiperbólico. Se denomina  $\{6,4\}$ , pues son hexágonos y en cada vértice concurren cuatro. En el siguiente capítulo hablaremos más acerca de las teselaciones hiperbólicas.

Como nos podemos imaginar, estas dos formas de representar el 2-toro no van a ser las únicas.

### 1.4.3. Geometría en el 3-toro

Vista la primera representación que he proporcionado para el 2-toro, la primera que voy a dar del 3-toro será muy similar, como suma conexa de tres toros:

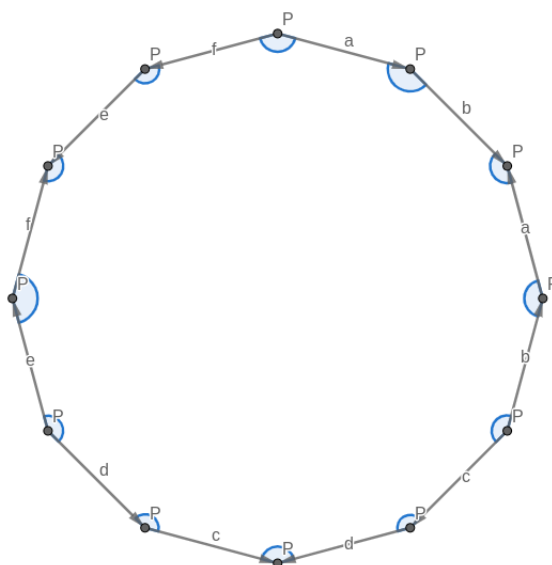


Figura 1.29.: 3-Toro llano.

Tenemos un dodecágono con los doce vértices identificados en el mismo punto. Un entorno del punto P sería lo que vemos en la figura de color azul.

Las doce partes del entorno tienen un ángulo de  $\frac{5\pi}{6}$ .

De la misma forma que procedimos con el 2-toro, en esta representación del 3-toro, necesitaremos un dodecágono regular que tenga de ángulos  $\frac{\pi}{6}$ , objeto matemático que encontraremos en el hiperbólico. Cuya área será de  $(12 - 2)\pi - 2\pi = 8\pi$

#### 1.4.4. La fórmula de Gauss-Bonnet

La **característica de Euler** es un entero que contiene la información esencial de la topología global de una superficie. Nos indica la geometría homogénea que admite la superficie:

- Las superficies con característica de Euler positiva admiten la geometría elíptica o esférica.
- Las superficies con característica de Euler cero admiten la geometría euclídea o plana.
- Las superficies con característica de Euler negativa admiten la geometría hiperbólica.

De hecho, si se conoce la característica de Euler de una superficie y se sabe si ésta es orientable o no, podremos conocer cuál es la topología global de la superficie. La fórmula de Gauss-Bonnet relaciona la característica de Euler de una superficie con su área. Siendo:

- V la cantidad de vértices.
- E la cantidad de lados.
- F la cantidad de caras.

$$kA = 2\pi(V - E + F)$$

donde  $k = -1, 0$  o  $1$  en función de si la superficie tiene geometría hiperbólica, euclídea o elíptica respectivamente, y siendo  $\chi = V - E + F$  la característica de Euler.

En superficies orientables  $\chi = 2 - 2g$  y en superficies no orientables  $\chi = 2 - g$  donde  $g$  es el género de la superficie. Esto también lo vamos a poder aplicar a las teselaciones.

##### **Demostración:**

Conocemos que el área total de un polígono:  $(n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$  donde  $n$  es la cantidad de lados del polígono y  $\alpha_i$  con  $i = 1 \dots n$  los ángulos interiores del polígono. Además tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Área total de la teselación} &= \left[ \begin{array}{c} \text{área del} \\ \text{primer polígono} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{área del} \\ \text{segundo polígono} \end{array} \right] + \dots + \left[ \begin{array}{c} \text{área del} \\ \text{último polígono} \end{array} \right] = \\
 &= \left[ (n_1 - 2)\pi - \left( \begin{array}{c} \text{suma de los ángulos} \\ \text{del primer polígono} \end{array} \right) \right] + \dots + \left[ (n_f - 2)\pi - \left( \begin{array}{c} \text{suma de los ángulos} \\ \text{del último polígono} \end{array} \right) \right] = \\
 &= (n_1 + n_2 + \dots + n_f) - (2 + 2 + \dots + 2) - \left[ \left( \begin{array}{c} \text{suma de los ángulos} \\ \text{del primer polígono} \end{array} \right) + \dots + \left( \begin{array}{c} \text{suma de los ángulos} \\ \text{del último polígono} \end{array} \right) \right] = \\
 &= (n_1 + n_2 + \dots + n_f) - (2 + 2 + \dots + 2) - \left[ \begin{array}{c} \text{suma de todos los ángulos} \\ \text{de la teselación} \end{array} \right] = \\
 &= 2\pi E - 2\pi F - 2\pi V = \\
 &\quad -2\pi(V - E + F)
 \end{aligned}$$

Si lo hiciéramos con la geometría elíptica (el área de los polígonos es  $\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi$ , donde  $n$  es la cantidad de lados del polígono y  $\alpha_i$  con  $i = 1 \dots n$  los ángulos interiores del polígono) obtendremos el mismo resultado con el signo opuesto. De la misma forma el valor será 0 cuando utilicemos polígonos en la geometría euclídea.

### 1.4.5. Superficies platónicas

Una teselación en una superficie de riemanniana se dice que es **platónica** si el grupo de simetrías actúa de forma transitiva en la secuencia de las caras, lados y vértices. A esto se la llama también una transformación regular. Una superficie de riemanniana se dice **platónica** si contiene alguna teselación platónica.

#### 1.4.5.1. Superficies platónicas de género 2

**Caso  $\pi/5$ :**

Construyamos una superficie  $S$  de género 2 que esté teselada de forma platónica por triángulos equiláteros de ángulo  $\pi/5$ . Si tenemos  $F$  triángulos, tendremos  $E = 3/2 * F$  lados y  $V = 3/10 * F$  vértices, pues concurren 10 triángulos en cada vértice.

Usando la característica de Euler:

$$\chi(S) = -2 = F * \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{10}\right)$$

Luego tendremos 10 triángulos (3 vértices y 15 lados), estos se agrupan alrededor de un vértice en forma de un decágono de ángulo  $2\pi/5$  el cual es una región fundamental de la superficie que queremos construir.

Vamos a considerar únicamente las identificaciones que satisfagan las condiciones de teselación platónica. Luego queremos que las rotaciones de  $2\pi/5$  al rededor del centro del decágono se extiendan a simetrías de la superficie. Esto implica que la identificación de un par de lados determina los demás. Puesto que al sumar los ángulos de 5 vértices del decágono se obtiene  $2\pi$  las identificaciones de los lados deben identificar cada segundo vértice. De esta forma obtenemos dos posibilidades: identificar el lado 1 con el 6 o con el 4.

En la figura anterior vemos los tipo de líneas siguientes:

- Las líneas más gruesas son los lados de los triángulos.
- Las líneas menos gruesas indican las identificaciones de los lados. De forma que el lado 1 y el 4, el 2 y el 9, el 3 y el 6, el 5 y el 8 y el 7 y el 10 están identificados.
- Las líneas discontinuas indican que los vértices que están unidas por ellas se identifican en el mismo vértice, el segundo (siendo el primero el centro). De la misma forma, los vértices que no tienen líneas discontinuas también están identificados en el mismo, el tercero.

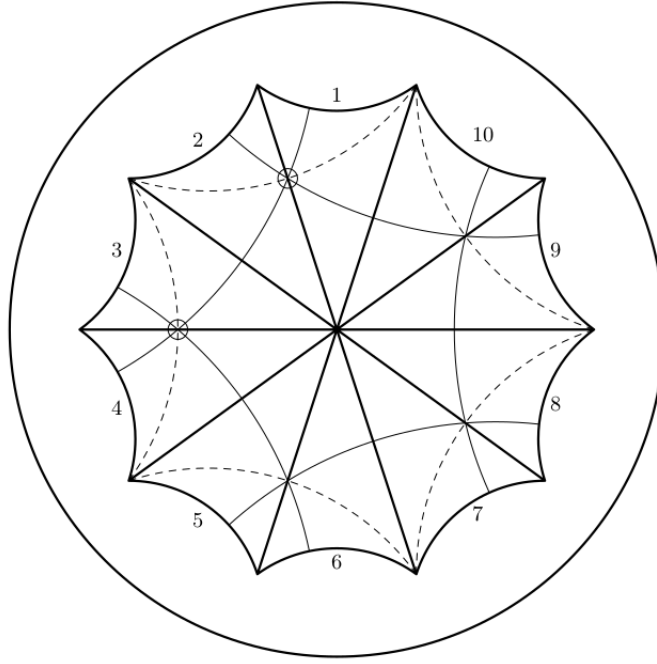


Figura 1.30.: Identificación del 1 con el 4.

**Caso  $\pi/4$ :**

Construyamos la superficie platónica  $S$  de género 2 teselada con triángulos equiláteros de ángulo  $\pi/4$ . De la misma forma que hicimos antes:

$$\chi(S) = -2 = F * \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{8}\right)$$

Luego tendremos 16 triángulos (6 vértices y 24 lados). 8 de los triángulos estarán al rededor del centro de un octógono de ángulo  $\pi/2$ . Los otros 8 estarán situados a lo largo de los lados.

No hay otra manera posible para una superficie platónica, pues las rotaciones de  $\pi/4$  al rededor del vértice central deben extenderse a una simetría de la superficie. Por lo que el dominio fundamental de nuestra superficie será un octógono regular de ángulo  $\pi/4$ .

La identificación de los lados opuestos preserva la platonicidad, pero no hay más identificaciones candidatas.

Un dominio fundamental para el grupo de todos los automorfismos es una tercera parte de uno de los triángulos equiláteros de ángulo  $\pi/4$ . Esto son dos triángulos de ángulos  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  y  $\pi/8$ . El área de estos triángulos es  $\pi - \pi/2 - \pi/3 - \pi/8 = \pi/24$ . Así que el orden del grupo de automorfismos es  $-2\pi\chi/(2\pi/24) = 48$ . Este es el máximo para género 2.

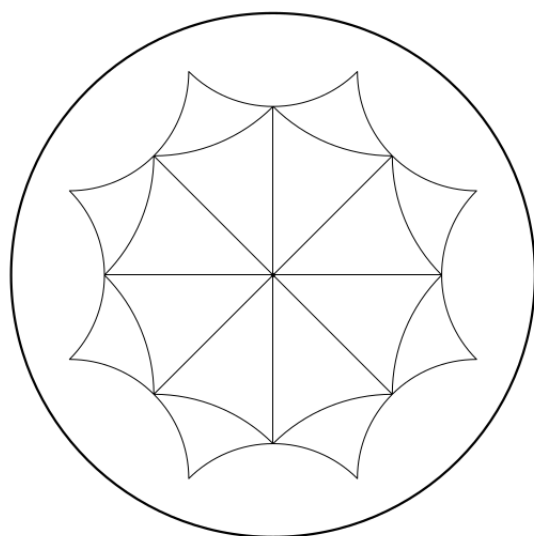


Figura 1.31.: Identificación de lados opuestos.

#### 1.4.5.2. Superficie platónica de género 3, la cuártica de Klein

Análogamente a los ejemplos de género 2, buscaremos una teselación de una superficie platónica  $S$  de género 3 con triángulos equiláteros de ángulo  $\pi/7$ . Con ellos formaremos una teselación de heptágonos regulares de ángulo  $2\pi/3$ .

Luego con la característica de Euler podremos ver lo siguiente:

$$\chi(S) = -4 = F * \left(1 - \frac{7}{2} + \frac{7}{3}\right)$$

Luego tenemos 24 heptágonos (56 vértices y 84 lados). Sin embargo, la teselación con triángulos equiláteros de ángulo  $\pi/7$  necesita de 14 caras, estos 14 triángulos formando un tetradecágono al rededor de un vértice central.

En este caso, la identificación adecuada es la que lleva el lado 1 al 6.

Como se ve en la figura, las líneas menos gruesas identifican los lados, comenzando con la que lleva el 1 al 6. Si unimos esta figura con una teselación de 24 heptágonos regulares de ángulo  $2\pi/3$  obtendremos la siguiente figura:

Y finalmente, dándole un poco de color y eliminando trazos innecesarios se puede ver como lo tenemos en la siguiente figura:

1. Geometría hiperbólica en dimensión dos

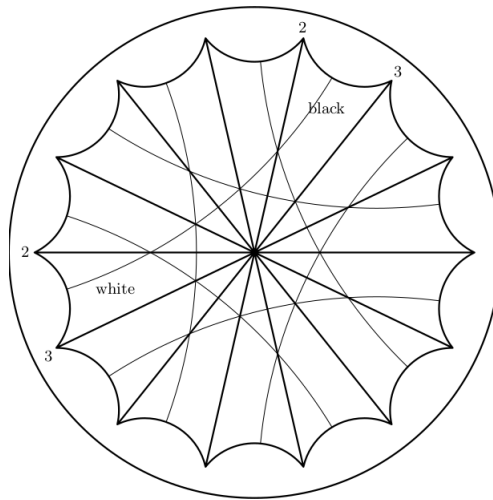


Figura 1.32.: Identificación de lados 1 con 6.

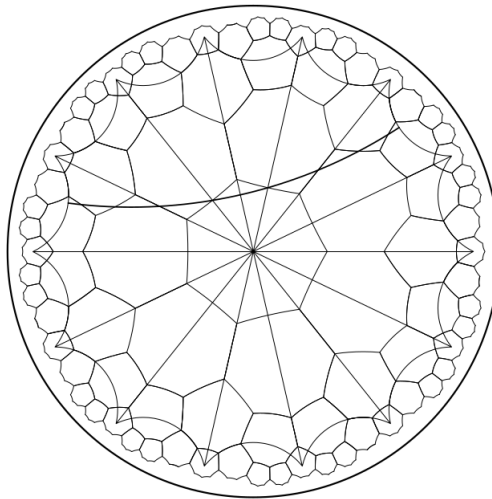


Figura 1.33.: Cuártica de Klein.



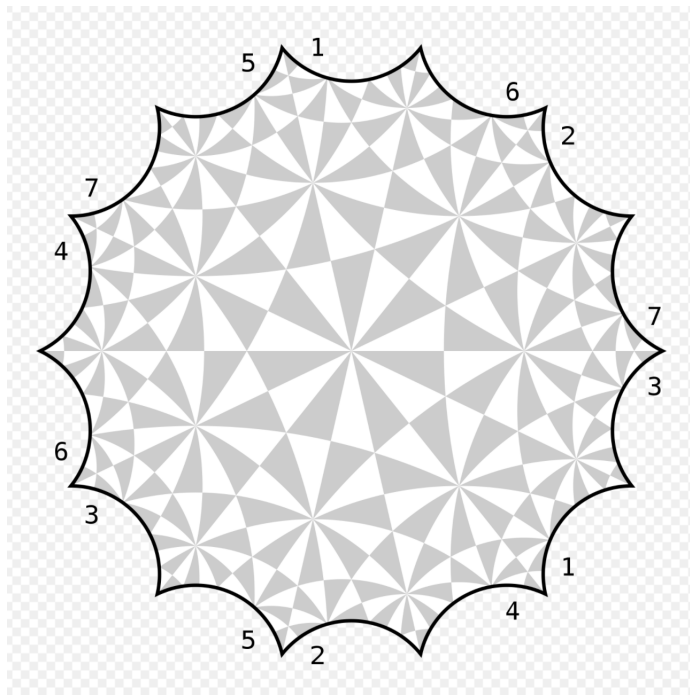


Figura 1.34.: 3-toro en una teselación hiperbólica.



## **Parte II.**

### **Contenidos Informáticos**



## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

En esta parte del documento se describirán y se detallarán las dos aplicaciones que se van a desarrollar.

La primera de estas consiste en una aplicación web que representa la teselación hiperbólica que desee el usuario. La aplicación irá modificando su resultado en función de los cambios que efectúe el usuario.

La segunda es también una aplicación web, sin embargo, esta reproduce un videojuego elaborado en un 2-toro, en la geometría hiperbólica.

Un concepto extremadamente importante para ambas aplicaciones en el que podemos ver en la siguiente sección.

### 2.1. Teselación hiperbólica

Es conveniente comentar y aclarar el concepto de teselación hiperbólica.

En la sección 1.1 hemos visto que hay diferentes modelos para representar la geometría hiperbólica. El modelo elegido para las teselaciones que vamos a ver aquí es el modelo de Klein-Poincaré ( $\mathbb{K}$ ).

Las que se han programado son regulares, es decir, se tomará un polígono regular y se replicará en el Disco de Poincaré, en este caso el centro del polígono principal será siempre el centro del disco.

La notación que vamos a usar para designar las teselaciones: será  $\{p, q\}$ , donde  $p$  es la cantidad de lados que tiene el polígono central, y  $q$  es la cantidad de polígonos que concurren en cada vértice (los valores de  $p$  y  $q$  deben ser naturales mayores que 1).

Existe una relación entre  $p$ ,  $q$  y la geometría de la teselación:

- Si  $(p - 2) * (q - 2) < 4$ : será una teselación que existe con la geometría elíptica.
- Si  $(p - 2) * (q - 2) = 4$ : será una teselación que existe con la geometría euclídea.
- Si  $(p - 2) * (q - 2) > 4$ : será una teselación que existe con la geometría hiperbólica.

A nosotros nos interesarán las teselaciones hiperbólicas.

## 2.2. Requisitos funcionales y no funcionales

Comencemos hablando sobre los requisitos funcionales de las aplicaciones:

- Para la aplicación que construye las teselaciones hiperbólicas:
  1. **Gestión de las rectas hiperbólicas:** la aplicación se encarga de construir la cantidad de rectas hiperbólicas necesarias respetando los parámetros que se le han dado.
  2. **Gestión de los parámetros de la teselación:** la aplicación se encarga de controlar la introducción de los parámetros, para que estos se puedan modificar.
  3. **Gestión de la aplicación:** los usuarios serán capaces de modificar la entrada de los parámetros.
- Para la aplicación que construye el juego en el 2-toro:
  1. **Gestión de las rectas hiperbólicas perpendiculares:** la aplicación se encarga de construir las rectas perpendiculares a la recta actual en el punto actual en cada tiempo.
  2. **Gestión de los giros:** la aplicación se encarga de controlar que cuando el usuario pulse la tecla de girar a la derecha se produzca un giro hacia la derecha, y lo propio hacia la izquierda.
  3. **Gestión de las identificaciones:** la aplicación se encarga de gestionar de forma correcta las identificaciones para que se pueda reproducir el 2-toro.

Los requisitos no funcionales de las aplicaciones serán:

- Para la aplicación que construye las teselaciones hiperbólicas:
  1. La aplicación tiene una interfaz cómoda para modificar los parámetros de entrada.
  2. Si los parámetros de entrada no coinciden con uno parámetros válidos para que la teselación sea hiperbólica se mandará un mensaje de error y se limpiará el lienzo.
  3. Esta aplicación tiene soporte para cualquier navegador.
  4. No se requiere que la aplicación funciones en teléfono móvil.
- Para la aplicación que construye el juego en el 2-toro:
  1. La aplicación tiene una interfaz cómoda a la hora de ver las identificaciones, los lados identiLa aplicación tiene una interfaz cómoda a la hora de ver las líneas por donde se puede mover.
  2. Esta aplicación tiene soporte para cualquier navegador.
  3. No se requiere que la aplicación funciones en teléfono móvil.

## 2.2. *Requisitos funcionales y no funcionales*

Como se ha indicado, ambas aplicaciones tienen soporte para cualquier navegador. Esta era la meta que se perseguía al elegir JavaScript como lenguaje de programación principal, también se ha utilizado un poco el lenguaje HTML para la gestión del canvas. La biblioteca que he utilizado es Math de JavaScript.

## 2.3. Planificación y presupuesto

En base a los requisitos se elaboró una planificación:

El objetivo es construir dos aplicaciones web, hechas en JavaScript con la intención de ser más portable, que consisten en lo siguiente: una aplicación que visualice teselaciones hiperbólicas, en las que el usuario podrá modificar parámetros y la aplicación deberá responder de forma adecuada; y otra cuyo objetivo será reproducir un juego sencillo en una superficie en la que se utilice la geometría hiperbólica.

Los objetivos marcados eran los siguientes:

1. **Dibujar rectas hiperbólicas dados dos puntos dentro del disco** (aproximadamente 7 días).
2. **Construir una teselación hiperbólica cualquiera** (aproximadamente 7 días).
3. **Gestionar que los usuarios pudieran interactuar con la aplicación de las teselaciones hiperbólicas** (aproximadamente 1 día).
4. **Describir las líneas de movimiento para la aplicación del juego** (aproximadamente 3 días).  
El personaje (una flecha en este caso) se moverá por líneas hiperbólicas perpendiculares, imitando el movimiento de popular juego **Snake** en el que solo se puede mover por líneas verticales y horizontales.
5. **Gestión de los giros a izquierda y derecha** (aproximadamente 3 días).
6. **Asociar de forma adecuada las identificaciones del 2-toro** (aproximadamente 3 días).

Para hacer la aplicación de las teselaciones hiperbólicas es necesario cumplir los objetivos 1, 2 y 3 de forma lineal, mientras que para construir el juego los objetivos que se deben cumplir son 1, 4, 5 y 6 de forma lineal.

Se procuró elegir un lenguaje de programación como JavaScript para que se pudiera ejecutar sin necesidad de estar en ningún tipo de sistema operativo, basta con tener un navegador, ni siquiera es necesaria conexión a Internet. Además, no es necesario que el ordenador que ejecute estas aplicaciones tenga una potencia elevada, luego no es necesario mucho presupuesto para poder utilizarlas.

Debido a que no será necesario localizar las aplicaciones en un servidor, puesto que se ejecutan en local, el presupuesto de las aplicaciones se va a determinar por las horas de trabajo. Suponiendo que se cobra a 25€ la hora, durante 8 horas al día, el presupuesto es de 4800€.



## 2.4. Análisis y diseño

Sigamos comentando los casos de uso del software que se ha desarrollado, son los siguientes:

1. **Modificación de los parámetros de una teselación hiperbólica:** el usuario podrá elegir la teselación hiperbólica, siendo los parámetros los siguientes:
  - **p:** Se trata de la cantidad de lados del polígono central.
  - **q:** Se trata de la cantidad de polígonos que concurren en un vértice.
  - **nLayers:** Se trata de la cantidad de capas que se le van a dar a la teselación.
  - **color1:** Se trata del color que tendrán las fronteras de la teselación.
  - **color2:** Se trata del color que tendrán los dibujos interiores de la teselación.
  - **tipo\_frontera:** Se trata del tipo de frontera que tendrá la teselación, a saber, frontera activa, dibujos interiores y ambos.
2. **Modificación de la dirección de la flecha en el juego:** Mediante la construcción que se hizo en 1.4.5.1, se desarrollará un juego sencillo en el 2-toro, con la geometría hiperbólica.

Podemos ver el diagrama de los casos de uso en la figura 2.1.

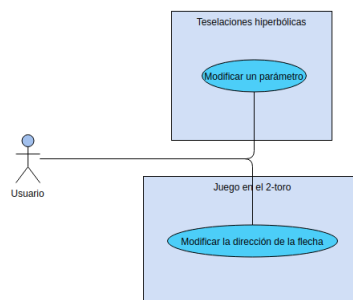


Figura 2.1.: Diagrama de casos de uso.

Y en las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 podremos ver los diagramas de interacción:

Las estructuras datos fundamentales para las aplicaciones son las siguientes:

1. La primera clase se llama Circunferencia, y tiene los siguientes parámetros:
  - **a1 y a2:** son las coordenadas de uno de los puntos por los que va a pasar la línea (punto A).
  - **b1 y b2:** son las coordenadas del otro de los puntos por los que va a pasar la línea (punto B).

2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

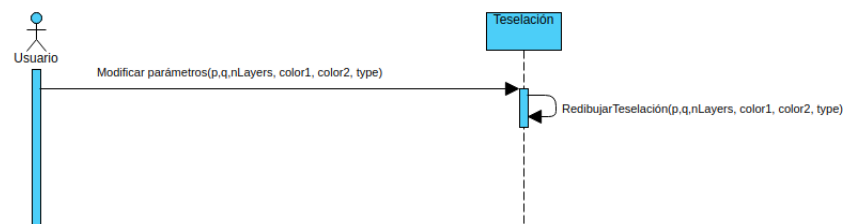


Figura 2.2.: Diagrama de interacción del usuario con la aplicación de las teselaciones.

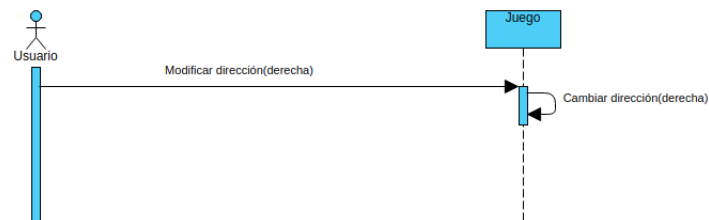


Figura 2.3.: Diagrama de interacción del usuario con el juego.

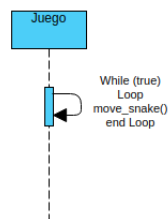


Figura 2.4.: Diagrama de interacción temporal del juego.

- **ctx**: es el contexto en el que se van a pintar las líneas (en Javascript necesitamos tomar el contexto en 2D del canvas para poder dibujar en él).
- **centro**: se trata del punto que determina dónde está centrado el Disco de Poincaré.
- **radio**: se trata del radio del Disco de Poincaré.
- **color**: determina el color de la recta.
- **tamanyo**: determina el grosor de la recta.

Esta clase tiene los siguientes datos miembros:

- **puntoA**: son dos flotantes que representan el primero de los puntos que se dieron para fabricar la recta hiperbólica.
- **puntoB**: son dos flotantes que representan el segundo de los puntos que se dieron para fabricar la recta hiperbólica.
- **ctx**: es el contexto en el que se van a pintar las líneas.
- **color**: es una variable String que contiene el color que se le va a asignar a la recta hiperbólica.
- **tamanyo**: es un flotante que indica el tamaño que se le va a dar a la recta.
- **centroPoincare**: son dos flotantes que determinan las coordenadas del centro del Disco de Poincaré.
- **radioPoincare**: es un flotante que determina el radio del Disco de Poincaré.
- **puntoCPrima**: son dos flotantes con las coordenadas de uno de los puntos que intersecan la recta hiperbólica y el Disco de Poincaré.
- **puntoFPrima**: son dos flotantes con las coordenadas del otro de los puntos que intersecan la recta hiperbólica y el Disco de Poincaré.
- **centro**: son dos flotantes con las coordenadas del centro de la recta hiperbólica, en caso de ser una circunferencia.
- **radio**: es un flotante que determina el radio de la recta hiperbólica, en caso de ser una circunferencia.
- **isDiametro**: es un booleano que indica si la recta hiperbólica es un diámetro o no lo es.

Esta clase tiene los siguientes métodos:

- **isDiameter**: no tiene parámetros y devuelve un booleano que nos dice si la recta hiperbólica es un diámetro o no.
- **radius**: no tiene parámetros y devuelve un flotante con el tamaño del radio, en caso de ser una circunferencia euclídea.
- **center**: no tiene parámetros y devuelve dos flotantes con las coordenadas del centro, en caso de ser una circunferencia euclídea.

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

- **getA**: no tiene parámetros y devuelve dos flotantes con las coordenadas del primer punto que se dio para definirla.
- **getB**: no tiene parámetros y devuelve dos flotantes con las coordenadas del segundo punto que se dio para definirla.
- **getCPrima**: no tiene parámetros y devuelve dos flotantes con las coordenadas de uno de los puntos que intersecan la recta hiperbólica y el Disco de Poincaré.
- **getCPrima**: no tiene parámetros y devuelve dos flotantes con las coordenadas del otro de los puntos que intersecan la recta hiperbólica y el Disco de Poincaré.
- **draw**: tiene los siguientes parámetros:
  - **centro**: son dos flotantes que indican el centro de la circunferencia que se quiere pintar.
  - **radio**: es un flotante que indica el radio de la circunferencia que se quiere pintar.
  - **punto1**: son dos flotantes que dan las coordenadas de uno de los puntos a partir del cual se quiere pintar.
  - **punto2**: son dos flotantes que dan las coordenadas del otro de los puntos a partir del cual se quiere pintar.

Este método pinta un arco de circunferencia, siendo **centro** en centro de la misma, y **radio** el radio. El arco dibuja el camino más corto entre **punto1** y **punto2**. No devuelve nada.

- **createCircumference**: no tiene parámetros. Devuelve tres flotantes, los dos primeros indican las coordenadas del centro de la recta hiperbólica, y el tercero nos da el radio de la misma, esto en caso de ser una circunferencia.
- **createHyperbolicLine**: no tiene parámetros y utiliza los parámetros obtenidos del constructor para determinar el resto de datos miembros.
- **drawHyperbolicLine**: no tiene parámetros, y utiliza los datos miembros para pintar en el canvas la recta hiperbólica.
- **perpendicular**: tiene un parámetro: **puntoComun**. Se trata de dos flotantes que determinan las coordenadas de un punto de la propia recta hiperbólica. Este método devuelve una nueva recta hiperbólica que es perpendicular a la original en el punto en común.
- **seSaleDelToroPI5**: tiene un parámetro: **puntoActual**. Se trata de las coordenadas de un punto de la propia recta hiperbólica. Este método devuelve un vector con un entero si el punto actual está fuera de los que se ha definido como el 2-toro. Este entero indicará el lado por el que ha salido. De no haber salido devolverá un vector vacío.

Además, en esta clase son extremadamente útiles las siguientes funciones:

- **interseccion\_recta\_con\_circunferencia**: tiene los siguientes parámetros:

- **vector\_recta:** se trata de dos flotantes que van a determinar el vector director de la recta que se quiere intersectar.
- **punto\_recta:** se trata de dos flotantes que van a determinar las coordenadas de uno de los puntos de la recta que se quiere intersectar.
- **centro\_circunferencia:** se trata de dos flotantes que determinan las coordenadas del centro de la circunferencia euclídea que se quiere intersectar.  
**radio\_circunferencia:** se trata de un flotante que determina el radio de la circunferencia euclídea que se quiere intersectar.

Esta función devuelve cuatro flotantes, los dos primeros determinan las coordenadas de uno de los puntos de corte y los dos segundos las coordenadas del otro punto de corte, en caso de que existan.

- **ecuacion\_de\_segundo\_grado\_pos:** tiene tres parámetros y son los coeficientes de la ecuación de segundo grado que se quiere resolver. Devuelve el valor que se obtiene con la raíz positiva. **ecuacion\_de\_segundo\_grado\_neg:** tiene tres parámetros y son los coeficientes de la ecuación de segundo grado que se quiere resolver. Devuelve el valor que se obtiene con la raíz negativa.
- **inversion:** esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **punto\_a\_invertir:** son dos flotantes que determinan las coordenadas del punto que se desea invertir.
  - **centro\_circunferencia\_inversion:** son dos flotantes que indican las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de la cual se quiere hacer la inversión.
  - **radio\_circunferencia\_inversion:** es un flotantes que nos da el radio de la circunferencia respecto de la cual se quiere hacer la inversión.

Esta función nos devuelve dos flotantes, que son las coordenadas del punto invertido respecto de la circunferencia descrita. El concepto de inversión se explicará un poco más adelante.

- **interseccion\_circunferencia\_con\_rectas\_tangentes\_a\_partir\_de\_un\_punto\_exterior:** esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **punto\_exterior:** son dos flotantes que determinan las coordenadas del punto exterior a la circunferencia.
  - **centro\_circunferencia:** son dos flotantes que indican las coordenadas del centro de la circunferencia a la que se le quieren buscar las tangentes.
  - **radio\_circunferencia:** es un flotantes que nos da el radio de la circunferencia a la que se le quieren buscar las tangentes.

Esta función devuelve cuatro flotantes, los dos primeros determinan las coordenadas de uno de los puntos en el que corta la recta tangente a la circunferencia y la circunferencia y los dos segundos las coordenadas del punto de corte con la otra tangente, en caso de que existan.

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

- **circunferencia\_a\_partir\_de\_tres\_puntos**: esta función tiene tres parámetros y cada uno de ellos son dos flotantes que determinan las coordenadas de tres puntos en total que pueden determinar una única circunferencia euclídea. Esta función nos devuelve tres flotantes, los dos primeros indican las coordenadas del centro de la circunferencia euclídea, y el tercero nos da el radio de la misma, en caso de que exista.
- **interseccion\_circunferencia\_con\_circunferencia**: esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **centro\_circunferencia1**: son dos flotantes que determinan las coordenadas del centro de una de las circunferencias que se quieren intersectar.
  - **radio\_circunferencia1**: es un flotante que determinan el radio de una de las circunferencias que se quieren intersectar.
  - **centro\_circunferencia2**: son dos flotantes que determinan las coordenadas del centro de la otra de las circunferencias que se quieren intersectar.
  - **radio\_circunferencia2**: es un flotante que determinan el radio de la otra de las circunferencias que se quieren intersectar.

Esta función interseca las dos circunferencias que se han descrito. Esta función devuelve cuatro flotantes, los dos primeros determinan las coordenadas de uno de los puntos en los que se cortan las circunferencias y los dos segundos las coordenadas del otro punto de corte, en caso de que existan.

- **makeHyperbolicCircumference**: esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **centro**: son dos flotantes que determinan las coordenadas del centro de la circunferencia hiperbólica que se pretende construir.
  - **radio**: es un flotante que determina el radio circunferencia hiperbólica que se pretende construir.
  - **centroPoincare**: son dos flotantes que determinan las coordenadas del centro del Disco de Poincaré.
  - **radioPoincare**: es un flotante que determina el radio del Disco de Poincaré.

Esta función nos devuelve tres flotantes, los dos primeros indican las coordenadas del centro de la circunferencia euclídea que describe la circunferencia hiperbólica previamente calculada, y el tercero nos da el radio de la misma.

### 2. La segunda clase utilizada se llama Complex, y tiene los siguientes parámetros:

- **a**: es un flotante que determinará la parte real del número complejo, en la representación binómica.
- **b**: es un flotante que determinará la parte imaginaria del número complejo, en la representación binómica.

Esta clase tiene el siguiente dato miembro:

- **complex**: se trata de dos flotantes que determinan al número complejo.

Esta clase tiene los siguientes métodos:

- **re**: No tiene parámetros y devuelve la parte real del número complejo.
- **im**: No tiene parámetros y devuelve la parte imaginaria del número complejo.

Además, en esta clase son extremadamente útiles las siguientes funciones:

- **add**: tiene dos parámetros que son los dos números complejos que se quieren sumar. Devuelve un número complejo resultado de la suma.
- **sub**: tiene dos parámetros que son los dos números complejos que se quieren restar. Devuelve un número complejo resultado de la resta.
- **prod**: tiene dos parámetros que son los dos números complejos que se quieren multiplicar. Devuelve un número complejo resultado del producto.
- **div**: tiene dos parámetros que son los dos números complejos que se quieren dividir. Devuelve un número complejo resultado del cociente.
- **conj**: tiene un parámetro que es el número complejo que se desea conjugar. Devuelve un número complejo resultado de la conjugación.
- **abs**: tiene un parámetro que es el número complejo del que se desea obtener la norma. Devuelve un flotante con el resultado de la norma.
- **exp**: tiene un parámetro, **alpha**, y es un flotante que indica el ángulo al que se quiere exponenciar el número **e**. El resultado son dos flotantes que representan el punto de la circunferencia unidad que forma un ángulo **alpha** con la horizontal.

El diagrama de clases para con las dos aplicaciones queda como vemos en la figura 2.5:

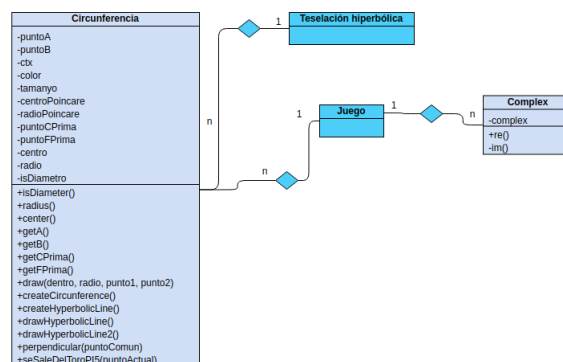


Figura 2.5.: Diagrama de clases.

### 2.4.1. Construcción de una recta hiperbólica

En la sección 1.1.4 vimos que en el Disco de Poincaré las líneas hiperbólicas son circunferencias ortogonales al borde del disco o diámetros del mismo.

Para construir una línea hiperbólica con la clase `Circunferencia`, lo primero que debemos hacer es determinar si esta línea se trata de un diámetro del borde del disco o si se trata de

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

una circunferencia ortogonal al borde del disco. Es fácil ver que esta distinción se puede hacer viendo si los dos puntos por los que pasa la línea y el centro del disco están alineados. En el caso de ser así la línea será un diámetro, en caso contrario la línea será una circunferencia ortogonal al borde del disco.

### 2.4.1.1. Línea hiperbólica como diámetro del disco

Si se da la condición bastará con unir los dos puntos con una recta. Para mayor claridad pintaremos únicamente el segmento que los une, y no la línea hiperbólica completa.

### 2.4.1.2. Línea hiperbólica como circunferencia ortogonal al borde del disco

Si se trata de una circunferencia dibujaremos el arco de circunferencia que une los dos puntos. El problema reside en que para ello necesitaremos conocer el centro y el radio de esta circunferencia euclídea. Para obtener estos datos necesitamos conocer antes un concepto importante:

**Definición 2.1.** *Inversión de un punto respecto a una circunferencia:* Como vemos en la figura 2.6, partimos de la circunferencia  $c$  y del punto  $A$ .

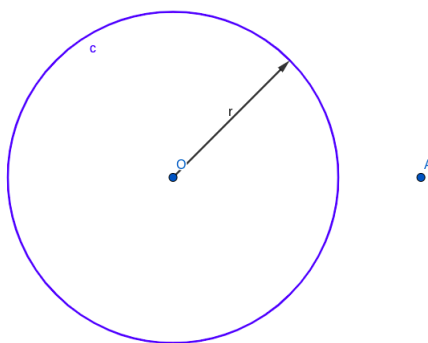


Figura 2.6.: Punto de partida para hacer una inversión.

El punto inverso a  $A$ , que llamaremos  $A'$ , respecto de la circunferencia  $c$ , con radio  $r$ , será aquel que cumpla lo siguiente:

$$|OA| * |OA'| = r^2$$

Además de esto, se debe cumplir que los puntos  $A$ ,  $A'$  y  $O$  deben pertenecer a la misma semirrecta que parte de  $O$ .

El resultado será como el de la figura 2.7:

Es importante señalar lo siguiente:

- El punto  $A$  no puede ser el centro de la circunferencia.



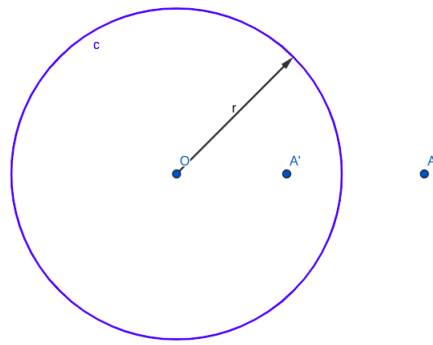


Figura 2.7.: Resultado de la inversión.

- Siempre que se invierta un punto de fuera de la circunferencia el resultado estará en el interior. Y cuando se invierta un punto del interior de la circunferencia la inversión estará en el exterior.
- La inversión respecto de una circunferencia es una función involutiva, es decir, es su propia inversa.

Conociendo este concepto de suma importancia para la geometría hiperbólica podremos ver los pasos necesarios para construir una línea hiperbólica conociendo el borde del disco (lo llamaremos **H**) y los dos puntos (**A** y **B**) por los que debe pasar.

Todos los pasos se pueden ver en la figura 2.8:

1. Podemos suponer que **A** no es el centro del disco. Haremos una inversión del punto **A** respecto a **H**,  $A'_1$ . Puesto que el punto **A** siempre va a estar en el interior del disco,  $A'_1$  será un punto de fuera.
2. Trazamos las rectas tangentes a **H** desde  $A'_1$ , **a** y **b**.
3. Siendo **D** el punto de intersección de **a** con **H**, se construye la circunferencia **c** que tiene  $A'_1$  como centro y pasa por **D**.
4. Obtenemos las inversiones de los puntos **A** y **B** respecto de la circunferencia **c**,  $A'$  y  $B'$  respectivamente.
5. Construimos la recta que pasa por  $A'$  y  $B'$ , **d**, y denotamos **C** y **F** a los puntos de intersección entre **d** y **H**.
6. Obtenemos las inversiones de los puntos **C** y **F** respecto de la circunferencia **c**,  $C'$  y  $F'$  respectivamente.
7. La línea hiperbólica pasa por los puntos **A**, **B**,  $C'$  y  $F'$ , con tres de ellos se puede determinar una única circunferencia euclídea y obtener el centro y el radio de la misma.

Para mayor claridad pintaremos únicamente el segmento  $\overline{AB}$ , y no la línea hiperbólica completa.

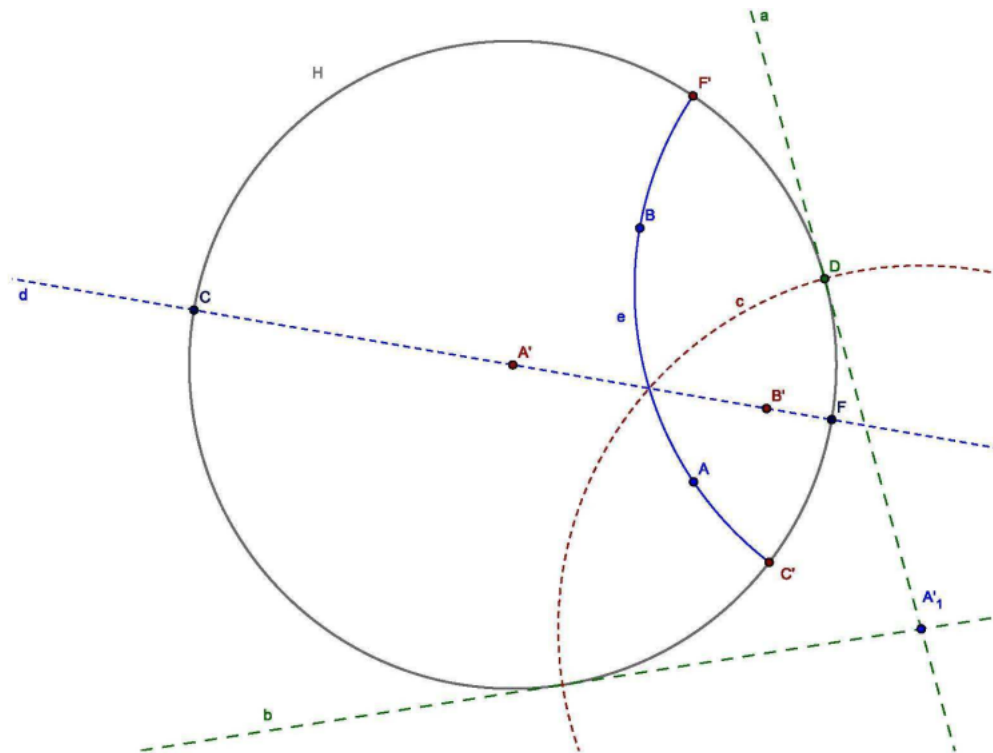


Figura 2.8.: Construcción de una línea hiperbólica que no es un diámetro.

### 2.4.2. Construcción del polígono central

Para comprender mejor la construcción del polígono central veamos la figura 2.9:

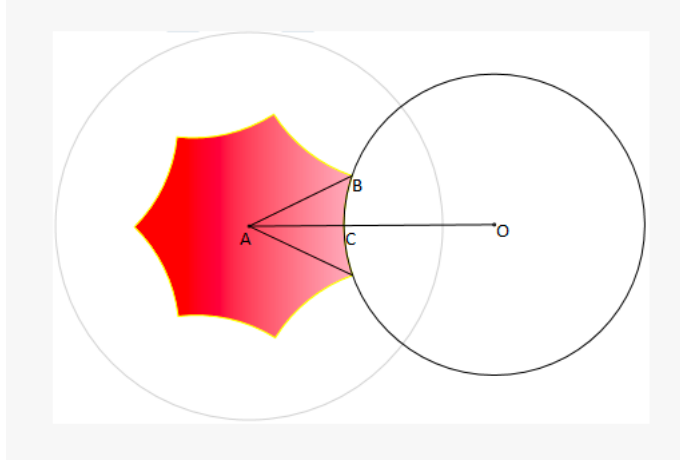


Figura 2.9.: Construcción del polígono central de la teselación.

El ángulo  $\angle BAC$  vale  $\frac{\pi}{p}$ , el ángulo  $\angle ABC$  vale  $\frac{\pi}{q}$  y el ángulo  $\angle ACB$  vale  $\frac{\pi}{2}$ . Tomando al centro del polígono como el origen de coordenadas y el radio del Disco de Poincaré 1:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad |\overline{OC}| &= \sqrt{\frac{\cos^2(\pi/q)}{\sin^2(\pi/p)} - 1}^{-1} \\ \blacksquare \quad |\overline{AO}| &= \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\pi/p)}{\cos^2(\pi/q)}}^{-1} \end{aligned}$$

Estos cálculos han sido obtenidos de [L6].

Para construir el polígono central con estos datos hay que seguir los siguientes pasos:

1. Debemos determinar cuál es la circunferencia euclídea de la que forma parte el segmento  $\overline{BC}$  (este segmento forma parte de un lado del polígono central). Su radio es  $|\overline{OC}|$  y su centro es  $(|\overline{AO}|, 0)$ .
2. Tras esto, debemos hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de  $\pi/p$  con la horizontal.
3. Si ahora intersecamos la recta con la circunferencia obtenemos un vértice del polígono.
4. Una vez conocido este vértice, basta con rotarlo, con un ángulo de  $2\pi/p$ , respecto del origen de coordenadas  $p - 1$  veces y construir las líneas hiperbólicas que pasan por esos puntos, como hemos visto en la sección anterior.

De esta forma obtendremos el polígono central para cualquier teselación  $\{p, q\}$ , sean  $p$  y  $q$  los que sean, siempre y cuando la teselación sea hiperbólica. Como he mencionado antes, este polígono lo replicaremos en el Disco de Poincaré.

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

A este polígono le aplicaremos una homotecia para trasladarlo al interior del elemento canvas. Pues en él el origen de coordenadas está en la esquina superior izquierda. Aplicaremos esta homotecia con un centro y una escala adecuadas para poder apreciar bien la teselación correspondiente.

### 2.4.3. Replicar el polígono central

Para replicar el polígono central necesitaremos tres algoritmos que detallaré en esta sección:

#### 2.4.3.1. DrawPgonPattern

Este algoritmo tendrá el objeto de dibujar un único polígono, dependiendo de la posición de Disco de Poincaré donde deba estar.

Antes de explicar el funcionamiento del algoritmo hay que comentar dos de las variables más importantes del programa:

A estas variables las llamaremos **X** e **Y**, serán variables de tipo vector que contendrán las coordenadas de los puntos del polígono central de forma ordenada. En **X** tendremos las coordenadas relativas al eje X y en **Y** las coordenadas relativas al eje Y. Es importante resaltar que para facilitar el cálculo el primer punto del polígono estará en la primera y en la última posición tanto de **X** como de **Y**.

Además de esto, es importante mencionar que utilizaremos el modelo de Weierstrass (**W**), visto en la sección 1.1.5. En este modelo, las isometrías se pueden representar por matrices de Lorenz 3x3 (las matrices de Lorenz preservan la forma cuadrática  $x^2 + y^2 - z^2$ ).

Como vimos en 1.1.7, la relación entre el modelo de Klein-Poincaré es una proyección central respecto del punto  $S(0,0,-1)$  del modelo de Weierstrass (**W**) en el plano  $z = 0$ . Esta proyección se describe numéricamente de la siguiente forma:

$$g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{W}$$
$$(x, y) \rightarrow \left( \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right)$$

La inversa a esta se describe numéricamente así:

$$f : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{K}$$
$$(x, y, z) \rightarrow \left( \frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right)$$

El algoritmo será el que vemos en la página siguiente:

Donde **matrixProduct(A,B)** hace el producto matricial de **A** por **B**, **homothety(p, e, c)** aplica una homotecia la coordenada **p**, con escala **e** y centro **c**, **applyF(x, y, z)** y **applyG(x,y)** aplicarán las funciones definidas anteriormente como **f** y **g**, respectivamente y por último

---

**ALGORITHM 1:** DrawPgonPattern.

---

**Input** :  $T$  –  $3 \times 3$  transformation**Output**: void

```

/* Hallamos las coordenadas del centro del polígono en el modelo de Weierstrass */
1 weiesrtrassCoordinatesCenter ← applyG (centroPoligonoCentral.x, centroPoligonoCentral.y);
/* Hacemos la transformación adecuada al centro */
2 W ← matrixProduct (T, weiesrtrassCoordinatesCenter);
/* Recuperamos las coordenadas al disco de Poincaré */
3 Tcenter ← applyF (W[1], W[2], W[3]);
/* Aplicamos la homotecia al centro */
4 Tcenter[1] ← homothety (Tcenter[1], scale, center.x);
5 Tcenter[2] ← homothety (Tcenter[2], scale, center.y);
6 for  $i = 1 \rightarrow X.length$  do
    /* Pasamos las coordenadas del vértice actual al modelo de Weierstrass */
    7 weiesrtrassCoordinates ← applyG (X[i], Y[i]);
    /* Aplicamos la transformación adecuada al vértice */
    8 Z ← matrixProduct (T, weiesrtrassCoordinates);
    /* Recuperamos las coordenadas del vértice al disco de Poincaré */
    9 Tvertex ← applyF (Z[1], Z[2], Z[3]);
    /* Aplicamos la homotecia al vértice */
    10 Tvertex[1] ← homothety (Tvertex[1], scale, center.x);
    11 Tvertex[2] ← homothety (Tvertex[2], scale, center.y);
    12 if  $i \neq 1$  then
        /* Construimos la línea hiperbólica del lado */
        13 lineaHiperbolica ← new LineaHiperbolica (oldTvertex[1], oldTvertex[2], Tvertex[1], Tvertex[2], Red);
        /* Y la dibujamos */
        14 lineaHiperbolica.draw()
        /* Construimos la línea hiperbólica del radio */
        15 radioHiperbolico ← new LineaHiperbolica (Tcenter[1], Tcenter[2], Tvertex[1], Tvertex[2], Grey);
        /* Y la dibujamos */
        16 radioHiperbolico.draw()
    17 end
    /* Guardamos las coordenadas del punto actual para conocer, en cada iteración, los dos puntos de la recta
    hiperbólica del lado */
    18 oldTvertex ← Tvertex;
19 end

```

---

**centroPoligonoCentral** es el punto que hemos determinado como centro del polígono central. En nuestro caso es el origen de coordenadas (pues es previo a aplicar las homotecias).

Este algoritmo será el que utilicemos para crear la frontera de las teselaciones.

Para construir la parte interior de las teselaciones, antes de comentar la versión del mismo algoritmo que vamos a seguir necesito introducir una nueva variable: **Action**. Será también de tipo vector, pero en este caso lo que buscamos no son los vértices del polígono, sino los dibujos interiores. Deberemos elegir uno de los triángulos que tienen por vértices dos vértices consecutivos del polígono principal y el centro del mismo. Construiremos el dibujo que consideremos adecuado y haremos lo siguiente:

- Tomaremos todos los puntos necesarios para nuestro dibujo y los introduciremos en los vectores **X** e **Y** (en lugar de los vértices del polígono) en orden.
- Si queremos situar un punto, en el vector **Action** introduciremos *Move*.
- Si queremos pintar desde un punto ya situado a otro punto, en el vector **Action** introduciremos *Line*.
- Si queremos pintar de un color lo que llevamos, en el vector **Action** introduciremos el color que gustemos.
- Una vez que tenemos **X**, **Y** y **Action** para uno de los triángulos necesitaremos añadir todos los puntos rotados un ángulo de  $2\pi/p$   $p-1$  veces a los vectores **X** e **Y** (no repetiremos el primer punto al final como hicimos en la otra versión). A **Action** le añadiremos su propio contenido  $p-1$  veces.

Veamos ahora la nueva versión del algoritmo anterior para el problema que nos ocupa:

---

**ALGORITHM 2:** DrawPgonPattern.

---

**Input** :  $T - 3 \times 3$  transformation

**Output**: void

---

```

1  for  $i = 1 \rightarrow X.lenght$  do
2      /* Pasamos las coordenadas del punto actual al modelo de Weierstrass */
3      weierstrassCoordinates  $\leftarrow$  applyG (X[i], Y[i]);
4      /* Aplicamos la transformación adecuada al punto */
5      Z  $\leftarrow$  matrixProduct (T, weierstrassCoordinates);
6      /* Recuperamos las coordenadas del vértice al disco de Poincaré */
7      Tvertex  $\leftarrow$  applyF (Z[1], Z[2], Z[3]);
8      /* Aplicamos la homotecia al vértice */
9      Tvertex[1]  $\leftarrow$  homothety (Tvertex[1], scale, center.x);
10     Tvertex[2]  $\leftarrow$  homothety (Tvertex[2], scale, center.y);
11     switch Action[i] do
12         case Move : do
13             | MoveTo (Tvertex[1], Tvertex[2]);
14         end
15         case Line : do
16             | LineTo (Tvertex[1], Tvertex[2]);
17         end
18         case color : do
19             | lineColor  $\leftarrow$  color;
20         end
21     end
22 end

```

---

## 2.4.3.2. ReplicatePattern

Consiste en obtener la transformación adecuada para utilizar la función **DrawPgonPattern** y poder dibujar el polígono central en la posición correcta a lo largo del Disco de Poincaré.

Tanto para este algoritmo como para el que veremos después es importante describir las siguientes dos variables:

- **RotateP**: consiste en una transformación (una matriz  $3 \times 3$ ) que hace una rotación de ángulo  $2\pi/p$  respecto del centro del polígono.
- **RotateQ**: consiste en una transformación (una matriz  $3 \times 3$ ) que hace una rotación de ángulo  $2\pi/q$  respecto del vértice sobre el que se está actuando del polígono.

Además de esto, usaremos unas variables llamadas **RotateCenter** y **RotateVertex** que representan rotaciones respecto a los centros y los vértices de los polígonos, respectivamente. Y definiremos un nuevo tipo de dato: **AdjacencyType**, que podrá tomar los valores: {Edge, Vertex}.

El algoritmo es el siguiente:

---

**ALGORITHM 3: ReplicatePattern.**


---

**Input** : initialTransformation –  $3 \times 3$  transformation

Layerdiff – int

Adjacency – AdjacencyType

**Output**: void

```

1 DrawPgonPattern (initialTransformation);
2 if Layerdiff > 0 then
3   rotate2P ← matrixProduct (RotateP, RotateP);
4   if Adjacency == Edge then
5     exposedEdges ← p – 3;
6     rotate3P ← matrixProduct (Rotate2P, RotateP);
7     RotateCenter ← matrixProduct (initialTransformation, Rotate3P);
8   end
9   if Adjacency == Vertex then
10    exposedEdges ← p – 2;
11    RotateCenter ← matrixProduct (initialTransformation, Rotate2P);
12  end
13  for i = 1 → exposedEdges do
14    RotateVertex ← matrixProduct (RotateCenter, RotateQ);
15    ReplicatePatternc(RotateVertex, Layerdiff – 1, Edge);
16    if i < exposedEdges then
17      pgonsPerVertex ← q – 3;
18    end
19    if i == exposedEdges then
20      pgonsPerVertex ← q – 4;
21    end
22    for j = 1 → pgonsPerVertex do
23      RotateVertex ← matrixproduct (RotateVertex, RotateQ);
24      ReplicatePattern (RotateVertex, Layerdiff – 1, Vertex);
25    end
26    RotateCenter ← matrixproduct (RotateCenter, RotateP);
27  end
28 end

```

---

La variable que aún no se ha comentado es **Layerdiff**. Esta variable indica la cantidad de capas que se van a querer pintar de la teselación. En el siguiente algoritmo la entenderemos mejor.

#### 2.4.3.3. Creación de las capas de la teselación

Vamos a ver la forma de generar todas las capas que queramos de la teselación que buscamos. Antes de ejecutar esto deberemos haber inicializado las variables  $p$ ,  $q$  y  $nLayers$ . Como hemos comentado antes  $p$  y  $q$  van a representar la teselación que queremos dibujar.  $nLayers$  será la cantidad de capas que queramos pintar. Esta variable debe ser un número natural y si la tomamos como 0 solo se dibujaría el polígono central.

---

```

1 DrawPgonPattern (Identity);
2 if nLayers > 0 then
3   RoteteCenter ← Identity;
4   for i = 1 → p do
5     RotateVertex ← matrixProduct (RotateCenter, RotateQ);
6     ReplicatePattern (RotateVertex, nLayers - 1, Edge);
7     for j = 1 → q - 3 do
8       RotateVertex ← matrixproduct (RotateVertex, RotateQ);
9       ReplicatePattern (RotateVertex, Layerdiff - 1, Vertex);
10    end
11    RotateCenter ← matrixproduct (RotateCenter, RotateP);
12  end
13 end

```

---

Siendo **Identity** la matriz identidad de orden 3.

Tras esto, voy a explicar como se construyen las transformaciones **RotateP** y **RotateQ**. Necesitaremos las siguientes tres matrices que podemos ver en 2.10:

- **ReflectP**: la reflexión por la parte positiva del eje X del lado del polígono central:

$$\begin{pmatrix} -\cosh(2b) & 0 & \sinh(2b) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(2b) & 0 & \cosh(2b) \end{pmatrix}$$

- **ReflectQ**: la reflexión por el eje X:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Reflect2**: la reflexión por el radio  $\overline{PQ}$  (siendo P el centro del polígono y Q el vértice):

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/p) & \sin(2\pi/p) & 0 \\ \sin(2\pi/p) & -\cos(2\pi/p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde

$$\cosh(b) = \cos(\pi/q)/\sin(\pi/p)$$

$$\cosh(2b) = 2\cosh(b)^2 - 1$$

$$\sinh(2b) = (\cosh(2b)^2 - 1)^{-1}$$



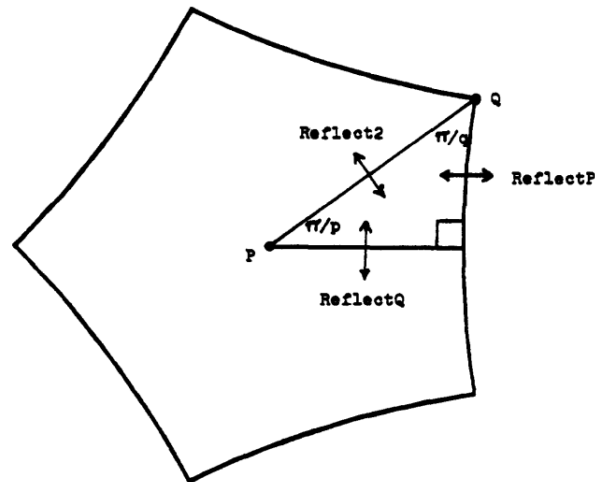


Figura 2.10.: Diagrama que representa las reflexiones ReflectP, ReflectQ y Reflect2 en un ejemplo.

De forma que, la rotación **RotateP** de  $2\pi/p$  respecto de P se calcula como el producto matricial de **Reflect2** por **ReflectQ**. Y la rotación **RotateQ** de  $2\pi/q$  respecto de Q se calcula como el producto matricial de **ReflectP** por **Reflect2**.

## 2.5. Implementación y pruebas

### 2.5.1. Aplicación web: Hyperbolic Tessellation

Esta aplicación web construye la teselación hiperbólica elegida por el usuario. Este podrá modificar los siguientes parámetros de la teselación:

- **p**: como ya se ha comentado,  $p$  es un número natural que representa la cantidad de lados que tiene el polígono central.
- **q**: como ya se ha comentado,  $q$  es un número natural que representa la cantidad de polígonos que concurren en cada vértice.
- **nLayers**: es un número natural que indica la cantidad de capas que se van a construir de la teselación. En el caso de que este parámetro tenga un valor menor que 1 solo se mostrará el polígono central.
- **color1**: es una variable tipo String que consistirá en el nombre anglosajón de un color, o en la expresión hexadecimal del mismo. Este color será el que pinte las fronteras de la teselación.
- **color2**: es una variable tipo String que consistirá en el nombre anglosajón de un color, o en la expresión hexadecimal del mismo. Este color será el que pinte los dibujos interiores de los polígonos.
- **tipo**: esta variable será de tipo enum, con las posibilidades: {Boundary, No boundary, Both}. Si se selecciona el primero se visualizarán únicamente las fronteras de la teselación. Si se selecciona el segundo se verán únicamente los dibujos interiores de la teselación. En cambio, si se selecciona el tercero se podrán contemplar ambos. Este parámetro solo puede tomar un valor distinto.

Las funciones aun no descritas que se han utilizado para obtener este resultado son las siguientes:

- **getTessellation**: esta función no tiene parámetros y no devuelve nada. Elabora la teselación correspondiente teniendo en cuenta los parámetros previamente mencionados. Siempre que alguno de estos sea modificado por el usuario esta función se volverá a ejecutar para obtener el nuevo resultado.
- **verticePoligonoCentral**: esta función no tiene parámetros y devuelve dos flotantes. Estos representan las coordenadas de uno de los vértices del polígono central. Se ha implementado siguiendo la construcción que hemos visto en la sección 2.4.2.
- **homotecia**: tiene los parámetros siguientes:
  - **punto**: se trata de un flotante que representa una de las coordenadas a la que se le va a aplicar la homotecia.
  - **escala**: es un flotante que indica la escala que se le va a dar a la homotecia.
  - **centro**: es un flotante que identifica una de las coordenadas del centro de la homotecia.

Esta función realiza una homotecia a una coordenada de un punto con centro **centro** y escala **escala**.

- **homoteciaInversa**: esta función hace la aplicación inversa a la anterior, para facilitar el cálculo.
- **angle**: esta función va a tener los siguientes parámetros:
  - **centrox**: es un flotante que determina la primera coordenada del centro respecto al cual queremos obtener el ángulo.
  - **centroy**: es un flotante que determina la segunda coordenada del centro respecto al cual queremos obtener el ángulo.
  - **x**: es un flotante que determina la primera coordenada del punto sobre el cual queremos obtener el ángulo.
  - **y**: es un flotante que determina la segunda coordenada del punto sobre el cual queremos obtener el ángulo.

Esta función nos devolverá un flotante que indica el ángulo que forma la horizontal con el punto (**x**, **y**) en una circunferencia de centro (**centrox**, **centroy**).

- **rotatePoint**: a esta función necesitaremos aportarle los siguientes parámetros:
  - **x**: es un flotante que representa la primera coordenada del punto a rotar.
  - **y**: es un flotante que representa la segunda coordenada del punto a rotar.
  - **alpha**: es un flotante que indica el ángulo de rotación.
  - **centro**: son dos flotantes que identifican las coordenadas del centro de la rotación.

Esta función nos devuelve el punto rotado de (**x**, **y**) un ángulo **alpha** con respecto al centro **centro**.

- **matrixproduct**: esta función tiene dos parámetros y son las dos matrices que se quieren multiplicar. Nos devolverá la matriz resultado del producto. Únicamente la he diseñado para multiplicar matrices 3x3 con 3x3 y 3x3 con 3x1.
- **elementoHTML**: tiene como parámetro un string que será el id de algún elemento del documento html.
- **applyG**: esta es la función g que se ha comentado al comienzo de la sección 2.4.3.1.
- **applyF**: esta es la función f que se ha comentado al comienzo de la sección 2.4.3.1.
- **DrawPgonPattern**: se trata del algoritmo desarrollado 1 y en 2.
- **ReplicatePattern**: se trata del algoritmo descrito 3.
- **main**: se trata del algoritmo descrito 4.

El resultado lo podemos ver en las figuras 2.11, 2.12 y 2.13

Hyperbolic Tessellations

i.

Element p (number of edges the central polygon has):

7

ii.

Element q (number of polygons at each vertex):

3

iii.

Number of layers (number of tessellation layers):

2

iv.

Color 1 (use an English name or the hexadecimal code), by default is Red:

v.

Color 2 (use an English name or the hexadecimal code), by default is Purple:

Choose the kind of border

☒ Boundary

☐ No boundary

☐ Both

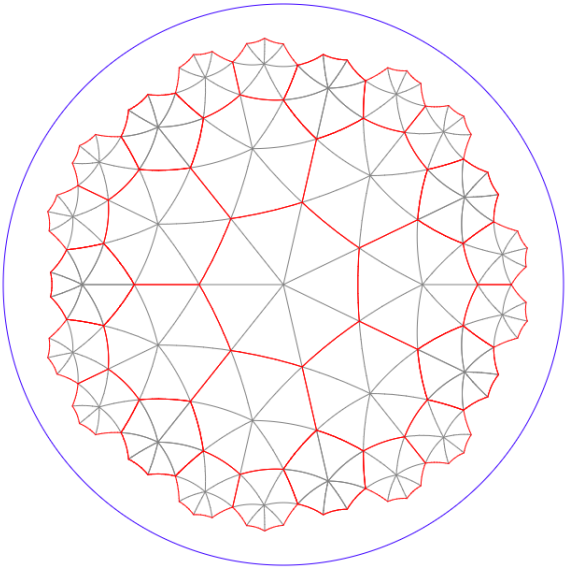


Figura 2.11.: Se ven solo las fronteras de los polígonos (y los radios). Teselación {7,3}.

Hyperbolic Tessellations

i.

Element p (number of edges the central polygon has):

6

ii.

Element q (number of polygons at each vertex):

4

iii.

Number of layers (number of tessellation layers):

1

iv.

Color 1 (use an English name or the hexadecimal code), by default is Red:

v.

Color 2 (use an English name or the hexadecimal code), by default is Purple:

Orange

Choose the kind of border

☐ Boundary

☒ No boundary

☐ Both

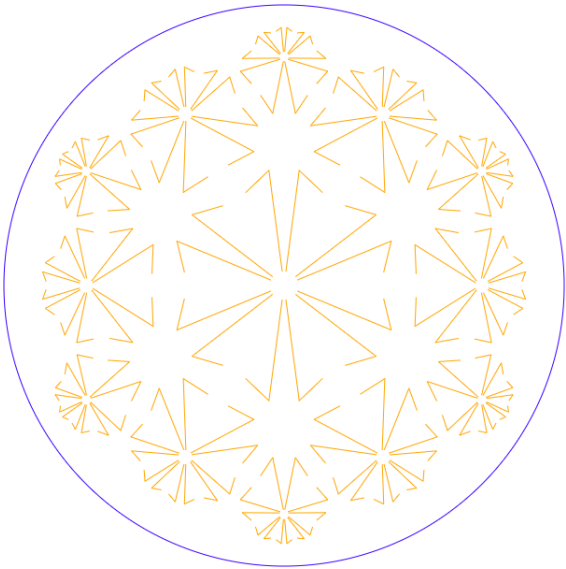


Figura 2.12.: Se ven solo los dibujos interiores. Teselación {6,4}.

## Hyperbolic Tessellations

- i. Element p (number of edges the central polygon has):  
4
- ii. Element q (number of polygons at each vertex):  
5
- iii. Number of layers (number of tessellation layers):  
2
- iv. Color 1 (use an English name or the hexadecimal code), by default is Red:  
Green
- v. Color 2 (use an English name or the hexadecimal code), by default is Purple:
- Choose the kind of border
- ☐ Boundary  
☐ No boundary  
☒ Both

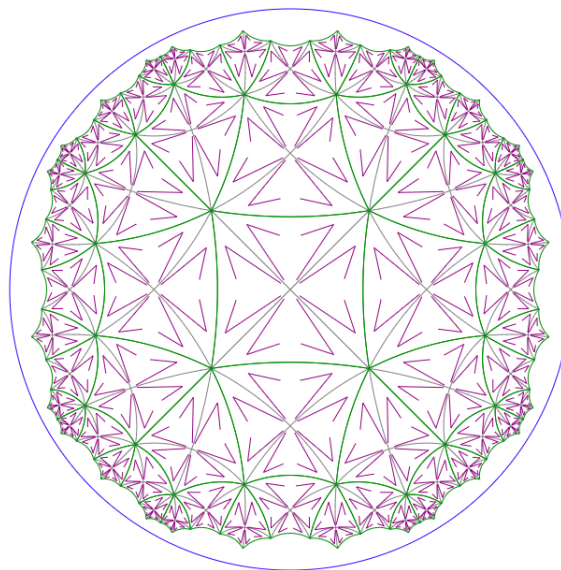


Figura 2.13.: Aquí se pueden observar ambos. Teselación {4,5}.

### 2.5.2. Aplicación web: Snake

Esta aplicación web describe un juego que podemos diseñar en el Disco de Poincaré, es una versión rudimentaria del conocido **Snake**. En este juego controlamos a una serpiente. En cada tiempo avanza una distancia fija en una dirección determinada (normalmente hacia arriba, abajo, derecha o izquierda). Y suele haber objetos por el mapa que al tocarlos desaparecen y hacen que la serpiente crezca un tamaño fijo. En nuestro caso será una flecha que se mueve por en un 2-toro, como el que describíamos al comienzo de la sección 1.4.5.1. En esta afirmábamos que el decágono de esta representación del 2-toro es regular y tiene un ángulo de  $2\pi/5$ , luego para verlo como una teselación necesitaremos la capa 0 de la teselación {10, 5}.

Para adaptar esto al Disco de Poincaré he decidido que la flecha se mueva por una línea hiperbólica y pueda girar a izquierda o derecha, haciendo que la serpiente vaya hacia ese lado en la línea hiperbólica perpendicular a la actual que pasa por el punto actual.

#### 2.5.2.1. Definición de las líneas de movimiento

Dar una recta perpendicular a un diámetro del borde del Disco de Poincaré es trivial, comentaré el otro caso.

Para dar una recta perpendicular a un arco de circunferencia debemos recordar la sección 1.2.4, en la que vimos que las aplicaciones conformes preservan la distancia de Poincaré. Una

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

transformación de Möbius es la siguiente:

$$\phi(z) = \frac{z - p}{1 - \bar{p}z}$$

para  $p \in \mathbb{K}$  Su inversa será:

$$\psi(w) = \frac{w + p}{1 + \bar{p}w}$$

para  $p \in \mathbb{K}$ .

Luego utilizaremos la transformación de Möbius para trasladar una línea hiperbólica completa a un diámetro del borde del disco, tomando el punto  $p$  de la transformación como el punto actual de la serpiente. Tras esto, bastará con construir una recta perpendicular a este diámetro y utilizar la inversa de la transformación de Möbius sobre este nuevo diámetro para obtener la línea hiperbólica perpendicular a la original.

Una vez delimitadas las líneas de movimiento que va a tener la serpiente hay que pasar a hacer que su movimiento sea correcto en el espacio hiperbólico.

### 2.5.2.2. Adecuación de la distancia en el Disco de Poincaré

La forma por la que se ha optado para adecuar la distancia es construir una circunferencia hiperbólica en cada tiempo en el punto en el que se encuentra la serpiente. Para así determinar la distancia euclídea que se va a recorrer en cada tiempo.

Veamos como se construye una circunferencia hiperbólica conociendo el centro de la misma (**A**), el radio hiperbólico (**n**) y el borde del Disco de Poincaré (**H**). Todos los pasos se pueden ver en la figura 2.11:

Si **A** es el centro de del Disco de Poincaré bastará con crear una circunferencia euclídea, con centro **A** y radio  $\tanh(n)$ .

1. Si **A** no es el centro de Disco de Poincaré haremos la inversión del punto **A** respecto a **H**,  $A'_1$ .
2. Trazamos las rectas tangentes a **H** desde  $A'_1$ , **a** y **b**.
3. Siendo **B** el punto de intersección de **a** con **H**, se construye la circunferencia **c** que tiene  $A'_1$  como centro y pasa por **B**.
4. Obtenemos  $A'$  como la inversión del punto **A** respecto de **c**.
5. Construimos la circunferencia **d** con centro  $A'$  y radio  $\tanh(n)$ .
6. Trazamos la recta **e** que une  $A'_1$  con  $A'$ , los puntos **D** y **E** serán los puntos de intersección de la recta **e** con la circunferencia **d**.
7. Obtenemos  $D'$  y  $E'$  como la inversión de los puntos **D** y **E** respecto de la circunferencia **c**, respectivamente.
8. El punto **F** será el punto medio (euclídeo) de los puntos  $D'$  y  $E'$ .
9. La circunferencia euclídea con centro **F** que pasa por  $D'$  es la circunferencia hiperbólica que buscamos.

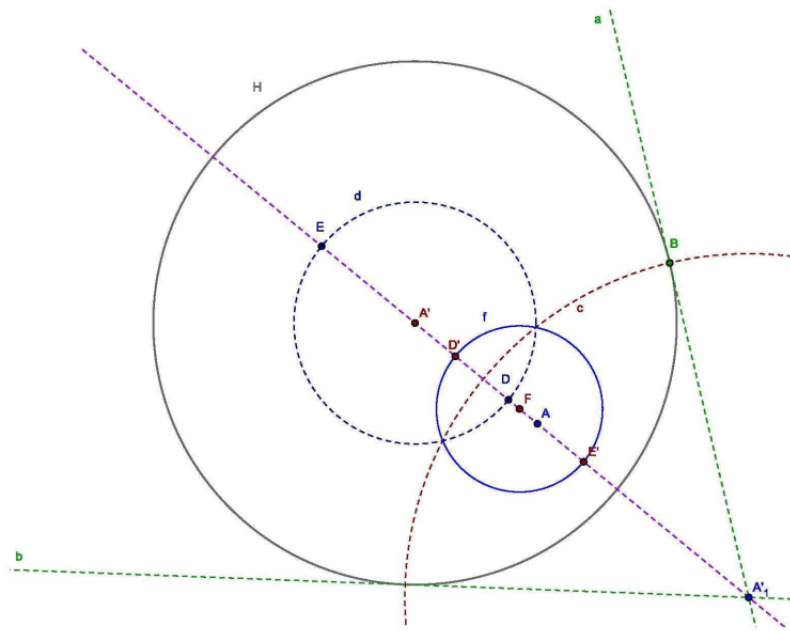


Figura 2.14.: Construcción de una circunferencia hiperbólica.

Para determinar la distancia euclídea que debe recorrer la serpiente en cada tiempo debemos intersecar la línea hiperbólica actual con la circunferencia hiperbólica que creamos en cada tiempo. De esta forma obtendremos dos puntos, y en función del sentido que estemos siguiendo se elegirá uno u otro.

Las funciones aun no descritas que se han utilizado para obtener este resultado son las siguientes:

- **getPointo1:** esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **punto:** se trata de dos flotantes que indican las coordenadas de un punto al que se le va a querer aplicar la función.
  - **radio:** es un flotante que representa la escala a la que está el punto al que se le va a querer aplicar la función.
  - **centro:** se trata de dos flotantes que indican las coordenadas del centro de la circunferencia actual.

Esta función nos va a devolver dos flotantes. Estos serán dos números que representen un punto situado en el disco unidad.

- **MobiusTransformation:** esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **z:** son dos flotantes que representan las coordenadas de un punto que se va a querer transformar mediante una transformación de Möbius. Estas dos coordenadas deben pertenecer al disco unidad.

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

- **punto:** son dos flotantes que representan las coordenadas de un punto que va a ir a parar al cero mediante esta transformación de Möbius. Estas dos coordenadas deben pertenecer al disco unidad.

Esta función nos devuelve dos flotantes, en el disco unidad, que resultan de la transformación del punto **z**.

- **MobiusTransformationBack:** se trata de la aplicación inversa a la transformación de Möbius anterior.
- **angleInverse:** los parámetros de esta función son los siguientes:
  - **centrox:** se trata de un flotante que representa la primera coordenada del centro de la circunferencia.
  - **centroy:** se trata de un flotante que representa la segunda coordenada del centro de la circunferencia.
  - **theta:** es un flotante que indica el valor del ángulo que se está tomando.
  - **radio:** es un flotante que identifica el valor del radio de la circunferencia.

Esta función nos devuelve dos flotantes que indican las coordenadas del punto que está en la circunferencia que se ha indicado con **centrox**, **centroy** y **radio** y que forma un ángulo **theta** con la horizontal.

- **clearCanvas:** no tiene parámetros y no devuelve nada. Su función es redibujar lo que había fijo en el canvas y pintar los elementos que sean nuevos en cada tiempo.
- **move\_snake:** no tiene parámetros y no devuelve nada. Su función es actualizar el punto actual de la flecha y actualizar tanto la recta como la recta perpendicular en cada tiempo.
- **main2:** no tiene parámetros y no devuelve nada. Su función es establecer un bucle temporal ejecutando estas dos últimas funciones en cada tiempo.
- **change\_direction:** esta función tiene un parámetro y es un evento. No devuelve nada. Su función es recoger si alguno de esos eventos es la tecla izquierda o la derecha, y en ese caso cambiar la dirección de la flecha.
- **cambioSentido:** tiene un parámetro booleano que indica si se ha pulsado la derecha o no. No devuelve nada. Su función es corregir el sentido en el que se está moviendo en la recta hiperbólica actual.
- **canvas\_arrow:** esta función tiene los siguientes parámetros:
  - **context:** es la variable tipo contexto en la que se va a pintar.
  - **fromx:** es un flotante que representa la primera coordenada del punto del que va a partir la flecha.
  - **fromy:** es un flotante que representa la segunda coordenada del punto del que va a partir la flecha.
  - **tox:** es un flotante que representa la primera coordenada del punto al que va a llegar la flecha.



- **toy**: es un flotante que representa la segunda coordenada del punto al que va a llegar la flecha.

Esta función tiene como objetivo pintar una flecha desde un punto (**fromx**, **fromy**) hasta otro (**tox**, **toy**).

■ **transformarVectorMöbius**: esta función tiene los siguientes parámetros:

- **vector\_original**: es un complejo que está en el disco unidad. Este complejo representa la dirección que tiene la flecha cuando va a salir por un lado del 2-toro.
- **punto\_partida**: son dos flotantes que representan las coordenadas, en el disco unidad, que indican el punto de salida en el nuevo lado (teniendo en cuenta las identificaciones).
- **radio**: se trata de un flotante que identificará el radio sobre el disco en el que estamos tratando. En el caso que nos ocupa he señalado que, en esta función, siempre nos referiremos al disco unidad, luego este parámetro será 1. Sin embargo, si se quisiera utilizar esta función con un disco distinto, bastaría con adecuar los otros dos parámetros a este nuevo disco y poner en este parámetro el valor del nuevo radio.

Esta función devolverá un complejo que indicará el valor del vector tangente a la recta hiperbólica después de haber identificado los lados.

■ **curvaVectorTangentePunto**: esta función tiene los siguientes parámetros:

- **vector\_tangente**: es un número complejo que representa las coordenadas del vector tangente a la recta hiperbólica correspondiente.
- **punto**: se trata de dos flotantes que representan las coordenadas de un punto en el disco unidad. Este punto será uno de los puntos de la recta hiperbólica.
- **s**: es un flotante que indica el valor del parámetro  $s$  en la descripción de la recta hiperbólica.

Esta función nos devuelve un complejo en el disco unidad que pertenece a la misma recta tras hacer que esta pase a través de un lado identificado.

Estas dos últimas funciones requieren un poco de contexto matemático:

Sea  $z_0 = \frac{R(e^{\frac{4\pi i}{5}} - e^{\frac{2\pi i}{5}})}{1+R^2}$ , donde  $R$  es el radio del disco (en nuestro caso se trata del disco unidad, luego  $R = 1$ ). Entonces la función  $T(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$  es una traslación hiperbólica que lleva los vértices de un lado identificado a otro, a partir de una reflexión en la recta horizontal.

Sea  $\gamma(t) : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ , donde  $p$  es el punto de partida y  $v$  el vector tangente a la recta hiperbólica de partida. Si derivamos  $T(\gamma(z))$  en  $t = 0$  obtendremos el vector resultante:

$$\frac{\partial}{\partial t}(T(\gamma(z)))|_{t=0} = \frac{v(1 + \bar{z}_0 p) - \bar{z}_0 v(p + z_0)}{(1 + \bar{z}_0 p)^2} = \frac{v(1 - |z_0|^2)}{(1 + \bar{z}_0 p)^2} = w$$

$w$  es el nuevo vector.

## 2. Desarrollo de software para visualización gráfica e interacción en el espacio hiperbólico

Se ha descrito la reflexión con respecto a la recta horizontal, de no ser esta basta con aplicar la siguiente rotación:  $w = e^{\phi i} T(e^{-\phi i} w)$ , donde  $\phi$  es el ángulo que forma la horizontal con el nuevo eje de la reflexión.

Para dar un punto de una recta hiperbólica conociendo su vector tangente en un punto y el punto, debemos recurrir a la siguiente expresión:  $\alpha(s) = \frac{p+sv}{1+\overline{p}sv}$  siendo  $p$  en punto actual y  $v$  el vector tangente a la recta hiperbólica en  $p$ . Así se define la curva que representa la recta hiperbólica, dándole un valor a  $s$  distinto de 0 (pues con el 0 obtendremos  $p$ ) conseguiremos un nuevo punto de la recta hiperbólica (ya identificada) y podremos pintarla para que la flecha siga su camino.

Un ejemplo del resultado lo podemos ver en las figuras 2.15 y 2.16.

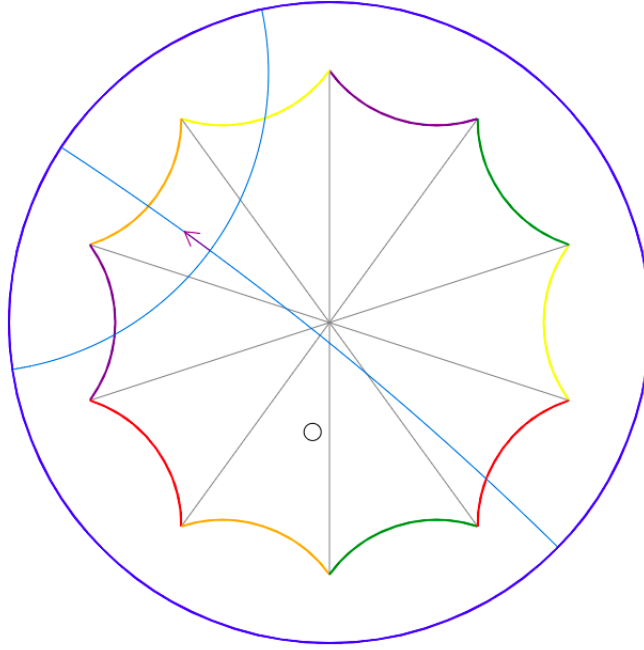


Figura 2.15.: Resultado del juego en el 2-toro, los lados del mismo color están identificados en sentido opuesto.

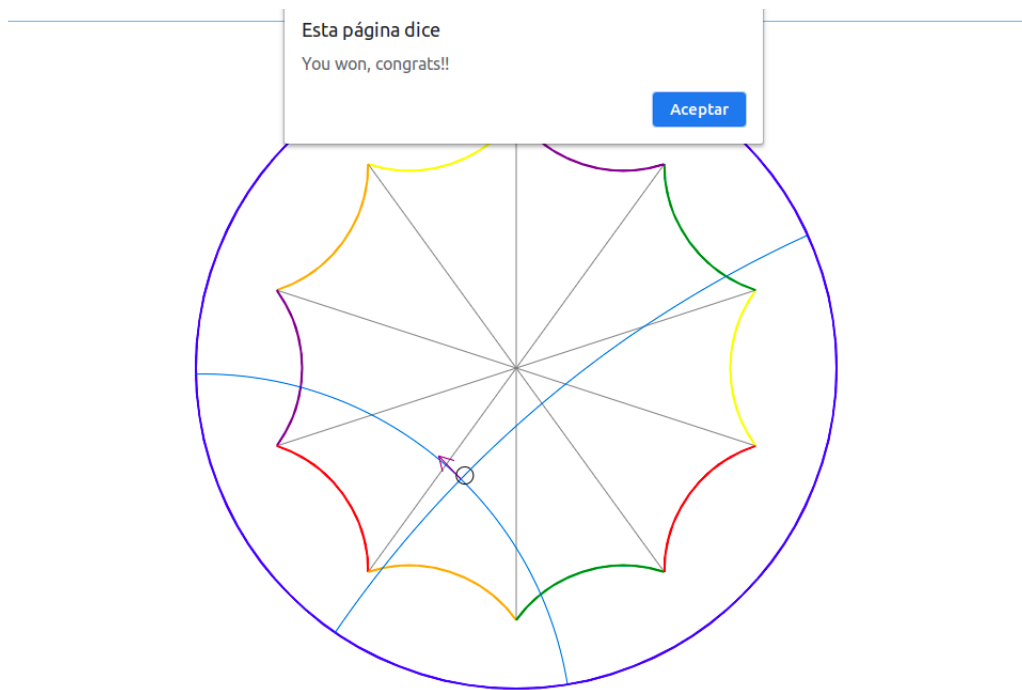


Figura 2.16.: Resultado del juego en el 2-toro, los lados del mismo color están identificados en sentido opuesto.



## Conclusiones y vías futuras

Podemos concluir afirmando que la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclídea, por lo que también es digna de estudio. La forma de representarla más popular es el modelo de Klein-Poincaré, y sobre este no solo se ha diseñado una aplicación web en la que se pueden ver las teselaciones hiperbólicas deseadas, sino que también se ha diseñado una aplicación lúdica, con el objetivo de acercar esta geometría al alcance de la mano de cualquiera para que todos puedan entenderla mejor.

Para continuar este trabajo se podría añadir que ambas aplicaciones funcionen no solo en un navegador en un ordenador, sino también en el teléfono móvil. Así se podría hacer mucho más portable. Además, se han descrito tres superficies platónicas, y solo se ha desarrollado un juego en una de ellas, otra vía futura sería utilizar estas otras dos superficies platónicas para diseñar un juego similar al que aquí se expone, o incluso más complejo.



## A. Código de las aplicaciones

El código de ambas aplicaciones se puede descargar de mi repositorio de GitHub:  
<https://github.com/victorbricio/TFG>

Entrando en el repositorio se puede descargar el código y para ejecutar las aplicaciones se deberá seguir el archivo **README.md**.





## Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [Bur11] W. Burnside. *Theory of Groups of finite order*. Cambridge U. Press, 1911.
- [Dun86] Douglas Dunham. Hyperbolic symmetry. pages 139–153, 1986.
- [Hoh02] Markus Hohenwarter. GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene. Master’s thesis, Paris Lodron University, Salzburg, Austria, February 2002. (In German.).
- [Kra] Steven G. Krantz. *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. The mathematical association of America.
- [Lee50] John M. Lee. *Axiomatic Geometry*. Editorial Committee, 1950.
- [Lev99] Silvio Levy. *The Eightfold Way: The Beauty of Klein’s Quartic Curve*. Cambridge U. Press, 1999.
- [Ló] Mauricio López. Geometría hiperbólica: Disco de poincaré. <https://rastergraphics.wordpress.com/2012/06/27/geometria-hiperbolica-disco-de-poncare/>. Último acceso: 31 julio de 2020.
- [Ló20] Antonio Martínez López. *Apuntes de Taller de Geometría y Topología*. 2019-2020.
- [Mas] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*.
- [Med] Miguel Angel Morales Medina. Proyeccion estereografica. <https://www.gaussianos.com/la-proyeccion-estereografica/>. Último acceso: 22 abril de 2020.
- [Nemo4] Laszlo Nemeth. On the models of the hyperbolic plane. pages 203–206, 2004.
- [URT] Fernando Etayo Gordejuela Ujué Rodríguez Trías. Trabajo fin de máster: Herramientas hiperbólicas y proyectivas en geogebra. page 78.
- [Wee] Jeffrey R. Weeks. *The Shape of Space*. Marcel Dekker.