

Présentation du Projet : Modélisation et Pricing de CDO Synthétiques via Processus de Cox

Projet de Mathématiques Appliquées

Motivation

Les produits structurés de crédit, et en particulier les **CDO synthétiques**, jouent un rôle important sur les marchés financiers. Contrairement aux CDO traditionnels adossés à des portefeuilles de prêts, les CDO synthétiques reposent sur des instruments dérivés tels que les Credit Default Swaps (CDS), permettant de transférer le risque de crédit sans créer ou détenir les actifs sous-jacents. Grâce à la diversification, ces structures permettent de redistribuer efficacement le risque de défaut et de créer un ensemble de tranches présentant des profils de risque distincts.

La valuation de ces produits nécessite une estimation précise de la dynamique du risque de crédit. Les approches classiques basées sur les copules, notamment la copule gaussienne, présentent des limites connues : elles ne capturent pas correctement les phénomènes de corrélation extrême, de clustering de défauts ni l'évolution temporelle du risque systémique. Ces faiblesses ont été mises en lumière lors de la crise des subprimes en 2008.

Pour obtenir une modélisation plus réaliste, ce projet utilise un **processus de Cox (ou intensité stochastique)** afin de modéliser le risque de crédit dans un cadre dynamique. Cette approche permet de générer des corrélations plus crédibles entre les défauts, d'introduire un facteur systémique évolutif et de comparer sa performance aux méthodes traditionnelles et à la simulation Monte Carlo.

Concepts et Structure du Modèle

Un CDO synthétique redistribue les pertes associées à un portefeuille de risques de crédit synthétiques (souvent des CDS) entre plusieurs tranches définies par des niveaux d'attachement et de détachement. Le pricing des tranches repose donc sur la modélisation de la distribution des pertes agrégées.

Dans un modèle de Cox, le défaut de chaque entité est caractérisé par un temps aléatoire (τ_i), défini à partir d'une intensité de défaut stochastique :

$$\lambda_i(t) = a_i + b_i X(t),$$

où $X(t)$ représente un facteur systémique latent modélisé par un processus stochastique (comme un

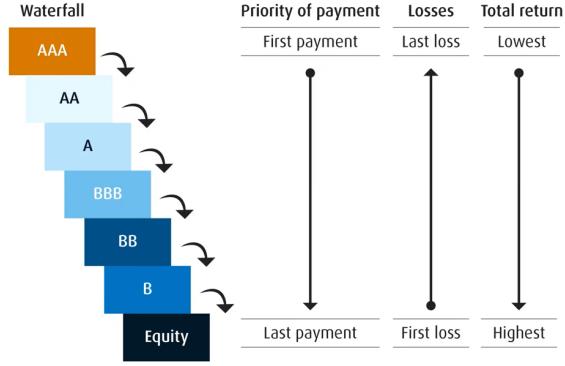


Figure 1: Modèle de paiement en cascade des tranches d'un CDO synthétique

processus CIR). Le temps de défaut est déterminé par la condition :

$$\tau_i = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_i(s), ds \geq E_i \right\}, \quad E_i \sim \text{Exp}(1) \quad (1)$$

Cette approche génère de manière naturelle une dépendance entre défauts et permet de reproduire des phénomènes de crise ou de concentration des risques.

Plan de Réalisation du Projet

Le projet se décompose en plusieurs étapes :

- 1. Introduction et contexte :** Fonctionnement des CDO synthétiques, rôle des tranches et rappel du cadre historique.
- 2. Construction du portefeuille synthétique :** Crédit d'un portefeuille de référence basé sur des CDS, avec probabilités de défaut individuelles et paramètres de perte (LGD).
- 3. Modélisation du risque via processus de Cox :** Définition du facteur systémique $X(t)$, choix du processus stochastique, construction des intensités stochastiques et simulation des temps de défaut.
- 4. Pricing des tranches du CDO synthétique :** Calcul des pertes agrégées, application des fonctions de tranche et détermination des spreads.
- 5. Simulation Monte Carlo :** Analyse numérique, estimation de la distribution des pertes, étude de convergence et comparaison avec un modèle à copule gaussienne.
- 6. Analyse et conclusion :** Discussion des limites et extensions possibles (CDO^2 , contagion explicite, facteurs multiples).

Ce projet permettra de comparer de manière quantitative les approches statiques (copules) et dynamiques (intensités stochastiques) du risque de crédit dans le cadre des CDO synthétiques.