UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Métodos Numéricos (525370)

Laboratorio 6 2024-2
Mínimos Cuadrados

El objetivo de este laboratorio es aprender técnicas de mínimos cuadrados para la determinación de parámetros en modelos.

1. Considere el problema de ajustar por mínimos cuadrados un polinomio de grado n a un conjunto de valores medidos de una función en $m+1$ puntos equiespaciados del intervalo $[0,1]$:

$$t_i = ih, \quad i = 0\dots,m, \quad \text{donde } h = \frac{1}{m}.$$

   (a) Haga un programa *function* que construya la matriz rectangular del problema para valores cualesquiera de m y n.

   Sugerencia: A fin de poder evaluar más fácilmente el polinomio obtenido con el comando MATLAB `polyval` (vea como se utiliza este comando con el *help* de MATLAB), resulta conveniente acomodar los coeficientes del polinomio en un vector c de longitud $n+1$ tal que

$$p(x) = c_1x^n + \cdots c_nx + c_{n+1}.$$

   (b) Verifique que el número de condición de la matriz $\boldsymbol{B}$ del sistema de ecuaciones normales correspondiente crece significativamente con n.

   (c) Fije los valores $m = 10$ y $n = 5$ y haga un programa que realice lo siguiente:

      i. Calcule la factorización $\boldsymbol{QR}$ de la matriz $\boldsymbol{A}$ mediante el comando `qr`.

      ii. Verifique que las columnas de $\boldsymbol{Q}$ son vectores ortonormales.

      iii. Determine el rango de $\boldsymbol{R}$ y observe que la matriz es rectangular y triangular superior.

      iv. Construya a partir de $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ las matrices $\boldsymbol{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{R}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de la factorización reducida $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$. Verifique que se cumple esta relación.

      v. Verifique que $\text{cond}_2(\boldsymbol{R}) = \sqrt{\text{cond}_2(\boldsymbol{B})}$, donde $\boldsymbol{B}$ es la matriz del sistema de ecuaciones normales calculada en (b).

      vi. Compare la matriz $\boldsymbol{R}$ de la factorización de Cholesky de $\boldsymbol{B}$ con la matriz $\boldsymbol{R}_1$. Indique y justifique lo que observe.

   (d) Para cada una de las siguientes funciones, determine el polinomio de grado 5 que mejor ajusta sus valores en los puntos t_i anteriores, para $m = 10$:

      i. $f(t) = \mathrm{e}^t$;

      ii. $g(t) = \operatorname{sen}\pi t$, con errores aleatorios de tamaño máximo 0.05.

   Dibuje en cada caso en un mismo gráfico, los valores ajustados, el polinomio obtenido y la función dada (en el caso de $g(t)$, sin incluir los errores aleatorios).

2. El archivo `CO2.mat` (bájelo de la página web del curso) contiene valores promedios mensuales de la concentración de dióxido de carbono en el aire (en partes por millón), obtenidos a partir de mediciones realizadas en una estación atmósferica entre enero de 2003 y diciembre de 2006.

   Esta concentración puede modelarse mediante la expresión

   $$c(t) = A + Be^{\alpha t} + C\cos\frac{2\pi t}{12} + D\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{12},$$

   donde t es el tiempo medido en meses ($t = 1$ para enero del 2003, $t = 2$ para febrero, etc.).

   El término $Be^{\alpha t}$ indica una tendencia creciente de esta concentración (proveniente del consumo creciente de hidrocarburos), con una constante $\alpha = 0.0037$ que se ha determinado por otros medios. Por su parte, los términos $C\cos\frac{2\pi t}{12} + D\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{12}$ describen el comportamiento cíclico (estacional) de esa concentración.

   (a) Determine los valores de las constantes A, B, C y D que mejor ajustan el modelo anterior a la tabla dada.

   (b) Dibuje en un mismo gráfico los valores medidos y el modelo ajustado.

   (c) Utilice el modelo para estimar la concentración de CO_2 del mes actual.

FST.