UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Métodos Numéricos (525370)

Laboratorio 4 2024-2
Sistemas de ecuaciones lineales – I

El objetivo de este laboratorio es aprender a utilizar eficientemente métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

1. (a) Haga un programa *function* que genere una matriz tridiagonal de orden n de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & & \Large 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ \Large 0 & & c & a \end{pmatrix}.$$

Los datos de entrada deben ser los valores de n, a, b y c, y la salida la matriz $\boldsymbol{A}$.

(b) Mediante el comando MATLAB `rank`, determine si la matriz tridiagonal y simétrica $\boldsymbol{A}$ correspondiente a $n = 10$, $a = 4$ y $b = c = 1$ es no singular.

(c) Resuelva el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ con la matriz tridiagonal anterior y un segundo miembro $\boldsymbol{b}$ cualquiera, de los siguientes dos modos:

i.
```
>> x=A\b
```

ii.
```
>> [L,U]=lu(A);
>> x=U\(L\b)
```

Compare las soluciones obtenidas y calcule los residuos $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}$ respectivos.

2. El *método de las potencias inversas* permite calcular el valor propio menor en valor absoluto de una matriz. Un algoritmo de este método es el siguiente:

> $\boldsymbol{y}_0$: dato inicial normalizado de manera que $\|\boldsymbol{y}_0\|_2 = 1$;
> $\boldsymbol{x}_0$: solución de $\boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{y}_0$;
> $\lambda_0 = 1/(\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_0)$;
> $k = 1, 2, 3, \ldots$
> $\quad \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{x}_{k-1}/\|\boldsymbol{x}_{k-1}\|_2$;
> $\quad \boldsymbol{x}_k$: solución de $\boldsymbol{Ax}_k = \boldsymbol{y}_k$;
> $\quad \lambda_k = 1/(\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_k)$;
> hasta que $\lambda_k = \lambda_{k-1}$.

El λ_k con el que finaliza este algoritmo es el valor calculado del autovalor de menor valor absoluto de la matriz $\boldsymbol{A}$.

(a) Escriba un programa MATLAB que implemente adecuadamente este algoritmo. Para ello tenga en cuenta lo siguiente:

   i. Aproveche el comando `lu` para reducir significativamente el costo computacional del método.

   ii. No almacene todos los $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$ y λ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, sino sólo los necesarios.

(b) Testee el programa con la matriz tridiagonal del ejercicio anterior correspondiente a $n = 10$, $a = 2$ y $b = c = -1$, cuyos valores propios se conocen exactamente:

$$\lambda_j = 2\left[1 - \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right], \quad j = 1, \ldots, n.$$

Calcule también estos valores propios con el comando MATLAB `eig` y compare los valores obtenidos.

3. En muchas aplicaciones es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}_i$, con la misma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y distintos segundos miembros $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Para hacer esto en MATLAB resulta conveniente generar la matriz de segundos miembros

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

y resolver el sistema matricial $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, cuya solución

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

es la matriz de vectores solución $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$, de los sistemas anteriores.

El siguiente programa MATLAB tiene por objeto verificar esto experimentalmente:

```
A=rand(100);
B=rand(100,1000);

t0=cputime;
X=A\B;
t1=cputime-t0

t0=cputime;
for i=1:1000
   Y(:,i)=A\B(:,i);
end
t2=cputime-t0

dif=norm(X-Y,inf)
```

(a) Escriba y ejecute el programa anterior.

(b) Analice lo que hace este programa. (Note que el comando `cputime` entrega el tiempo de CPU utilizado desde que se inició MATLAB.)

(c) Justifique la diferencia de tiempos de ejecución que se observa.

(d) Utilice la sentencia MATLAB

```
>> X=A\B;
```

con una matriz $\boldsymbol{B}$ adecuada para calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$. Compare el resultado obtenido con el del comando MATLAB `inv`.

4. El objeto de este ejercicio es demostrar que **no es conveniente** resolver un sistema de ecuaciones mediante la inversa de la matriz del mismo.

   Considere el siguiente programa MATLAB:

```
nn=[100:100:1000];
t1=[];
t2=[];
for n=nn
   A=rand(n);
   y=ones(n,1);

   t0=cputime;
   x=inv(A)*y;
   t1=[t1 cputime-t0];

   t0=cputime;
   x=A\y;
   t2=[t2 cputime-t0];
end
plot(nn,t1,'*-',nn,t2,'o-')
```

   (a) Analice lo que hace este programa, ejecútelo e indique qué alternativa es la más conveniente.

5. Sean

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n}.$$

   (a) Hacer un programa MATLAB que:

      i. genere la matriz anterior para $n = 10$;
      ii. calcule una matriz $\boldsymbol{R}$ tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{R}$;
      iii. resuelva mediante el método de Cholesky el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;

   (b) ¿Es la matriz $\boldsymbol{A}$ definida positiva? Justifique su respuesta.

6. Las matrices de *Hilbert*

$$\boldsymbol{H}_n = \left(h_{ij}^n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \text{con } h_{ij}^n = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

son matrices muy mal condicionadas. Estas matrices se generan en MATLAB con el comando `hilb`.

(a) Tabule los números de condición en norma euclideana (comando `cond`) y las estimaciones de los números de condición en norma 1 (comando `condest`) de estas matrices, para $n = 2,\dots,10$.

(b) Sean

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.7487192 \\ 0.4407175 \\ 0.3206968 \\ 0.2543113 \\ 0.2115308 \\ 0.1814429 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_0 + \delta\boldsymbol{b},$$

con $\delta\boldsymbol{b}$ un vector de perturbaciones aleatorias de valor absoluto menor o igual a 10^{-6} (Note que la sentencia MATLAB `(2*rand(n,1)-1)*a` genera un vector columna aleatorio de dimensión n, uniformemente distribuido en el intervalo $[-a,a]$).

Resuelva los sistemas $\boldsymbol{H}_6\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_0$ y $\boldsymbol{H}_6\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1$. Compare la diferencia de las soluciones $\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ con la de los segundos miembros $\delta\boldsymbol{b}$. Describa lo qué se observa.

(c) Verifique que se satisface la relación

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{H}_6)\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$