UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Practica N°2
Optimización II: Optimización no lineal, 525352 (2024-1)

1. **(Teorema de Caratheodory)** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $x \in \text{conv}(S)$, entonces $x \in \text{conv}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ donde $x_j \in S$ para $j = 1, \ldots, n+1$.

2. Modele los siguiente problemas como un problema de optimización no lineal.

   a) (**Problema de la maximización del margen**) Considere el siguiente problema geométrico: Dados dos conjuntos finitos en $\mathbb{R}^n$, $\{u_1, \ldots, u_p\}$ y $\{v_1, \ldots, v_q\}$, queremos separar los dos conjuntos por el sándwich (región en $\mathbb{R}^n$ limitada por dos hiperplanos paralelos) mas grueso posible.

   Note que una condición necesaria y suficiente para que existe una solución del problema es que los conjuntos $U = \text{conv}(u_1, \ldots, u_p)$ y $V = \text{conv}(v_1, \ldots, v_q)$ sean disjuntos.

   b) (**Problema del portafolio financiero**) Dado un conjunto de n activos con sus rendimientos esperados $r_1, \ldots, r_n$ y una matriz de covarianza Σ, donde $\Sigma_{i,j}$ es la covarianza entre el rendimiento de los activos i y j. En este contexto se define el rendimiento esperado por el portafolio como:

   $$E[r_p] = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i,$$

   y el riesgo del portafolio como:

   $$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w},$$

   donde $w = (w_1, \ldots, w_n)$ es vector de la distribución de proposición de la inversión (no se permite venta).

   Asumiendo que toda la inversión se distribuye en los activos. Se desea maximizar el rendimiento esperado de un portafolio sujeto a una restricción de riesgo. Este problema se puede modelar como un problema de **Minimización del Riesgo con Restricción de Rendimiento Esperado**, o como un problema de **Maximización del Rendimiento con Restricción de Riesgo**. Modele ambos.

3. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vació. Pruebe que C es un cono convexo, si y solo si para $x_1, x_2 \in C$ implica que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

4. Dados C_1 y C_2 dos conos convexos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $C_1 + C_2$ es también un cono convexo, y que $C_1 + C_2 = \text{conv}(C_1 \cup C_2)$.

5. Determina la forma explicita del conjunto polar C^* para los siguientes conos:

   a) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x_2 \leq 2x_1\}$.

b) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \geq -3|x_1|\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = Ap, \ p \geq 0\}$.