UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Practica N°1
Optimización II: Optimización no lineal, 525352 (2024-1)

1. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ no nulos y $v_1 \neq v_2$. Se definen los conjuntos

$$K_1 = \mathbb{R}_+ v_1 := \{\lambda v_1,\ \lambda \geq 0\},$$
$$K_2 = \mathbb{R}_+ v_2 := \{\mu v_2,\ \mu \geq 0\}.$$

Probar que

- Si $v_1 = tv_2$, con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

$$K_1 + K_2 = \begin{cases} \mathbb{R}_+ v_1 & , \text{si } t > 0 \\ \mathbb{R}\, v_1 & , \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- Si $v_1 \neq tv_2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $K_1 + K_2$ es cerrado.

Observación 1 *Notar que* $K_1 + K_2 = co(K_1 \cup K_2)$.

2. Demostrar que le siguiente igualdad es cierta:

$$\overline{\mathscr{C}\, A} = \mathscr{C}(\operatorname{int} A).$$

Hint: Use que si V *es un abierto, entonces*

$$B \cap V = \emptyset \Longleftrightarrow \overline{B} \cap V = \emptyset.$$

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y considere las siguiente funciones

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0 & , \text{si } x \notin A \\ 1 & , \text{si } x \in A \end{cases} \qquad i_A(x) := \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in A \\ +\infty & , \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Verificar que

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ \chi_A(x) \leq \lambda\}, \\ &= \begin{cases} \emptyset & , \text{si } \lambda < 0 \\ \mathbb{R}^n \setminus A & , \text{si } 0 \leq \lambda < 1 \\ \mathbb{R}^n & , \text{si } 1 \leq \lambda \end{cases} \\ S_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ i_A(x) \leq \lambda\}, \\ &= \begin{cases} \emptyset & , \text{si } \lambda < 0 \\ A & , \text{si } \lambda \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Considere las siguientes definiciones:

Definición 1 *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es coerciva si S_λ es acotada para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o equivalentemente $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} f(\xi) = +\infty$.*

Definición 2 *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ es una sucesión minimízante o minimizadora si $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \inf\limits_{x \in \Omega} f$.*

Dado $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f \not\equiv +\infty$, s.c.i. y coerciva. Demostrar que f satisface estas dos propiedades:

- $\operatorname*{argmin}\limits_{\mathbb{R}^n} f \neq \emptyset$.
- Cada sucesión minimízante es acotada