

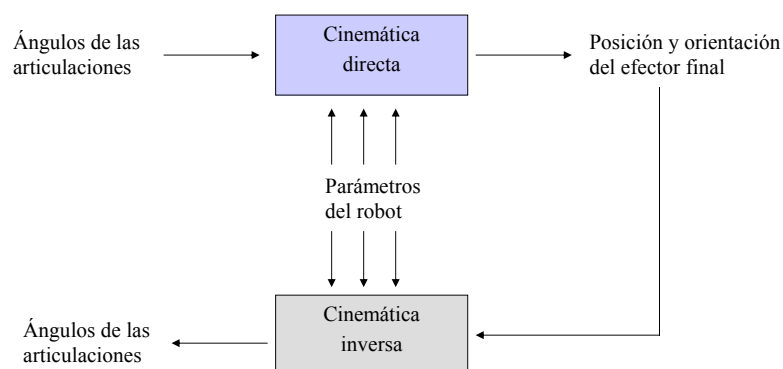


## INTRODUCCIÓN (1)

- Definición:
  - Estudio analítico de la geometría del robot con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo, como función del tiempo y sin considerar las fuerzas/momentos que intervienen en su movimiento.
- Aspectos de la cinemática:
  - *Problema cinemático directo*: dado el vector de ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos del robot, ¿cuál es la orientación y posición del efector final?
  - *Problema cinemático inverso*: dada la posición y orientación deseada para el efector final y los parámetros geométricos del robot, ¿puede alcanzar el manipulador esa posición?, ¿qué configuración permite alcanzarla?



## INTRODUCCIÓN (2)



CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 3

NOTACIÓN

UCM

• ¿Qué es una matriz de transformación de coordenadas, R?

$$p_{xyz} = R \cdot p_{uvw}$$

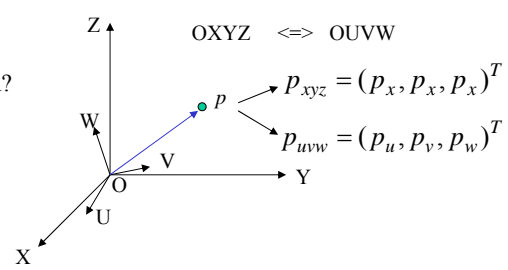
$$p_{uvw} = Q \cdot p_{xyz}$$

• ¿Cómo se obtiene?

$$\begin{aligned} p_x &= i_x \cdot p = i_x \cdot i_u \cdot p_u + i_x \cdot j_v \cdot p_v + i_x \cdot k_w \cdot p_w \\ p_y &= j_y \cdot p = j_y \cdot i_u \cdot p_u + j_y \cdot j_v \cdot p_v + j_y \cdot k_w \cdot p_w \\ p_z &= k_z \cdot p = k_z \cdot i_u \cdot p_u + k_z \cdot j_v \cdot p_v + k_z \cdot k_w \cdot p_w \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{pmatrix}}_R \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

• Propiedades:  $Q = R^{-1} = R^T$

$$QR = R^T R = R^{-1} R = I_3$$


Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 4

MATRICES DE ROTACIÓN

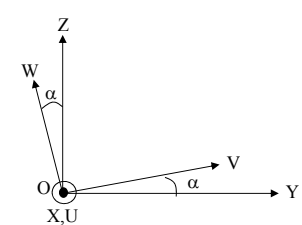
Matrices básicas

UCM

• EJEMPLO: *Matrices de rotación básicas*

$$R = \begin{pmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{pmatrix}$$

$i_x \equiv i_u$


$$R_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$


$$R_{y,\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 5



## MATRICES DE ROTACIÓN

### Matriz de rotación compuesta

(El Sistema OUVW puede girar respecto a los ejes del Sistema OXYZ y respecto a su propio eje)

**REGLAS:**

- 1.- Inicialmente Sistemas coincidentes.
- 2.- Si OUVW está girado respecto a los ejes del sistema OXYZ → *premultiplicar*
- 3.- Si OUVW está girado respecto su propio eje principal → *postmultiplicar*

Ej: Encontrar R => Giro  $\phi$  respecto al eje OY, rotación  $\theta$  respecto al eje OW y rotación  $\alpha$  respecto a OU


$$R = R_{y,\phi} \cdot I_3 \cdot R_{w,\theta} \cdot R_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c\phi + c\theta & s\phi \cdot s\alpha - c\phi \cdot s\theta \cdot c\alpha & c\phi \cdot s\theta \cdot s\alpha + s\phi \cdot c\alpha \\ s\theta & c\theta \cdot c\alpha & -c\theta \cdot s\alpha \\ -s\phi + c\theta & s\phi \cdot s\theta \cdot c\alpha + c\phi \cdot s\alpha & c\phi \cdot c\alpha - s\phi \cdot s\theta \cdot s\alpha \end{pmatrix}$$

EJEMPLO

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 6



## COORDENADAS HOMOGÉNEAS

### Definiciones

- $R_{3 \times 3}$  no permite traslación y escalado.

$$\underbrace{p = (p_x, p_y, p_z)^T}_{N \text{ componentes}} \quad \xrightarrow{\text{Representación en coordenadas homogéneas}} \quad \underbrace{\hat{p} = (w \cdot p_x, w \cdot p_y, w \cdot p_z, w)^T}_{N+1 \text{ componentes}}$$


- No existe representación única:

$$\hat{p}_1 = (w_1 \cdot p_x, w_1 \cdot p_y, w_1 \cdot p_z, w_1)^T \equiv \hat{p}_2 = (w_2 \cdot p_x, w_2 \cdot p_y, w_2 \cdot p_z, w_2)^T$$

En robótica escala = 1 (se utiliza en informática gráfica)

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 7



## COORDENADAS HOMOGÉNEAS

### Matriz de transformación

- $R_{3 \times 3} \implies T_{4 \times 4}$  (Matriz de transformación en coordenadas homogéneas)

$$T = \left( \begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \text{matriz de rotación} & \text{vector de posición} \\ \hline \text{transformación perspectiva} & \text{escalado} \end{array} \right)$$


---

- EJEMPLOS:

Rotación  $T_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Traslación  $T_{tras} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$


Escalado local y global

$$T_{escL} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{escG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix}$$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 8



## COORDENADAS HOMOGÉNEAS

### Matriz de transformación compuesta

- REGLAS:
  - 1.- Inicialmente ambos sistemas son coincidentes  $\implies T_{4 \times 4} = I_{4 \times 4}$
  - 2.- Si el sistema OUVW rota/traslada respecto a los ejes principales OXYZ, entonces *premultiplicar* la matriz previa (resultante).
  - 3.- Si el sistema OUVW rota/traslada respecto a su propio eje principal, entonces *postmultiplicar* la matriz previa (resultante).

---

- EJEMPLO:

Encontrar T que represente una rotación  $\alpha$  respecto al eje OX, una traslación de  $a$  unidades a lo largo del eje OX, una traslación de  $d$  unidades a lo largo del eje OZ, seguida de una rotación  $\theta$  respecto del eje OZ.

$$T = T_{z,\theta} T_{z,d} T_{x,a} T_{x,\alpha} I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



## MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

### Matriz de transformación general

- Puede considerarse como:
  - Una transformación de un sistema de coordenadas a otro.
  - Una descripción del origen y ejes del nuevo sistema en términos del sistema de referencia.
  - Una descripción del movimiento de un objeto desde una localización (sistema de referencia) a otra (nuevo sistema).
  - Un medio de calcular la localización de un punto de un objeto con respecto al sistema de referencia desde su localización respecto al nuevo sistema.

$$T = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x & p_x \\ x_y & y_y & z_y & p_y \\ x_z & y_z & z_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} & \bar{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = p_x i + p_y j + p_z k \quad \equiv \text{localización del origen del nuevo sistema de referencia}$$

$$x = x_x i + x_y j + x_z k \quad \equiv \text{dirección del eje x del nuevo sistema de referencia}$$

$$y = y_x i + y_y j + y_z k \quad \equiv \text{dirección del eje y del nuevo sistema de referencia}$$

$$z = z_x i + z_y j + z_z k \quad \equiv \text{dirección del eje z del nuevo sistema de referencia}$$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



## MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

### Matriz Homogénea inversa

- Se realiza de la forma:
  - La matriz de rotación  $R_{3 \times 3}$  pasa a ser traspuesta.
  - La perspectiva y la escala no se modifican (a cero y a uno).
  - El punto de origen se modifica de la forma siguiente:

$$p_x \longrightarrow -\bar{p} \cdot \bar{x} \quad p_y \longrightarrow -\bar{p} \cdot \bar{y} \quad p_z \longrightarrow -\bar{p} \cdot \bar{z}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} x_x & x_y & x_z & -\bar{p} \cdot \bar{x} \\ y_x & y_y & y_z & -\bar{p} \cdot \bar{y} \\ z_x & z_y & z_z & -\bar{p} \cdot \bar{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_x & x_y & x_z & -p_x x_x - p_y x_y - p_z x_z \\ y_x & y_y & y_z & -p_x y_x - p_y y_y - p_z y_z \\ z_x & z_y & z_z & -p_x z_x - p_y z_y - p_z z_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x & p_x \\ x_y & y_y & z_y & p_y \\ x_z & y_z & z_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} & \bar{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 11

**ELEMENTOS, ARTICULACIONES Y PARÁMETROS**

**PUMA 560**

N pares articulación-elemento

↕

N grados de libertad  
(Elemento 0 no considerado)

**TIPOS DE ARTICULACIONES**

- Esférica
- Prismática (deslizante)
- Cilíndrica
- Revolución (giratoria)
- De tornillo
- Planar

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 12

**TIPOS DE ROBOTS**

**Coordenadas y espacio de trabajo**

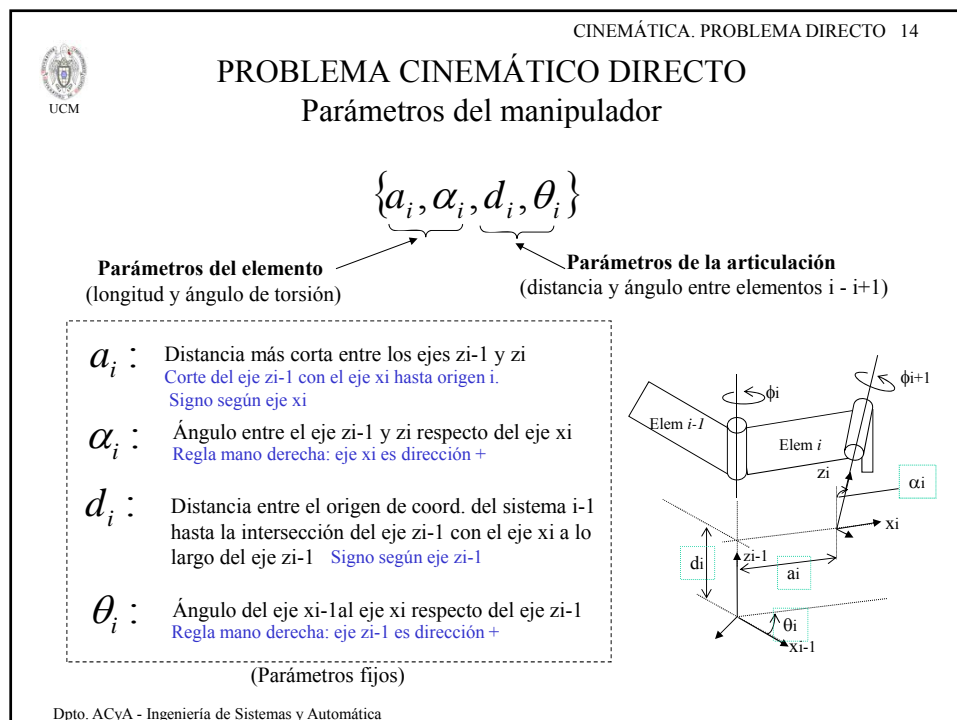
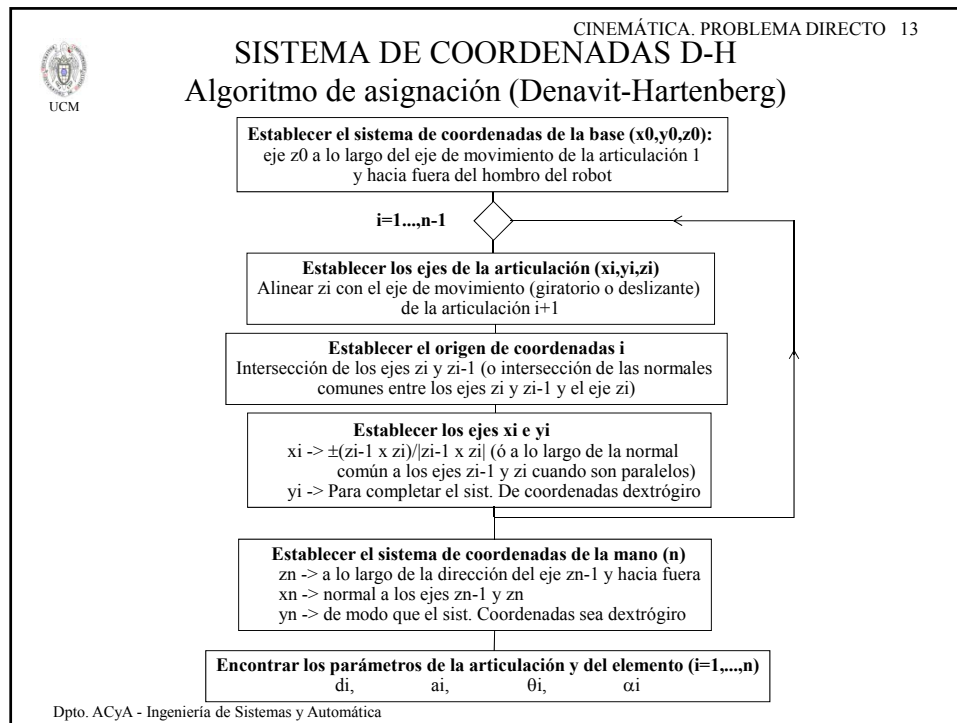
**Cartesiana**  
(RS-1 de IBM y el Sigma de Olivetti)

**Cilíndrica**  
(Versatran 600 de Prab)


**Esférica**  
(Unimate 2000B de Unimation Inc.)

**De Revolución**  
(T<sup>3</sup> de Cincinnati Milacron y PUMA de Unimation Inc.)

Dpto. ACyA - Ing.



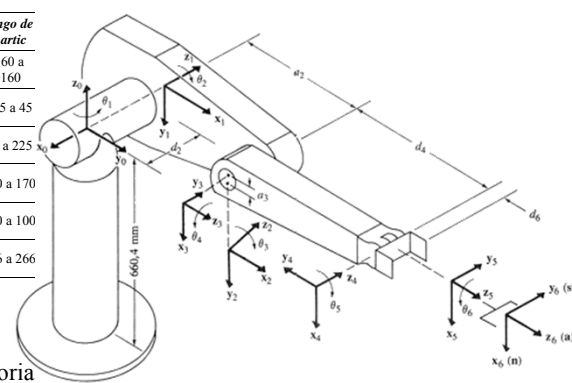
CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 15



### PARÁMETROS DEL MANIPULADOR

#### Ejemplo. Robot PUMA


Artic i	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	Rango de la artic
1	90	-90	0	0	-160 a +160
2	0	0	431,8 mm	149,09 mm	-225 a 45
3	90	90	-20,32 mm	0	-45 a 225
4	0	-90	0	433,07 mm	-110 a 170
4	0	90	0	0	-100 a 100
6	0	0	0	56,25	-266 a 266



Articulación de revolución o giratoria  
Variable de la articulación:  $\theta_i$   
Parámetros fijos:  $\alpha_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

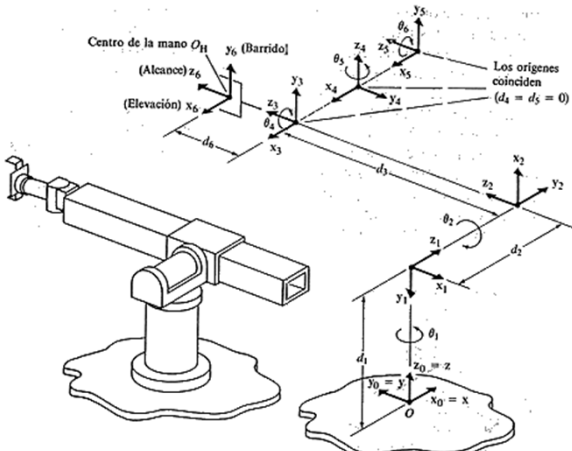
CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 16



### PARÁMETROS DEL MANIPULADOR

#### Ejemplo. Robot STANFORD

Artic i	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	-90	-90	0	$d_1$
2	-90	90	0	$d_2$
3	-90	0	0	$d_3$
4	0	-90	0	0
4	0	90	0	0
6	0	0	0	$d_6$




Articulación prismática  
Variable de la articulación:  $d_i$   
Parámetros fijos:  $\theta_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $a_i$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 17



## SISTEMA DE COORDENADAS D-H

### Representación Denavit-Hartenberg

Manipulador de  $n$  grados de libertad + Sist. Coord. De la base

$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$

pi (coord. Sistema i) → pi-1 (coord. Sistema i-1)


- 1.- Girar eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$  para alinear  $x_{i-1}$  con  $x_i$
- 2.- Moverse una distancia  $d_i$  por el eje  $z_{i-1}$  para hacer coincidir  $x_{i-1}$  y  $x_i$
- 3.- Traslarse una distancia  $a_i$  por eje  $x_i$  para coincidir los dos orígenes
- 4.- Girar un ángulo  $\alpha_i$  respecto el eje  $x_i$  para coincidir los dos sistemas de coordenadas

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} \cdot T_{z,\theta} \cdot I \cdot T_{x,a} \cdot T_{x,\alpha}$$

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j$$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 18



## SISTEMA DE COORDENADAS D-H

### Matriz de transformación entre articulaciones


$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} \cdot T_{z,\theta} \cdot T_{x,a} \cdot T_{x,\alpha}$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i \cdot s\theta_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i \cdot c\theta_i & -s\alpha_i \cdot c\theta_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

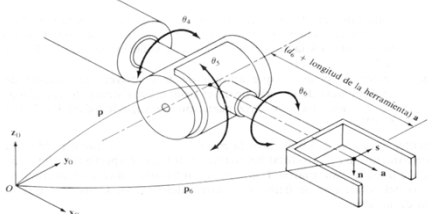
Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 19



## EFECTOR FINAL

### Interpretación geométrica



$n \Rightarrow$  vector normal de la mano  
 $s \Rightarrow$  vector de deslizamiento de la mano  
 $a \Rightarrow$  vector de aproximación de la mano  
 $p \Rightarrow$  vector de posición de la mano

$${}^0T_6 = \begin{pmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Representaciones de posición/orientación


Cartesiana $(p_x, p_y, p_z)^T$	Cartesiana $[n, s, a]$
Cilíndrica $(rC\alpha, rS\alpha, d)^T$	Euler $[\phi, \theta, \psi]$
Esférica $(rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta)^T$	Roll, Pitch, Yaw $[R, P, Y]$

$$T_{pos} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{orient} = \begin{pmatrix} [n, s, a] & 0 \\ \phi & 0 \\ R_{\phi, \theta, \psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^0T_6 = T_{pos} \cdot T_{orient}$

CINEMÁTICA. PROBLEMA DIRECTO 20

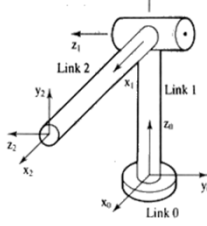


## EJEMPLO

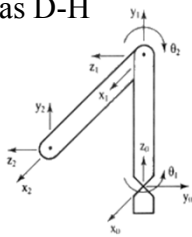
### Parámetros y coordenadas D-H

**Pasos en la cinemática directa:**

- 1.- Mover el manipulador a posición cero
- 2.- Asignar ejes de coordenadas a cada articulación
- 3.- Obtener los parámetros de cada articulación
- 4.- Obtener relación entre articulaciones  ${}^{i-1}A_i$
- 5.- Multiplicar todas las matrices para  ${}^{i-1}A_i$  obtener  ${}^0T_{ef}$
- 6.- Resolver los ángulos de las articulaciones para las coordenadas del efector final

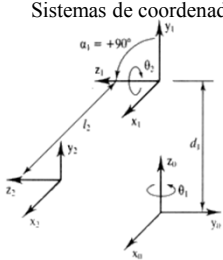


Manipulador en posición cero




Esquema de las articulaciones

Sistemas de coordenadas



Espacio de trabajo



(c)

Parámetros de las articulaciones

Link variable	0	$\alpha$	$l$	$d$
1	$\theta_1$	$\theta_1$	$90^\circ$	$d_1$
2	$\theta_2$	$\theta_2$	0	$l_2$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Au

CINEMÁTICA. PROBLEMA INVERSO 21

**Definición del problema**

• Dada una posición y orientación para el efector final de un manipulador  
Obtener: *los ángulos correspondientes para cada articulación*

$${}^0T_6 = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cinemática inversa} \\ \longrightarrow \bar{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n)^T \\ \{a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i\} \end{array} \right.$$

• **DIFICULTADES**

- Existen multitud de soluciones para una misma posición/orientación del efector final.
- Existen múltiples métodos para encontrar la solución inversa (todos necesitan tomar decisiones para restringir la solución final)
  - Solución analítica o matricial (para determinados tipos de robots).
  - Métodos geométricos.
  - Métodos iterativos, cuaterniones duales, etc.

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

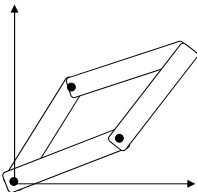
CINEMÁTICA. PROBLEMA INVERSO 22

**PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO**  
**Redundancias**

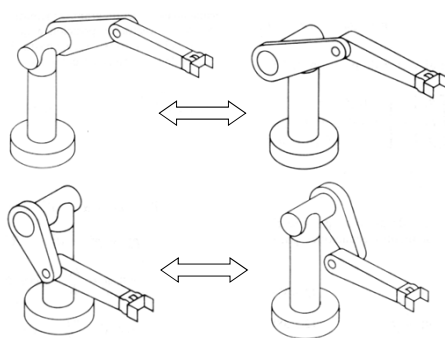
**Redundancia:** Un manipulador puede alcanzar una posición con *varias configuraciones* distintas de sus articulaciones

- Funciones matemáticas (raíz cuadrada, coseno, ...) en la solución cinemática inversa con indefinición en el signo, indica redundancias.
- N redundancias  $\Rightarrow 2^N$

**EJ:** 2-grados de libertad



6-grados de libertad



Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA INVERSO 23

**PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO**  
**Degeneraciones**

**Degeneración:** Un manipulador puede alcanzar una posición con *infinitas configuraciones* distintas de sus articulaciones

**EJ:**

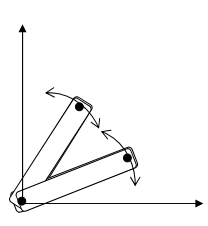
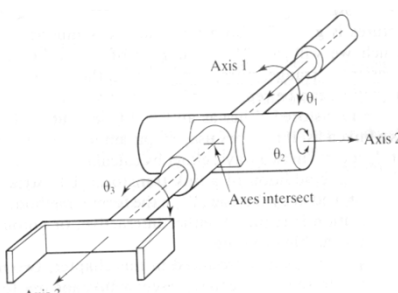
El punto (0,0) es degenerado

$$\theta_2 = 180^\circ$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}(l_2 S_2, l_1 + l_2 C_2) =$$

$$= \text{atan}(0/0) - \text{atan}(0/0)$$

La suma de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_3$  es cero, pero uno puede girar  $180^\circ$  respecto a otro para mantener la misma posición

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

CINEMÁTICA. PROBLEMA INVERSO 24

**RESOLUCIÓN**  
**Método analítico. Algoritmo de resolución**

**Igualar la matriz transformación general con la matriz deseada para el efector final**  
 ${}^0T_6 = {}^0T_d$

**Buscar elementos en las matrices (ecuaciones válidas):**

- Con una única variable
- Pares de elementos que den lugar al dividir a una única variable (*mejor la función atan2*)
- Elementos o pares de elementos que pueden ser simplificados usando identidades trigonométricas

**Elegir un elemento seleccionado:**  
Despejar la variable de articulación en función de la posición del efector final

¿Más elementos?

si → **Apartarlos y buscar mejores soluciones**  
Los términos de  $p$  son más eficientes que los términos de  $x, y, z$ .

no → ¿Hay imprecisiones?

si → **Apartarlos y buscar mejores soluciones**  
Los términos de  $p$  son más eficientes que los términos de  $x, y, z$ .

no → **Buscar nuevas ecuaciones**  
premultiplicar por la inversa de A de la 1ª articulación  
ó  
postmultiplicar por la inversa de A de la última articulación

¿Faltan soluciones?

si → Repetir hasta acabar A's

no → **Sí quedan articulaciones sin encontrar:**  
Tomar una de las descartadas (tomar nota de las regiones con problemas)

**Si no se encuentra solución a una articulación**  
El efector puede estar fuera del espacio de trabajo  
(Las soluciones teóricas no pueden ser físicamente realizables debido a restricciones físicas).

Dpto. ACyA

CINEMÁTICA. PROBLEMA INVERSO 25

**RESOLUCIÓN**  
**Método geométrico. Problema**

- Debido a posibilidad de los dos signos (raíz cuadrada, cos, ...) en la solución existen diversas soluciones para el mismo problema.
  - El método geométrico da una orientación de qué signo tomar en cada caso.
- Para un robot PUMA:
  - Se toman tres indicadores de configuración: BRAZO, CODO y MUÑECA

3 primeras articulaciones      3 segundas articulaciones

BRAZO, CODO discriminan una solución de las cuatro posibles      4 soluciones      2 soluciones      MUÑECA discrimina una solución de las dos posibles

Otros ejemplos: en hoja de problemas

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

PROGRAMACIÓN 26

**PROGRAMACIÓN DE ROBOTS**  
**Introducción. Tipos**

- Reconocimiento de voz
  - Sería el más adecuado en muchos casos.
  - De momento no se ha avanzado lo suficiente:
    - Dificultad en reconocer las palabras adecuadas.
    - Tratar un vocabulario suficientemente extenso.
    - Entrenamiento para reconocer patrones de voz.
- Métodos guiados:
  - Consiste en enseñar y reproducir los movimientos que se desean.
  - Es el más utilizado en robot industriales (soldadura, pintura con spray, ...)
  - Método:
    - (1) control manual: mueve lentamente al robot a las posiciones deseadas,
    - (2) se reproduce lo enseñado,
    - (3) Si es correcto: el robot realiza los movimientos a velocidad apropiada.
- Programación alto nivel:
  - orientado a nivel de robot
  - a nivel de tarea
  - Es la más utilizada hoy en día.
  - Aumenta la flexibilidad y versatilidad de los robot. Permite utilizar un robot para realizar distintas tareas.
  - Utilizado normalmente en robot con múltiples sensores y robots móviles.

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



## LENGUAJES DE NIVEL DE ROBOTS

### Características

- 1.- Permitir establecer/especificar el lugar de trabajo
- 2.- Especificar la posición y describir acciones y movimientos.
- 3.- Órdenes para usar los sensores: detectar anomalías o vigilar el progreso de una tarea.

Lenguajes clásicos:

⊗ **AL** (Univ. Stanford)

- Lenguaje alto nivel con características de ALGOL y Pascal.
- Entorno para especificaciones a nivel de robot y nivel de tarea.
- Usa ALGOL como estructura de datos y de control.
- Entorno para modelado del mundo.

⊗ **AML** (IBM para el RS-1)

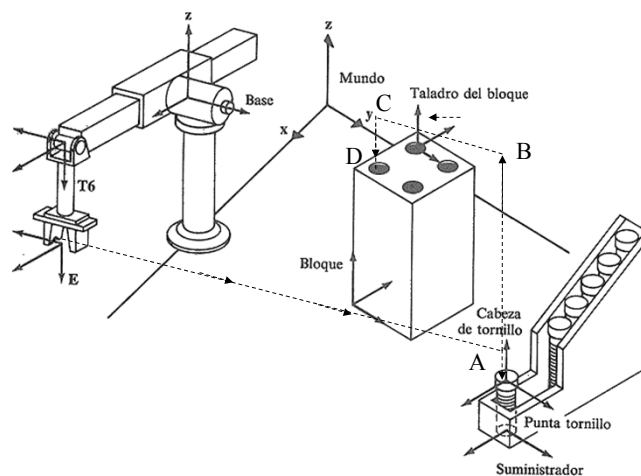
- Entorno para diferentes interfaces de usuario.
- Admite construcciones LISP y APL.
- Permite añadir datos y planificar una trayectoria en el espacio de segmentos (sujetos a restricciones de vel. y pos.)
- Produce movimientos absolutos y relativos.
- Vigila los sensores para producir interrupciones en el movimiento.

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática




## LENGUAJES DE NIVEL DE ROBOTS

### Ejemplo



Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

PROGRAMACIÓN 29



## LENGUAJES DE NIVEL DE ROBOTS

### Especificación de posición y lugar de trabajo

Posición y sistemas de referencia

**AL:**  
 $base \leftarrow \text{FRAME}(\text{nilrot}, \text{VECTOR}(20,0,15)*\text{pulgadas});$   
 $bloque \leftarrow \text{FRAME}(\text{ROT}(Z,90*\text{grad}), \text{VECTOR}(20,15,0)*\text{pulgadas});$   
 $alimentador \leftarrow \text{FRAME}(\text{nilrot}, \text{VECTOR}(25,20,0)*\text{pulgadas});$

**AML:**  
 $base = \langle \langle 20,0,15 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,0 \rangle) \rangle;$   
 $bloque = \langle \langle 20,15,0 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,90 \rangle) \rangle;$   
 $alimentador = \langle \langle 25,20,0 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,0 \rangle) \rangle;$


Características de objetos

**AL:**  
 $T6 \leftarrow base * \text{TRANS}(\text{ROT}(X,180*\text{grad}), \text{VECTOR}(15,0,0)*\text{pulgadas});$   
 $E \leftarrow T6 * \text{TRANS}(\text{nilrot}, \text{VECTOR}(0,0,5)*\text{pulgadas});$   
 $punta\_tornillo \leftarrow alimentador * \text{TRANS}(\text{nilrot}, \text{nilvect});$   
 $cabeza\_tornillo \leftarrow punta\_tornillo * \text{TRANS}(\text{nilrot}, \text{VECTOR}(0,0,1)*\text{pulgadas});$   
 $taladro\_bloque \leftarrow bloque * \text{TRANS}(\text{nilrot}, \text{VECTOR}(0,2,3)*\text{pulgadas});$

**AML:**  
 $T6 = \text{DOT}(base, \langle \langle 15,0,0 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 180,0,0 \rangle) \rangle);$   
 $E = \text{DOT}(T6, \langle \langle 0,0,5 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,0 \rangle) \rangle);$   
 $punta\_tornillo = \text{DOT}(alimentador, \langle \langle 0,0,0 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,0 \rangle) \rangle);$   
 $cabeza\_tornillo = \text{DOT}(punta\_tornillo, \langle \langle 0,0,1 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,0 \rangle) \rangle);$   
 $taladro\_bloque = \text{DOT}(bloque, \langle \langle 0,2,3 \rangle, \text{EULERROT}(\langle 0,0,0 \rangle) \rangle);$

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

PROGRAMACIÓN 30



## LENGUAJES DE NIVEL DE ROBOTS

### Especificación de movimiento

- Puede realizarse mediante un espacio cartesiano (AL) o mediante un espacio de segmentos (AML).
- Producen caminos ineficaces y programas muy largos
- Se debe controlar la velocidad, aceleración, deceleración y direcciones de salida y llegada.

Características de objetos

**AL:**  
*{Mover el brazo desde reposo a A y luego hacia cabeza\_tornillo}*  
 $\text{MOVE barm TO } A;$   
 $\text{MOVE barm TO cabeza\_tornillo};$   
*{otra forma de especificar movimiento}*  
 $\text{MOVE barm TO cabeza\_tornillo VIA } A;$   
*{desplazarse a lo largo del eje Z una pulgada (mov. Relativo)}*  
 $\text{MOVE barm TO } \otimes - 1 * Z * \text{pulgadas};$


**AML:**  
 -- Mover los segmentos 1 y 4 a 10 pulgadas y 20° (mov absoluto)  
 $\text{MOVE}(\langle 1, 4 \rangle, \langle 10, 20 \rangle);$   
 -- Mover segs. 1,3 y 6 1,2 pulgadas y 5° respectivamente (mov relativo)  
 $\text{DMOVE}(\langle 1,3,6 \rangle, \langle 1,2,5 \rangle);$

Sentencias de movimiento

**AL:**  
*{Mover el brazo desde cabeza\_tornillo hasta A}*  
 $\text{MOVE barm TO } A;$   
 $\text{WITH DEPARTURE} = Z \text{ WRT } alimentador;$   
 $\text{WITH DURATION} = 5 * \text{segundos};$   
*{Abrir la mano 2,5 pulgadas}*  
 $\text{OPEN bhand TO } 2,5 * \text{pulgadas};$

**AML:**  
 -- Mover los segmentos 1 y 4 a 10 pulgadas y 20°  
 $(\text{vel} = 1 \text{ pulgada/s})$   
 -- Aceleración y deceleración 1 pulgada/s  
 $\text{MOVE}(\langle 1, 4 \rangle, \langle 10, 20 \rangle, \langle 1,1,1 \rangle);$   
 -- Abrir la mano 2,5 pulgadas  
 $\text{MOVE}(\text{PINZA}, 2,5);$

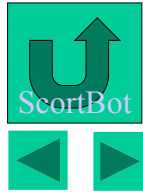
Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



## LENGUAJES DE NIVEL DE ROBOTS

### Uso de sensores y flujo de control


PROGRAMACIÓN 31



- No hay consenso y cada lenguaje tiene su propia sintaxis.
- Depende mucho de los sensores que permita utilizar.
- En general, son órdenes como:
  - Fuerza: FORCE(eje), TORQUE(eje), QPOSITION(<artic-i, artic-j>), ...
  - Control de flujo: <if-then-else>, <case->, <do-until>, <while-do>

**AL:**  
*{Test para detectar la presencia de agujeros con un sensor de fuerza}*  
 MOVE barm TO  $\otimes$  - 1\*Z\*pulgadas ON FORCE(Z) > 10\*onzas;  
 DO ABORT("No hay agujero");  
*{Insertar tornillo}*  
 MOVE barm TO taladro\_bloque;  
 WITH FORCE(Z) = -10\*onzas WITH FORCE(X) = 0\*onzas WITH  
 FORCE(Y) = 0\*onzas WITH DURATION = 3\*segundos;  
**AML:**  
 -- Definir un monitor para los sensores de fuerza SLP y SLR; el monitor se  
 encarga de detectar si el sensor excede el rango 0 a F  
*fmons=MONITOR(<SLP,SLR>, 1,0,F);*  
 -- Mover el segmento 3 una pulgada y para si fmons es activado  
 DMOVE(<3>,<1>,fmons);

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA

### Definición

PROGRAMACIÓN 32

- Programación en términos de los objetos a manejar y no de movimientos del robot.
- Planificación de la tareas:
  - [Modelado del mundo.](#)
  - [Especificación de la tarea.](#)
  - [Síntesis del programa.](#)
- Semejante a la generación automática de programas en inteligencia artificial.

```

    Especificación de la tarea
        ↓
    [Descomposición de la tarea]
        ↓
    [Planificación de subtareas]
        ↓
    Programa del robot
            
```

.....

Conocimiento ↔ [Planificación de subtareas] ↔ Modelo

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



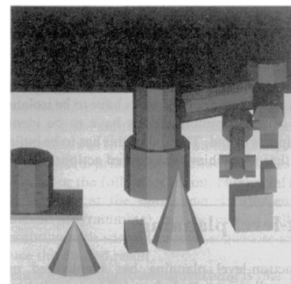


PROGRAMACIÓN 33

## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA

### Modelización del mundo

- Información espacial de los objetos: dimensión, volumen y forma.
- Formas de representar objetos (CSG  $\Rightarrow$  Construcción de un sólido geométrico):
  - 1.- **Composición de objetos y descomposición en células (GDP).**
    - \* Operaciones de movimiento: rotación, traslación y escala.
    - \* Operaciones de combinación: unión, intersección, diferencia y complemento.
  - 2.- **Conjunto de fronteras y de puntos, superficies y cilindros generalizados.**
    - \* Se utiliza un grafo dirigido que contiene: nodos objetos, caras, aristas y vértices.
    - \* Cuanto más se complica el objeto más ancho es el árbol, pero no más profundo.
      - Vértices: almacenados como coord. cartesianas.
      - Aristas: almacenadas como pares de vértices.
    - \* Dificultades en la especificación de las superficies curvadas (ej: cilindro con dodecahedros).



Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



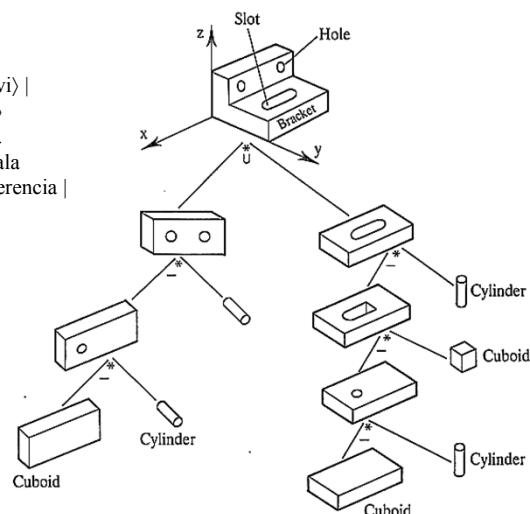
PROGRAMACIÓN 34

## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA

### Ejemplo GDP (1)

Especificación:

$\langle \text{parte mecánica} \rangle ::= \langle \text{objeto} \rangle$   
 $\langle \text{objeto} \rangle ::= \langle \text{primitiva} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{objeto} \rangle \langle \text{op movi} \rangle \langle \text{arg movi} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{objeto} \rangle \langle \text{operador} \rangle \langle \text{objeto} \rangle$   
 $\langle \text{primitiva} \rangle ::= \text{cubo} | \text{cono} | \text{cilindro} | \dots$   
 $\langle \text{op movi} \rangle ::= \text{rotación} | \text{traslación} | \text{escala}$   
 $\langle \text{arg movi} \rangle ::= \text{unión} | \text{intersección} | \text{diferencia} |$   
 $\quad \text{complemento}$



Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática



## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA Ejemplo GDP (2)

Ej: AUTOPASS

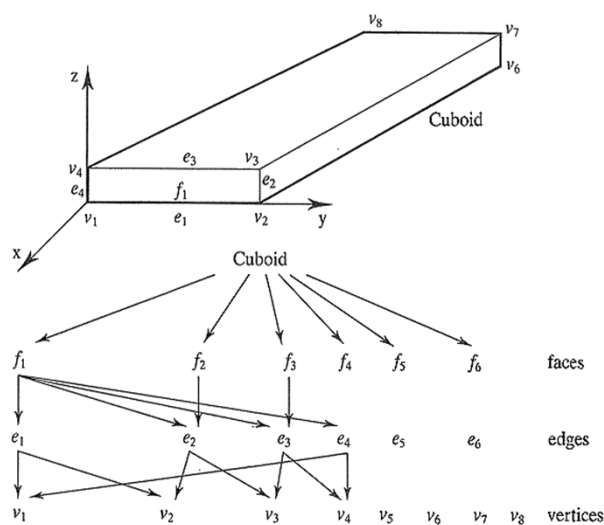
Sistema de modelización mediante sólidos: GDP (*Procesamiento de diseño geométrico*)

```
Tornillo: PROCEDURE(long_punta, radio_punta,ncaras_punta, longitud_cabeza, radio_cabeza,
ncaras_cabeza);
/* definir parámetros */
DECLARE
    long_punta, long_cabeza, radio_punta, radio_cabeza, ncaras_punta, ncaras_cabeza, FLOAT;
/*define la forma de la punta */
CALL SOLID(CYLIND, <<Punta>>, long_punta, radio_punta, ncaras_punta);
/*definir la forma de la cabeza*/
CALL SOLID(CYLIND, <<Cabeza>>, long_cabeza, radio_cabeza, ncaras_cabeza);
/*Establecer la unión ambos para obtener el tornillo */
CALL MERGE(<<Punta>>, <<Cabeza>>, union);
END Tornillo;
```

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática




## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA Ejemplo. Representación frontera




Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

PROGRAMACIÓN 37



## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA

### Especificación de tareas



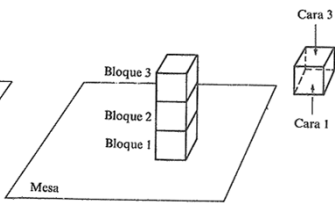
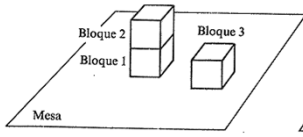
Ej: Descripción de estados del mundo

Estado A:

- (Bloque1\_cara1 AGAINST Mesa)
- (Bloque1\_cara3 AGAINST Bloque2\_cara1)
- (Bloque3\_cara1 AGAINST Mesa)

Estado B:

- (Bloque1\_cara1 AGAINST Mesa)
- (Bloque1\_cara3 AGAINST Bloque2\_cara1)
- (Bloque2\_cara3 AGAINST Bloque3\_cara1)




Ej: Insertar y atornillar un tornillo

PLACE *tornillo* ON *bloque* SUCH THAT *punta\_tornillo* IS ALIGNED WITH *taladro\_bloque*;  
DRIVE IN *tornillo* AT *cabeza\_tornillo* SUCH THAT TORQUE IS EQ 12,0 IN\_LBS  
USING *destornillador*;


Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática

PROGRAMACIÓN 38



## LENGUAJES DE NIVEL DE TAREA

### Síntesis del programa



- Fase más importante y difícil de la planificación de tareas.
- Pasos principales:
  - Planificación de la sujeción:
    - Configuración estable, según la geometría del objeto y que reduzca lo más posible la incertidumbre.
    - Agarre de objetos con seguridad.
  - Planificación del desplazamiento:
    - Salida cuidadosa desde la posición inicial.
    - Desplazamiento libre hasta la configuración deseada sin choques.
    - Aproximación cuidadosa hasta el destino.

Dpto. ACyA - Ingeniería de Sistemas y Automática