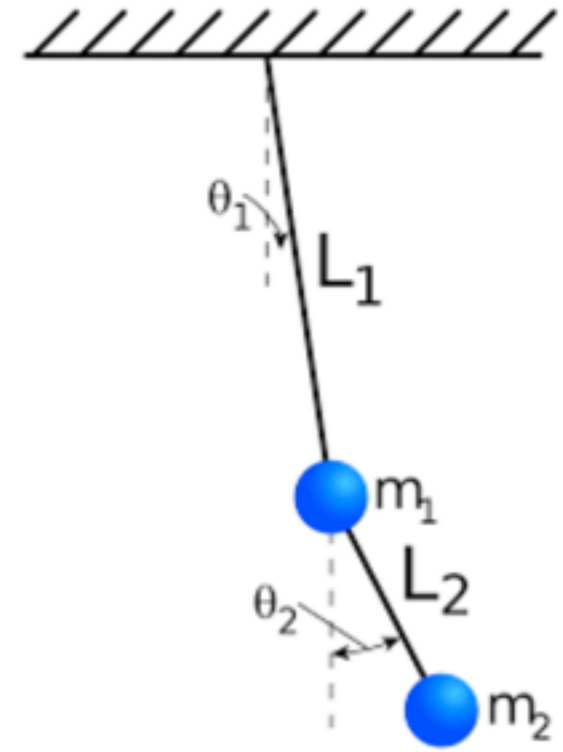
Uma breve incursão pelo Caos

Determinismo vs imprevisibilidade

- Impressão que sistemas completamente determinísticos não podem apresentar comportamento imprevisível

- Exemplo: Pêndulo duplo



$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2 - 2\sin\theta_1 - \sin(\theta_1-\theta_2)\left[\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right]}{1+\sin^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2[\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_1 - \sin\theta_2] + \sin(\theta_1-\theta_2)\left[2\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2\right]}{1+\sin^2(\theta_1-\theta_2)},$$

- https://www.youtube.com/watch?v=4xViPStT5II

- https://www.youtube.com/watch?v=d0Z8wLLPNE0

O Mapa Logistico

- Dinâmica discretizada de uma população
  - A população tende a aumentar na próxima geração
  - Com o excesso de indivíduos, os recursos ficam escassos e a população tende a diminuir na próxima geração
  - Consideraremos que a população máxima suportada pelo ambiente é 1

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n)$$

Tarefa

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n)$$

- Faça gráficos de y_n como função de n para r = 0,5. Use y_0 = 0,5 e n entre 1 e 50.
- Repita o procedimento acima para os seguintes valores de r: 2.5; 3.1; 3.5 e 3.7. Comente sobre cada resultado. Em particular comente sobre a existência de padrões.
- Refaça os gráficos anteriores considerando três condições iniciais consideravelmente diferentes, ou seja, trace, em um mesmo gráfico, as curvas para y_0 = 0.25, y_0 = 0.5 e y_0 = 0.75. Comente
- Refaça o item anterior considerando três condições iniciais ligeiramente diferentes, ou seja, trace as curvas para y_0 = 0.5, y_0 = 0.501 e y_0 = 0.5001. Comente

Tarefa

Aqui, você deve ter percebido que para determinados valores de r o comportamento do sistema após um longo tempo não pode ser predito com segurança. Para explorar melhor esse comportamento, vamos adotar o seguinte procedimento:

- Considere 10000 valores de r igualmente espaçados entre 10^{-5} e 4. Para cada um desses valores de r, vamos iterar a equação logística 1000 vezes, i.e., $n_{max} = 1000$. Em um gráfico de y_n como função de r, vamos plotar para cada valor de r os 100 últimos passos da evolução. Teremos 100 pontos no eixo y do gráfico para cada valor de r, que estará no eixo x. A figura gerada é conhecida como diagrama de bifurcação. Essa figura traz inúmeras informações importantes. Tire um tempo para pensar nela e analisar o que encontrou.
- Para explorar melhor uma das interessantes propriedades desse diagrama, refaça o procedimento anterior para valores de r entre 3.7 e 3.9 e para valores de r entre 3.840 e 3.856. No último caso, para melhorar a visualização, restrinja os valores do eixo y para o intervalo entre 0,44 e 0,56. Comente seus resultados.

Expoente de Liapunov

- Medida da influência da condição inicial no comportamento em longos tempos
- Assuma que a diferença entre duas condições iniciais seja Δy_0

$$\Delta y_n \sim \Delta y_0 e^{\lambda n}$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(y_k)|$$

- Para lambda negativo, a diferença no comportamento em longos tempos é desprezível
- Para lambda positivo, as trajetórias se separam exponencialmente, caracterizando o comportamento caótico