

# Interactions élastiques écrantées dans un modèle élasto-plastique à l'échelle mésoscopique

CHALAMET Victor

LIPhy Du 31 Mai au 13 Juillet 2023

Dans ce travail nous étudions l'effet d'un écrantage des interactions élastiques dans la réponse d'un fluide à seuil à un forçage mécanique (cisaillement). Mieux comprendre le rôle de la portée des interactions élastiques permettrait par exemple de mieux comprendre le déclenchement d'avalanches d'événements plastiques à grande distance. L'ensemble des résultats présentés ont été obtenus par des simulations numériques d'un modèle minimal sur réseau dit "élasto-plastique" et effectuées sur carte graphique (GPU). Après avoir caractérisé la réponse à un événement plastique localisé dans le modèle avec écrantage des interactions, nous avons pu mettre en évidence l'effet de l'écrantage sur le comportement rhéologique du matériau, celui-ci entraînant un changement d'exposant de la courbe rhéologique. Nous avons ensuite pu établir un lien entre la longueur caractéristique d'écrantage des interactions et la longueur de corrélation de l'activité plastique sous écoulement.

## I. INTRODUCTION

Les interactions élastiques à longue portée sont connues pour jouer un rôle important dans la déformation de solides amorphes tel que les mousses, les émulsions ou encore certains polymères et sont responsables, par exemple, d'une dynamique similaire à celles d'avalanches lors de la déformation de ces matériaux [1, 2]. Lorsqu'ils sont déformés (e.g., cisailés) le comportement de ces matériaux dits "à seuil" passe de celui d'un solide (élastique) à faible contrainte à celui d'un fluide (se déformant de manière plastique) lorsque la contrainte appliquée dépasse la contrainte seuil [1]. L'écoulement plastique à faible vitesse présente en outre des propriétés remarquables, comme par exemple une dynamique intermittente et d'importantes corrélations spatiales dans le matériau, attribuées aux interactions élastiques à longue portée [1, 2]. Des études récentes suggèrent que la présence d'impuretés dans ces matériaux (sous forme de particules figées présentant une plus grande résistance à la déformation) peut conduire à un écrantage des interactions élastiques et à une modification de la réponse rhéologique [3, 4]. D'un point de vue plus fondamental, le rôle général de la portée des interactions dans l'écoulement des fluides à seuil reste cependant mal compris. Ce travail de stage porte donc sur l'influence de la portée des interactions dans un modèle minimal dit "élasto-plastique" pour l'écoulement des fluides à seuil.

Le scénario élasto-plastique constitue la base de nombreux modèles développés pour étudier différents aspects de l'écoulement des fluides à seuil [2]. Dans ce scénario, on considère un matériau auquel on applique, par exemple, un taux de cisaillement constant. La contrainte globale du système augmente sous l'effet du forçage (suivant un comportement de solide élastique linéaire), puis, lorsque la contrainte dépasse la valeur de contrainte seuil, chaque région du matériau peut devenir potentiellement le siège d'un événement plastique, c'est à dire que, localement, les particules qui constituent le matériau vont se réarranger de manière irréversible (voir Fig. 1). De tels réarrangements plastiques s'accompagnent d'une relaxation partielle de la contrainte cumulée durant la phase élastique ainsi que d'une redistribution de con-

trainte aux autres régions du système. Cette redistribution de contrainte peut engendrer à son tour d'autres réarrangements, étant donc à l'origine d'une dynamique d'avalanche d'événements plastiques.

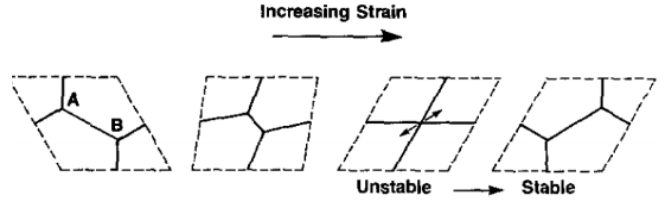


FIG. 1: Exemple de réarrangement plastique dans une mousse 2d (impliquant 4 bulles). D'après Princen [5]

Dans ce travail, nous considérons un modèle sur réseau où la dynamique de chaque site suit un scénario élasto-plastique et les interactions entre sites (décrivant la redistribution de contrainte lors d'un événement plastique) sont décrites par un propagateur dont la portée est un paramètre décrivant le degré d'écrantage des interactions. La formulation du modèle est présentée dans la section II. Nous caractérisons dans un premier temps la réponse à un événement plastique unique en présence d'écrantage (section III) avant d'étudier la réponse à un taux de cisaillement constant (section IV).

## II. MODÈLE ÉLASTO-PLASTIQUE

Dans le modèle élasto-plastique (EPM), le matériau est discrétisé en cellules mésoscopiques d'un réseau 2d (d'indice  $i$ ) et la taille caractéristique d'une telle cellule correspond à la taille typique d'un réarrangement plastique de particules dans le matériau (4-5 bulles pour une mousse 2d par exemple). Les champs (scalaires) de contrainte de cisaillement  $\sigma$  et d'activité plastique  $n$  sont discrétisés sur le réseau et sont contrôlés par la dynamique suivante :

$$\partial_t \sigma_i(t) = \mu \dot{\gamma} + 2\mu \sum_{j=1} G_{ij} \dot{\epsilon}_j^{\text{pl}}(t) \quad (1)$$

$$\text{où } \dot{\epsilon}_j^{\text{pl}}(t) = \frac{n_i(t) \sigma_i(t)}{\mu \tau}$$

avec  $\mu$  le module élastique,  $\tau$  le temps de relaxation local,  $\dot{\gamma}$  le taux de cisaillement global appliqué et  $\dot{\epsilon}_i^{\text{pl}}$  le taux de déformation plastique du site à l'instant  $t$ . Le propagateur élastique  $G_{ij}$  décrit comment la déformation plastique locale  $\dot{\epsilon}_j^{\text{pl}}$  (au site  $j$ ) affecte la contrainte au site  $i$  (via une redistribution élastique de la contrainte). L'activité plastique de chaque site  $n_i(t)$  suit la dynamique stochastique suivante :

$$P_{01}(n_i(t+dt) = 1 | n_i(t) = 0; \sigma_i > \sigma_y) = \frac{dt}{\tau_{\text{pl}}} \quad (2)$$

$$P_{10}(n_i(t+dt) = 0 | n_i(t) = 1) = \frac{dt}{\tau_{\text{el}}} \quad (3)$$

où  $P_{01}(n_i(t+dt) = 1 | n_i(t) = 0; \sigma_i > \sigma_y)$  décrit la probabilité de transition de l'état  $n = 0$  à l'état  $n = 1$  durant un intervalle de temps  $dt$ , sachant que la contrainte locale dépasse la contrainte seuil.  $P_{10}(n_i(t+dt) = 0 | n_i(t) = 1)$  décrit la probabilité de transition inverse.

Dans la plupart des modèles élasto-plastiques, le propagateur  $G_{ij}$  décrit des interactions élastiques à longue portée [2], tel que dérivé par Eshelby [6]. Ici nous considérons au contraire le cas d'interactions élastiques dont la portée peut varier. Pour dériver ce propagateur écranté, nous considérons un milieu continu incompressible élastique en présence d'une force de frottement additionnelle (proportionnelle à  $\mu \kappa^2$ ), de façon analogue au cas de l'hydrodynamique en milieu poreux décrivant le frottement dans les pores de façon effective [7].

$$-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} - \mu \kappa^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

avec  $p$  la pression,  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement,  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  une force appliquée et  $\kappa$  un paramètre contrôlant le frottement. En suivant l'approche utilisée par Picard [8], il est possible d'obtenir la forme du propagateur décrivant la réponse à un événement plastique localisé (dans l'espace de Fourier, avec les modes  $q_x, q_y$ , voir calcul en Annexe):

$$\hat{G}(q_x, q_y) = \left( \frac{1}{(q^2 + \kappa^2)} \left( q^2 - \frac{4q_x^2 q_y^2}{q^2} \right) - 1 \right) \quad (6)$$

Le code de simulation du modèle EPM utilisé ici a été adapté d'un code existant [9]. Plusieurs types de dynamique sont implémentées: on peut soit étudier la réponse à un unique événement plastique activé

manuellement (section III) soit simuler la dynamique élasto-plastique complète sous cisaillement (section IV). Les simulations sont réalisées en 2d avec des conditions aux limites périodiques et des tailles de systèmes allant de  $L = 128$  à  $L = 2048$ . Les valeurs de contrainte sont données en unité de  $\mu$  et l'unité de temps est fixée par  $\tau$ . On fixe  $\sigma_y = 1$  et  $\tau_{\text{el}} = \tau_{\text{pl}} = 1$ . On pose  $\lambda = \mu \kappa^2$ , le paramètre de contrôle fixant l'amplitude d'écrantage et dont l'influence est étudiée dans ce travail.

### III. RÉPONSE À UN ÉVÈNEMENT LOCALISÉ

Le but de cette partie est d'étudier l'évolution spatiale de la contrainte  $\sigma_{xy}$  en réponse à un événement plastique unique dans le réseau pour plusieurs valeurs d'écrantage  $\lambda$  (site activé manuellement en fixant  $n = 1$  localement et  $n = 0$  sur tous les autres sites). La première étape consiste à déterminer la taille du système propice à notre étude, qui résulte d'un compromis entre la réduction au maximum des effets de taille finie et la durée de la simulation. La réponse obtenue pour plusieurs tailles de système dans le cas  $\lambda = 0$  (cas où la portée des interactions est maximale) est visible sur la Fig. 6 (en annexe). Les effets de taille finie ne sont plus visible à partir de  $L = 1024$ ; ce sera donc la taille de système choisie dans cette partie.

La contrainte redistribuée dans le système à la suite d'un événement plastique au centre du système est représentée sur la Fig.2.a pour une valeur d'écrantage  $\lambda = 0.1$ . On retrouve la forme quadripolaire du prop-

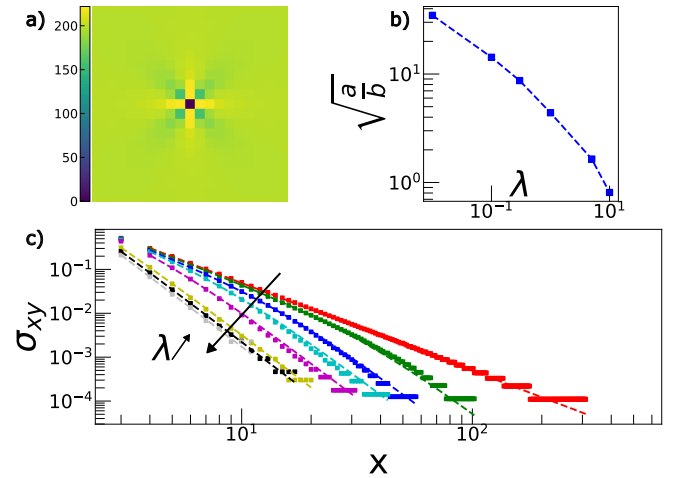


FIG. 2: a) Carte de contrainte redistribuée dans le système lors d'un événement plastique au centre pour  $\lambda = 0$ . b) Longueur caractéristique d'écrantage  $l_{\text{screening}} = \sqrt{a/b}$  en fonction de  $\lambda$ . c) Contrainte redistribuée le long de l'axe  $y = 0$  (coupe horizontale) pour différentes valeurs de  $\lambda$  (tirets) et ajustement de la forme  $\frac{1}{ax^2 + bx^4}$  (pointillés) (paramètres d'ajustement donnés dans le tableau I).

agateur standard de Eshelby [6] : la contrainte sera donc majoritairement redistribuée verticalement et horizontalement. La contrainte redistribuée le long de l'axe  $y = 0$  en fonction de la distance  $x$  à l'évènement plastique est représentée sur la Fig.7 (en annexe) pour différentes valeurs de  $\lambda$  allant de 0 (sans écrantage) à 50. Pour  $\lambda = 0$  on s'attend à une dépendance de  $\sigma_{xy}$  en  $x^{-\alpha}$  avec  $\alpha = 2$  [6] et cet exposant doit tendre vers 4 pour les grandes valeurs de  $\lambda$  (suggéré par le calcul de la transformée de Fourier inverse du propagateur écranté).

Un ajustement de la forme  $\frac{1}{ax^2+bx^4}$  (voir Fig.2.c) permet donc d'ajuster deux lois de puissance différentes dans différents régimes de distance (courte portée ou longue portée) pour les valeurs intermédiaires de  $\lambda$ . Cette forme d'ajustement est donc équivalente à  $\frac{1}{ax^2}$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et à  $\frac{1}{bx^4}$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Et permet en outre de déduire une longueur caractéristique pour l'écrantage (longueur à partir de laquelle la réponse dévie de la prédiction longue portée en  $\frac{1}{ax^2}$ ) :  $l = \sqrt{\frac{a}{b}}$ . La longueur d'écrantage  $l$  en fonction de  $\lambda$  est représentée sur la Fig.2.b. On observe une diminution de la longueur caractéristique de la réponse lorsque l'écrantage  $\lambda$  augmente, cohérent avec l'idée que plus la dissipation (via la force de frottement additionnelle dans le modèle) est importante, plus la contrainte se propagera sur des petites distances.

#### IV. RÉPONSE À TAUX DE CISAILLEMENT CONSTANT

Dans cette partie nous réalisons des simulations en imposant un taux de cisaillement constant  $\dot{\gamma}$  au système, et la dynamique de la contrainte et de l'activité est telle que décrite dans la section II. Lorsqu'un taux de cisaillement constant est appliqué au système initialement au repos (contrainte initialement nulle), celui-ci commence par se charger élastiquement et l'écoulement plastique commence lorsque les contraintes locales dépassent la contrainte seuil. Au bout de quelques unités de déformation, un écoulement plastique stationnaire est atteint, et c'est sur ce régime que nous nous focalisons.

##### A. Courbe d'écoulement

Obtenir la courbe d'écoulement (contrainte moyenne dans le système dans l'état stationnaire en fonction du taux de cisaillement appliqué) requiert des simulations plus longues (environ une semaine pour chaque valeur d'écrantage  $\lambda$ ), particulièrement à petit taux de cisaillement (l'état stationnaire étant atteint au bout d'une déformation  $\gamma = \dot{\gamma} t_{\text{simul}} \approx 1$ ,  $t_{\text{simul}}$  augmente lorsque  $\dot{\gamma}$  diminue). Les courbes d'écoulement obtenues pour les différentes valeurs de  $\lambda$  sont représentées sur la Fig.3.a. La valeur de contrainte moyenne dans le système mesurée dans la limite des petits taux de cisaillement ( $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ), aussi appelée contrainte seuil dynamique  $\sigma_y$  du matériau, peut être déterminée à partir

des courbes d'écoulement. La courbe d'écoulement des fluides à seuil est généralement bien décrite par une loi de type Herschel-Bulkley,  $\sigma_y(\dot{\gamma}) = \sigma_y + A \cdot \dot{\gamma}^n$ , avec  $\sigma_y$ ,  $A$  et  $n$  des paramètres d'ajustement [1]. La méthode la plus précise pour déterminer ces paramètres consiste à soustraire la valeur de l'ordonnée à l'origine  $\sigma_y$  (qui est dans un premier temps déterminée à l'oeil) puis à ajuster la courbe avec une loi de puissance de la forme  $A \cdot \dot{\gamma}^n$ , pour ensuite modifier la valeur de  $\sigma_y$  de façon itérative de façon à avoir le meilleur ajustement possible avec une loi de puissance (voir Fig.3.b) et tableau III). Les données

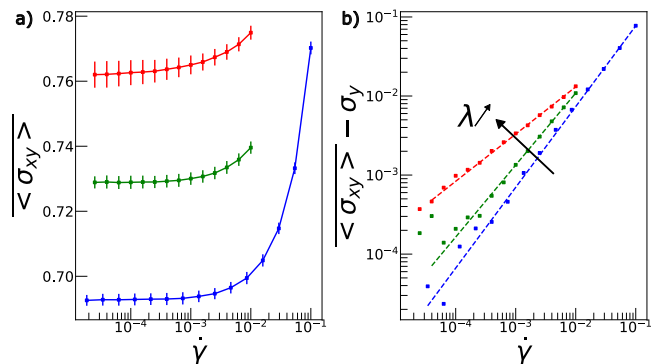


FIG. 3: a) Contrainte moyenne dans l'état stationnaire en fonction du taux de cisaillement appliqué pour différentes valeurs de  $\lambda$ . b) Contrainte moyenne à laquelle on soustrait la contrainte seuil  $\sigma_y(\lambda)$  (pour chaque valeur de  $\lambda$ ) (points) et ajustement de la forme:  $A \cdot \dot{\gamma}^n$  (pointillés) (paramètres d'ajustement donnés dans le tableau III).

de la Fig.3 et du tableau III montrent un effet net de l'écrantage sur la rhéologie : a) la contrainte seuil  $\sigma_y$  décroît avec  $\lambda$  et b) la valeur de l'exposant  $n$  dépasse 1 lorsque  $\lambda = 10$  ce qui implique un changement de courbure dans la courbe d'écoulement.

##### B. Étude des corrélations spatiales

Le but de cette partie est d'étudier l'organisation spatiale de l'activité plastique dans le système, ou en d'autres termes, comment l'activation d'évènements plastiques est corrélée dans l'espace. On appelle "activité cumulée" le nombre de fois où un site donné  $i$  est devenu plastique au cours de la simulation. Les cartes d'activité cumulée dans le système pour plusieurs intervalles de déformation et pour plusieurs valeurs de  $\lambda$  sont représentées sur la Fig.4. On constate que des "bandes" d'activité apparaissent pour les petites valeurs de  $\lambda$  (activité corrélée le long de lignes) et que ces bandes deviennent de moins en moins visibles à mesure que  $\lambda$  augmente : la corrélation semble diminuer avec l'écrantage.

Une approche plus quantitative consiste à calculer l'auto-corrélation spatiale de ces cartes d'activité en prenant leur transformée de Fourier (TF). La carte

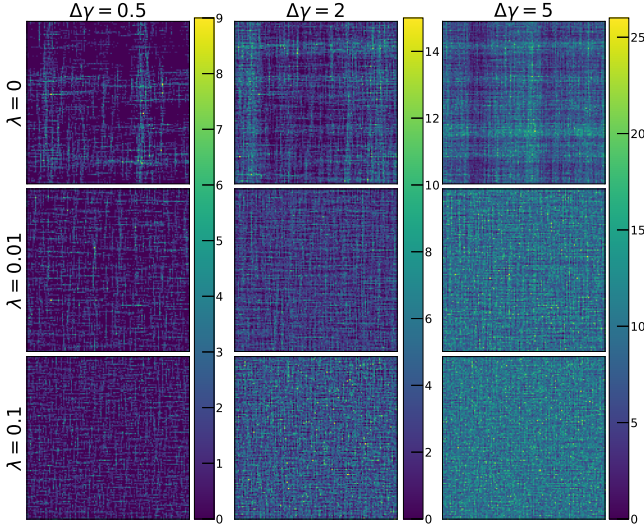


FIG. 4: Cartes d'activité plastique cumulée entre 2 instants pour  $\lambda = 0, 0.01, 0.1$  (différentes lignes) et pour différents intervalles de déformation  $\Delta\gamma = 0.5, 2, 5$  (différentes colonnes).

d'activité est normalisée en soustrayant à chaque site l'activité moyenne dans le système :  $n_{\text{norm}}(x, y) = n(x, y) - \langle n(x, y) \rangle$ , puis la TF en 2d est calculée :  $\tilde{n}(q_x, q_y) = \mathfrak{F}[n_{\text{norm}}(x, y)]$  ainsi que le carré de son module,  $I = |\tilde{n}(q_x, q_y)|^2$ , afin d'obtenir l'auto-corrélation :

$$C(x, y) = \frac{\Re(\mathfrak{F}^{-1}[I])}{\text{Var}(n_{\text{norm}}) * \text{taille du système}^2} \quad (7)$$

On prend ensuite la moyenne de la première ligne et de la première colonne  $\frac{C(x, 0) + C(0, y)}{2}$  et on trace cette quantité en fonction de la position en l'ajustant avec une fonction exponentielle de la forme  $a \cdot e^{-x/l}$  afin d'en extraire une longueur de corrélation (voir Fig.5.a) pour différentes valeurs de  $\lambda$  et pour  $\Delta\gamma = 0.5$ ). La longueur de corrélation décroît lorsque  $\lambda$  augmente (Fig.5.b). En d'autres termes, plus l'écrantage est important (par exemple plus il y a d'impuretés dans le matériau), moins l'activité plastique est corrélée sur de longues distances dans le système. Cette tendance est en accord avec l'évolution de la longueur caractéristique d'écrantage obtenue sur la Fig.2 d'après la réponse de contrainte à un évènement localisé. La longueur de corrélation en fonction de la longueur d'écrantage est représentée sur la Fig.5.c: ces deux quantités sont bien corrélées entre elles mais elles ne sont pas reliées de façon linéaire.

## CONCLUSION

Cette première étude de modèle élasto-plastique avec interactions élastiques écrantées a permis (i) de caractériser l'écrantage induit par un terme de frottement additionnel, avec une longueur caractéristique de la

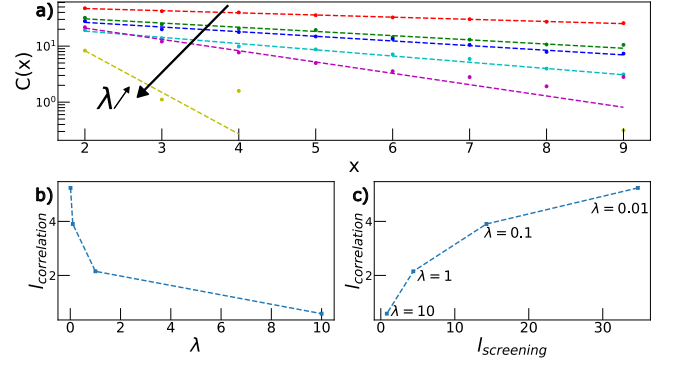


FIG. 5: a) Corrélation spatiale de la plasticité en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  (symboles) et ajustement du type  $ae^{-x/l_{\text{correlation}}}$  (pointillés) (paramètres dans le Tableau II). b) Longueur caractéristique  $l_{\text{correlation}}$  en fonction de  $\lambda$ . c)  $l_{\text{correlation}}$  en fonction de  $l_{\text{screening}}$ .

réponse  $l_{\text{screening}}$  qui décroît avec le paramètre de contrôle  $\lambda$  et (ii) de caractériser l'effet de cet écrantage sur la rhéologie et les corrélations spatiales dans le système.

Un des effets remarquables de l'écrantage sur la rhéologie est un changement de courbure de la courbe d'écoulement  $\sigma = f(\dot{\gamma})$  en fonction de  $\lambda$  (l'exposant de Herschel-Bulkley passant de  $n < 1$  en absence d'écrantage à  $n > 1$  pour  $\lambda > 10$ ). Une étude plus approfondie de cet effet permettrait par exemple de tester certaines hypothèses concernant un possible changement de classe d'universalité de la transition vers l'écoulement suivant la nature des interactions, tel qu'étudié dans le cadre des transitions de phase absorbantes [10].

L'étude des corrélations de plasticité a permis de mettre en évidence une longueur caractéristique  $l_{\text{correlation}}$  qui décroît avec  $\lambda$ , comme  $l_{\text{screening}}$ . L'impact de l'écrantage sur les corrélations de plasticité suggère par ailleurs que la dynamique d'avalanche devrait également dépendre de  $\lambda$ . Des résultats préliminaires obtenus à la fin de ce stage montrent en effet que la statistique des chutes de contraintes  $\Delta\sigma$  (découlant de la relaxation lors de cascades d'évènements plastiques) dépend de l'écrantage, avec des distributions de plus en plus piquées vers les petites valeurs  $\Delta\sigma$  lorsque  $\lambda$  augmente.

Dans ce travail, nous avons proposé un modèle minimal pour l'écrantage des interactions élastiques dans un modèle élasto-plastique en introduisant un terme de frottement additionnel dans l'équilibre des forces mécaniques. Une des conséquences de ce terme (que nous n'avons pas discutée ici) est par exemple une dépendance de l'amplitude de relaxation locale de contrainte avec  $\lambda$  (lorsque les données ne sont pas normalisées). Cet effet n'est pas forcément réaliste dans le cas, par exemple, de l'écrantage des interactions via des impuretés (particules figées) [3], et une étude plus approfondie de l'effet de l'écrantage dans ces systèmes de particules serait nécessaire afin de raffiner notre modèle.

## REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier toute l'équipe PSM du LIPhy pour m'avoir chaleureusement accueilli lors de ces semaines de stage. En particulier, je souhaite remercier Kirsten Martens ainsi que Magali Le Goff qui m'ont accompagné et aidé tout au long de ce stage lorsque j'en avais besoin. Ce fut une merveilleuse expérience merci encore.

## ANNEXE

### Calcul du propagateur écranté

En prenant la transformée de Fourier de l'équation 4, en utilisant la condition d'incompressibilité (équation 5) et en notant  $q^2 = q_x^2 + q_y^2$ , on trouve le tenseur d'Oseen, qui relie le champ de déplacement dans le matériau en réponse à une force  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ .

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mu(q^2 + \kappa^2)} \left( 1 - \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}}{q^2} \right) \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \quad (8)$$

En suivant l'approche utilisée par Picard [8], il est possible d'exprimer la force  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$  comme résultant d'un événement plastique localisé caractérisé par une déformation  $\epsilon^{\text{pl}}$ :  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = 2\mu i \mathbf{q} \epsilon^{\text{pl}}$ . Comme notre étude est basée sur un modèle scalaire en deux dimensions, nous considérons seulement la composante  $\sigma_{xy}$  de la contrainte (et la composante  $\epsilon_{xy}^{\text{pl}}$  de la déformation). La contrainte de cisaillement, qui s'exprime comme  $\hat{\sigma}_{xy} = -i\mu(q_x \hat{u}_y + q_y \hat{u}_x) - 2\mu \epsilon_{xy}^{\text{pl}}$  [8], s'exprime alors, en utilisant l'équation 8 :

$$\hat{\sigma}_{xy} = 2\mu \left( \frac{1}{(q^2 + \kappa^2)} \left( q^2 - \frac{4q_x^2 q_y^2}{q^2} \right) - 1 \right) \epsilon_{xy}^{\text{pl}} \quad (9)$$

Notons qu'en posant  $\kappa = 0$  on retrouve l'expression dérivée par Picard pour la contrainte en l'absence d'écrantage [8].

On note  $\delta\sigma_i$  la variation de contrainte sur le site d'indice  $i$  due à la déformation plastique dans le matériau :

$$\delta\sigma_i = 2\mu \sum_j G_{ij} \epsilon_j^{\text{pl}} \quad (10)$$

Ce produit de convolution s'exprime facilement dans l'espace de Fourier et on trouve une expression de la transformée de Fourier du propagateur :

$$\hat{G}(q_x, q_y) = \left( \frac{1}{(q^2 + \kappa^2)} \left( q^2 - \frac{4q_x^2 q_y^2}{q^2} \right) - 1 \right) \quad (11)$$

### Implémentation numérique

Le code de simulation du modèle EPM, adapté du code développé dans [9]

(<https://bitbucket.org/ezeferro/epm>), utilise les langages C++ et CUDA (langage de programmation sur carte graphique).

### Effets de taille finie

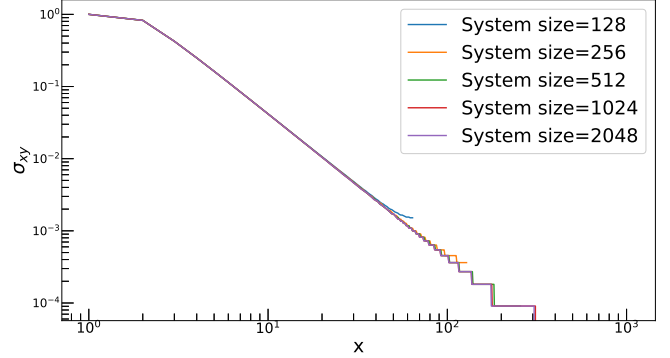


FIG. 6: Valeur de la contrainte en fonction de la position. Coupe horizontale du système pour  $\lambda = 0$  et pour différentes tailles de système.

### Réponse à un événement plastique

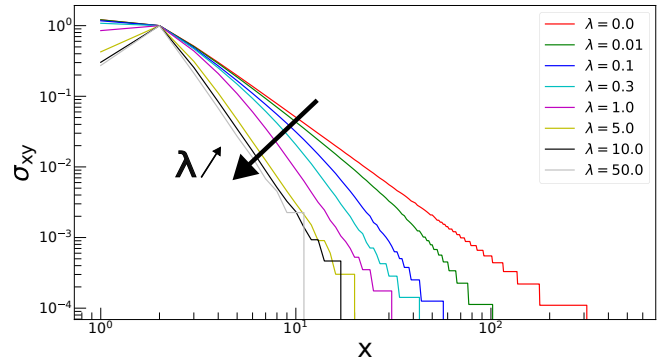


FIG. 7: Valeur de la contrainte en fonction de la position. Coupe horizontale du système pour différentes valeurs de  $\lambda$ . Données normalisées.

### Paramètres d'ajustement

TABLE I: Paramètres d'ajustement de la figure 2.c.

$\lambda$	a	b	$r^2$
0	0.204	$5.59e^{-14}$	0.03
0.01	0.211	$1.75e^{-4}$	0.42
0.1	0.215	$1.06e^{-3}$	0.68
0.3	0.204	$2.69e^{-3}$	0.80
1	0.162	$8.41e^{-3}$	0.91
5	$8.23e^{-2}$	$3.04e^{-2}$	0.96
10	$2.95e^{-2}$	$4.50e^{-2}$	0.97
50	$4.84e^{-3}$	$5.76e^{-2}$	0.97

TABLE II: Paramètres d'ajustement de la figure 5.a.

$\lambda$	a	$l_{\text{corrélacion}}$	$r^2$
0	56.0	11.3	0.994
0.001	43.4	5.79	0.977
0.01	38.9	5.24	0.977
0.1	31.0	3.90	0.983
1	53.1	2.15	0.977
10	255	0.584	0.919

TABLE III: Paramètres d'ajustement de la figure 3.b.

$\lambda$	$\sigma_{xy}$	n	$r^2$
0	0.762	0.60	0.999
1	0.729	0.91	1.0
10	0.693	1.02	1.0

- 
- [1] Daniel Bonn, Morton M. Denn, Ludovic Berthier, Thibaut Divoux, and Sébastien Manneville, Yield stress materials in soft condensed matter, *Reviews of Modern Physics* **89** (2017).
  - [2] A. N. et al., Deformation and flow of amorphous solids: Insights from elastoplastic models, *Reviews of Modern Physics* **90.4** (2018).
  - [3] Bhanu Prasad Bhowmik, Pinaki Chaudhuri, and Smarajit Karmakar, Effect of pinning on the yielding transition of amorphous solids, *Physical Review Letters* **123** (2019).
  - [4] Umang A. Dattani, Smarajit Karmakar and Pinaki Chaudhuri, Athermal quasistatic cavitation in amorphous solids: effect of random pinning, <https://arxiv.org/pdf/2306.05348.pdf> (2023).
  - [5] H. Princen and A. Kiss, Rheology of foams and highly concentrated emulsions: Iii. static shear modulus, *Journal of Colloid and Interface Science* **112**, 427–437 (1986).
  - [6] J. D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the Royal Society of London* **241**, 376 (1957).
  - [7] D. Long and A. Ajdari, A note on the screening of hydrodynamic interactions, in electrophoresis, and in porous media, *The European Physical Journal E* **4**, 29 (2001).
  - [8] G. Picard, Elastic consequences of a single plastic event: A step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluids, *The European Physical Journal E* , 371–381 (2004).
  - [9] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, Driving rate dependence of avalanche statistics and shapes at the yielding transition, *Physical review letters* **116**, 065501 (2016).
  - [10] R. Mari, E. Bertin, and C. Nardini, Absorbing phase transitions in systems with mediated interactions, *Physical Review E* **105**, L032602 (2022).