



KU Leuven
Departement Werktuigkunde

BEWEGING: ANALYSE VAN EEN STANGENMECHANISME

MICHIEL JANSSEN
AMBER VAN CAMP

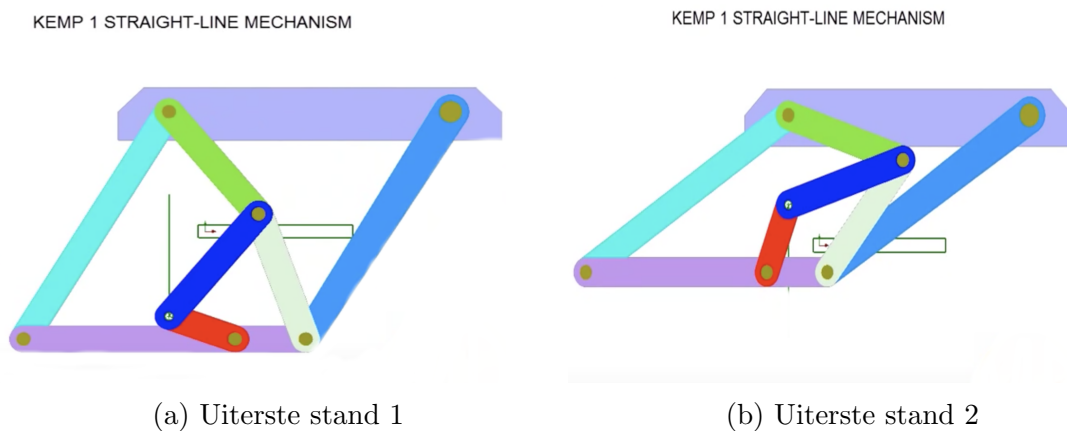
Academiejaar 2017-2018

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Beweegbaarheidsanalyse	5
3	Kinematische analyse	5
3.1	Kringloopvergelijkingen	6
3.2	Positieanalyse	6
3.3	Snelheidsanalyse	9
3.4	Versnellingsanalyse	11
3.5	Controle van kinematische analyse	13
3.5.1	Positiecontrole	13
3.5.2	Snelheids-en versnellingscontrole	14
4	Dynamische analyse	21
4.1	Inverse dynamische analyse	21
4.2	Controle	26
5	Besluit	28

1 Inleiding

In teken van het vak ‘Beweging en Trillingen’ behandelt dit verslag de analyse van een stangenmechanisme, meer bepaald het ”Kemp 1 Straight-Line Mechanism”. Eerst volgt een illustratie van het mechanisme aan de hand van tekeningen. Daarop volgend de definities van de nodige hoeken, staven en lichamen. Dan worden de beweegbaarheid en dode standen van het systeem besproken. Hierna volgt een kinematische analyse en vervolgens een dynamische analyse. De controle van beide analyses sluit het verslag af. Doorheen deze opdracht wordt gebruik gemaakt van het rekenprogramma ‘Matlab’ om berekeningen uit te voeren en figuren te plotten.

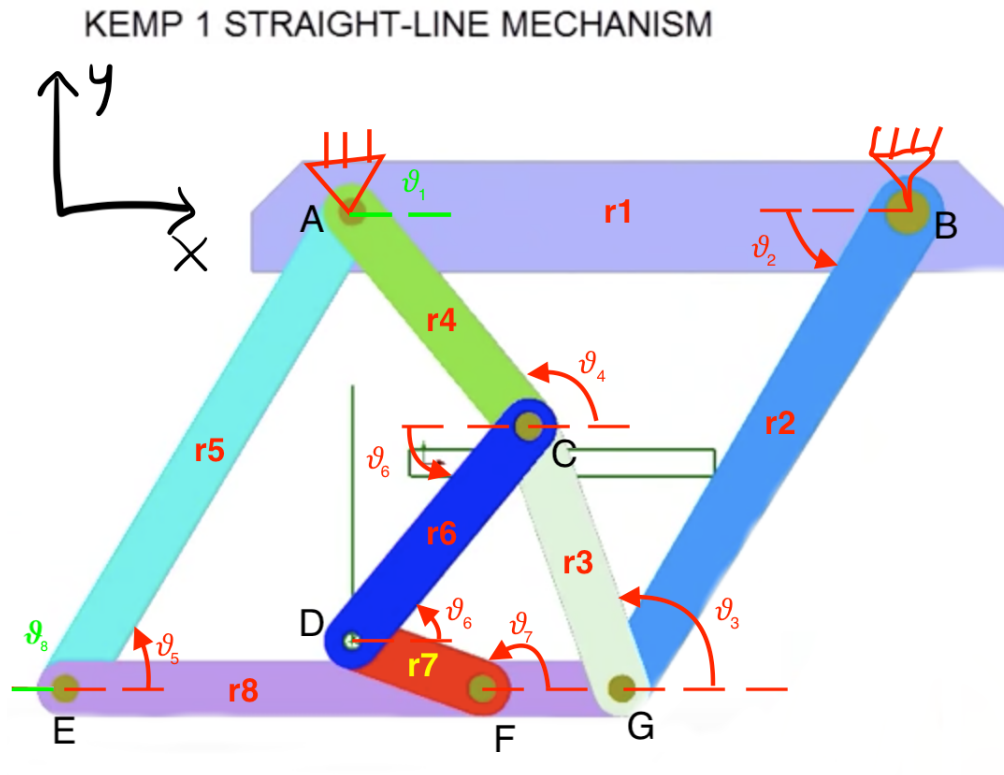


Figuur 1: Het 8-stangenmechanisme.

Het mechanisme is van een Youtube video gehaald en kan gebruikt worden voor het trekken van een rechte lijn. De rechte lijn wordt getrokken door het punt D, zie de puntenbenaming hieronder.

Het systeem is een 8-stangenmechanisme waarvan de grond één stang is, de andere 7 zijn starre staven. De grond bestaat uit 2 vaste scharnieren. Figuur 1 geeft de originele tekening van het mechanisme weer waarop deze analyse gebaseerd is, afgebeeld in zijn uiterste twee standen. Figuur 2 is hetzelfde mechanisme waarop nu ook de nodige stangen en hoeken zijn gedefinieerd. De 8 staven zijn genummerd, van r1 tot r8, en de 7 verbindingen of scharnieren staan aangeduid van A tot G. De hoek die elke staaf maakt ten opzichte van de horizontale staat ook aangeduid op de figuur, van θ_1 tot θ_8 . De hoeken θ_1 en θ_8 zouden gebruikt kunnen worden om het hele systeem over een bepaalde hoek te draaien. In deze configuratie zijn deze hoeken 0° , zoals aangeduid op de tekening.

De gebruikte waarden voor staafflengtes en initiële hoekgrootte worden weergegeven in volgende twee tabellen. Tabel 1 geeft de lengtes van de stangen weer. Tabel 2 bevat de initiële waarden van de hoeken, deze bepalen de initiële stand van het systeem. Figuur 3 geeft een vereenvoudigde versie van het systeem weer, getekend in matlab. In figuur 4 is het mechanisme getekend volgens de kinematische tekenconventies.



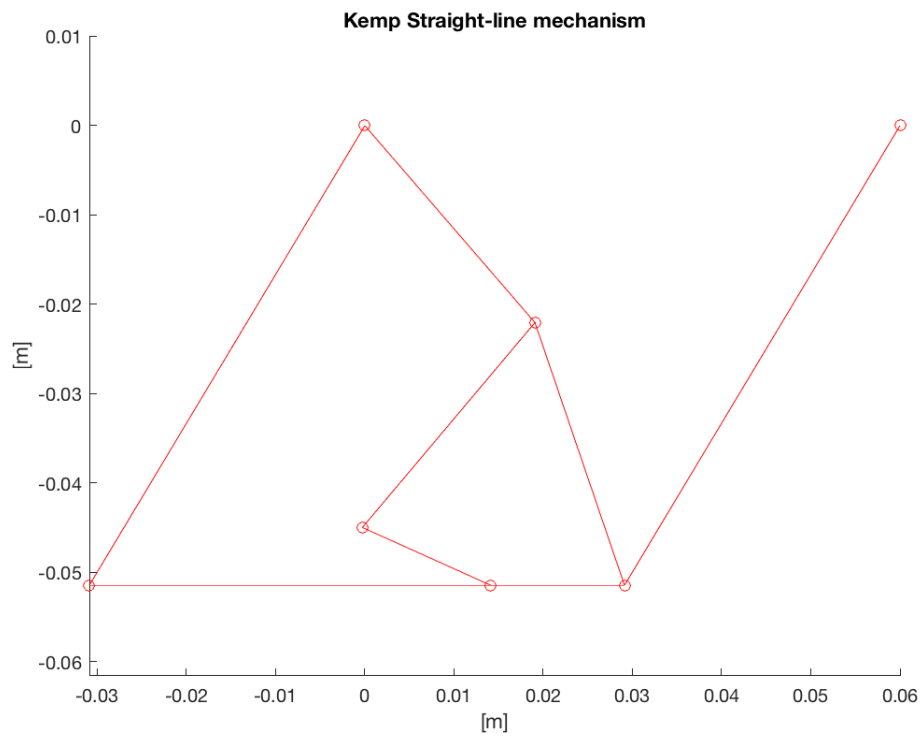
Figuur 2: Hoeken en stangen van het mechanisme.

Stang: Lengte (m)			
r1	0.06	r5	0.06
r2	0.06	r6	0.03
r3	0.03106	r7	0.015
r4	0.02915	r8	0.06

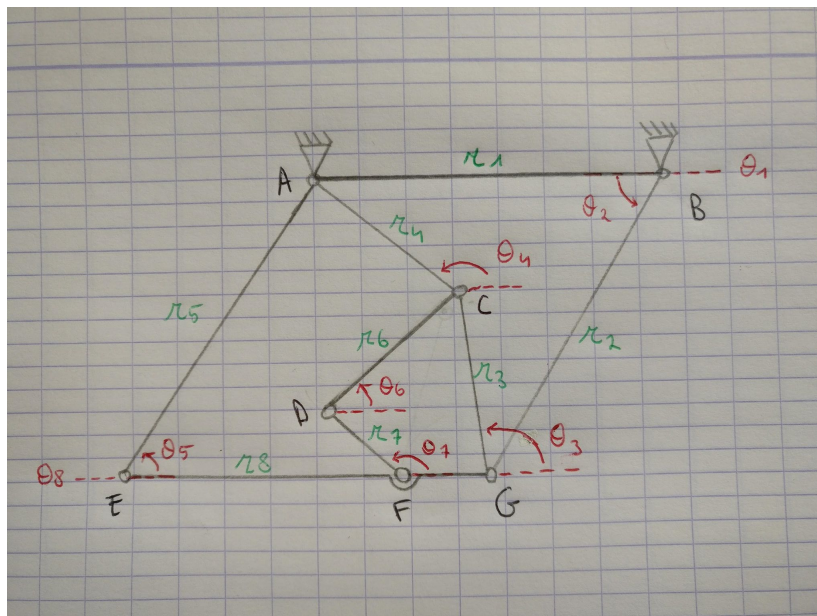
Tabel 1: Lengtes van de stangen.

Hoeken: Hoek (rad)			
θ_1	0.0	θ_5	1.03
θ_2	Driving Angle	θ_6	0.87
θ_3	1.9	θ_7	2.7052
θ_4	2.284	θ_8	0.0

Tabel 2: Initiële groottes van de θ -hoeken.



Figuur 3: MATLAB visualisatie met knooppunten.



Figuur 4: Kinematisch schema van het mechanisme.

2 Beweegbaarheidsanalyse

De beweegbaarheidsanalyse bestaat erin het aantal vrijheidsgraden van het mechanisme te bepalen. Dit gebeurt a.d.h.v. volgende formule $M = 3(n - 1) - 2f_1 - f_2$ waarbij n het aantal stangen is, f_1 het aantal verbindingen dat 2 graden van vrijheid wegneemt en f_2 het aantal verbindingen dat 1 graad van vrijheid wegneemt. Het resultaat M is dan de mobiliteit, gelijk aan het aantal vrijheidsgraden. Als we de formule toepassen op ons mechanisme geeft dit $M = 3(8 - 1) - 2 \cdot 10 - 0 = 1$. Dit wil dus zeggen dat er maar 1 vrijheidsgraad is in dit mechanisme, de hoek θ_2 , wat tevens de aandrijvende stang van ons systeem zal zijn. Vervolgens moet er nog nagegaan worden of er dode standen bestaan in dit mechanisme. Een dode stand doet zich voor wanneer de kracht die de aandrijvende stang uitvoert gealigneerd staat met de stang op een output. Dit zorgt voor een positie van het mechanisme waarbij het mechanisme vastloopt en in theorie niet meer verder zou kunnen bewegen. Enkel door inertie van het mechanisme zelf, of een vliegwiël, zou het zichzelf uit deze dode stand kunnen trekken. In ons mechanisme komt er geen dode stand voor.

3 Kinematische analyse

Een kinematische analyse van het stangenmechanisme verloopt als volgt: men legt een bepaalde beweging op aan het mechanisme doormiddel van een gekozen toerental van het aandrijvende punt B en dus aandrijvende stang 2 (later berekenen we ook het aandrijfmoment M dat nodig is om dit toerental te realiseren). In deze analyse bekijkt men hoe het mechanisme beweegt. De analyse is verdeeld over drie secties: een positieanalyse, een snelheidsanalyse en een versnellingsanalyse. Hierbij worden de numerieke gegevens en figuren van de inleiding gebruikt.

Het aandrijvende punt B maakt een hoek θ_2 met de horizontale. We leggen zoals hierboven vermeld een toerental $\frac{d\theta_2}{dt}(t)$ en hoekversnelling $\frac{d^2\theta_2}{dt^2}(t)$ op. Deze hoeksnelheid en hoekversnelling werd door ons in de analyse gekozen en is vanaf dan dus een gegeven. Verder is de hoek θ_1 vast, deze blijft altijd gelijk aan 0, en is dus een geometrisch gegeven.

Er zijn 6 onbekenden die de positie van het mechanisme in de tijd volledig bepalen, zijnde: $\theta_3(t)$, $\theta_4(t)$, $\theta_5(t)$, $\theta_6(t)$, $\theta_7(t)$ en $\theta_8(t)$. θ_8 is de hoek die de staaf EG maakt met de horizontale gemeten in het punt E. Hoewel deze steeds gelijk is aan θ_1 (lees: steeds 0° blijft) is deze toch beschouwd als een onbekende. Op deze manier krijgen we een stelsel van 6 onbekenden en 6 vergelijkingen. Het werken met vierkante matrices vereenvoudigt de oplossingsmethode. Later moet uit de hoekbepaling blijken dat deze hoek inderdaad nul blijft doorheen de tijd.

Hierna gaat men over naar 6 onbekende hoeksnelheden, zijnde: $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$, $\omega_4(t)$, $\omega_5(t)$, $\omega_6(t)$, $\omega_7(t)$ en $\omega_8(t)$, en 6 onbekende hoekversnellingen, zijnde: $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\alpha_4(t)$, $\alpha_5(t)$, $\alpha_6(t)$, $\alpha_7(t)$, $\alpha_8(t)$. Deze bepalen volledig de beweging van het mechanisme.

3.1 Kringloopvergelijkingen

Vooreerst worden ook nog een stel kringloopvergelijkingen gedefiniëerd. Een kringloopvergelijking is gebaseerd op een kring van vectoren waarvan de som gelijk aan 0 moet zijn. Voor dit systeem worden 3 kringloopvergelijkingen uitgeschreven die telkens 2 vergelijkingen genereren, één in de x-richting en één in de y-richting.

$$\text{Kring 1} = \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GC} + \vec{CA} = 0$$

$$F(1) = 0 = r_1 - r_2 * \cos(\theta_2) + r_3 * \cos(\theta_3) + r_4 * \cos(\theta_4) \quad (1)$$

$$F(2) = 0 = -r_2 * \sin(\theta_2) + r_3 * \sin(\theta_3) + r_4 * \sin(\theta_4) \quad (2)$$

$$\text{Kring 2} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DF} + \vec{FE} + \vec{EA} = 0$$

$$F(3) = 0 = -r_4 * \cos(\theta_4) - r_6 * \cos(\theta_6) - r_7 * \cos(\theta_7) - 0,045 * \cos(\theta_8) + r_5 * \cos(\theta_5) \quad (3)$$

$$F(4) = 0 = -r_4 * \sin(\theta_4) - r_6 * \sin(\theta_6) - r_7 * \sin(\theta_7) + r_5 * \sin(\theta_5) - 0,045 * \sin(\theta_8) \quad (4)$$

$$\text{Kring 3} = \vec{CG} + \vec{GF} + \vec{FD} + \vec{DC} = 0$$

$$F(5) = 0 = -r_3 * \cos(\theta_3) - 0,015 * \cos(\theta_8) + r_7 * \cos(\theta_7) + r_6 * \cos(\theta_6) \quad (5)$$

$$F(6) = 0 = -r_3 * \sin(\theta_3) + r_7 * \sin(\theta_7) + r_6 * \sin(\theta_6) - 0,015 * \sin(\theta_8) \quad (6)$$

3.2 Positieanalyse

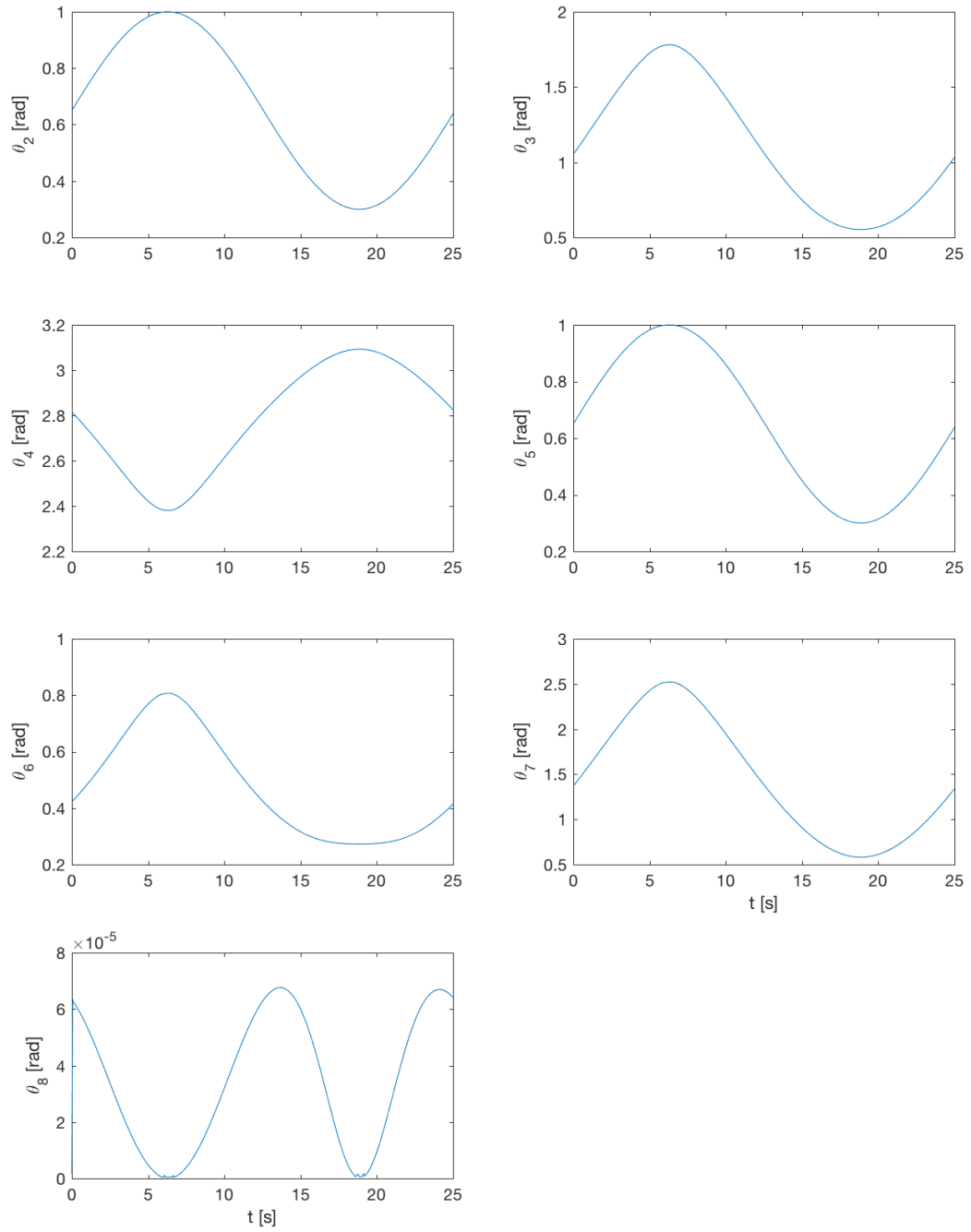
Na het definiëren van de nodige kringloopvergelijkingen begint de kinematische analyse. De eerste stap hierbij is de positieanalyse.

Hiertoe wordt eerst een beweging opgelegd aan het mechanisme, of met andere woorden een toerental gekozen voor het aandrijvende punt B en dus aandrijvende stang 2. Er is gekozen voor een sinusoidale aandrijving. De beweging van het stangenmechanisme kent twee uiterste standen waarbinnen dit systeem beweegt, het is dus geen volledige rotationele beweging maar een oscillerende beweging. De aandrijvende stang 2 oscilleert over het hoekinterval $\theta_2 \in [0,3, 1]$ (rad) en heeft het volgende voorschrift: $\theta_2(t) = 0,65 + 0,35 * \sin(\omega * t)$, hierbij is $\omega = 0,25$ rad/s. De beweging heeft dus een periode van $\frac{2\pi}{0,50} \approx 25$ seconden. De hoeksnelheid, $\frac{d\theta_2}{dt}$ en hoekversnelling $\frac{d^2\theta_2}{dt^2}$ worden gegeven door respectievelijk de eerste en tweede afgeleide van $\theta_2(t)$.

Zoals hierboven aangegeven zijn er 6 kringloopvergelijkingen, en 6 onbekenden die de positie van het mechanisme bepalen. 6 vergelijkingen en 6 onbekenden maakt een oplosbaar stelsel.

We kunnen dus alle hoeken op elk tijdstip berekenen, en zo de gehele beweging van het mechanisme simuleren in functie van de tijd. We maken hiervoor gebruik van het rekenprogramma Matlab. Het stelsel dat moet worden opgelost is niet-lineair en Matlab gebruikt hiervoor de functie `fsolve`. Dit is een numerieke methode om niet lineaire stelsels op te lossen. De oplossing is dus een benadering en niet exact. Deze methode convergeert enkel naar een oplossing wanneer de initiële waarden, zoals getabbeleerd in de inleiding, dicht genoeg naderen bij de echte initiële stand. De methode kan dus zeer gevoelig zijn aan veranderingen van deze waarden. Een animatie van de beweging is te zien in de Matlab-code van deze analyse.

Figuur 5 toont de posities van de verschillende gezochte hoeken in functie van de tijd. Deze figuur laat ook zien dat de periode van 25 seconden bij alle hoeken is terug te vinden. Ook kunnen we op deze figuur afleiden dat de aanname, namelijk dat θ_8 nul blijft in de tijd, vrij nauwkeurig is. De fout is maximaal in de orde van 10^{-5} . Dit is een zéér kleine hoek en kunnen we daarom benaderend gelijk stellen aan nul. Verder valt er op dat θ_2 en θ_5 exact hetzelfde hoekverloop hebben, dit wijst erop dat het stangenmechanisme zijn parallellogramvorm blijft behouden in de tijd. In een parallellogram zijn overstaande hoeken in de tijd even groot, dit is hier dus ook het geval.



Figuur 5: Posities van de hoeken in functie van de tijd.

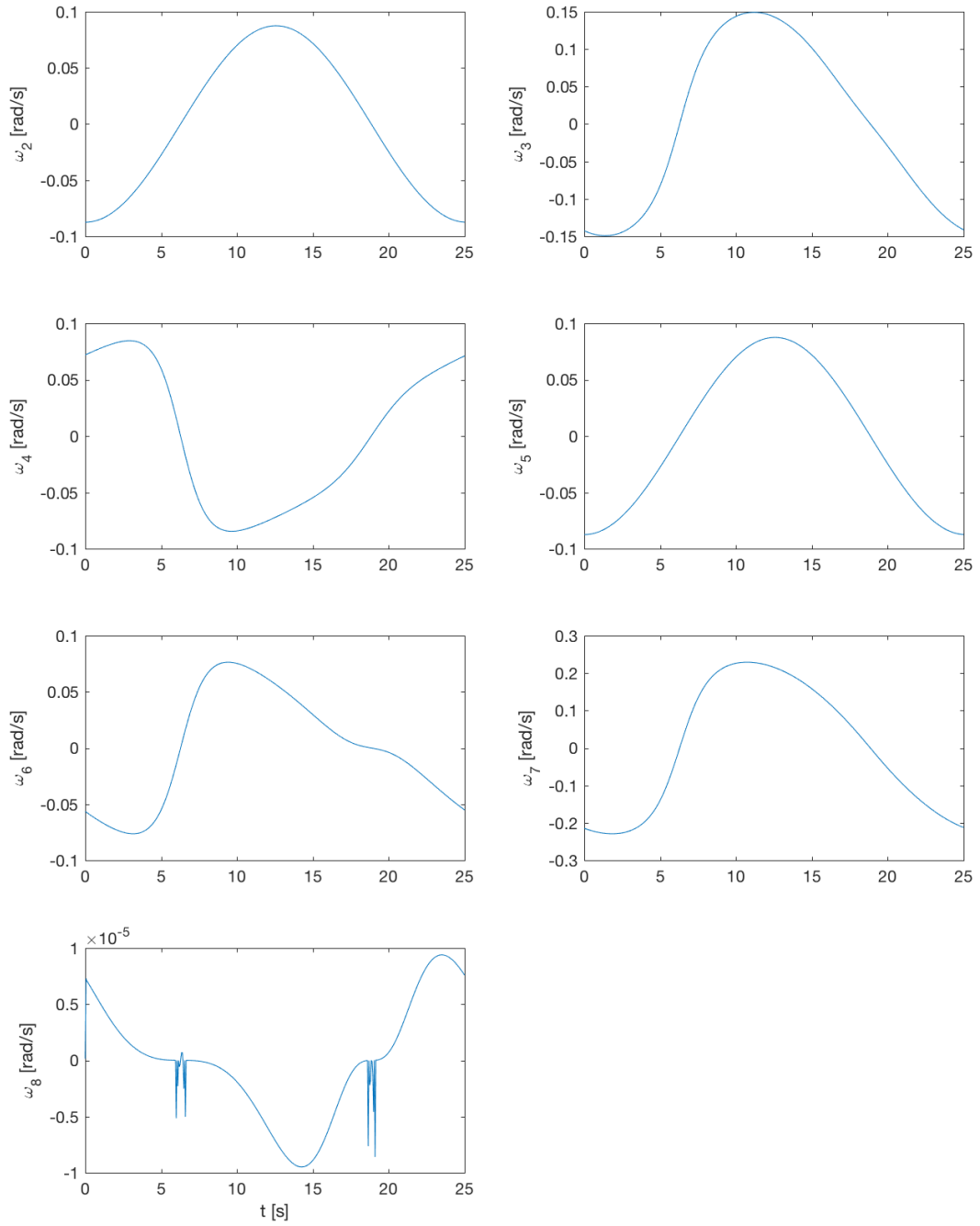
3.3 Snelheidsanalyse

De snelheidsanalyse gebeurt ook aan de hand van de kringloopvergelijkingen. De afgeleiden van deze vergelijkingen vormen weer een stelsel. Dit maal is het een lineair stelsel van de vorm $AX = B$. Hierbij bevat X de te berekenen hoeksnelheden en A en B zijn als volgt:

$$AX = \begin{bmatrix} -r_3 \sin(\theta_3(k))\omega_3 - r_4 \sin(\theta_4(k))\omega_4 \\ r_3 \cos(\theta_3(k))\omega_3 + r_4 \cos(\theta_4(k))\omega_4 \\ r_4 \sin(\theta_4(k))\omega_4 - r_5 \sin(\theta_5(k))\omega_5 + r_6 \sin(\theta_6(k))\omega_6 + r_7 \sin(\theta_7(k))\omega_7 + 0.045 \sin(\theta_8(k))\omega_8 \\ -r_4 \cos(\theta_4(k))\omega_4 + r_5 \cos(\theta_5(k))\omega_5 - r_6 \cos(\theta_6(k))\omega_6 - r_7 \cos(\theta_7(k))\omega_7 - 0.045 \cos(\theta_8(k))\omega_8 \\ r_3 \sin(\theta_3(k))\omega_3 - r_6 \sin(\theta_6(k))\omega_6 - r_7 \sin(\theta_7(k))\omega_7 + 0.015 \sin(\theta_8(k))\omega_8 \\ -r_3 \cos(\theta_3(k))\omega_3 + r_6 \cos(\theta_6(k))\omega_6 + r_7 \cos(\theta_7(k))\omega_7 - 0.015 \cos(\theta_8(k))\omega_8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -r_2 \sin(\theta_2(k))\omega_2 \\ r_2 \cos(\theta_2(k))\omega_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deze vergelijkingen worden uitgekend in Matlab en dit geeft de gevraagde hoeksnelheden. Figuur 6 toont de hoeksnelheden in functie van de tijd. Als eerste controle kan men nagaan dat deze het verloop hebben van de afgeleide van de hoeken in de positieanalyse. Op deze figuur is wederom de gelijkheid tussen ω_2 en ω_5 op te merken en verder zien we dat ω_8 maximaal van de orde 10^{-5} is, ω_8 valt dus ook te verwaarlozen.



Figuur 6: Hoeksnelheden in functie van de tijd.

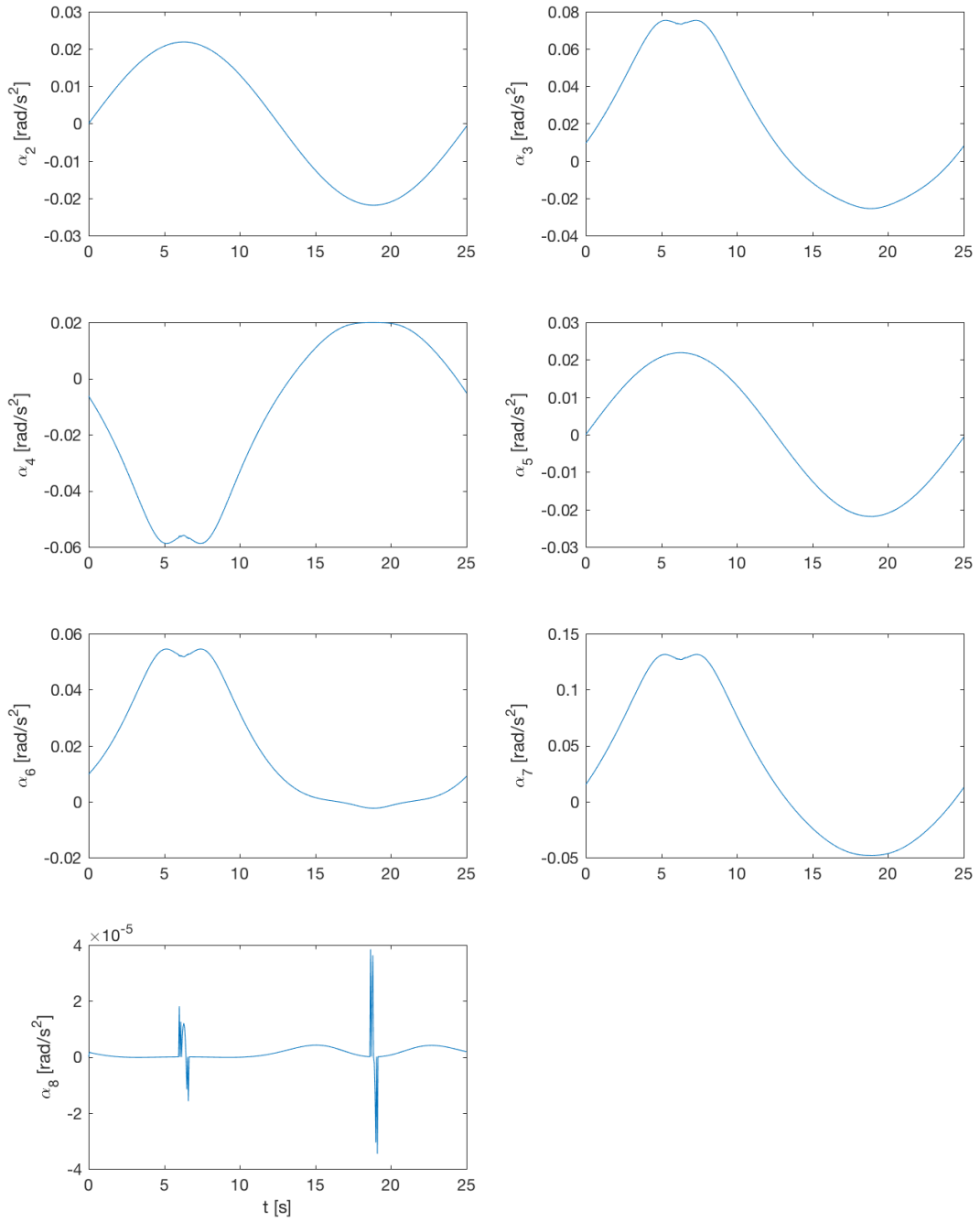
3.4 Versnellingsanalyse

Deze sectie handelt op exact dezelfde manier als de vorige sectie. Dit maal met de tweede afgeleide van de kringloopvergelijkingen. Met volgende vergelijkingen:

$$AX = \begin{bmatrix} -r_3 \sin(\theta_3(k))\alpha_3 - r_4 \sin(\theta_4(k))\alpha_4 \\ r_3 \cos(\theta_3(k))\alpha_3 + r_4 \cos(\theta_4(k))\alpha_4 \\ r_4 \sin(\theta_4(k))\alpha_4 - r_5 \sin(\theta_5(k))\alpha_5 + r_6 \sin(\theta_6(k))\alpha_6 + r_7 \sin(\theta_7(k))\alpha_7 + 0.045 \sin(\theta_8(k))\alpha_8 \\ -r_4 \cos(\theta_4(k))\omega_4 + r_5 \cos(\theta_5(k))\omega_5 - r_6 \cos(\theta_6(k))\omega_6 - r_7 \cos(\theta_7(k))\omega_7 - 0.045 \cos(\theta_8(k))\omega_8 \\ r_3 \sin(\theta_3(k))\alpha_3 - r_6 \sin(\theta_6(k))\alpha_6 - r_7 \sin(\theta_7(k))\alpha_7 + 0.015 \sin(\theta_8(k))\alpha_8 \\ -r_3 \cos(\theta_3(k))\alpha_3 + r_6 \cos(\theta_6(k))\alpha_6 + r_7 \cos(\theta_7(k))\alpha_7 - 0.015 \cos(\theta_8(k))\alpha_8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -r_2 \sin(\theta_2(k))\alpha_2 - r_2 \cos(\theta_2(k))\omega_2^2 + r_3 \cos(\theta_3(k))\omega_3^2 + r_4 \cos(\theta_4(k))\omega_4^2 \\ r_2 \cos(\theta_2(k))\alpha_2 - r_2 \sin(\theta_2(k))\omega_2^2 + r_3 \sin(\theta_3(k))\omega_3^2 + r_4 \sin(\theta_4(k))\omega_4^2 \\ -r_4 \cos(\theta_4(k))\omega_4^2 + r_5 \cos(\theta_5(k))\omega_5^2 - r_6 \cos(\theta_6(k))\omega_6^2 - r_7 \cos(\theta_7(k))\omega_7^2 - 0.045 \cos(\theta_8(k))\omega_8^2 \\ -r_4 \sin(\theta_4(k))\omega_4^2 + r_5 \sin(\theta_5(k))\omega_5^2 - r_6 \sin(\theta_6(k))\omega_6^2 - r_7 \sin(\theta_7(k))\omega_7^2 - 0.045 \sin(\theta_8(k))\omega_8^2 \\ -r_3 \cos(\theta_3(k))\omega_3^2 + r_6 \cos(\theta_6(k))\omega_6^2 + r_7 \cos(\theta_7(k))\omega_7^2 - 0.015 \cos(\theta_8(k))\omega_8^2 \\ -r_3 \sin(\theta_3(k))\omega_3^2 + r_6 \sin(\theta_6(k))\omega_6^2 + r_7 \sin(\theta_7(k))\omega_7^2 - 0.015 \sin(\theta_8(k))\omega_8^2 \end{bmatrix}$$

Deze vergelijkingen uitrekenen geeft de gevraagde hoekversnellingen. Figuur 7 toont de hoekversnellingen in functie van de tijd. Ook hier kan men controleren of het verloop ongeveer overeenkomt met de afgeleide van de snelheidsanalyse en tweede afgeleide van de positieanalyse. Op deze figuur is wederom de gelijkheid tussen α_2 en α_5 op te merken en verder zien we dat α_8 maximaal van de orde 10^{-5} is, α_8 valt dus ook te verwaarlozen.



Figuur 7: Hoekversnellingen in functie van de tijd.

3.5 Controle van kinematische analyse

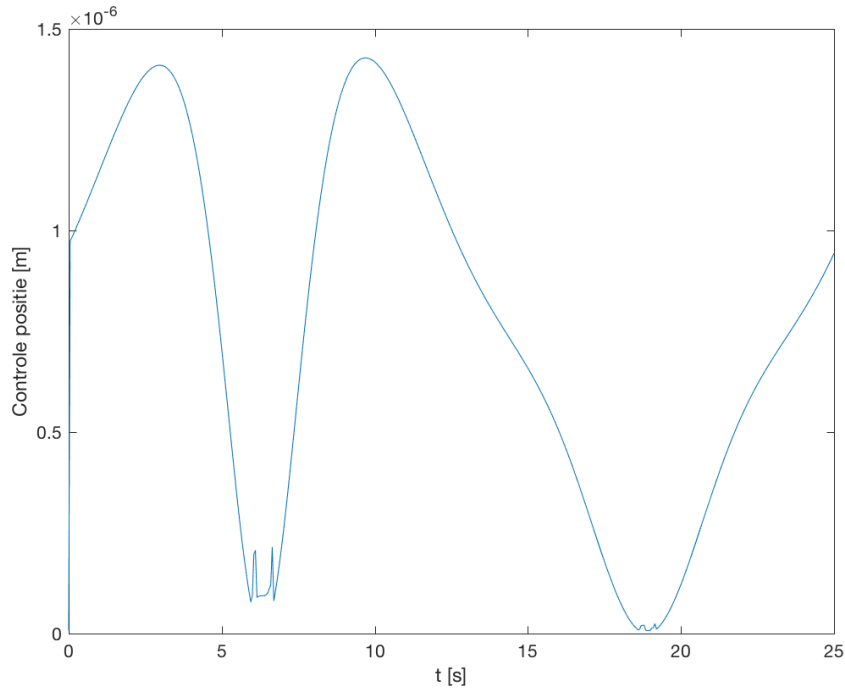
Het nakijken op het zicht van de resultaten in de vorige secties is natuurlijk niet voldoende om de volledige analyse te controleren. Daarom worden nog een paar controles uitgevoerd om het resultaat na te kijken.

3.5.1 Positiecontrole

Om een positiecontrole uit te voeren, is de positie van het punt C via 2 manieren berekend, deze punten zijn C_1 en C_2 . De posities werden als volgt bepaald:

$$\begin{aligned}E(k) &= -r5 * \exp(j * \phi_5(k)) \\G(k) &= E(k) + r8 \\C1(k) &= G(k) + r3 * \exp(j * \phi_3(k)) \\C2(k) &= -r4 * \exp(j * \phi_4(k))\end{aligned}$$

Het verschil tussen C_1 en C_2 is geplot in figuur 8. De relatieve fout C_1/C_2 nemen waarden aan rond de orde 10^{-2} en de absolute fout is van orde 10^{-6} . De fout is echter niet extreem klein, maar wel klein genoeg om het een goede positiecontrole te noemen. De positiecontrole kan ook visueel gebeuren met behulp van een animatie. Deze animatie is terug te vinden in de Matlab-code.



Figuur 8: Positievverschil in functie van de tijd.

3.5.2 Snelheids-en versnellingscontrole

De controle van de snelheid en de versnelling gebeurt op dezelfde manier. Hiervoor bestaan twee methodes. De eerste methode vergelijkt de numerieke waarden met de analytische waarden van de snelheid of versnelling van een punt. De tweede methode bepaalt de snelheid en versnelling van eenzelfde punt vertrekkend vanuit twee verschillende vaste punten.

Methode 1 gaat de analytische en de numerieke snelheid en versnelling van punt C berekenen en vergelijken

De analytische snelheid van punt C (via A) in de tijd is gedefinieerd als volgt:

$$analytic_vel_C(k) = \omega_4(k+1) \times \vec{AC}(k+1) \quad (7)$$

De numerieke snelheid van punt C (via A) in de tijd is gedefinieerd als volgt:

$$numeric_vel_C(k) = \frac{\vec{AC}(k+2) - \vec{AC}(k)}{2 * Ts} \text{ met } Ts = 0,05 \quad (8)$$

Hierin is Ts de tijdsstap tussen elke iteratie. Bij de berekening van zowel de analytische als numerieke snelheid itereren we van $k = 1$ tot $k = length(\vec{AC}) - 2$. In vergelijking 7 nemen we telkens van de hoeksnelheid ω_4 en positie \vec{AC} het $k + 1^{de}$ element. De reden hiervoor is dat we het eerste en laatste positiepunt van C niet kunnen gebruiken om een numerieke snelheid te definiëren. Zo hebben we er dus voor gezorgd dat we gemakkelijk de analytische en numerieke snelheid met elkaar kunnen vergelijken, bv. $k = 1$: $analytic_vel_C(1) = \omega_4(2) \times \vec{AC}(2)$ en $numeric_vel_C(1) = \frac{\vec{AC}(3) - \vec{AC}(1)}{2 * Ts}$. De numerieke snelheid is die in het punt $\vec{AC}(2)$, deze wordt ook berekend in de analytische snelheid.

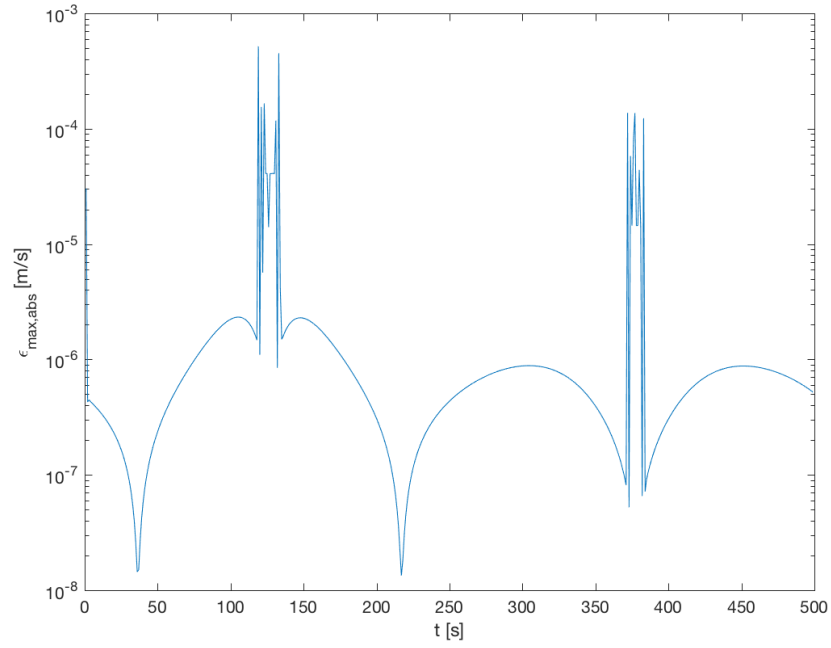
Figuur 9 toont de absolute fout tussen de numerieke en analytische snelheid. Ondanks dat er hier en daar wat hogere waarden zijn voor de absolute fout, is de fout in deze figuur gemiddeld gezien van orde 10^{-6} . Dit benadert niet de machineprecisie maar de fout is wel klein genoeg om het een goede snelheidscontrole te noemen. Figuur 10 toont de relatieve fout tussen de numerieke en analytische snelheid. Aangezien onze snelheden niet groter zijn dan 1, is het logisch dat de relatieve fout groter is dan de absolute aangezien er gedeeld wordt door een getal kleiner dan 1. Gemiddeld gezien is de fout van orde 10^{-3} . Er valt wel op te merken dat, waar de absolute fout grotere waarden aanneemt, de relatieve fout van orde 10^0 en 10^3 is. Dit ligt waarschijnlijk aan het feit dat er afwijkingen zijn in de nauwkeurigheid voor de berekening van de numerieke snelheid.

De analytische versnelling van punt C (via A) in de tijd is gedefinieerd als volgt:

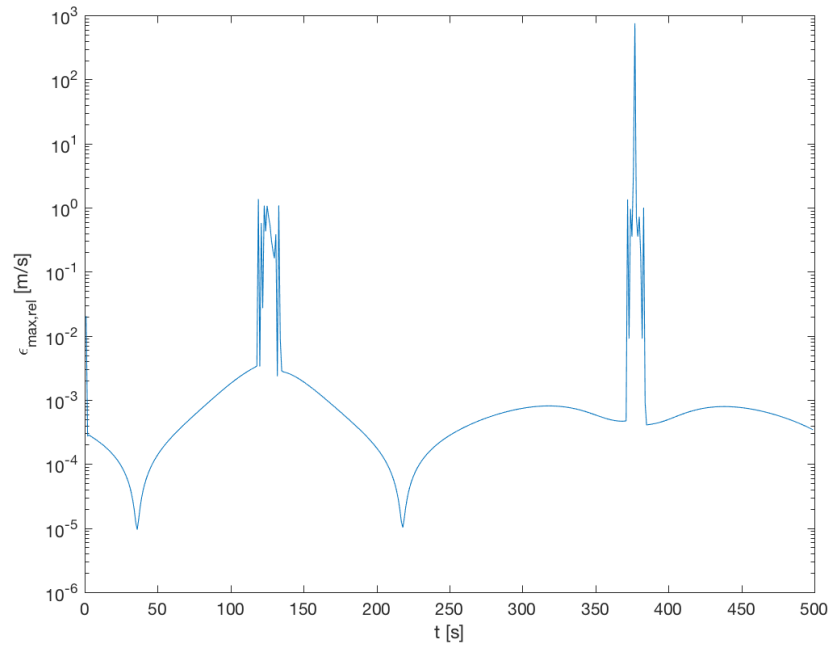
$$analytic_acc_C(k) = \omega_4(k+1) \times (\omega_4(k+1) \times \vec{AC}(k+1)) + \alpha(k+1) \times \vec{AC}(k+1) \quad (9)$$

De numerieke versnelling van punt C (via A) in de tijd is gedefinieerd als volgt:

$$numeric_acc_C(k) = \frac{\vec{AC}(k+2) - 2 * \vec{AC}(k+1) + \vec{AC}(k)}{Ts * Ts} \text{ met } Ts = 0,05 \quad (10)$$

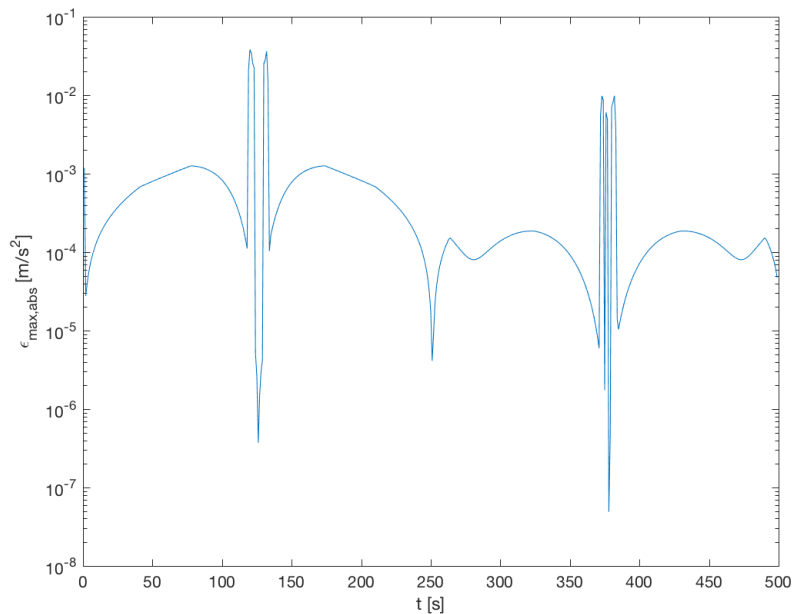


Figuur 9: Numeriek vs analytische absolute fout op de snelheid.

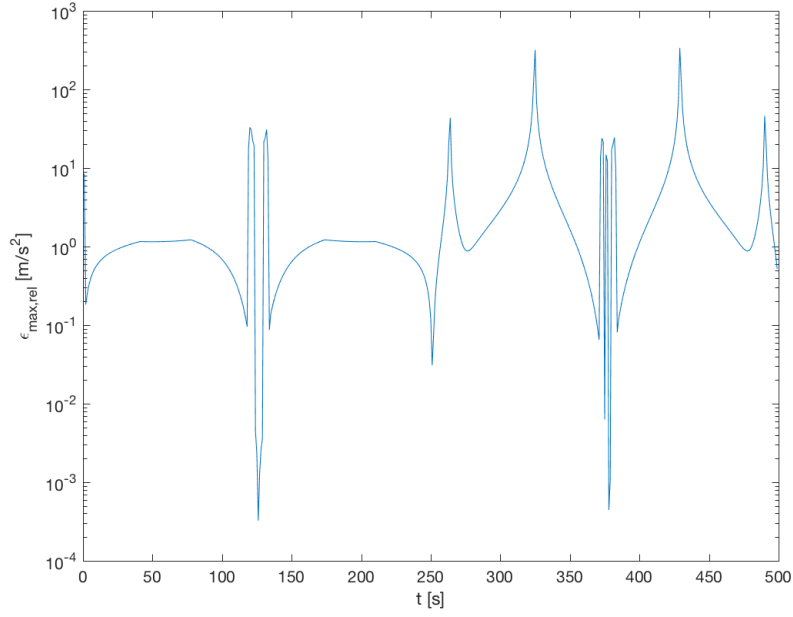


Figuur 10: Numeriek vs analytische relatieve fout op de snelheid.

Figuur 11 toont de absolute fout tussen de numerieke en analytische versnelling. Ondanks dat er hier en daar wat hogere waarden zijn voor de absolute fout, is de fout in deze figuur gemiddeld gezien van orde 10^{-3} . Aangezien de 2^{de} afgeleide wordt genomen van de positie is het logisch dat deze fout groter is dan de fout bij de snelheid ($= 1^{ste}$ afgeleide). Figuur 12 toont de relatieve fout tussen de numerieke en analytische versnelling. Aangezien onze versnellingen niet groter zijn dan 1, is het logisch dat de relatieve fout groter is dan de absolute aangezien er gedeeld wordt door een getal kleiner dan 1. Gemiddeld gezien is de fout wel groter dan verwacht, orde $1 - 10^1$. Doordat de absolute fout groter dan verwacht was, is de relatieve fout bijgevolg ook groter dan normaal. Dit ligt waarschijnlijk aan het feit dat er afwijkingen zijn in de nauwkeurigheid voor de berekening van de numerieke versnelling. Een numerieke methode probeert altijd een benadering te maken van een exacte waarde. Dus is het logisch dat de fout tussen de analytische vs numerieke methode voor zowel de snelheid als de versnelling niet gelijk is aan de machineprecisie.



Figuur 11: Numeriek vs analytische absolute fout op de versnelling.



Figuur 12: Numeriek vs analytische relatieve fout op de versnelling.

Methode 2 werd uitgevoerd op knooppunt C en D vertrekkende vanuit knooppunten A en B. De snelheden worden als volgt bepaald:

$$\vec{v}_{CA} = \omega_4 \times \vec{AC} \quad (11)$$

$$\vec{v}_{CB} = \omega_2 \times \vec{BG} + \omega_3 \times \vec{GC} \quad (12)$$

$$\vec{v}_{DA} = \vec{v}_{CA} + \omega_6 \times \vec{DC} \quad (13)$$

$$\vec{v}_{DB} = \omega_2 \times \vec{BG} + \omega_8 \times \vec{GF} + \omega_7 \times \vec{FD} \quad (14)$$

$$\vec{a}_{CA} = (\omega_4 \times (\omega_4 \times \vec{AC})) + \alpha_4 \times \vec{AC} \quad (15)$$

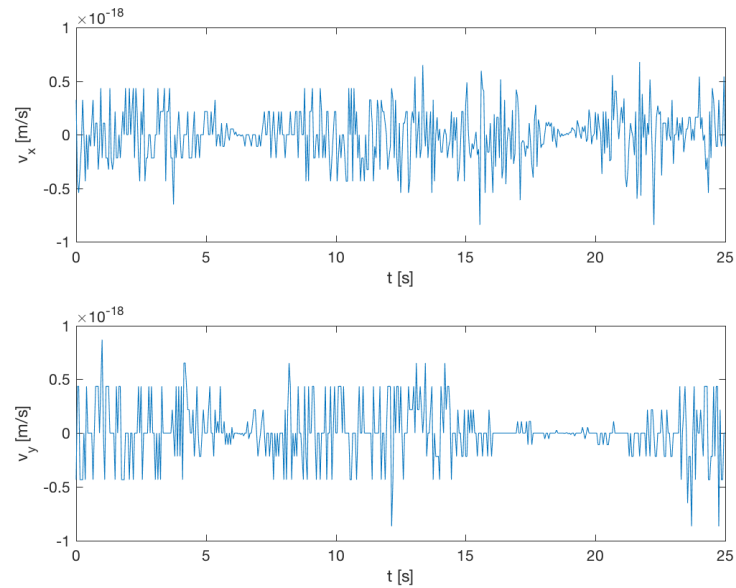
$$\vec{a}_{CB} = (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{BG})) + \alpha_2 \times \vec{BG} + (\omega_3 \times (\omega_3 \times \vec{GC})) + \alpha_3 \times \vec{GC} \quad (16)$$

$$\vec{a}_{DA} = \vec{a}_{CA} + (\omega_6 \times (\omega_6 \times \vec{DC})) + \alpha_6 \times \vec{DC} \quad (17)$$

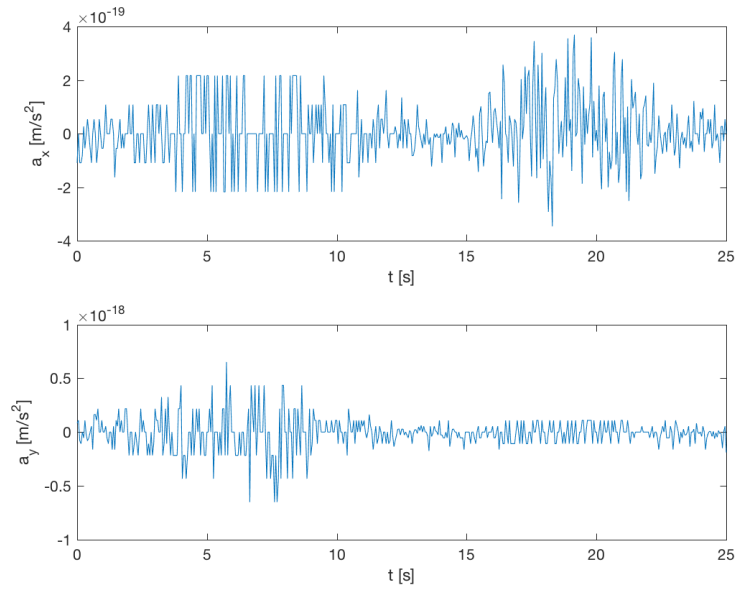
$$\begin{aligned} \vec{a}_{DB} = & (\omega_2 \times (\omega_2 \times \vec{BG})) + \alpha_2 \times \vec{BG} + (\omega_8 \times (\omega_8 \times \vec{GF})) + \alpha_8 \times \vec{GF} \\ & + (\omega_7 \times (\omega_7 \times \vec{FD})) + \alpha_7 \times \vec{FD} \end{aligned} \quad (18)$$

De absolute fout is het verschil tussen de verschillende snelheden en versnellingen. Figuur 13 tot 16 tonen deze fout. Hieruit is duidelijk merkbaar dat deze de grootte

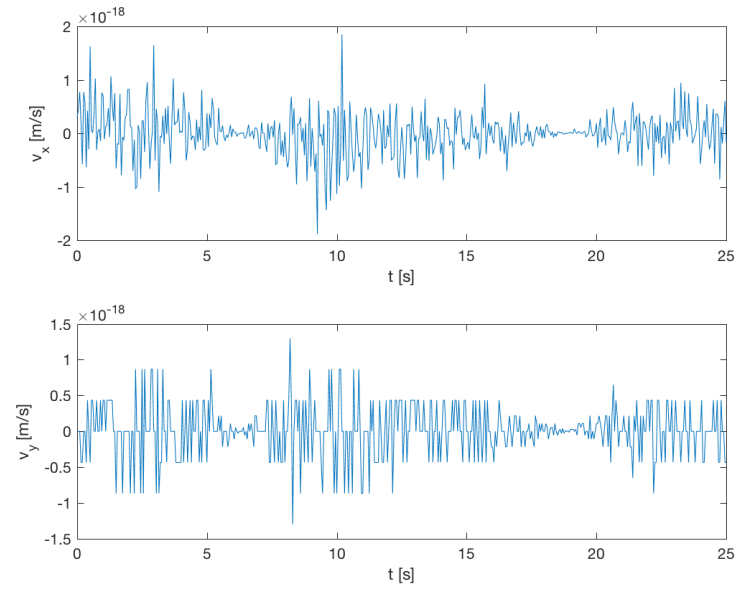
aanneemt van de machinenauwkeurigheid, wat betekent dat de kinematische analyse zeer nauwkeurig verlopen is. Waarom de fout op de versnelling in de y-richting van het punt D niet de machinenauwkeurigheid heeft, is niet bekend, maar orde 10^{-13} is wel zéér klein.



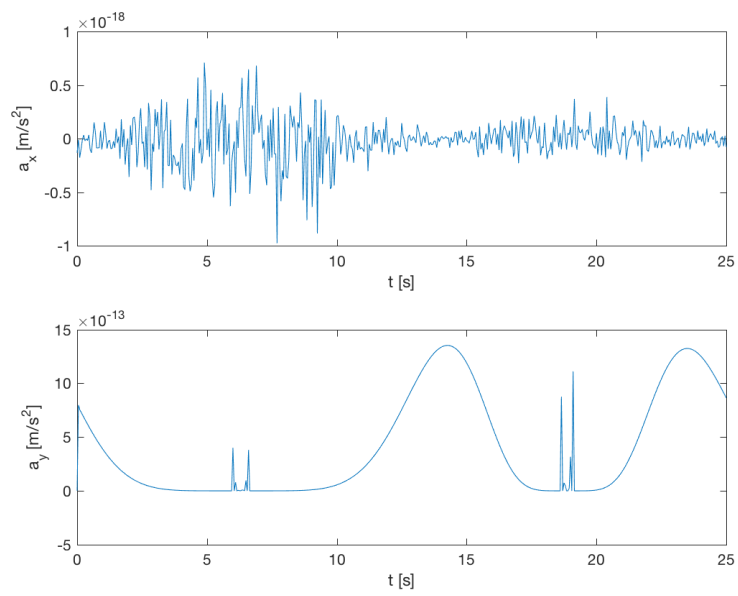
Figuur 13: Verschil van snelheden voor punt C.



Figuur 14: Verschil van versnellingen voor punt C.



Figuur 15: Verschil van snelheden voor punt D.



Figuur 16: Verschil van versnellingen voor punt D.

4 Dynamische analyse

4.1 Inverse dynamische analyse

Na de kinematische analyse komt de dynamische analyse. Dit is de bepaling van de interne reactiekrachten in de scharnieren en het aandrijfmoment in scharnier B. Deze analyse maakt gebruik van de voorgaande resultaten in de kinematische analyse. We noemen dit een inverse dynamische analyse omdat we vertrekken vanuit de berekende versnellingen om de krachten te bepalen. Voor de verdere analyse moeten de massa's en de geometrische vorm van de stangen nog vastgelegd worden. We nemen aan dat de staven uniform cilindervormig zijn (dunne staaf) en eenzelfde massa per lengte eenheid ρ hebben, dit zorgt voor een eenvoudige berekening van het traagheidsmoment I . Zo is de massa van een staaf i : $m_i = l_i \cdot \rho$ en het traagheidsmoment van een staaf i rond zijn eigen zwaarte punt (=COG =centre of gravity): $I_{cog,i} = \frac{1}{12} \cdot m_i \cdot l^2$. Elke stang moet vervolgens worden vrijgemaakt. Elke vrijgemaakte stang zorgt voor 3 vergelijkingen. Er zijn 27 onbekenden, waarvan 1 moment en 26 interne krachten, waarvoor er dus 27 vergelijkingen nodig zijn. Elke stang levert 3 vergelijkingen, 2 krachtvergelijkingen en 1 momentvergelijking, er zijn 7 stangen wat dus tesamen 21 vergelijkingen geeft. De 6 overige vergelijkingen worden gevonden in een knoop waar 3 stangen samen komen. In zo'n knoop is de som van alle krachten in de x-richting gelijk aan nul, hetzelfde geldt voor de y-richting. De knopen A, C en G zorgend telkens voor 2 extra vergelijkingen. De krachtenvergelijkingen worden aan de hand van figuur 17 opgesteld.

Stang 2:

$$F_{12x} + F_{28x} + F_{23x} = m \cdot a_{2,x} \quad (19)$$

$$F_{12y} + F_{28y} + F_{23y} = m \cdot a_{2,y} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_{12} - cog2B_y \cdot F_{12x} + cog2B_x \cdot F_{12y} - cog2G_y \cdot F_{23x} + cog2G_x \cdot F_{23y} \\ - cog2G_y \cdot F_{28x} + cog2G_x \cdot F_{28y} = I_2 \cdot \alpha_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Stang 3:

$$F_{83x} + F_{43x} - F_{23x} - F_{63x} = m \cdot a_{3,x} \quad (22)$$

$$F_{83y} + F_{43y} - F_{23y} - F_{63y} = m \cdot a_{3,y} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} -cog3G_y \cdot F_{83x} + cog3G_x \cdot F_{83y} + cog3G_y \cdot F_{23x} - cog3G_x \cdot F_{23y} \\ + cog3C_y \cdot F_{63x} - cog3C_y \cdot F_{63y} - cog3C_y \cdot F_{43x} + cog3C_y \cdot F_{43y} = I_3 \cdot \alpha_3 \end{aligned} \quad (24)$$

Stang 4:

$$F_{14x} + F_{45x} - F_{43x} - F_{64x} = m \cdot a_{4,x} \quad (25)$$

$$F_{14y} + F_{45y} - F_{43y} - F_{64y} = m \cdot a_{4,y} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & cog4C_y \cdot F_{64x} - cog4C_x \cdot F_{64y} + cog4C_y \cdot F_{43x} - cog4C_x \cdot F_{43y} \\ & - cog4A_y \cdot F_{45x} + cog4A_x \cdot F_{14y} - cog4A_y \cdot F_{14x} + cog4A_x \cdot F_{45y} = I_4 \cdot \alpha_4 \end{aligned} \quad (27)$$

Stang 5:

$$F_{51x} - F_{45x} - F_{85x} = m \cdot a_{5,x} \quad (28)$$

$$F_{51y} - F_{45y} - F_{85y} = m \cdot a_{5,y} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & cog5A_y \cdot F_{45x} - cog5A_x \cdot F_{45y} - cog5A_y \cdot F_{51x} + cog5A_x \cdot F_{51y} \\ & + cog5E_y \cdot F_{85x} - cog5E_x \cdot F_{86y} = I_5 \cdot \alpha_5 \end{aligned} \quad (30)$$

Stang 6:

$$F_{64x} + F_{63x} + F_{67x} = m \cdot a_{6,x} \quad (31)$$

$$F_{64y} + F_{63y} + F_{67y} = m \cdot a_{6,y} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & -cog6D_y \cdot F_{67x} + cog6D_x \cdot F_{67y} - cog6C_y \cdot F_{64x} + cog6C_x \cdot F_{64y} \\ & - cog6C_y \cdot F_{63x} + cog6C_x \cdot F_{63y} = I_6 \cdot \alpha_6 \end{aligned} \quad (33)$$

Stang 7:

$$F_{78x} - F_{67x} = m \cdot a_{7,x} \quad (34)$$

$$F_{78y} - F_{67y} = m \cdot a_{7,y} \quad (35)$$

$$-cog7F_y \cdot F_{78x} + cog7F_x \cdot F_{78y} + cog7D_y \cdot F_{67x} - cog7D_x \cdot F_{67y} = I_7 \cdot \alpha_7 \quad (36)$$

Stang 8:

$$F_{85x} - F_{78x} - F_{83x} - F_{28x} = m \cdot a_{8,x} \quad (37)$$

$$F_{85y} - F_{78y} - F_{83y} - F_{28y} = m \cdot a_{8,y} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & cog8G_y \cdot F_{28x} - cog8G_x \cdot F_{28y} + cog8G_y \cdot F_{83x} - cog8G_x \cdot F_{83y} \\ & + cog8F_y \cdot F_{78x} - cog8F_x \cdot F_{78y} - cog8E_y \cdot F_{85x} + cog8E_x \cdot F_{85y} = I_8 \cdot \alpha_8 \end{aligned} \quad (39)$$

Knoop A:

$$F_{45x} + F_{14x} + F_{51x} = 0 \quad (40)$$

$$F_{45y} + F_{14y} + F_{51y} = 0 \quad (41)$$

Knoop C:

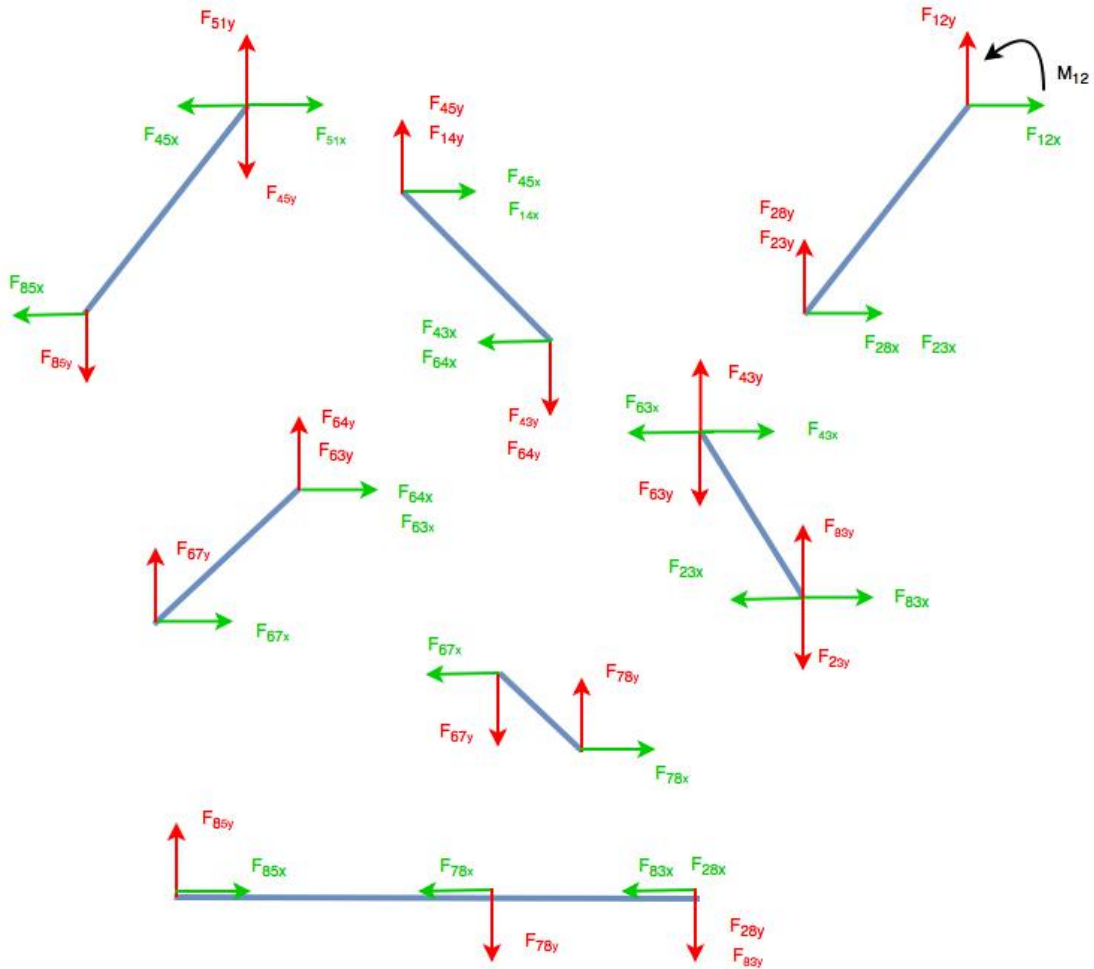
$$F_{64x} + F_{63x} + F_{43x} = 0 \quad (42)$$

$$F_{64y} + F_{63y} + F_{43y} = 0 \quad (43)$$

Knoop G:

$$F_{23x} + F_{28x} + F_{83x} = 0 \quad (44)$$

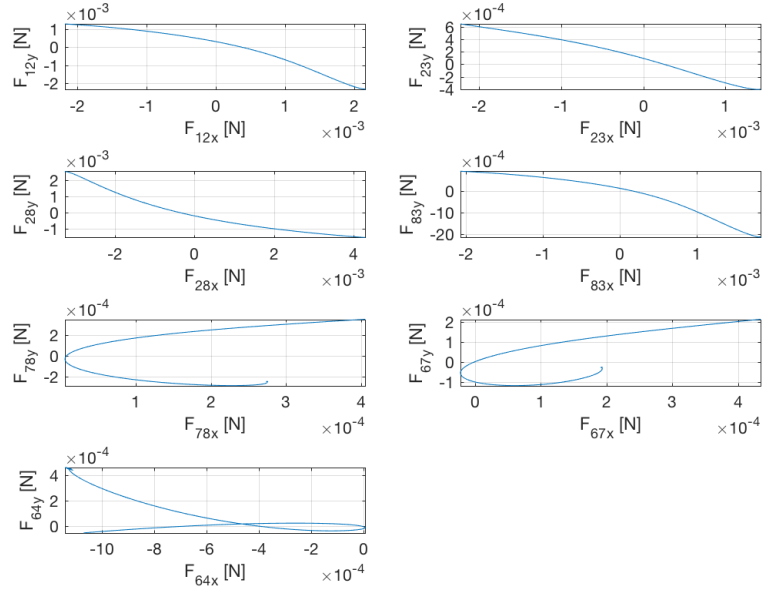
$$F_{23y} + F_{28y} + F_{83y} = 0 \quad (45)$$



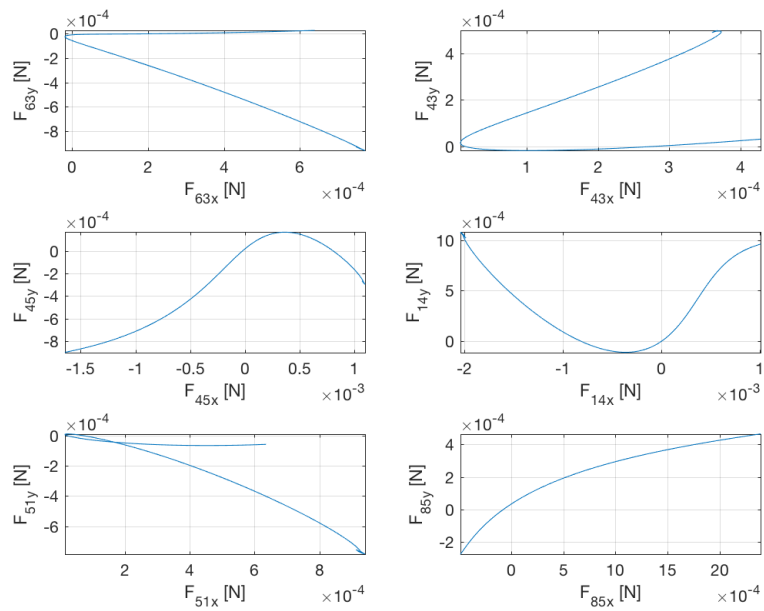
Figuur 17: Resultaat van de krachtenanalyse voor de inwendige krachten.

De resultaten van dit stelsel zijn te vinden in de figuren 18, 19 en 20. Figuren 18 en 19 geven de verschillende inwendige scharnierkrachten weer waarbij de x- en de

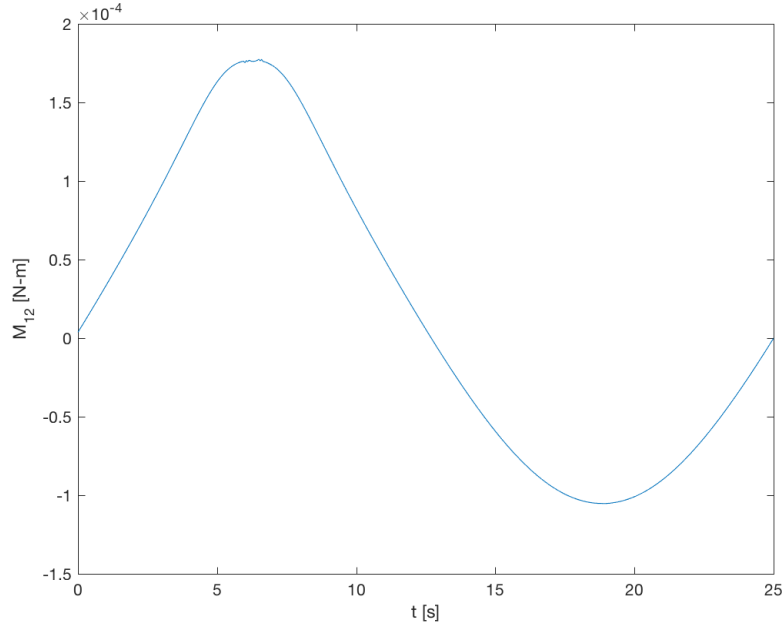
y-component ten opzichte van elkaar geplot worden. Het uitwendige moment dat nodig is om heel het systeem te laten voortbewegen wordt uitgezet in figuur 20.



Figuur 18: Resultaat van de krachtenanalyse voor de inwendige krachten.



Figuur 19: Resultaat van de krachtenanalyse voor de inwendige krachten.



Figuur 20: Resultaat van de krachtenanalyse voor het moment.

4.2 Controle

Voor het controleren van de dynamica maken we gebruik van twee methodes. De eerste methode is op basis van kinetische energie. Deze methode heeft enkel betrekking op het uitwendig moment M_{12} . Deze methode stelt dat het vermogen toegevoerd aan het mechanisme op elk tijdstip gelijk moet zijn aan de verandering in kinetische energie van het gehele mechanisme. Of in formule vorm:

$$P = \frac{dE_{kin}}{dt} \quad (46)$$

Hierbij voldoet P in ons mechanisme aan:

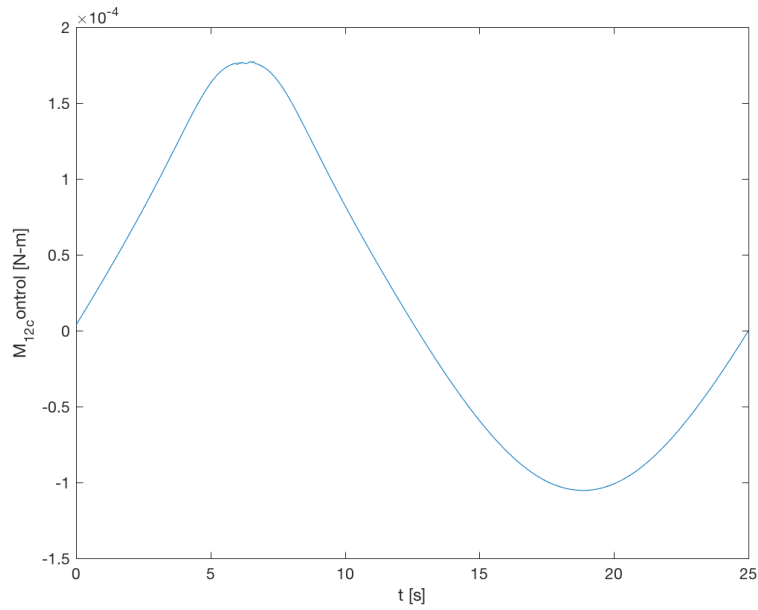
$$P(t) = M_{kin}\omega_2(t) \quad (47)$$

en $\frac{dE_{kin}}{dt}$ voldoet aan:

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \sum_{i=2}^8 (m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{a}_i) + I_i\omega_i\alpha_i) \quad (48)$$

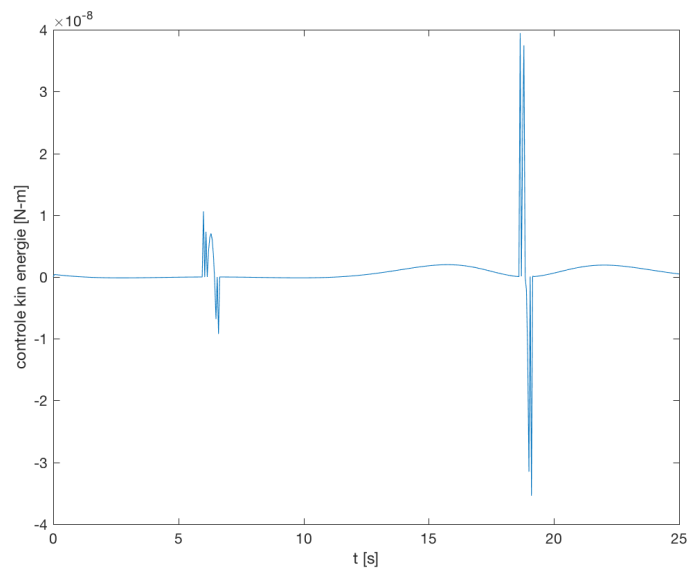
Als we de vergelijkingen herwerken krijgen we:

$$M_{kin}(t) = \frac{\frac{dE_{kin}}{dt}}{\omega_2(t)} \quad (49)$$



Figuur 21: Resultaat van de controleanalyse voor het moment.

In figuur 21 wordt het controle moment getoond. In figuur 22 wordt de absolute fout getoond. Hierop is te zien dat de fout grotendeels zich rond de nul bevindt. Als we hierop inzoomen verkrijgen we een fout van orde 10^{-11} - 10^{-12} . Er zijn wel 2 tijdsintervallen waar de fout wat groter is, nl. orde 10^{-8} . Als we deze fout vergelijken met het moment zelf, orde 10^{-4} , zien we dat de fout in een klein deel van het tijdsinterval 10^4 keer kleiner is en in de rest van het tijdsinterval 10^8 keer kleiner is dan het moment. Globaal gezien kunnen we wel spreken van een kleine tot zeer kleine fout op het moment, wat wijst op een correcte dynamische analyse voor het moment.



Figuur 22: Resultaat van de absolute fout voor het moment.

De tweede methode is op basis van onbalanskrachten. Deze methode gebruiken we om de nauwkeurigheid van de reactiekrachten die aan de grond aangrijpen te bepalen. Deze reactiekrachten zijn het tegengestelde van de inwendige krachten F_{12} , F_{14} en F_{51} . De onbalanskrachten zijn enerzijds deze reactiekrachten aan de grond en anderzijds zijn ze te berekenen via volgende formule:

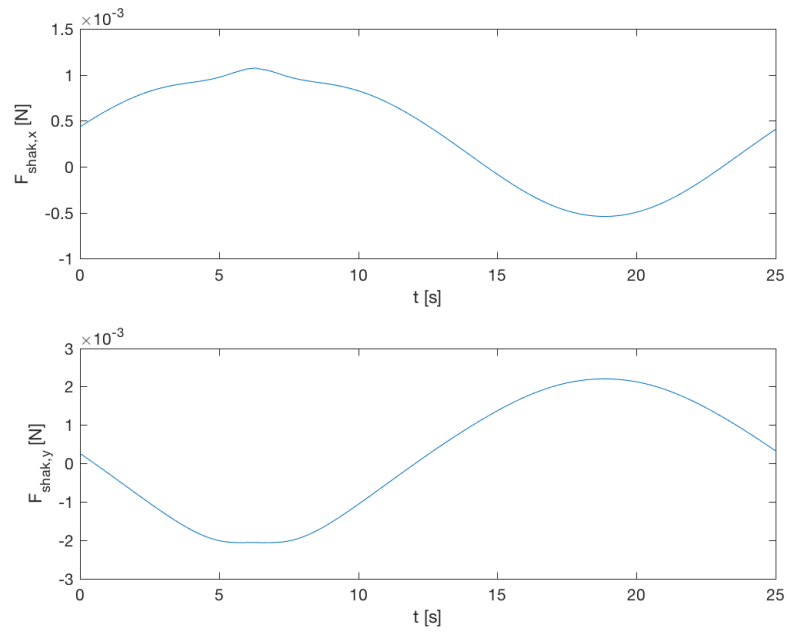
$$F_{shak,x}(t) = - \sum_{i=2}^8 m_i a_{i,x} \quad (50)$$

$$F_{shak,y}(t) = - \sum_{i=2}^8 m_i a_{i,y} \quad (51)$$

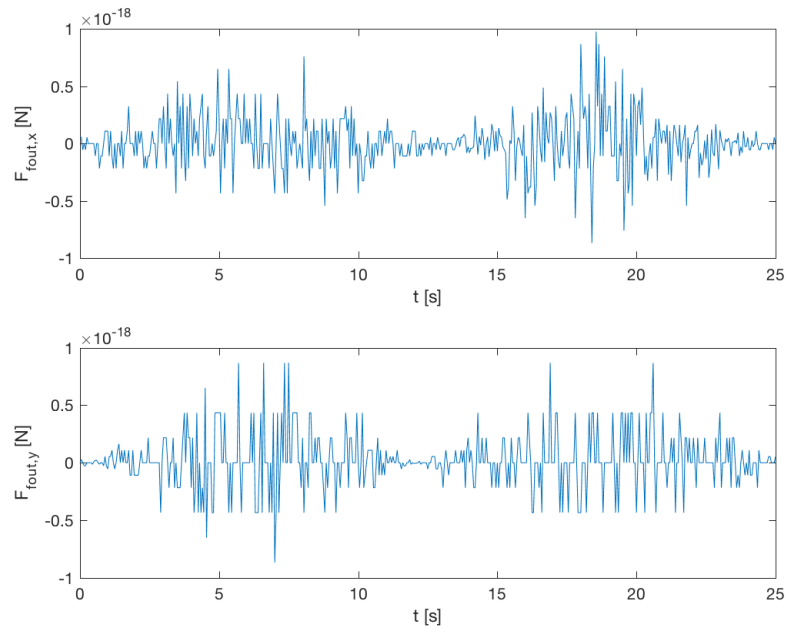
We nemen dus de som over alle stangen. i is in de formule onder het sommatieteken de stangen 2,3,4,5,6,7 en 8. In figuur 23 zijn de onbalanskrachten voor x en y weergegeven. In figuur 24 is de fout tussen deze onbalanskrachten en de krachten bekomen door de dynamische analyse weergegeven. Deze fout is klein, grootteorde machine-precisie wat wijst op een correcte dynamische analyse.

5 Besluit

In dit verslag is een kinematische en dynamische analyse gemaakt van een 8-stangenmechanisme. Zowel kinematische analyse als de dynamische analyse zijn vrij tot zeer nauwkeurig verlopen. In de meeste controles nam het verschil op het resultaat de machinenauwkeurigheid of een zeer kleine waarde aan. Enkel de positiecontrole en de analytische vs numerieke snelheidscontrole konden beter omdat deze fouten veel groter waren t.o.v. de andere controles.



Figuur 23: Resultaat van de onbalanskrachten.



Figuur 24: Resultaat van de absolute fout tussen onbalanskrachten en dynamische analyse.