Examen Scris Calcul Numeric

Doroftei Victor, Grupa 233

8 Iunie 2023

Problema 1

a) Pentru subpunctul a), voi prelucra expresia pentru polinoamele Jacobi, astfel încât să ajung la expresia polinoamelor din enunţ.

Expresia pentru polinoamele Jacobi este:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

Se observă despre α şi β, raportat la expresia polinoamelor din enunţ, că:

$$-\alpha = -\beta = -\lambda + \frac{1}{2}$$

Sau altfel:

$$\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$$

Se înlocuiesc α şi β în formula polinoamelor Jacobi, şi se înlocuieşte x cu t:

$$P_n^{(\lambda)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot (1-t)^{-\lambda+\frac{1}{2}}(1+t)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^n}{dt^n}[(1-t)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}(1+t)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}]$$

Astfel, am obţinut expresia polinoamelor din enunţ.

Polinoamele Jacobi sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, care, pentru α şi β de mai sus, este: $w(t) = (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. Aşadar, polinoamele sunt ortogonale.

b) Pentru subpunctul b):

Coeficienţii α_k şi β_k din relaţia de recurenţă din curs sunt:

$$\alpha_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 2)}$$

$$\beta_k = \frac{4k(k + \alpha)(k + \alpha + \beta)(k + \beta)}{(2k + \alpha + \beta - 1)(2k + \alpha + \beta)^2(2k + \alpha + \beta + 1)},$$

cu $k > 1$.
Se fac următoarele înlocuiri:

$$\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$$

$$\beta = \lambda - \frac{1}{2}$$

Se obţin astfel pentru α_k:

$$\alpha_k = \frac{(\lambda - \frac{1}{2})^2 - (\lambda - \frac{1}{2})^2}{(2k + (\lambda - \frac{1}{2}) + (\lambda - \frac{1}{2}))(2k + (\lambda - \frac{1}{2}) + (\lambda - \frac{1}{2}) + 2)}$$

Valoarea numărătorului este 0, deci $\alpha_k = 0$
Pentru β_k se va obţine:

$$\beta_k = \frac{4k(k + (\lambda - \frac{1}{2}))(k + (\lambda - \frac{1}{2}) + (\lambda - \frac{1}{2}))(k + (\lambda - \frac{1}{2}))}{(2k + (\lambda - \frac{1}{2}) + (\lambda - \frac{1}{2}) - 1)(2k + (\lambda - \frac{1}{2}) + (\lambda - \frac{1}{2}))^2(2k + (\lambda - \frac{1}{2}) + (\lambda - \frac{1}{2}) + 1)}$$

$$\beta_k = \frac{4k(k + \lambda - \frac{1}{2})(k + 2\lambda - 1)(k + \lambda - \frac{1}{2})}{(2k + 2\lambda - 2)(2k + 2\lambda - 1)^2(2k + 2\lambda)}$$

cu $k > 1$.

c) Pentru **subpunctul c)**, am implementat funcţia **cuadratura_gauss**. Aceasta funcţie se află în fişierul *cuadratura_gauss.m* şi are ca parametri de intrare:

- lambda: lambda de la funcţia pondere

- x: variabila simbolică
- n: numărul de noduri

Funcţia are ca parametri de ieşire:

- noduri: nodurile cuadraturii
- coeficienti: coeficienţii cuadraturii
- rest: restul, fără $f^{2n}(\xi)$

Funcţia menţionată anterior foloseşte trei alte funçtii implementate în cadrul laboratorului:

- **orto_poly_sym_type**, prezentă în fişierul *orto_poly_sym_type.m* - determină polinomul ortogonal π_n, pentru ponderea dată (pondere de tip Gegenbauer)
- **orto_coef_sym_type**, prezentă în fişierul *orto_coef_sym_type.m* - folosită de funcţia de mai sus pentru a determina α şi β
- **gauss_coefs_sym**, prezentă în fişierul *gauss_coefs_sym.m* - pentru a determina coeficienţii cuadraturii

d) Pentru subpunctul d), am creat un script cu numele **main1**, prezent în fişierul *main1.m*. Am utilizat $\lambda = \frac{5}{6}$, deoarece este soluţia ecuaţiei $\lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ (pentru a obţine ponderea sub forma celei din funcţia dorită).

Pentru valoarea aproximării, am apelat funçtia de la subpunctul c), cu $n = 5$ noduri, şi am obţinut următoarea valoare pentru aproximarea lui $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{1-t^2} cos\, t\, dt$:

```
Valoarea aproximarii este:
aproximare = 1.463076013607698
```

e) Pentru subpunctul e), am folosit formula de rest pentru cuadraturi Gauss:

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \pi_n^2(x) \cdot w(x) dx$$

Am calculat derivata de ordin 10 a funcţiei $cos(x)$, şi am înlocuit-o cu 1, ştiind că valoarea acesteia este mereu mai mică decât 1. Valoarea erorii este:

```
rest_final = 5.200760530480078e-10
```

Problema 2