Eletromagnetismo
Resumo Geral

Prof. Marco A.B. Terada
Universidade de Brasília

Fasores:

- Fasor = A $\angle\theta$ (amplitude e fase).
- Fontes senoidais: Comuns na engenharia elétrica, como por exemplo, a tensão de 110 V ou 220 V a 60 Hz (60 ciclos senoidais por segundo) levam à notação fasorial. Assim os campos elétricos e magnéticos são funções no tempo de A $\cos(wt + \theta)$ e/ou A sen $(w\,t + \theta)$, onde A é uma constante.
- Como pela lei de Euler, $e^{\pm j(wt+\theta)} = \cos(w\,t + \theta) \pm j\,\mathrm{sen}\,(w\,t + \theta)$, os campos (ou fontes) cosenoidais e/ou senoidais podem ser escritas na forma:
  $A\,e^{j(wt+\theta)} = A\,e^{jwt}\,e^{j\theta} = A\,e^{j\theta} = A\angle\theta$ (amplitude e fase), onde suprimiu-se o termo e^{jwt} (variação no tempo)
- Fase é o instante de tempo em que um fenômeno ocorre, relativo à uma referência.

- O processo tem o intuito de simplificar a matemática envolvida (derivadas e integrais no tempo são substituídas respectivamente por $j\omega$ ou $1/j\omega$, com $\omega = 2\pi f$.
- Para voltar ao domínio do tempo, basta multiplicar o fasor pelo termo e^{jwt} e reter apenas a parte real (ou imaginária se os campos eram senoidais). Na falta de maiores informações, converta tudo para coseno e retenha a parte real:
  $\text{sen}\,\theta = \cos(\theta - 90^0)$.

Símbolos:

- $\vec{E}$ é a intensidade de campo elétrico [volt/metro ou V/m] e $\vec{D}$ é a densidade de fluxo elétrico [coulomb/metro^2 ou C/m^2]:
- $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ onde $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, com $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ (ε é a permissividade elétrica [faraday/metro ou F/m])

- $\vec{H}$ é a intensidade de campo magnético [ampere/metro ou A/m] e $\vec{B}$ é a densidade de fluxo magnético [tesla ou weber/metro^2 ou T, Wb/m^2]:
- $\vec{B} = \mu\vec{H}$ onde $\mu = \mu_r\mu_0$, com $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (μ é a permeabilidade magnética [henry/metro ou H/m])

- $\vec{J}_T = \sigma\vec{E} + \vec{J}$ é a densidade total de corrente [ampere/metro^2 ou A/m^2] (i.e., densidades de corrente de condução adicionada à impressa ou fonte).
- σ é a condutividade elétrica [Siemens/m, S/m ou mhos], ρ_v é a densidade volumétrica de carga [Coulomb/metro^3 or C/m^3] e q é a carga [Coulomb ou C].
- ε, μ e σ são aqui considerados constantes, simplificando as equações (se apresentarem variações espaciais/tensoriais permanecem nas integrais e operadores vetoriais).

- “Portanto o fasor é uma modelagem matemática de fontes e sinais senoidais com o intuito de simplificar a análise e projetos de circuitos no estado permanente/Fourier (Laplace no transitório), onde a direção espacial dos sinais é determinada pelos fios ou trilhas do circuito.”
- “Em Eletromagnetismo o intuito é o mesmo, porém os fasores se tornam vetores espaciais complexos pois os sinais, campos ou ondas eletromagnéticas, possuem o grau de liberdade de percorrerem **direções arbitrárias** e genéricas.”
- “Dessa forma as partes reais e imaginárias do fasor são expressas em componentes vetoriais espaciais (i.e., *x, y e z*), ou até mesmo funções temporais dessas componentes, representando a direção e sentido de propagação do campo ou onda (“sinal” eletromagnético), além de como o campo ou onda varia espacialmente com o tempo (distribuidamente, ou **direcionalmente**, e localmente, ou seja **polarização**).”

Equações fasoriais (fontes senoidais) em formas integral e pontual/diferencial (identidades vetoriais, teoremas como o da divergência e outros recursos são usados na conversão entre as formas integral e pontual/diferencial):

Equações	**Campos Estáticos** (cargas estacionárias ou corrente contínua)	**Campos Dinâmicos** (variantes no tempo)
Força (Lorentz)	$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ (produto vetorial resulta em força perpendicular ao plano contendo $\vec{v}$ e $\vec{B}$)	
Coulomb e Faraday [M]	$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon R^2}$ (força ao longo de uma linha unindo as cargas)	$\oint_c \vec{E} \bullet d\vec{l} = -jw\mu \iint_s \vec{H} \bullet d\vec{s}$ $\nabla \times \vec{E} = -jw\mu\vec{H}$
Ampère [M]	$\oint_c \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{envolvida}$	$\oint_c \vec{H} \bullet d\vec{l} = jw\varepsilon \iint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} + \iint_s \vec{J}_T \bullet d\vec{s}$ $\nabla \times \vec{H} = jw\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_T$ onde $\vec{J}_T = \sigma\vec{E} + \vec{J}$ (impresso)

Gauss (elétrico) [M]	$$\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\int_v \rho_v dv}{\varepsilon} = \frac{q_{envolvido}}{\varepsilon}$$ $$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$
Gauss (magnético) [M]	$$\oint_s \vec{H} \bullet d\vec{s} = 0$$ $$\nabla \bullet \vec{H} = 0$$
Condições de Fronteira	Componentes tangenciais de $\vec{E}\,e\,\vec{H}$ e perpendiculares de $\vec{D}\,e\,\vec{B}$ devem ser iguais (contínuas) na fronteira entre materiais (em um condutor $\vec{E}$ é todo perpendicular e $\vec{B}$ tangencial)

[M] Denota as equações de Maxwell (campos dinâmicos). As equações na forma temporal possuem dependência explícita ao tempo: basta substituir $jw \rightarrow \partial / \partial_t$ (fontes não necessariamente senoidais) nas formas integral e pontual/diferencial.

Obs.: Existem diversas formas alternativas das equações gerais apresentadas na tabela. Historicamente, algumas dessas variantes foram inclusive apresentadas anteriormente, produto de experimentos em laboratório. Por exemplo, um formato muito utilizado que pode ser derivado da equação de força de Lorentz, é atualmente atribuído a Àmpere, antes do próprio Lorentz, Lenz ou mesmo Bio-Savart. Na ausência de campo elétrico a equação de força de Lorentz pode ser escrita como

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ou diferencialmente como $d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$

A corrente I é a derivada da carga no tempo (variação temporal de carga passando por uma superfície), $I = dq/dt$, assim em um comprimento diferencial $d\vec{l}$

$Id\vec{l} = \dfrac{dq}{dt}d\vec{l} = dq\dfrac{d\vec{l}}{dt} = dq\vec{v}$ onde $\vec{v}$ é a velocidade em [m/s]

Substituindo-se o primeiro termo após a igualdade pelo resultado acima chega-se a

$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ que integrado resulta na força de por exemplo uma espira de corrente na presença de um campo magnético (comportamento magnético): $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

Fawwaz T. Ullaby, “Fundamentals of Applied Electromagnetics”, Prentice-Hall

Table 3-1: Summary of vector relations.

	Cartesian Coordinates	Cylindrical Coordinates	Spherical Coordinates
Coordinate variables	x, y, z	r, ϕ, z	R, θ, ϕ
Vector representation, A =	$\hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$	$\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi + \hat{\mathbf{z}}A_z$	$\hat{\mathbf{R}}A_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi$
Magnitude of A, $\lvert\mathbf{A}\rvert$ =	$\sqrt[+]{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	$\sqrt[+]{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$	$\sqrt[+]{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$
Position vector $\overrightarrow{OP_1}$ =	$\hat{\mathbf{x}}x_1 + \hat{\mathbf{y}}y_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1$, for $P(x_1, y_1, z_1)$	$\hat{\mathbf{r}}r_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1$, for $P(r_1, \phi_1, z_1)$	$\hat{\mathbf{R}}R_1$, for $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$
Base vectors properties	$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1$ $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 0$ $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ $\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ $\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$	$\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1$ $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0$ $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}}$ $\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$	$\hat{\mathbf{R}}\cdot\hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = 1$ $\hat{\mathbf{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\mathbf{R}} = 0$ $\hat{\mathbf{R}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{R}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$
Dot product, A · B =	$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	$A_rB_r + A_\phi B_\phi + A_zB_z$	$A_RB_R + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$
Cross product, A × B =	$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_r & A_\phi & A_z \\ B_r & B_\phi & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ A_R & A_\theta & A_\phi \\ B_R & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix}$
Differential length, $d\mathbf{l}$ =	$\hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy + \hat{\mathbf{z}}\,dz$	$\hat{\mathbf{r}}\,dr + \hat{\boldsymbol{\phi}}r\,d\phi + \hat{\mathbf{z}}\,dz$	$\hat{\mathbf{R}}\,dR + \hat{\boldsymbol{\theta}}R\,d\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}R\sin\theta\,d\phi$
Differential surface areas	$d\mathbf{s}_x = \hat{\mathbf{x}}\,dy\,dz$ $d\mathbf{s}_y = \hat{\mathbf{y}}\,dx\,dz$ $d\mathbf{s}_z = \hat{\mathbf{z}}\,dx\,dy$	$d\mathbf{s}_r = \hat{\mathbf{r}}r\,d\phi\,dz$ $d\mathbf{s}_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}\,dr\,dz$ $d\mathbf{s}_z = \hat{\mathbf{z}}r\,dr\,d\phi$	$d\mathbf{s}_R = \hat{\mathbf{R}}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ $d\mathbf{s}_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}R\sin\theta\,dR\,d\phi$ $d\mathbf{s}_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}R\,dR\,d\theta$
Differential volume, dv =	$dx\,dy\,dz$	$r\,dr\,d\phi\,dz$	$R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi$

The base unit vectors obey the following right-hand cyclic relations:

$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}}, \qquad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{3.37}$$

and like all unit vectors, $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1$, and $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = 0$.

In cylindrical coordinates, a vector is expressed as

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}|\mathbf{A}| = \hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi + \hat{\mathbf{z}}A_z, \tag{3.38}$$

where A_r, A_ϕ, and A_z are the components of **A** along the $\hat{\mathbf{r}}$-, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-, and $\hat{\mathbf{z}}$-directions. The magnitude of **A** is obtained by applying Eq. (3.20), which gives

$$|\mathbf{A}| = \sqrt[+]{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt[+]{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}. \tag{3.39}$$

The position vector $\overrightarrow{OP}$ shown in Fig. 3-9 has components along r and z only. Thus,

$$\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OP} = \hat{\mathbf{r}}r_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1. \tag{3.40}$$

Table 3-2: Coordinate transformation relations.

Transformation	Coordinate Variables	Unit Vectors	Vector Components
Cartesian to cylindrical	$r = \sqrt[+]{x^2 + y^2}$ $\phi = \tan^{-1}(y/x)$ $z = z$	$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\phi$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$	$A_r = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi$ $A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$ $A_z = A_z$
Cylindrical to Cartesian	$x = r\cos\phi$ $y = r\sin\phi$ $z = z$	$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}}\cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi$ $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{r}}\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\phi$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$	$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi$ $A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi$ $A_z = A_z$
Cartesian to spherical	$R = \sqrt[+]{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}[\sqrt[+]{x^2 + y^2}/z]$ $\phi = \tan^{-1}(y/x)$	$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\sin\phi - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi$	$A_R = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta$ $A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$
Spherical to Cartesian	$x = R\sin\theta\cos\phi$ $y = R\sin\theta\sin\phi$ $z = R\cos\theta$	$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{R}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi$ $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{R}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\phi$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$	$A_x = A_R\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi$ $A_y = A_R\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi$ $A_z = A_R\cos\theta - A_\theta\sin\theta$
Cylindrical to spherical	$R = \sqrt[+]{r^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}(r/z)$ $\phi = \phi$	$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}}\sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$	$A_R = A_r\sin\theta + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_r\cos\theta - A_z\sin\theta$ $A_\phi = A_\phi$
Spherical to cylindrical	$r = R\sin\theta$ $\phi = \phi$ $z = R\cos\theta$	$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{R}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$	$A_r = A_R\sin\theta + A_\theta\cos\theta$ $A_\phi = A_\phi$ $A_z = A_R\cos\theta - A_\theta\sin\theta$

3-3.2 Cartesian to Spherical Transformations

From Fig. 3-18, we obtain the following relations between the Cartesian coordinates (x, y, z) and the spherical coordinates (R, θ, ϕ):

$$R = \sqrt[+]{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{3.60a}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt[+]{x^2 + y^2}}{z}\right], \tag{3.60b}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.60c}$$

and the converse relations are

$$x = R\sin\theta\cos\phi, \tag{3.61a}$$

$$y = R\sin\theta\sin\phi, \tag{3.61b}$$

$$z = R\cos\theta. \tag{3.61c}$$

The unit vector $\hat{\mathbf{R}}$ lies in the $\hat{\mathbf{r}}$–$\hat{\mathbf{z}}$ plane. Hence, it can be expressed as a linear combination of $\hat{\mathbf{r}}$ and $\hat{\mathbf{z}}$ as follows:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}}a + \hat{\mathbf{z}}b, \tag{3.62}$$

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, & LAPLACIAN OPERATORS

CARTESIAN (RECTANGULAR) COORDINATES (x, y, z)

$$\nabla V = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

CYLINDRICAL COORDINATES (r, ϕ, z)

$$\nabla V = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}}r & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

SPHERICAL COORDINATES (R, θ, ϕ)

$$\nabla V = \hat{\mathbf{R}}\frac{\partial V}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \hat{\boldsymbol{\theta}}R & \hat{\boldsymbol{\phi}}R\sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{R}}\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right] + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

GENERAL NOTES:

1) Vectors in the textbook are denoted by **boldface**, here arrows are used. Note that, in general, they are **vector phasors** or complex vectors (i.e., each vector component is a complex number or function).

2) QUICK REVIEW: vector phasor $\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$, where $A_x = A_{x1} + jA_{x2}$, $A_y = A_{y1} + jA_{y2}$, and $A_z = A_{z1} + jA_{z2}$. In general $\left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A} \bullet \vec{A}^*$, where "*" denotes the complex conjugate only (not also transposed as in linear algebra). Note that it denotes the absolute value with respect to both the real and imaginary parts as well as with respect to the coordinate directions. For example, If

$\vec{A} = (\mathrm{A_{x1}} + jA_{x2})\vec{a}_x + (\mathrm{A_{z1}} + jA_{z2})\vec{a}_z$ then

$\left|\vec{A}\right|^2 = \mathrm{A_{x1}^2} + A_{x2}^2 + \mathrm{A_{z1}^2} + A_{z2}^2$. Note that this is different than taking the dot-product only:

$\vec{A} \bullet \vec{A} = \mathrm{A_{x1}^2} + 2jA_{x1}A_{x2} - A_{x2}^2 + \mathrm{A_{z1}^2} + 2jA_{z1}A_{z2} - A_{z2}^2$

DOT PRODUCT

MathCad automatically includes the complex conjugate of the second vector (SO ALWAYS ADD THE COMPLEX CONJUGATE OF THE SECOND VECTOR TO CANCEL OUT AND BE CONSISTENT WITH EMAG TEXTS). Matlab does the same and also takes the complex conjugate of the result. As implemented in MathCad and Matlab the dot product is not symmetric (commutative), as defined, but when performing the dot product of a vector with itself the result is always real.

OK $$\begin{pmatrix} x1 + j \cdot x2 \\ 0 \\ z1 + j \cdot z2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 + j \cdot x2 \\ 0 \\ z1 + j \cdot z2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\overline{x1} - \overline{x2}j\right) \cdot (x1 + x2j) + \left(\overline{z1} - \overline{z2} \cdot j\right) \cdot (z1 + z2 \cdot j) \text{ expand } \rightarrow x1 \cdot \overline{x1} + x2 \cdot \overline{x2} + z1 \cdot \overline{z1} + z2 \cdot \overline{z2} - z1 \cdot \overline{z2} \cdot j - x1 \cdot \overline{x2} j + z2 \cdot \overline{z1} \cdot j + x2 \cdot \overline{x1} j$$

$$\begin{pmatrix} x1 + j \cdot x2 \\ 0 \\ z1 + j \cdot z2 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} x1 + j \cdot x2 \\ 0 \\ z1 + j \cdot z2 \end{pmatrix}} \rightarrow (x1 + x2j)^2 + (z1 + z2 \cdot j)^2 \text{ expand } \rightarrow x1^2 - x2^2 + z1^2 - z2^2 + 2 \cdot z1 \cdot z2 \cdot j + 2 \cdot x1 \cdot x2 j$$

Complex conjugate (overline) is done by placing the cursor and hitting "