Prof. F. Assis

Notas de Aula V1.2

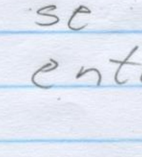
1 - Transformada de Laplace

Circuitos Elétricos

$$x(t) \rightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \rightarrow y(t) = T\{x(t)\}$$

- Linear
  - homogeneidade:
    $$T\{\alpha x(t)\} = \alpha T\{x(t)\}$$
  - aditividade
    $$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\}$$
- Invariante no tempo
  se $y(t) = T\{x(t)\}$
  então $T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$

Resposta ao impulso



se $x(t) = \delta(t)$ então
$$T\{\delta(t)\} \triangleq h(t)$$
para circuitos invariantes no tempo

$$T\{\delta(t-t_0)\} = h(t-t_0)$$

Análise de circuitos lineares e invariantes no tempo (CLIT)

Cálculo da saída de um CLIT

1- No domínio do tempo

EDO: Um CLIT tem sua entrada relacionada com sua saída na forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^{M} b_k \frac{d^r x(t)}{dt^r}; \; M \leq N$$

Convolução Linear: conhecendo-se $h(t)$ pode-se calcular a saída do CLIT a uma entrada genérica $x(t)$ por meio de.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau$$

2- No domínio das freqüências: por meio de transformadas.

Cálculo da saída CLIT por meio de transformadas

Autofunção e Autovalor

Definição: Uma "autofunção" de um CLIT é uma função que, quando aplicada à sua entrada, produz uma saída igual a ela mesma, a menos de uma constante multiplicativa denominada "autovalor"

$$x(t) = s(t) \longrightarrow \boxed{T\{.\}} \longrightarrow y(t) = \lambda s(t)$$

$s(t)$: é a autofunção do CLIT

λ: é o autovalor associado à $s(t)$

$$\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda = Re\{\lambda\} + J Im\{\lambda\}$$
$$= |\lambda| e^{J\phi_\lambda}$$
$$e \quad \phi_\lambda = \arctan\left(\frac{Im\{\lambda\}}{Re\{\lambda\}}\right)$$

—— ''' —— ''' ——

Afirmação 1: funções exponenciais complexas do tipo

$$s(t) = e^{st} \qquad s = \sigma + J\omega$$

são autofunções dos CLIT.

Demonstração: Calculando a saída do CLIT por meio da convolução linear obtem-se:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{st} \cdot \underbrace{\int_{0}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\lambda}$$

Observe de o autovalor λ se torna uma função da variável s. Especificamente o autovalor associado à variável s é conhecido como função de transferência do circuito e, denotado por:

$$\lambda(s) \equiv H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

Afirmação 2: A combinação linear de autofunções também é uma autofunção do CLIT.

Demonstração: Considere a função a seguir, construída pela combinação linear de funções $e^{s_k t}$

$$x(t) = \sum_k \alpha_k e^{s_k t}$$

A saída $y(t)$ pode ser calculada via convolução:

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_k \alpha_k e^{s_k(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \sum_k \alpha_k e^{s_k t} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s_k \tau}\, d\tau}_{H(s_k)}$$

$$= \sum_k \underbrace{\alpha_k H(s_k)}_{\beta_k} e^{s_k t}$$

$$= \sum_k \beta_k e^{s_k t}$$

Astrônomo e matemático francês

Transformada de Laplace

(Marquês Pierre Simon de Laplace - 1749-1827)

A transformada unilateral de Laplace de uma função (sinal) $x(t)$ é definida como:

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \quad \text{(unilateral)}$$

onde $s = \sigma + j\omega$ é denominada "frequência complexa"

Existência da transforma de Laplace

$$\left| \int_{0_-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \right| < \infty$$

$$\left| \int_{0_-}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\, dt \right| \leq \int_{0}^{\infty} \left| x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t} \right| dt$$

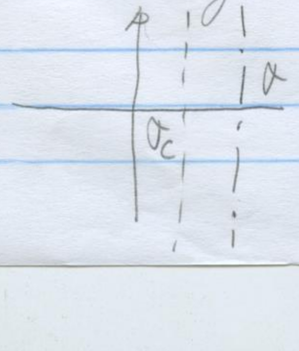
$$\leq \int_{0_-}^{\infty} \left| x(t)\, e^{-\sigma t} \right| \underbrace{\left| e^{-j\omega t} \right|}_{=1} dt \leq \int_{0}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt < \infty$$

condição suficiente

Transformada inversa de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

↳ integral de contorno → "caminho de Bromwich"



$\sigma_1 > \sigma_c$

Ex 1: Considere o exemplo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow y(t)$$

Se $x(t) = V_s \cos(\omega_0 t)$

onde

$$\omega_0 = 2\pi f_0 ; \; f_0 = 1\,kHz$$

e

$$y(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \; \theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

1- Determine o autovalor associado a autofução $x(t)$

2 - O que representa a fase? Qual é o seu valor temporal?

——— /// ——— /// ——— /// ———

Notação para a transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(S)$$

——— // ——— /// ———

Exercício 2 - Calcule a transformada de Laplace para as funções a seguir

a) $x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$$

b) $x(t) = u(t)$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

c) $x(t) = e^{-at} u(t)$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

d) $x(t) = \cos(\omega_0 t)\, u(t)$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\, u(t)\, e^{-st}\, dt$$

observe que: $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}\right)$

Logo:

$$X(s) = \frac{1}{2}\int_{0_-}^{\infty}\left(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}\right)e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{0_-}^{\infty} e^{-(s-j\omega_0)t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{s-j\omega_0}e^{-(s-j\omega_0)t}\Big|_{0_-}^{\infty} + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{s+j\omega_0}e^{-(s+j\omega_0)t}\Big|_{0_-}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s+j\omega_0+s-j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+\omega_0)}$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

e) $x(t) = sen(\omega_0 t)\,u(t)$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} sen(\omega_0 t)\, e^{-st}\, dt$$

onde $sen(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left\{ e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0} \right\}$

substituindo em $X(s)$

$$X(s) = \frac{1}{2j}\int_{0_-}^{\infty} \left\{ e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0} \right\} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{ \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s-j\omega)t}\, dt - \int_{0}^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t}\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{ -\frac{1}{s-j\omega_0}\, e^{-(s-j\omega_0)t} \Big|_{0_-}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s+j\omega_0}\, e^{-s(s+j\omega_0)t} \Big|_{0_-}^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{ \frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\, \frac{s+j\omega_0 - (s-j\omega_0)}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}$$

$$= \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

1-Linearidade

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)\} = \\ = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$$

2-Escalonamento temporal

$$\mathcal{L}\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} X(s/\alpha)$$

3-Deslocamento temporal

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as} X(s)$$

4-Deslocamento frequencial

$$\mathcal{L}\{e^{-at} x(t)\} = X(s+a)$$

5-Diferenciação temporal

$$\mathcal{L}\{d\,x(t)/dt\} = s X(s) - x(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1} f(0^-) - \\ - s^{n-2} \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0^-} \ldots - \left.\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

6-Diferenciação frequencial

$$\mathcal{L}\{t\,x(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$$

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

7- Integral real

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} x(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}X(s) + c$$

8- Integral complexa

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}x(t)\right\} = \int_{s}^{\infty} X(s)\,ds$$

9- Convolução Linear

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s)$$

10- Teorema do valor final

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

11- Teorema do valor inicial

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

Exercício 3 - Usando "inspeção + propriedades" determine a transformada de Laplace para as funções a seguir:

a) $t\,u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{0-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$

b) $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$

c) $t\,e^{-at}u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = -\frac{0-1}{(s+a)^2} = \frac{1}{(s+a)^2}$

d) $e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

e) $e^{-at}\operatorname{sen}(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

f) $t\cos(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\}$

$= -\frac{s^2+\omega_0^2-(s(2s))}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

g) $t\operatorname{sen}(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left\{\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right\}$

$= -\frac{0-2s\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{2s\omega_0}{(s^2+\omega_0)^2}$

h) $t\,e^{-at}\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right\}$

$= -\frac{(s+a)^2+\omega_0^2-(s+a)2(s+a)}{((s+a)^2+\omega^2)^2}$

$= -\frac{-(s+a)^2+\omega_0^2}{((s+a)^2+\omega_0^2)^2}$

$= \frac{(s+a)^2-\omega_0^2}{((s+a)^2+\omega_0^2)^2}$

usando a propriedade $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$ resulta

$$\mathcal{L}\{e^{-at}(t\cos(\omega_0 t)u(t))\} = \frac{(s+a)^2 - \omega_0^2}{((s+a)^2+\omega_0^2)^2}$$

i) $te^{-at}\operatorname{sen}(\omega_0 t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left\{\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right\}$

$$= -\frac{0 - \omega_0 2(s+a)}{((s+a)^2+\omega_0^2)^2} = \frac{2(s+a)\omega_0}{((s+a)^2+\omega_0^2)^2}$$

usando a propriedade do deslocamento em frequência

$$\mathcal{L}\{e^{-at}(t\operatorname{sen}(\omega_0 t)u(t))\} =$$
$$= \frac{2(s+a)\omega_0}{((s+a)^2+\omega_0^2)^2}$$

Exercício 1 - Utilizando inspeção + propriedades determine as transformadas de Laplaces para as funções a seguir:

1- $f(t) = \{e^{-4t} + 5\cos(2t)\}\, u(t)$ (Linearidade)

$$F(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{5s}{s^2+4}$$

2- $x(t) = f(t/2)$; $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F(s/\alpha)$

(escalonamento temporal)

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = 2F(2s)$$

$$= 2\left\{\frac{1}{(2s)+4} + \frac{5(2s)}{(2s)^2+4}\right\}$$

$$= \frac{2}{2s+4} + \frac{20s}{4s^2+4}$$

$$= \frac{1}{s+2} + \frac{5s}{s^2+1}$$

3 - $g(t) = x(t-2)$; $\mathcal{L}\{g(t-a)\} = e^{-as} G(s)$

(deslocamento temporal)

$$G(s) = e^{-2s} X(s) = \frac{e^{-2s}}{s+2} + \frac{5s e^{-2s}}{s^2+1}$$

4 - $y(t) = e^{-2t} g(t)$ (deslocamento frequencial)

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-2t} g(t)\} = G(s+2)$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2(s+2)}}{(s+2)+2} + \frac{(s+2)e^{-2(s+2)}}{(s+2)^2+1}$$

$$= \frac{e^{-2(s+2)}}{s+4} + \frac{(s+2)e^{-2(s+2)}}{s^2+4s+5}$$

Função de Transferência do CLIT

Vimos que, no domínio do tempo, temos duas maneiras de computar a saída de um CLIT

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k Y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^{M} b_r \frac{d^r Y(t)}{dt^r};\ M \leq N \quad (2)$$

Em outra vertente, verificamos que, o autovalor associado a autofunção e^{st}; $s = \sigma + j\omega$, pode ser calculada por meio de

$$H(S) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt \quad (3)$$

onde H(S) foi chamada de "função de transferência" do CLIT. A transformada de Laplace foi derivada quando aplicamos (3) para uma função (sinal) genérica x(t)

$$X(S) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \quad (4)$$

Nesta linha de raciocínio, verificamos que $H(S)$ corresponde à transformada de Laplace de $h(t)$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} \qquad (5)$$

Tomando a transformada de Laplace em (1), resulta:

$$Y(S) = H(S)\,X(S) \qquad (6)$$

e

$$\boxed{H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}} \qquad (7)$$

A denominação de "função de transferência" advém de (6).

Supondo que o CLIT seja "relaxado" ($y(t)\big|_{t=0} = 0$ se $x(t)\big|_{t=0} = 0$) e tomando a transformada de Laplace em ambos lados da eq. (2), obtemos

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}\right\}$$

com base na linearidade, podemos rescrever

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{r=0}^{M} b_r\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^r x(t)}{dt^r}\right\} \qquad (8)$$

observe que (como o CLIT é "relaxado")

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = s^k Y(s) \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8) obtemos

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{r=0}^{M} b_r s^r X(s)$$

$$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{r=0}^{M} b_r s^r \quad (10)$$

manipulando (10) e observando (7)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r s^r}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = H(s) \quad (11)$$

conclui-se que, para CLIT's, H(s) é da forma:

$$\boxed{H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_N s^N}{b_0 + b_1 s + \dots + b_M s^M} = \frac{N(s)}{D(s)}} \quad (12)$$

Um olhar sobre H(s)

H(S) é uma função complexa da variável complexa s. São válidas as relações

$$H(s) = Re\{H(S)\} + j\,Im\{H(S)\}$$
$$= |H(S)|\, e^{j\phi_H(s)}$$

onde

$$|H(S)| = \sqrt{Re^2\{H(S)\} + Im^2\{H(S)\}}$$

e

$$\Phi_H(s) = arc\ tan\left(\frac{Im\{H(S)\}}{Re\{H(S)\}}\right)$$

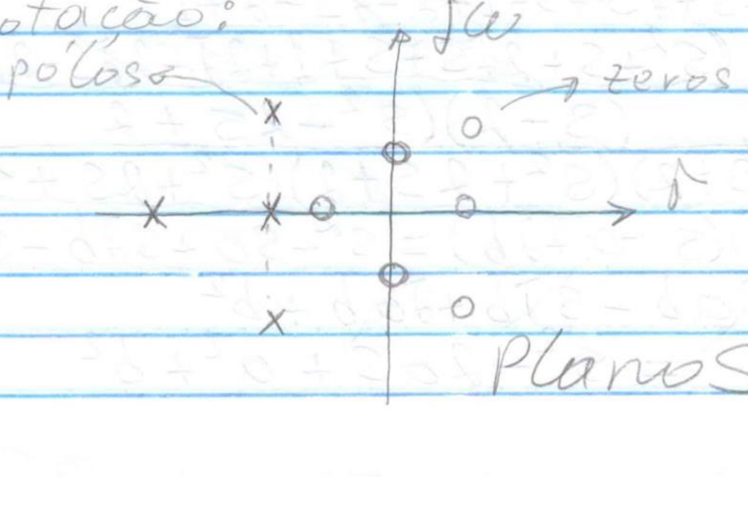
Como H(S) é uma função racional em S

$$H(s) = \frac{N(S)}{D(S)} = \beta\,\frac{(S-Z_1)(S-Z_2)\ldots(S-Z_M)}{(S-P_1)(S-P_2)\ldots(S-P_N)}$$

então:

$$N(S) = 0 \Rightarrow \text{zeros de } H(s)$$
$$D(s) = 0 \Rightarrow \text{pólos de } H(s)$$

Notação:

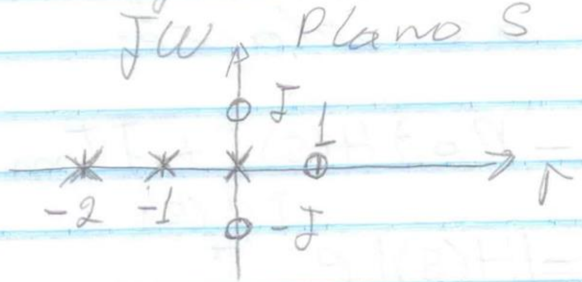


$$|H(S)| = \frac{|N(S)|}{|D(S)|}$$

$$\measuredangle H(S) = \measuredangle N(S) + -\measuredangle D(S)$$

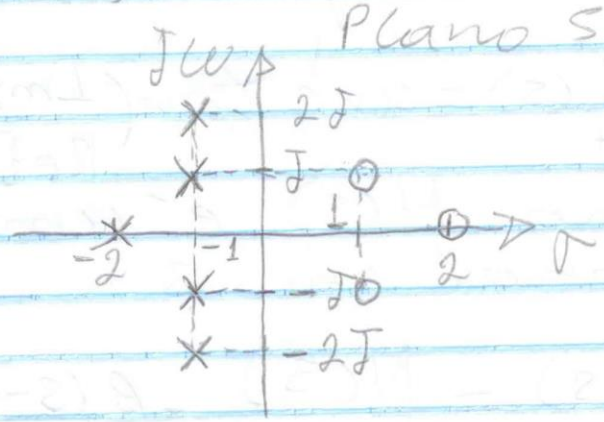
Exercício - Construa a função de transferência de um CLIT a partir do diagrama de polos e zeros

a)



$$H(s) = \frac{(s-j)(s+j)(s-1)}{(s-0)(s+1)(s+2)} = \frac{(s^2+1)(s-1)}{s(s+1)(s+2}$$

b)



$$H(s) = \frac{(s-2)(s-1-j)(s-1+j)}{(s+2)(s+1-j)(s+1+j)(s+1-2j)(s+1+2j)}$$

$$= \frac{(s+2)(s^2-s+\cancel{js}-s+1-\cancel{j}-\cancel{js}+\cancel{j}+1)}{(s+2)(s^2+s+\cancel{js}+s+1+\cancel{j}-\cancel{js}-\cancel{j}+1)(s^2+s+\cancel{2js}+s+1+\cancel{2j}-\cancel{2js}-\cancel{2j}+4)}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{(s-2)(s^2-2s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}}$$

$$(s-a-jb)(s-a+jb) = s^2-sa+\cancel{sjb}-sa+a^2-\cancel{jab}-\cancel{sjb}+\cancel{jab}+b^2$$

$$= s^2-2as+a^2+b^2$$

Estabilidade de um CLIT

BIBO estável: Um CLIT é dito BIBO estável se para toda e qualquer entrada limitada a saída do CLIT é limitada.
(BIBO - Bounded Input - Bounded Output)
Considere a saída do CLIT calculada por:

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) \, d\tau$$

se a entrada $x(t)$ é limitada, existe uma constante C tal que:

$$|x(t)| \leq C < \infty \; ;$$

Tomando o módulo da saída, podemos escrever

$$|Y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) \, d\tau \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) X(t-\tau)| \, d\tau$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |X(t-\tau)| \, d\tau$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau$$

Conclui-se que, a saída $y(t)$ é limitada se a integral do valor absoluto de $h(t)$ converge, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

No domínio de Laplace, $H(s)$ pode ser escrita como:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \beta \frac{\prod_{r=1}^{M} (s - z_r)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)}$$

onde z_i e p_i são o i-ésimo zero e i-ésimo pólo de $H(s)$. $H(s)$ pode também ser representada pela combinação linear de frações parciais

$$H(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_N}{s-p_N} = \sum_{r=1}^{N} \frac{k_r}{s-p_r}$$

onde

k_i; $i = 1, 2, \dots, N$ é uma constante.

Sabe-se que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{r=1}^{N} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_r}{s-p_r}\right\}$$

Considere uma fração r genérica onde P_r é um pólo real, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_r}{S-P_r}\right\} = K_r e^{P_r t} u(t)$$

Aplicando a condição de estabilidade para a transformada inversa da fração parcial, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_r e^{P_r t} u(t)|\, dt = |K_r| \int_{-\infty}^{\infty} |e^{P_r t}|\, dt < \infty$$

Da última equação verifica-se que

se $P_r \geq 0 \Rightarrow$ a integral diverge

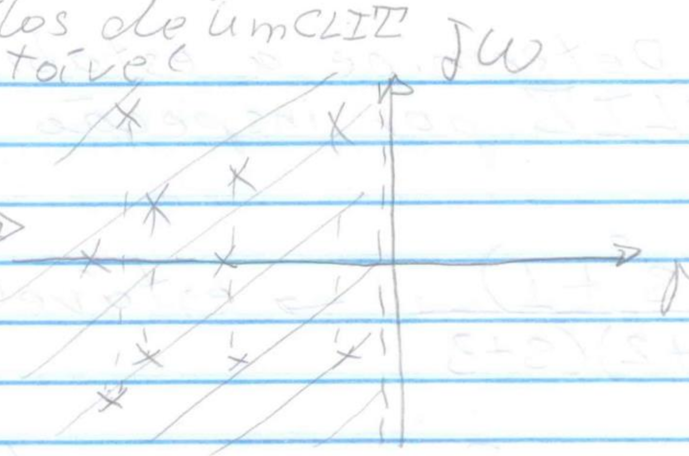
se $P_r < 0 \Rightarrow$ a integral converge.

Conclusão:

Para que o CLIT seja estável, a integral do módulo da transformada inversa de Laplace para cada fração parcial, tem que convergir. Logo:

O CLIT é dito estável se todos os pólos de H(s) estão no semi-plano esquerdo do plano s.

Localização dos pólos de um CLIT estável



Solução de circuitos no domínio de Laplace

A saída de um CLIT no domínio de Laplace pode ser computada por meio de:

$$Y(S) = H(S)X(S)$$

onde:

$$H(S) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$
$$X(S) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

A saída do CLIT no domínio do tempo é dada por:

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(S)\}$$

$Y(S)$ é uma função racional em S.

Exercício - Determine a estabilidade do CLI~~T~~ por inspeção de $H(S)$

a) $H(S) = \frac{(S-1)(S^2+1)}{(S+1)(S+2)(S+3}$ → estável

b) $H(S) = \frac{S}{(S^2-1)(S+2)}$ → instável

c) $H(S) = \frac{S^2+2S+1}{S(S+1)(S+2)}$ → instável

d) $H(S) = \frac{S^2+1}{(S+1)(S^2+4)}$ → instável

Transformada Inversa de Laplace

Técnica da expansão em frações parciais.

$$Y(S) = H(S)\,X(S)$$

$$= \frac{b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + \dots + b_M S^M}{a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_N S^N} ; M \leq N$$

$$= \frac{N(S)}{D(S)}$$

Algoritmo

Passo 1 - Verificar se Grau$\{N(S)\}$ = Grau$\{D(S)\}$, caso verdadeiro: proceder a divisão polinomial.

$$\begin{array}{l|l} N(S) & D(S) \\ \hline N_1(S) & Q(S) \end{array} \quad , \quad Q(S) = \frac{b_N}{a_N}$$

$$Y(S) = \frac{b_N}{a_N} + \frac{N_1(S)}{D(S)} = \frac{b_N}{a_N} + Y'(S)$$

onde Grau$\{N_1(S)\} <$ Grau$\{D(S)\}$

Passo 2 - Fatorar $D(S)$

$$D(S) = 0 \Rightarrow D(S) = (S - P_1)(S - P_2)\dots(S - P_N)$$

$\Rightarrow$ Pólos de $Y(S)$

Passo 3 - Expandir $Y'(S)$ em frações parciais e calcular resíduos

$$Y'(S) = \frac{k_1}{S-P_1} + \frac{k_2}{S-P_2} + \dots + \frac{k_N}{S-P_N}$$

onde P_i é o i-ésimo pólo e k_i o i-esimo resíduo a sociado ao pólo P_i.

Existem três possibilidades distintas com respeito aos pólos de $Y'(S)$ - também chamados de "modos naturais do circuito".

Caso 1 - $Y'(S)$ possui somente singularidades reais e simples (distintas)

Caso 2 - $Y'(S)$ possui singularidade de multiplicidade "q".

Caso 3 - $Y'(S)$ possui singularidades complexas conjugadas.

— " — " —

Passo 4 - obter a transformada inversa de Laplace usando "inspeção + propriedades".

Caso 1 - $Y'(s)$ possui somente pólos reais e simples.

A expansão em frações parciais de $Y'(s)$ fica na forma

$$Y'(s) = \frac{k_1}{s-P_1} + \frac{k_2}{s-P_2} + \dots + \frac{k_N}{s-P_N}$$

onde P_i e $K_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \dots, N$.
o resíduo k_i é calculado por:

$$k_i = (s-P_i)\,Y'(s)\Big|_{s=P_i}$$

A transformada inversa de $Y'(s)$ fica na forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y'(s)\} = Y'(t) =$$

$$= \{k_1 e^{P_1 t} + k_2 e^{P_2 t} + \dots + k_N e^{P_N t}\}u(t)$$

observe que $\mathcal{L}^{-1}\{b_N/a_N\} = \frac{b_N}{a_N}\delta(t)$

Exercício - Conhecendo-se $H(s)$, determine a resposta impulsional do CLIT

$$H(s) = \frac{s^3 - 1}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

sabe-se que $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

Algoritmo

Passo 1- Grau$\{N(s)\}$ = Grau$\{D(s)\}$ = 3
$\Rightarrow$ Divisão polinomial

$$D(s) = (s^2+3s+2)(s+4) = s^3+7s^2+14s+8$$

$$\begin{array}{r|l} s^3 \qquad\qquad -1 & s^3+7s^2+14s+8 \\ \hline -(s^3+7s^2+14s+8) & 1 \\ -7s^2-14s-9 & \end{array}$$

$$H(s) = 1 + \overbrace{\frac{-7s^2-14s-9}{(s+1)(s+2)(s+4)}}^{Y'(s)} = 1 + Y'(s)$$

Passo 2 - Fatorar $D(s)$

$$D(s) = (s+1)(s+2)(s+4)$$

Passo 3 - Expandir em frações parciais e calcular resíduos.

$$Y'(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+4}$$

Cálculo dos resíduos

$$k_1 = (s+1)\,Y'(s)\Big|_{s=-1}$$

$$= \cancel{(s+1)}\left\{-\frac{7s^2+14s+9}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-1}$$

$$k_1 = -\frac{7-14+9}{(1)(3)} = -\frac{2}{3}$$

$$k_2 = \cancel{(s+2)}\left\{-\frac{7s^2+14s+9}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+4)}\right\}\Bigg|_{s=-2}$$

$$= -\frac{28-28+9}{(-1)(2)} = \frac{9}{2}$$

$$k_3 = \cancel{(s+4)}\left\{-\frac{7s^2+14s+9}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+4)}}\right\}\Bigg|_{s=-4}$$

$$= -\frac{112-56+9}{(-3)(-2)} = -\frac{65}{6}$$

Logo:

$$Y(s) = 1 - \frac{2/3}{s+1} + \frac{9/2}{s+2} - \frac{65/6}{s+4}$$

$$\downarrow$$

$$Y(t) = \delta(t) - \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{9}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$-\frac{65}{6}e^{-4t}u(t)$$

caso 2 - $Y'(S)$ possui singularidade de multiplicidade "q".

$Y'(S)$ é da forma:

$$Y'(S) = \frac{N_1(S)}{D(S)} = \frac{N_1(S)}{(S-P_1)^q D_1(S)}$$

Para efeito de simplificação, mas sem perda de generalidade, vamos fazer:

$$Y'(S) = \frac{R(S)}{(S-P_1)^q} = \frac{k_1}{S-P_1} + \frac{k_2}{(S-P_1)^2} + \cdots + \frac{k_q}{(S-P_1)^q}$$

$R(S)$ pode ser obtido fazendo

$$R(S) = (S-P_1)^q Y'(S)$$

$$= k_1(S-P_1)^{q-1} + k_2(S-P_1)^{q-2} + \cdots$$

$$\cdots + k_{q-2}(S-P_1)^2 + k_{q-1}(S-P_1) + k_q$$

cálculo dos resíduos

$$k_q = R(S)\Big|_{S=P_1}$$

$$\frac{dR(S)}{dS} = (q-1)(S-P_1)^{q-2} + (q-2)(S-P_1)^{q-3} + \cdots$$

$$\cdots + 2k_{q-2}(S-P_1) + k_{q-1}$$

$$K_{q-1} = \left.\frac{dR(S)}{dS}\right|_{S=P_1}$$

— /// —

$$\frac{d^2R(S)}{dS^2} = (q-2)(q-1)(S-P_1)^{q-3} +$$
$$+ (q-3)(q-2)(S-P_1)^{q-4} + \dots + 2K_{q-2}$$

Logo:

$$K_{q-2} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2R(S)}{dS^2}\right|_{S=P_1}$$

Por indução:

$$K_{q-r} = \frac{1}{r!}\left.\frac{d^rR(S)}{dS^r}\right|_{S=P_1}$$

— /// — /// — /// —

Exercício – Conhecendo-se a função de transferência do CLIT, determine a resposta a

$$x(t) = e^{-t}\,u(t) \leftrightarrow X(S) = \frac{1}{S+1}$$

e $H(S) = \dfrac{1+S+S^2}{S^2+S}$

Logo

$$Y(S) = \frac{1+S+S^2}{(S+1)(S^2+S)} = \frac{1+S+S^2}{S(S+1)^2}$$
$$= \frac{N(S)}{D(S)}$$

Algoritmo

Passo 1 - Grau$\{N(S)\}=2 < $ Grau$\{D(S)\}=3$
=> Passar para o passo 2.

Passo 2 - Fatorar $D(S)$

$$D(S) = S(S+1)^2$$

Passo 3 - Expandir em frações parciais e calcular resíduos:

$$Y(S) = \frac{k_1}{S} + \frac{k_2}{S+1} + \frac{k_3}{(S+1)^2}$$

Cálculo dos resíduos

$$k_1 = SY(S)\Big|_{S=0} = \cancel{S}\,\frac{1+S+S^2}{\cancel{S}(S+1)^2}\Big|_{S=0} = 1$$

$$R(S) = (S+1)^2\,Y(S) = \cancel{(S+1)^2}\,\frac{1+S+S^2}{S\cancel{(S+1)^2}}$$

$$= \frac{1+S+S^2}{S}$$

$$k_3 = R(S)\Big|_{S=-1} = \frac{1+(-1)+1}{-1} = -1$$

$$k_2 = \frac{dR(S)}{dS}\Big|_{S=-1} = \frac{(1+2S)S-(1+S+S^2)}{S^2}\Big|_{S=-1}$$

$$= \frac{(1-2)(-1)-(1-1+1)}{1} = \frac{1-1}{1} = 0$$

Passo 4 - Utilizar "inspeção + propriedades" para obter a transformada inversa de Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} \; ; \; \mathcal{L}\{te^{-t}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = u(t) - te^{-t}u(t)$$

Caso 3 - $Y'(s)$ possui raízes complexas conjugadas

$Y'(s)$ é da forma:

$$Y'(s) = \frac{N(s)}{(s-\sigma_1+j\omega_1)(s-\sigma_1-j\omega_1)D_1(s)}$$

A expansão em frações parciais fica na forma:

$$Y'(s) = \frac{k_1}{s-\sigma_1+\omega_1} + \frac{k_1^*}{s-\sigma_1-j\omega_1} + \cdots$$

k_1 e k_1^* são resíduos complexos conjugados

$$k_1 = a + jb \quad k_1^* = a - jb$$

As raízes complexas conjugadas devem ser aglutinadas em uma função bi-quadrático para efeito do uso de "inspeção + propriedades".

$$Y'(S) = \frac{a+jb}{S-\sigma_1+j\omega_1} + \frac{a-jb}{S-\sigma_1-j\omega_1} + \cdots$$

$$= \frac{(a+jb)(S-\sigma_1-j\omega_1)+(a-jb)(S-\sigma_1+j\omega_1)}{(S-\sigma_1+j\omega_1)(S-\sigma_1-j\omega_1)} + \cdots$$

$$= \frac{2(a\sigma_1+\omega_1 b)+2aS}{\sigma_1^2+\omega_1^2+2\sigma_1 S+S^2} + \cdots$$

$$\cong \frac{b_0+b_1 S}{a_0+a_1 S+a_2 S^2} + \cdots$$

— /// — /// —

Exercício - Calcule $h(t)$ a partir de $H(S)$ dada

$$H(S) = \frac{2S}{(S+3)(S^2+2S+2)} = \frac{N(S)}{D(S)}$$

Aplicando o Algoritmo de inversão

Passo 1 - $\text{Grau}\{N(S)\} = 1 < \text{Grau}\{D(S)\} = 3$
$\Rightarrow$ Passar para o passo 2.

Passo 2 - Fatorar $D(s)$

$$D(s) = (s+3)(s^2+2s+2)$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2J}{2} = -1 \pm J$$

Logo:

$$D(s) = (s+3)(s+1-J)(s+1+J)$$

Passo 3 - Expandir em frações parciais e calcular resíduos

$$H(s) = \frac{K_1}{s+3} + \frac{K_2}{s+1-J} + \frac{K_2^*}{s+1+J}$$

Cálculo de resíduos:

$$K_1 = (s+3)H(s)\Big|_{s=-3}$$

$$= \cancel{(s+3)} \frac{2s}{\cancel{(s+3)}(s^2+2s+2)}\Bigg|_{s=-3}$$

$$= \frac{-6}{9-6+2} = -\frac{6}{5}$$

$$K_2 = \cancel{(s+1-J)} \frac{2s}{(s+3)\cancel{(s+1-J)}(s+1+J)}\Bigg|_{s=-1+J}$$

$$= \frac{2(-1+J)}{(-1+J+3)(\cancel{-1}+J+\cancel{1}+J)}$$

$$H(s) = \frac{-2+2j}{(2+j)2j} = \frac{-2+2j}{-2+4j} = \frac{-1+j}{-1+2j}$$

$$= \frac{-1+j}{-1+2j} \times \frac{-1-2j}{-1-2j} =$$

$$= \frac{1}{5}(1+2j-j+2) = \frac{1}{5}(3+j)$$

$$k_2 = \frac{1}{5}(3-j) \; ; \; k_1^* = \frac{1}{5}(3+j)$$

Escrevendo a expansão em frações parciais, obtem-se

$$H(s) = \frac{-6/5}{s+3} + \frac{1}{5}\left\{\frac{3+j}{s+1-j} + \frac{3-j}{s+1+j}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\frac{-6}{s+3} + \frac{(3+j)(s+1+j)+(3-j)(s+1-j)}{(s+1-j)(s+1+j)}\right\}$$

O numerador da fração bi-quadratica

$$3s+3+\cancel{3j}+\cancel{js}+\cancel{j}-1+3s+3-\cancel{3j}-\cancel{js}$$
$$-\cancel{j}-1 = 6s+4$$

$$H(s) = \frac{1}{5}\left\{\frac{-6}{s+3} + \frac{6s+4}{s^2+2s+2}\right\}$$

$$s^2+2s+2 = (s+1)^2+1; \text{ logo:}$$

$$H(s) = \frac{6}{5}\left\{\frac{-1}{s+3} + \frac{s+2/3}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$H(s) = \frac{6}{5}\left\{-\frac{1}{s+3} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1/3}{(s+1)^2+1}\right\}$$

Passo 4 - Obter a transformada inversa de Laplace usando "inspeção + propriedades".

$$h(t) = \frac{6}{5}\left\{-e^{-3t}u(t) + e^{-t}\cos(t)\,u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\,u(t)\right\}$$

——— /// ——— /// ———

Outra solução para a expansão em frações parciais

$$H(s) = \frac{2s}{(s+3)(s^2+2s+2)} =$$

$$= \frac{A}{s+3} + \frac{B+Cs}{s^2+2s+2}$$

$$= \frac{A(s^2+2s+2)+(B+Cs)(s+3)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$2s = As^2 + 2As + 2A + Bs + 3B + Cs^2 + 3Cs$$

$$\begin{cases} (A+C)s^2 = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow \boxed{A = -C} \\ (2A+B+3C)s = 2s \\ (2A+3B) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2C + B + 3C = 2 \Rightarrow \boxed{B = 2 - C} \\ -2C + 3B = 0 \end{cases}$$

$$-2C + 3(2 - C) = 0$$

$$-2C + 6 - 3C = 0 \Rightarrow \boxed{C = +6/5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= -C = -6/5 \\ B &= 2 - C = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}}$$

Logo:

$$\boxed{H(S) = \frac{-6/5}{S+3} + \frac{4/5 + (6/5)S}{S^2 + 2S + 2}}$$