Prof. Assis

Notas de Aula V1.0

Transformada de Fourier em tempo contínuo

- Derivação a partir da Transformada bilateral de Laplace
- Existência da transformada de Fourier
- Transformada de Fourier de funções não-absolutamente somáveis
- Transformada de Fourier da série de Fourier
- Propriedades da Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Obtivemos a transformada de Laplace a partir da convolução linear e mostrando que $e^{-st}u(t)$, $s = \sigma + j\omega$, é uma autofunção de um circuito linear.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Pela convolução linear:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

se $x(t) = e^{-st}u(t) = s(t)$ (2)

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s(t-\tau)}\, d\tau \qquad (3)$$

$$= \underbrace{\left\{ \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \right\}}_{\lambda(s)} \cdot e^{-st} = \lambda(s) e^{-st} \qquad (4)$$

$\lambda(s) \equiv H(s)$ é o autovalor associado a autofunção $e^{-st}u(t)$

— ,,, — ,,, —

Transformado unilateral de Laplace

$$H(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (5)$$

Transformada bilateral de Laplace

A transformada bilateral de Laplace é definida como:

$$\begin{cases} X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt & (6) \\ x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(s) e^{st} ds & (7) \end{cases}$$

Analogamente ao caso unilateral, podemos avaliar $X(s)$ sobre o eixo $j\omega$, que corresponde ao domínio das senoides. Assim, fazendo $s = j\omega$ obtem-se:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8)$$

e

$$x(t) = \frac{1}{2\pi \cancel{j}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d(\cancel{j}\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9)$$

As equações (8) e (9) são conhecidas com par de transformadas de Fourier.

Existência da transformada de Fourier

A transformada de Fourier existe se:

$$|X(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| < \infty \quad (10)$$

observe que:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) e^{-j\omega t} \right| dt$$

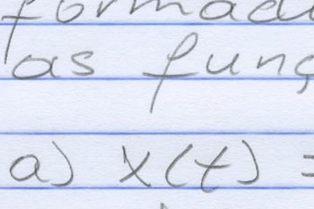
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{1} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (11)$$

Esta condição de existência é dita "suficiente".

Exercício: Calcule a transformada de Fourier para as funções a seguir

a) $x(t) = \delta(t)$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (12)$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1 \quad (13)$$

b) $x(t)=e^{-at}u(t),\ a>0$

Aplicando a definição da transformada de Fourier

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{-1}{j\omega+a}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{j\omega+a} \quad (14)$$

Observe que este resulta é equivalente a

$$X(j\omega)=X(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{s+a}\Big|_{s=j\omega}$$

(15)

Notação:
$X(j\omega)=F\{x(t)\}$
$x(t)=F^{-1}\{X(j\omega)\}$; $x(t)\longleftrightarrow X(j\omega)$

Transformada de Fourier de funções não-absolutamente somáveis

Hipótese: Considere uma função $X(J\omega)$ com pontos onde é divergente expressos como:

$$X(J\omega) = \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k) \quad (16)$$

A transformada inversa de Fourier pode ser escrita como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k) e^{J\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_k a_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_k) e^{J\omega t} d\omega}_{e^{J\omega_k t}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_k a_k e^{J\omega_k t} \quad (17)$$

Resumindo:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \sum_k a_k e^{J\omega_k t} \longleftrightarrow \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k)} \quad (18)$$

ou

$$\boxed{\sum_k a_k e^{j\omega_k t} \longleftrightarrow 2\pi \sum_k a_k \delta(\omega-\omega_k) \quad (19)}$$

Exercício: Calcule a transformada de Fourier para as funções a seguir

a) $f(t) = 1 \ \forall t$

$$= e^{j0t}$$

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \qquad (20)$$

b) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$

$$= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

Logo:

$$F(j\omega) = \pi\{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\}$$

c) $f(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$

$$= \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

$$= j\pi\{\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\}$$

$$(21)$$

Transformada de Fourier da série de Fourier

Vimos que uma função periódica $f(t)$ pode ser representada como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

Tomando a transformada de Fourier em ambos lados e usando o resultado da eq. (19), obtem-se

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

1 - Linearidade

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} =$$

$$= \alpha_1 F_1(j\omega) + \alpha_2 F_2(j\omega)$$

2 - Escalonamento temporal

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(j\omega/a)$$

3 - Deslocamento temporal

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{j\omega t_0} F(j\omega)$$

4 - Multiplicação por função exponencial

$$\mathcal{F}\{e^{-at} f(t)\} = F(j\omega + a)$$

5 - Modulação em amplitude

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} =$$

$$\frac{1}{2}\{F(j\omega - \omega_0) + F(j\omega + \omega_0)\}$$

6 - Convolução Linear

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} =$$
$$= F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

7 - Transformada da derivada

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(j\omega)$$

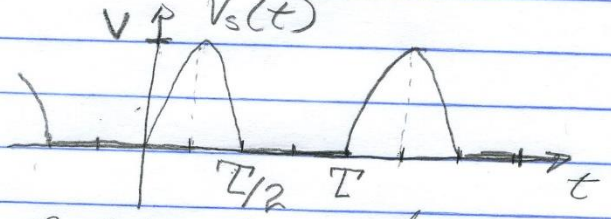
8 - Produto no domínio do tempo

$$\mathcal{F}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\tau) F(j\omega - j\tau)\, d\tau$$

9 - Diferenciação no domínio das frequência

$$\mathcal{F}\{t f(t)\} = j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

Exercício – Para a forma de onda a seguir determine: a série exponencial de Fourier, a série trigonométrica de Fourier, a série compacta de Fourier, a transformada de Fourier do sinal



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

1 – Cálculo da série exponencial de Fourier

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T V_s(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} V \operatorname{sen}(\omega_0 t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{V}{T}\int_0^{T/2} \frac{1}{2j}\left\{ e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right\} e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{-jV}{2T}\left\{ \int_0^{T/2} e^{j(1-n)\omega_0 t}\, dt \; + \right.$$

$$\left. - \int_0^{T/2} e^{-j(1+n)\omega_0 t}\, dt \right\}$$

$$= \frac{-jV}{2T}\left\{ \frac{1}{\cancel{j}(1-n)\omega_0}\, e^{j(1-n)\omega_0 t} \Big|_0^{T/2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\cancel{j}(1+n)\omega_0}\, e^{-j(1+n)\omega_0 t} \Big|_0^{T/2}$$

$$F_n = \frac{-V}{2\cancel{T}}\left\{\frac{\cancel{T}}{(1-n)2\pi}\left\{e^{j(1-n)\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{2}} - 1\right\}\right. +$$

$$\left. + \frac{\cancel{T}}{(1+n)2\pi}\left\{e^{-j(1+n)\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{2}} - 1\right\}\right\}$$

$$= \frac{-V}{4\pi}\left\{\frac{1}{1-n}\left(e^{j(1-n)\pi} - 1\right) + \frac{1}{1+n}\left(e^{-j(1+n)\pi} - 1\right)\right\}$$

observe que:

$$e^{j(1-n)\pi} = \cos[(1-n)\pi]$$

$$e^{-j(1+n)\pi} = \cos[(1+n)\pi]$$

$$e \ \cos[(1-n)\pi] = -\cos(-n\pi) = -\cos(n\pi)$$

$$\cos[(1+n)\pi] = -\cos(n\pi)$$

substituindo em F_n obtem-se

$$F_n = -\frac{V}{4\pi}\left\{\frac{-1}{1-n}(\cos(n\pi)+1)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1+n}(\cos(n\pi)+1)\right\}$$

$$= \frac{V}{4\pi}(\cos(n\pi)+1)\,\frac{\overbrace{1+n+1-n}^{=2}}{(1-n)(1+n)}$$

$$\boxed{F_n = \frac{V}{2\pi}\,\frac{1}{1-n^2}\left\{\cos(n\pi)+1\right\}}$$

Observe que:

$$\begin{cases} \text{para } n \text{ par} \Rightarrow F_n = \dfrac{V}{\pi(1-n^2)} \\ \text{para } n \text{ ímpar} \Rightarrow F_n = 0 \end{cases}$$

Entretanto, para $n=1$ temos que integrar separadamente, ou seja:

$$F_1 = \frac{V}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_0 t)\, e^{j\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{V}{2jT}\left\{\int_0^{T/2}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)e^{j\omega_0 t}\, dt\right.$$

$$= \frac{V}{2jT}\left\{\int_0^{T/2} e^{j2\omega_0 t}\, dt\right.$$

$$- \int_0^{T/2} dt$$

$$= \frac{-jV}{2T}\left\{\underbrace{\frac{1}{2j\omega_0}\left(e^{j2\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}} - 1\right)}_{=0} - \frac{T}{2}\right\}$$

$$\boxed{F_1 = -jV/4}$$

Para F_0 temos

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T V_s(t)\, dt = \frac{V}{T}\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{V}{T}\left(-\frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t\Big|_0^{T/2}\right) = \frac{-V}{T}\,\frac{T}{2\pi}(-2) = \frac{V}{\pi}$$

Assim

$$V_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

——— /// ———

2- Cálculo da série trigonométrica de Fourier

$$\begin{cases} a_0 = F_0 = \dfrac{V}{\pi} \\ a_1 = F_1 + F_{-1} = -\dfrac{jV}{4} + \dfrac{jV}{4} = 0 \\ a_n = F_n + F_{-n} = \dfrac{V(\cos(n\pi)+1)}{\pi(1-n^2)} \\ \quad \hookrightarrow n \neq 1 \\ b_1 = j(F_1 - F_{-1}) = j\left(-\dfrac{jV}{4} - \dfrac{jV}{4}\right) \\ \quad = \dfrac{V}{2} \\ b_n = j(F_n - F_{-n}) = 0 \,;\, n \neq 1 \end{cases}$$

3- Cálculo da série compacta de Fourier

$$V_s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$C_0 = a_0 = \frac{V}{\pi}$$

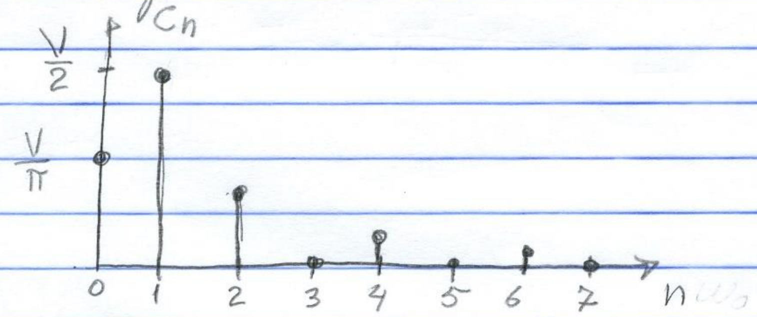
$$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \frac{V}{2}$$

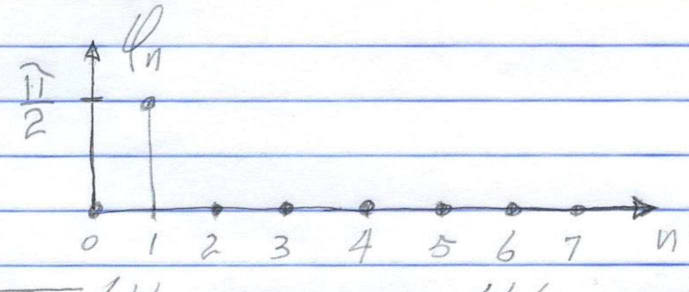
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n = \frac{V(\cos(n\pi)+1)}{\pi(1-n^2)}$$

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = 0 \; ; \; n \neq 1$$

Espectro de Linha da série compacta





——— /// ——— /// ——— /// ———

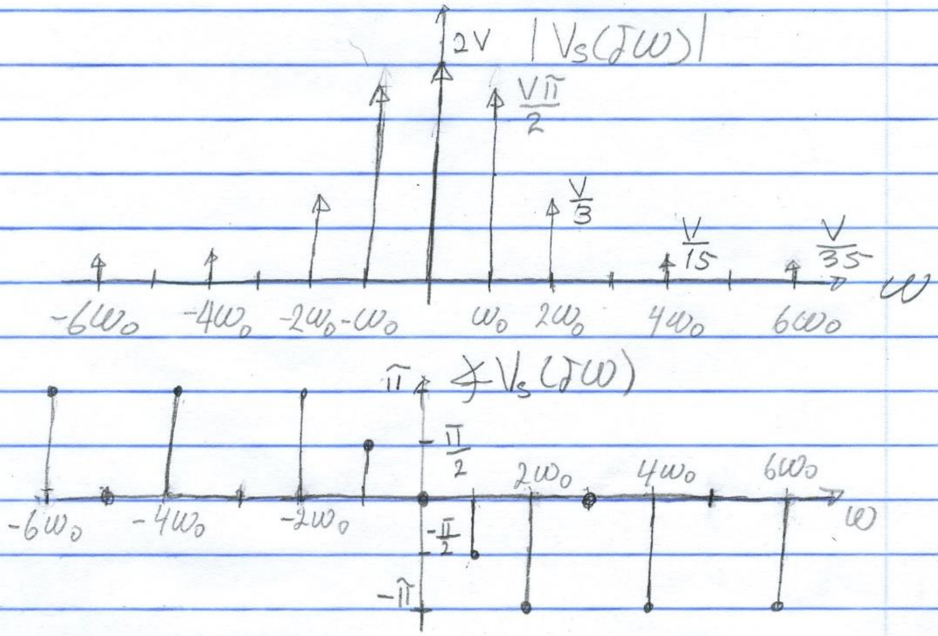
Resumo: série trigonometrica

$$V_s(t) = \frac{V}{\pi} + \frac{V}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) +$$

$$\frac{2V}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-(2n)^2}\cos(2n\omega_0 t)$$

Transformada de Fourier da série de Fourier.

$$V_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega-n\omega_0)$$



$$|F_0| = 2\pi \frac{V}{\pi} = 2V$$

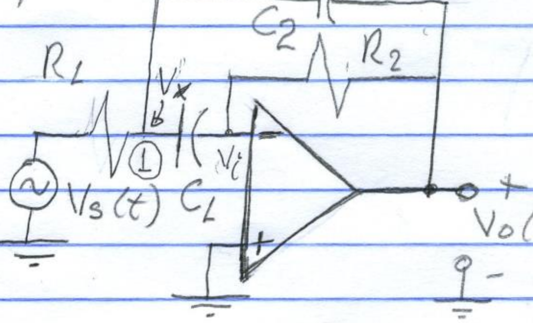
$$|F_1| = \left| -j\frac{V}{4} \right| \cdot 2\pi = \frac{V\pi}{2}$$

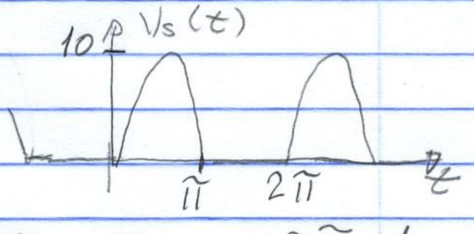
$$|F_2| = 2\pi \cdot \frac{V}{2\pi(1-4)} = \frac{V}{3}$$

$$|F_4| = 2\pi \frac{V}{2\pi(1-16)} = \frac{V}{15}$$

$$|F_6| = 2\pi \frac{V}{2\pi(1-36} = \frac{V}{35}$$

Exercício - Determine a forma de onda na saída do circuito a seguir e o espectro de frequência do sinal de saída





$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \frac{rad}{s}$$

Aplicando equações nodais para o circuito resulta:

$$\begin{cases} (V_x - V_s)\frac{1}{R_1} + (V_x - V_i)SC_1 + (V_x - V_o)SC_2 = 0 & (1) \\ (V_i - V_x)SC_1 + (V_i - V_o)\frac{1}{R_2} = 0 & (2) \\ V_i = 0 & (3) \end{cases}$$

De (2) com $V_i = 0$

$$-V_x SC_1 - V_o \frac{1}{R_2} = 0 \Rightarrow V_x = -V_o \frac{1}{SR_2C_1} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1)

$$-V_o \frac{1}{SR_1R_2C_1} - V_s \frac{1}{R_1} - V_o \frac{1}{R_2} - V_o \frac{C_2}{R_2C_1} - V_o SC_2 = 0$$

Multiplicando a equação por $SR_1R_2C_1$

$$-V_o(1 + SR_1C_1 + SR_1C_2 + S^2R_1R_2C_1C_2) = \\ = V_s SR_2C_1$$

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-sR_2C_1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1(C_1+C_2) + 1}$$

$$= \frac{-1}{R_1C_2}\,\frac{1}{s^2 + s\,\frac{R_1(C_1+C_2)}{R_1R_2C_1C_2} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

Fazendo $R_1 = 1\Omega; R_2 = 2\Omega; C_1 = 1F$ e $C_2 = \frac{1}{4}F$

$$H(s) = -4\,\frac{s}{s^2 + s\,\frac{5/4}{1/2} + \frac{1}{1/2}} = \frac{-4s}{s^2 + \frac{5}{2}s + 2}$$

Fazendo $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{-4j\omega}{-\omega^2 + \frac{5}{2}j\omega + 2}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{4\omega}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + \left(\frac{5}{2}\omega\right)^2}} \\ \measuredangle H(j\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{5/2\,\omega}{2-\omega^2}\right) \end{cases}$$

Fazendo $\omega = n\omega_0 = n;\ \omega_0 = 1$

$$\begin{cases} |H(jn\omega_0)| = |H(jn)| = \\ \quad = \dfrac{4n}{\sqrt{(2-n^2)^2 + \left(\frac{5}{2}n\right)^2}} \\ \measuredangle H(jn\omega_0)\Big|_{\omega_0 = 1\frac{rad}{s}} = -\pi/2 - \arctan\left(\dfrac{5/2\,n}{2-n^2}\right) \end{cases}$$

$= \theta_n$

A série trigonométrica de Fourier para o sinal de entrada pode ser escrita como: (V = 10V

$$\begin{cases} a_0 = \frac{10}{\pi} \\ a_n = \frac{10}{\pi}(\cos(n\pi) + 1) = \begin{cases} 20/\pi ; n \text{ par} \\ 0 ; n \text{ ímpar} \end{cases} \\ b_1 = V/2 = 5 \\ b_n = 0 \end{cases}$$

$$V_s(s) = \frac{10}{\pi} + 5\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t) +$$

$$+ \frac{20}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-(2n)^2} \cos(2n\omega_0 t)$$

$$= \frac{10}{\pi} + 5\,\mathrm{sen}(nt) +$$

$$+ \frac{20}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-(2n)^2} \cos(nt)$$

$V_o(t)$ pode ser escrita como:

$$V_o(t) = \frac{20}{\sqrt{1+\frac{25}{4}}}\,\mathrm{sen}\left(nt - \frac{\pi}{2} \pm \arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{80}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2nt + \theta_n)}{1-(2n)^2 \sqrt{(2-n^2)^2 + (5n/2)^2}}$$