UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS - Matemática 2 (Administración- Contador- Negocios Digitales)

Ejercitación 2: Planos y rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Dibujar los vectores $v+w$, $-2v$, $v-w$, $3v+2w$ y $-v+2w-3(v+2w)$ en cada caso.

   (a) $v=(1,2)$, $w=(3,2)$.

   (b) $v=(1,2,1)$, $w=(3,2,0)$.

2. Dibujar en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos de vectores:

   (a) $\alpha(1,2)+(3,2)$, con $\alpha=0$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ y $\alpha=1$.

   (b) $\alpha(1,2)+(3,2)$, con $\alpha\in[0,1]$.

   (c) $\alpha(1,2)+(3,2)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

3. Decidir en cada caso si el conjunto A representa una recta en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$.

   (a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=3\}$

   (b) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y=0;\ 2y+x-z+2=0\}$

   (c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-z=3\}$

   (d) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z-3=-3x+y\}$

   (e) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y=z+1;\ 2z=-2+2x+4y\}$

   Describir las rectas halladas en forma paramétrica.

4. Pasar de forma paramétrica a implícita las siguientes rectas:

   (a) $\mathbb{L}:\ [(2,-1)]+(3,-1)$

   (b) $\mathbb{L}:\ [(-2,1,3)]+(0,-1,-1)$

   (c) $\mathbb{L}:\ [(4,2,1)]$

   y calcular la intersección entre (b) y (c).

5. Encontrar las ecuaciones de:

   (a) Todas la rectas $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^2$, que son paralelas a la recta que contiene a los puntos $(1,2)$ y $(-1,3)$. ¿Cuál es la ecuación que corresponde a la recta que pasa por $(7,4)$?

(b) La recta $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por $(3, -1, 0)$ y tiene la dirección del vector $(1, 1, 2)$.

(c) La recta $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(1, 2, 3)$ y $(0, 2, 2)$.

6. Considerar los vectores $u = (-1, 0, 2), v = (3, -2, -1), w = (4, -3, 0)$.
   Hallar $< u, v >$, $< v, w >$, $||w||$ y $\dfrac{< u, w >}{||w||^2} w$.

7. Calcular $(1, -1, -2) \times (3, -4, 1)$ y $(1, 1, 1) \times (2, 2, 2)$.

8. Pasar de forma paramétrica a implícita los siguientes planos

   (a) $\Pi : \ [(-2, 0, 3), (1, 1, 1)] + (3, 2, 0)$

   (b) $\Pi : \ [(1, 0, 1), (2, -2, 5)]$

   y calcular la intersección.

9. Encontrar las ecuaciones de:

   (a) Hallar el plano Π que pasa por los puntos $(1, -2, 0)$, $(2, 1, 1)$ y $(0, 3, 4)$.

   (b) El plano Π_1 de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 0, 1)$ y $(2, -1, -1)$ y el plano $\Pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(4, -1, 1)$.

   (c) El plano Π_3 de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y que sea paralelo al plano $[(1, 1, -1), (1, 0, 1)]$.

10. Sea Π el plano de ecuación $-3x + z = 2$.

    (a) Dar dos vectores que generen el plano Π' paralelo a Π que pasa por el origen.

    (b) Dar la ecuación del plano paralelo a Π que pasa por $(1, 1, 1)$.

11. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^3$ la recta dada por las ecuaciones $2x - 3y - 4z = -9, \ x + y + 3z = 3$. Hallar un plano Π tal que $\mathbb{L} \subset \Pi$ y $(0, 3, 1) \in \Pi$.

12. Sea Π el plano que pasa por los puntos $(5, -1, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(3, 0, 0)$. Calcular la ecuación de Π y de una recta $\mathbb{L}$ paralela a Π que pase por el origen. ¿Es única?

13. Hallar un plano Π cuya normal es $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(4, 1, 0)$.

14. Se tienen los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$:

    - $\Pi_1 : [(3, 2, 0), (0, 7, -3)] + (-1, 1, -1)$
    - $\Pi_2 : [(1, 1, 1), (0, 3, 2)] + (0, -1, 1)$
    - $\Pi_3 = \{(x, y, z) \ / \ 2x - y + z = 1\}$
    - $\mathbb{L}_1 : [(0, 3, 2)] + (0, -1, 1)$
    - $\mathbb{L}_2 = \{(x, y, z) : \ 2x - y + z = 1; \ x - y + 2z = 2\}$

    Hallar $\Pi_1 \cap \Pi_2$, $\mathbb{L}_1 \cap \Pi_1$, $\mathbb{L}_1 \cap \Pi_2$, $\mathbb{L}_2 \cap \Pi_3$.

15. **(a)** Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ perpendiculares a $(3,1)$.

    (b) De los vectores hallados en (a) exhibir aquellos de igual norma que $(3,1)$.

    (c) Sea $u=(1,2,2)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^3$, perpendiculares a u, de igual norma que u y tales que $<v,(0,1,0)>=-1$.

16. Determinar, y hallar, el plano o la recta que es perpendicular a cada conjunto A.

    (a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 2x+y-z=0\}$

    (b) $A:[(1,2,1),(2,0,2)]+(1,1,0)$

    (c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x-y=3x+y+z=1\}$

17. **(a)** Hallar la recta perpendicular al plano de ecuación $x+y-z=2$ que pasa por $(-2,1,4)$.

    (b) Hallar el plano perpendicular a la recta $[(-1,2,1)]+(3,0,2)$ que pasa por $(2,1,8)$.

18. Se consideran los planos $\Pi :\ 4x-y+3z=2$ y $\Pi' =\ 2x+2y-z=6$. Hallar la ecuación de un plano que sea ortogonal a $\Pi\cap\Pi'$ y que pase por $(4,2,-1)$.

19. Hallar todos los puntos que están a igual distancia de $(1,2,3)$ y de $(0,1,2)$.

20. Hallar la distancia del punto $(-3,2)$ a la recta $\mathbb{L} :\ [(2,-1)]+(6,-1)$.

21. Se consideran el plano $\Pi :\ 3x-y+2z=4$ y la recta $\mathbb{L}$, perpendicular a Π que pasa por $(7,-3,5)$. Hallar la distancia del punto $(3,2,1)$ a $\Pi\cap\mathbb{L}$.

22. Para el plano $\Pi :\ [(1,1,-1),(0,1,2)]+(2,0,0)$ y el punto $P=(1,2,1)$, Hallar:

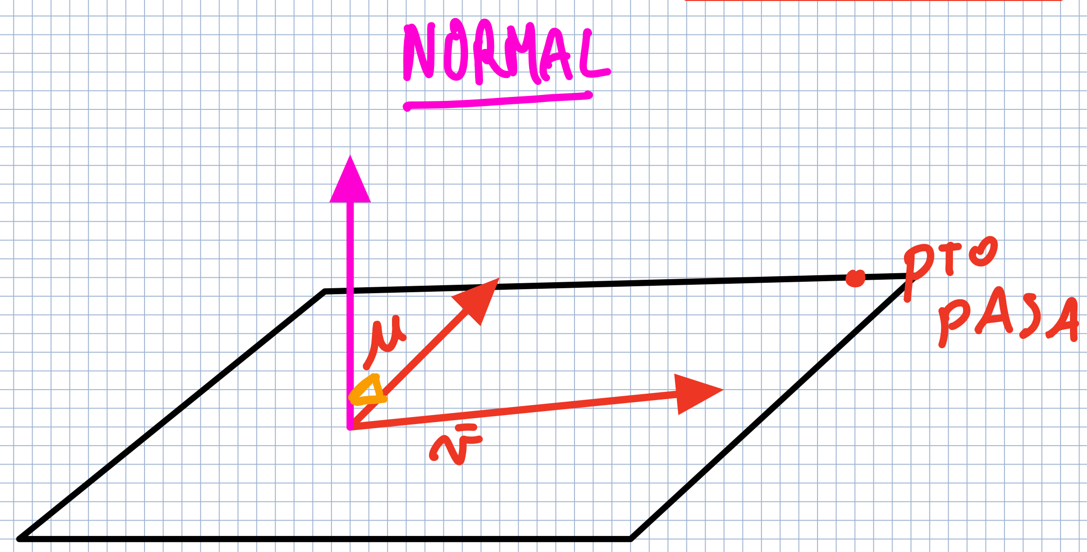
    (a) La ecuación de la recta $\mathbb{L}$ perpendicular a Π que pasa por P.

    (b) La intersección entre $\mathbb{L}$ y Π.

    (c) La distancia de P al plano Π.

PLANO: → Implicito → 1 ecuación (x, y, z)

→ PARAMÉTRICO.



$$\boxed{\Pi : [\text{VECTOR 1}, \text{VECTOR}] + \text{PTO PASO}}$$

$$\boxed{\text{NORMAL: } \bar{u} \times \bar{v}} = (a, b, c)$$

NORMAL DEL PLANO + PTO PASO

↳ implícito

$$\boxed{a \cdot x + b y + c \cdot z = d}$$

→ PTO PASO ✓

8. Pasar de forma paramétrica a implícita los siguientes planos

(a) $\Pi : \ [(-2,0,3),(1,1,1)] + (3,2,0)$

(b) $\Pi : \ [(1,0,1),(2,-2,5)]$

(a) $\Pi : [(-2,0,3)\ (1,1,1)] + (3,2,0)$

↳ implícito:

$$N = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3\ ,5\ ,-2)$$

$$\boxed{a \cdot x + b y + c \cdot z = d}$$

PTO PASO ✓

$$-3x + 5y - 2 \cdot z = d$$

$(\overset{x}{3}, \overset{y}{2}, \overset{z}{0})$

$$-3 \cdot (3) + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = d$$

$$-9 + 10 = d$$

$$1 = d$$

$$\boxed{-3x + 5y - 2\cdot z = 1}$$

(b) $\Pi : [(1,0,1),(2,-2,5)] + (0,0,0)$

$N = (2,-3,-2)$

$$\boxed{2x - 3y - 2z = 0}$$ ✓

$$\boxed{-3x + 5y - 2\cdot z = 1}$$

↳ 1 SOLA LETRA DESPEJAS.

$$\boxed{-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-\frac{1}{2}=z}$$

$$\left(x,\ y,\ -\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-\frac{1}{2}\right)$$

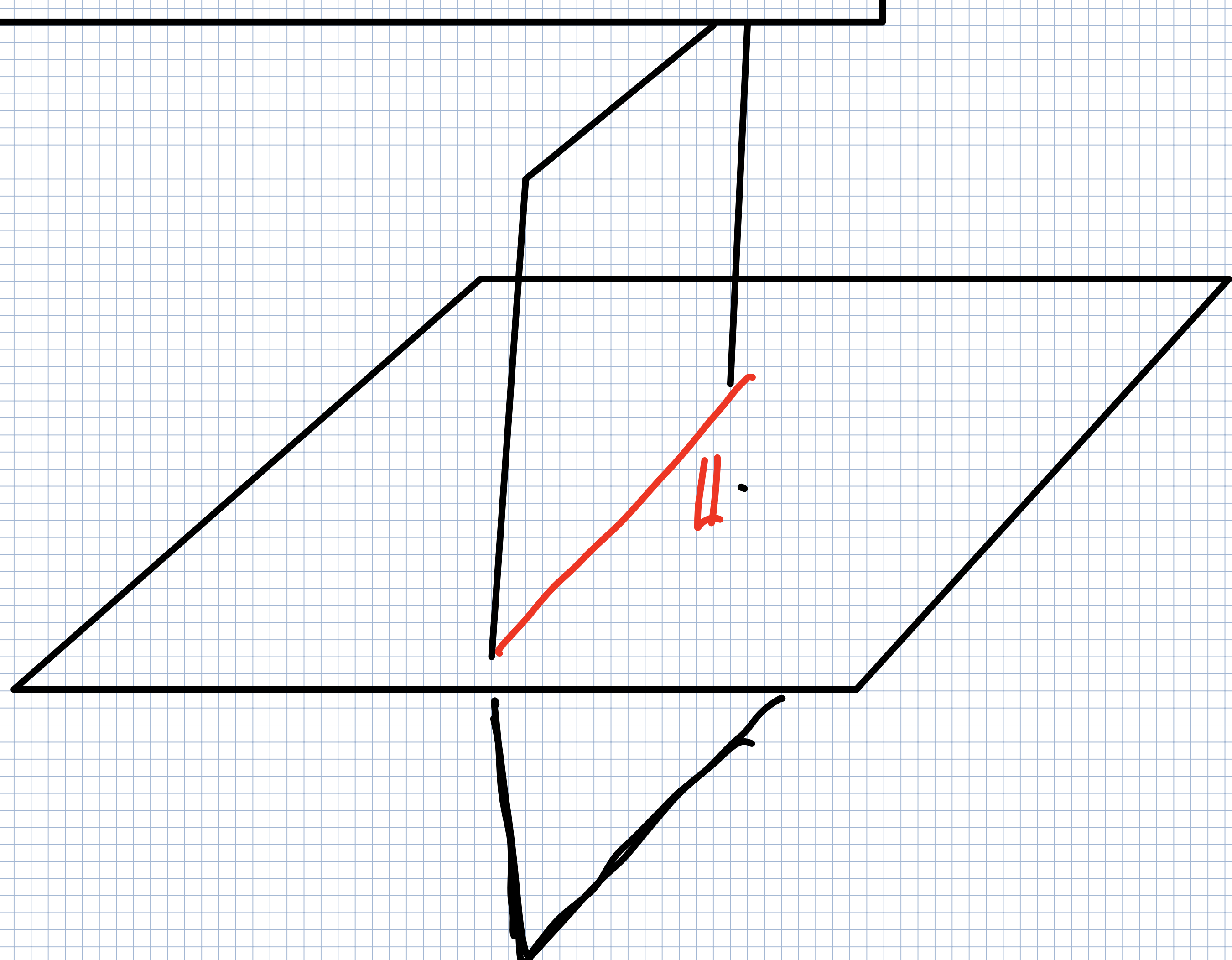
$$\underbrace{\left(x,\ 0,\ -\frac{3}{2}x\right)}+\underbrace{\left(0,\ y,\ \frac{5}{2}y\right)}+\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\left[\left(1,0,-\frac{3}{2}\right),\ \left(0,1,\frac{5}{2}\right)\right]+\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)}$$

(a) $\Pi: \ [(-2,0,3),(1,1,1)] + (3,2,0)$

(b) $\Pi: \ [(1,0,1),(2,-2,5)]$

$$\begin{cases} \boxed{-3x + 5y - 2 \cdot z = 1} \\ \boxed{2x - 3y - 2z = 0} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \boxed{-3x + 5y - 2\cdot z = 1} \\ \boxed{2x - 3y - 2z = 0} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & -2 & 1 \\ \boxed{2} & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \leftarrow 3F_2 + 2F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$y - 10z = 2$$

$$\boxed{y = 2 + 10z}$$

$$-3x+5\cdot(2+10z)-2z=1$$

$$-3x=1-10-48z$$

$$-3x=-9-48z$$

$$x=\frac{-9}{-3}-\frac{48}{-3}z$$

$$\boxed{x=3+16z}$$

$$\left(3+16z,\ 2+10z,\ z\right)$$

$$\left[\underbrace{(16z,\ 10z,\ 1z)}_{\text{VECTOR}}\right] + \underbrace{(3,2,0)}_{\text{PTO PASO}}$$

$$\left[(16,\ 10,\ 1)\right] + (3,2,0).$$

$\Pi_1 \cap \Pi_2$: 1°) Π_1 escrito en implícita

2°) Π_2 escrito en implícita

3°): Resolver sistema de ecs.

$\mathbb{L} \cap \Pi$ (1°) $\mathbb{L}$: EN PARAMETRICA

1°

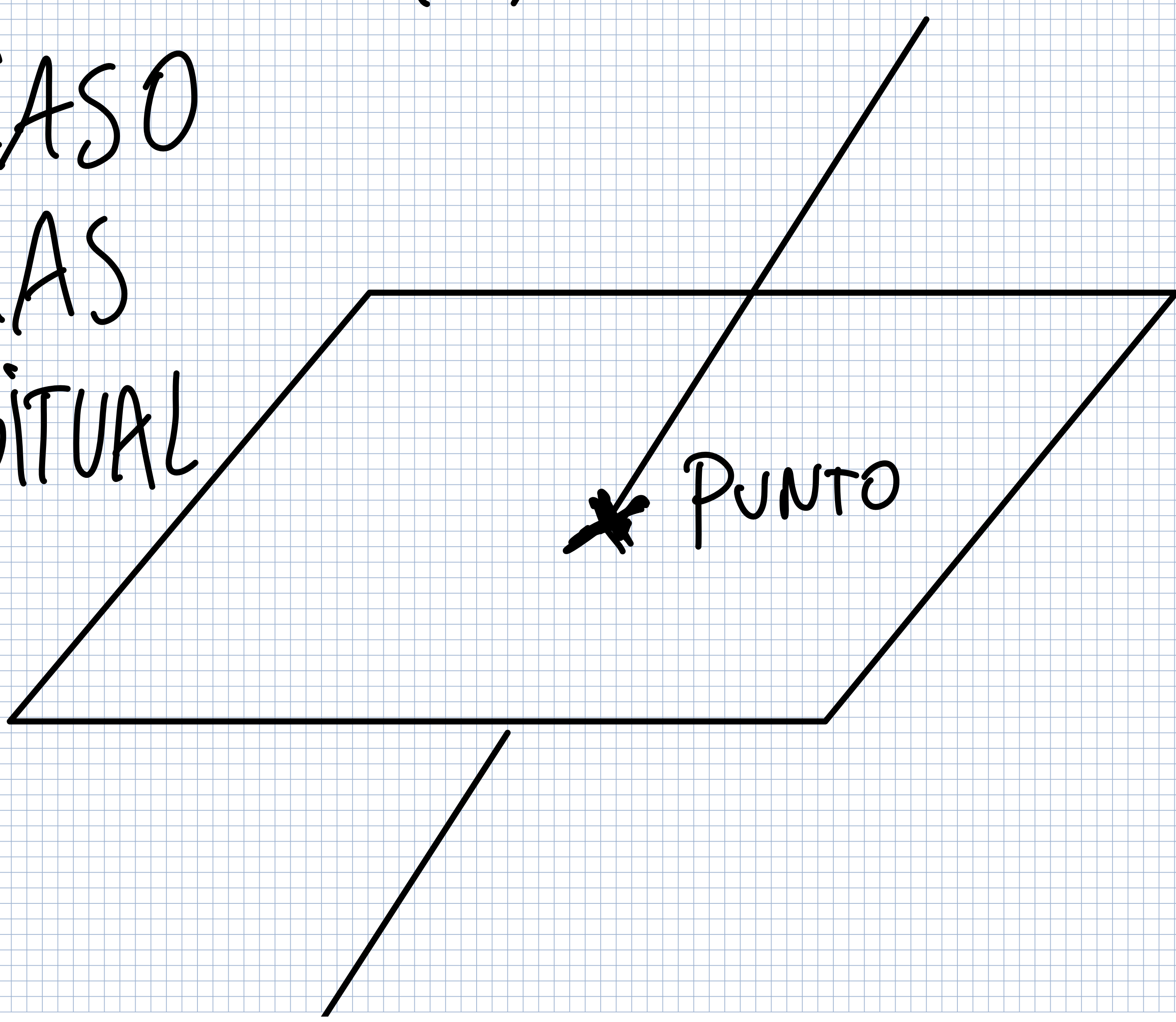
2°) π: implícito.

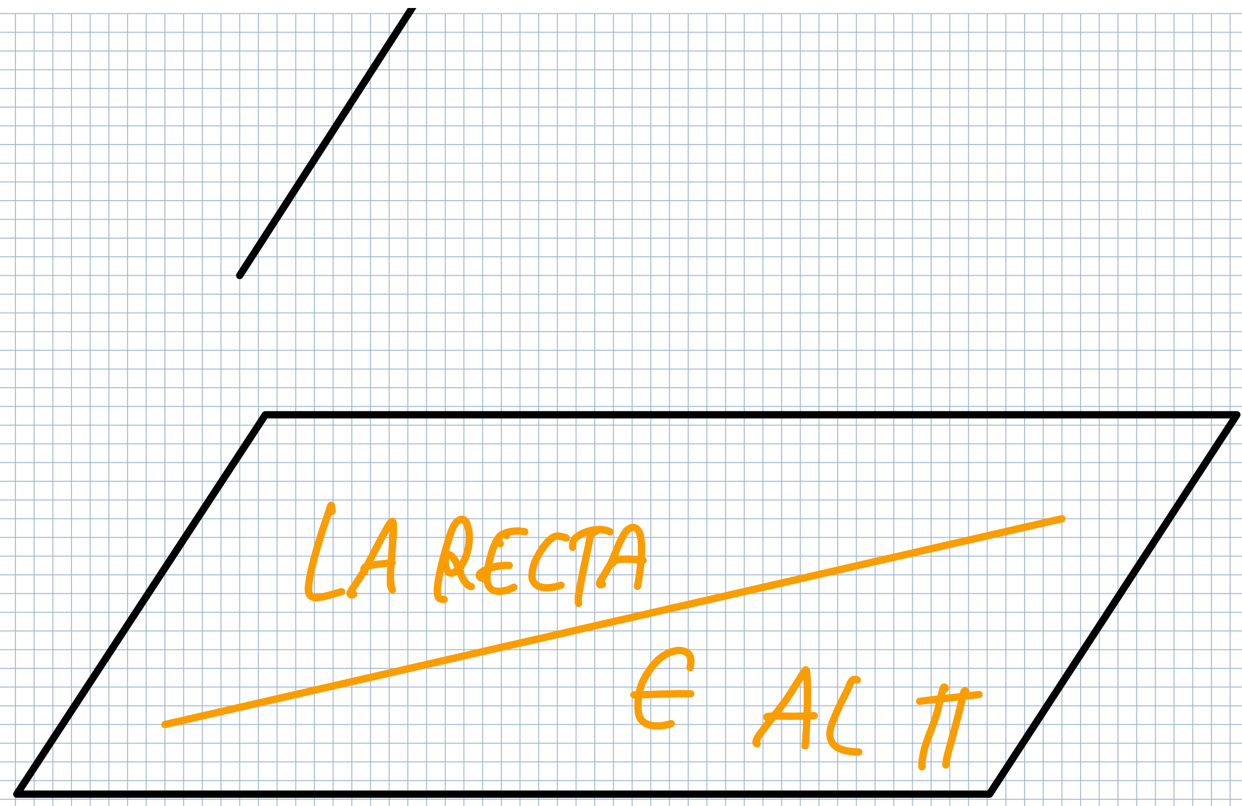
2°

1) l: Implícito

2) π: implícito

CASO MAS HABITUAL





LA SOLUCIÓN
ES LA MISMÍSIMA
RECTA

14. Se tienen los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$:

- $\Pi_1 : [(3,2,0),(0,7,-3)] + (-1,1,-1)$
- $\Pi_2 : [(1,1,1),(0,3,2)] + (0,-1,1)$ d
- $\Pi_3 = \{(x,y,z) \mid 2x - y + z = 1\}$
- $\mathbb{L}_1 : [(0,3,2)] + (0,-1,1)$
- $\mathbb{L}_2 = \{(x,y,z) : 2x - y + z = 1;\ x - y + 2z = 2\}$

Hallar $\Pi_1 \cap \Pi_2$, $\mathbb{L}_1 \cap \Pi_1$, $\mathbb{L}_1 \cap \Pi_2$, $\mathbb{L}_2 \cap \Pi_3$.

$$N_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = (-6,\ 9,\ 21)$$

$$a \cdot x + by + c \cdot z = d$$

$$\boxed{\Pi_1 : -6x + 9y + 21z = -6}$$

$$N_2 = (-1, -2, 3)$$

$$\boxed{\Pi_2 : -x - 2y + 3z = 5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 9 & 21 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \leftarrow 6f_2 - f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 9 & 21 & -6 \\ 0 & -21 & -3 & 36 \end{array}\right)$$

$$\frac{-21}{3}y - \frac{36}{3} = \quad + \quad z$$

$$\boxed{z = -7y - 12}$$

$$-6x + 9y + 21(-7y - 12) = -6$$

$$-6x \underbrace{+ 9y - 147y}_{} - 252 = -6$$

$$x = \frac{246 - 138y}{-6}$$

$$\boxed{x = -41 + 23y}$$

$$\left(-41+23y,\ y,\ -7y-12\right)$$

$$\left(23y,\ y,\ -7y\right)+\left(-41,0,-12\right)$$

$$y\left[\left(23,1,-7\right)\right]+\left(-41,0,-12\right)$$

- $\mathbb{L}_1 : [(0,3,2)] + (0,-1,1)$

$$\boxed{\Pi_1 : -6x + 9y + 21z = -6}$$

$$\mathbb{L}_1 : (0,\ 3a-1,\ 2a+1)$$

$$-6\cdot(0) + 9(3a-1) + 21(2a+1) = -6$$

$$27a - 9 + 42a + 21 = -6$$

$$69a + 12 = -6$$

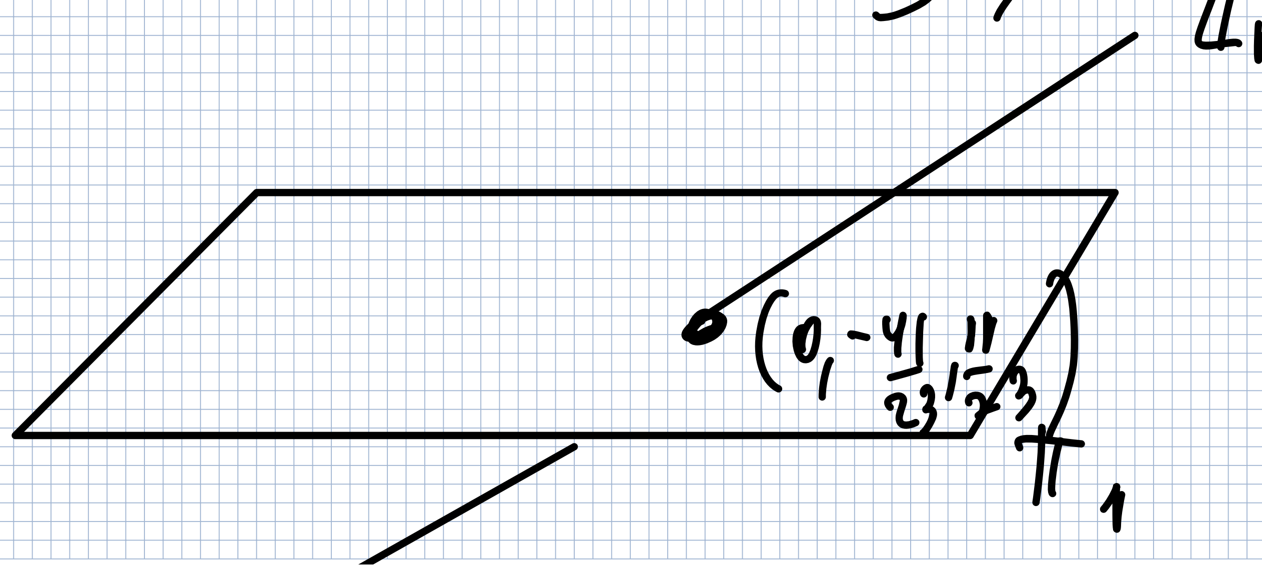
$$69a = -18$$

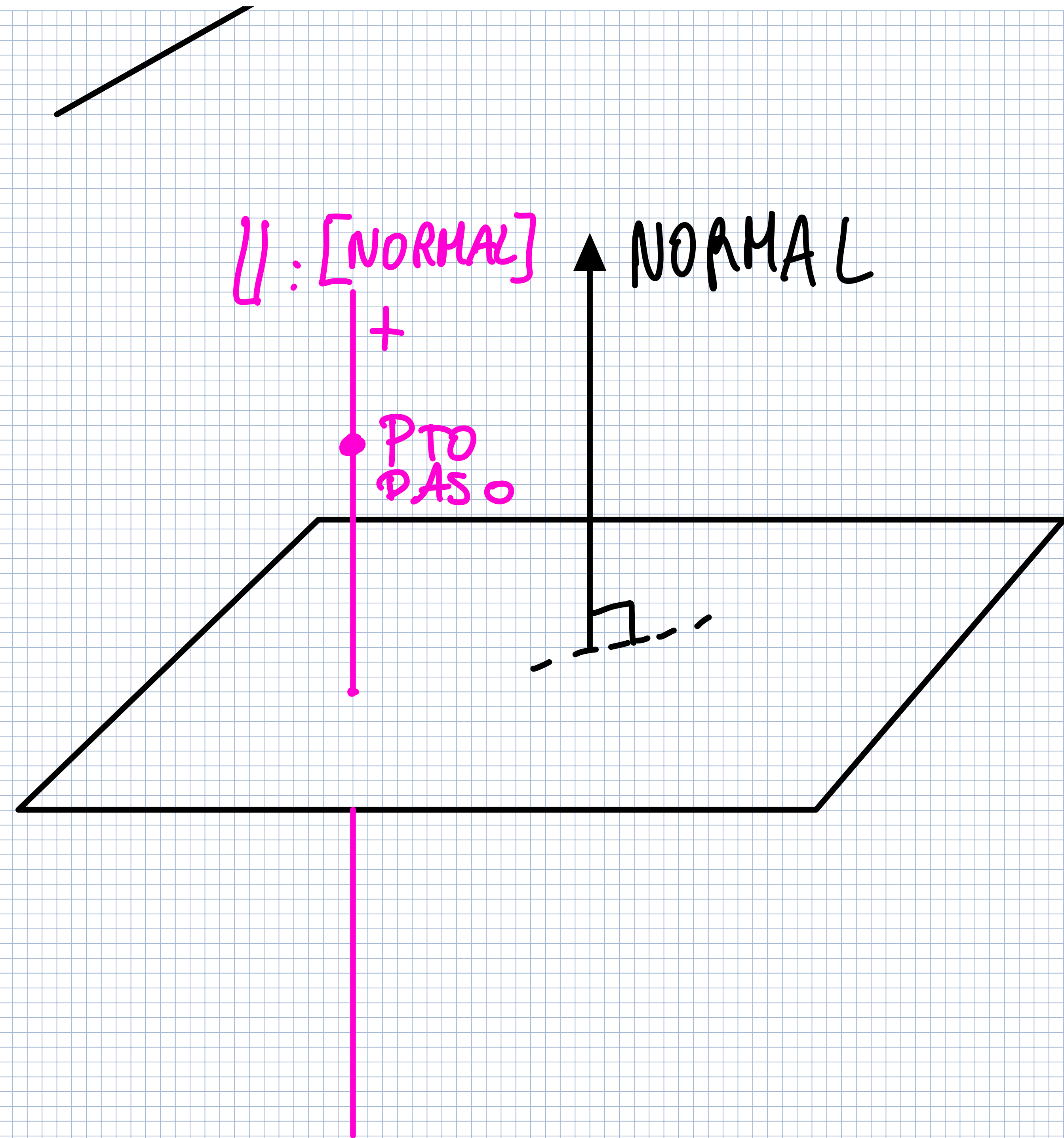
$$a = \frac{-18}{69} = -\frac{6}{23}$$

$$\boxed{a = -\frac{6}{23}}$$

$$\mathbb{L}_1 : \left(0,\ 3\cdot\left(-\frac{6}{23}\right) - 1,\ 2\cdot\left(-\frac{6}{23}\right) + 1\right)$$

$$\left(0,\ -\frac{41}{23},\ \frac{11}{23}\right)$$





U: [NORMAL]
+
PTO
DAS O
NORMAL