

LA DFT AU SERVICE DE L'HOMOLOGIE PERSISTANTE : APPLICATIONS À L'ANALYSE MUSICALE

Victoria Callet

Doctorante en Mathématiques à l'IRMA, Strasbourg
sous la supervision de Pierre Guillot et Moreno Andreatta

victoria.callet@math.unistra.fr

Séminaire présenté à
l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique, Paris

14/12/2022



Introduction - Plan de l'exposé

1 Homologie persistante

- Théorie simpliciale
- Filtration et persistance
- Analyse topologique des données

2 Modélisation : la DFT bi-dimensionnelle

- La Transformée de Fourier Discrète
- Persistance et DFT bi-dimensionnelle
- Propriétés : transformations et isométries

3 Applications à l'analyse musicale

- La DFT sur le Tonnetz
- Vers une classification du style musical ?

Introduction - Quelques références



Emmanuel Amiot.

Music through Fourier space.



Louis Bigo and Moreno Andreatta.

Filtration of pitch-class sets complexes.



Mattia G. Bergomi, Adriano Baratè, and Barbara Di Fabio.

Towards a topological fingerprint of music.



Victoria Callet.

Persistent homology on musical bars.



Robert Ghrist.

Barcodes: the persistent topology of data.



Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson.

Computing persistent homology.

Homologie persistante

1 Homologie persistante

- Théorie simpliciale
- Filtration et persistance
- Analyse topologique des données

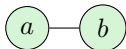
2 Modélisation : la DFT bi-dimensionnelle

3 Applications à l'analyse musicale

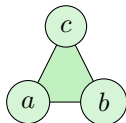
Théorie simpliciale



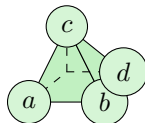
0-simplexe
sommet



1-simplexe
arête



2-simplexe
triangle

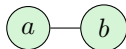


3-simplexe
tétraèdre

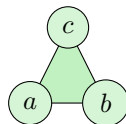
Théorie simpliciale



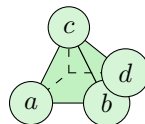
0-simplexe
sommet



1-simplexe
arête



2-simplexe
triangle



3-simplexe
tétraèdre

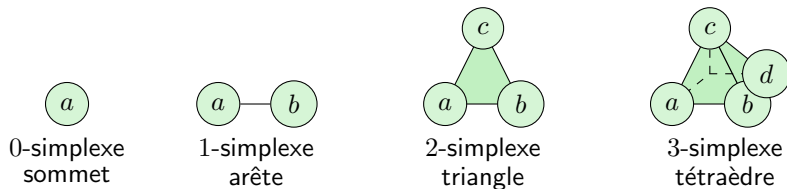
Définition :

Un **complexe simplicial** est un couple (V, K) où V est un ensemble de **sommets** et $K \subset \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de **simplexes** tels que

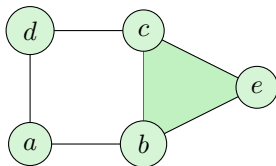
$$\left[V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \right] \text{ et } \left[\text{si } \sigma \in K, \tau \subset \sigma \text{ alors } \tau \in K \right]$$

Théorie simpliciale

On peut toujours penser à un complexe via sa **réalisation géométrique** :



Un **complexe simplicial** est obtenu par "recollement" de n -simplices :



Un complexe simplicial (V, K) de dimension 2 : l'ensemble des **sommets** est $V = \{a, b, c, d, e\}$ et le "plus gros simplexe" est le triangle $\{bce\}$.

Théorie simpliciale

On considère **le corps \mathbb{F}_2 à deux éléments.**

On considère **le corps \mathbb{F}_2 à deux éléments**. Soit K un complexe simplicial.

Définition :

i) Le $n^{\text{ième}}$ **groupe de chaîne** $C_n(K)$ de K est le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel sur l'ensemble des n -simplexes de K .

On considère le **corps \mathbb{F}_2 à deux éléments**. Soit K un complexe simplicial.

Définition :

i) Le $n^{\text{ième}}$ **groupe de chaîne** $C_n(K)$ de K est le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel sur l'ensemble des n -simplexes de K .

ii) L'**opérateur bord** $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ est un morphisme défini linéairement sur une chaîne c via son action sur les simplexes $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de c :

$$\partial_n \sigma = \sum_i \{v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

Théorie simpliciale

On considère le **corps** \mathbb{F}_2 à **deux éléments**. Soit K un complexe simplicial.

Définition :

- i) Le $n^{\text{ième}}$ **groupe de chaîne** $C_n(K)$ de K est le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel sur l'ensemble des n -simplexes de K .
- ii) L'**opérateur bord** $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ est un morphisme défini linéairement sur une chaîne c via son action sur les simplexes $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de c :

$$\partial_n \sigma = \sum_i \{v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

Lemme : (Fondamental)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

On a ainsi une suite de **groupes de chaînes** et d'**opérateurs bords**

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

telle que $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n (car $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$).

La donnée d'un tel couple est appelée **complexe de chaînes**.

On a ainsi une suite de **groupes de chaînes** et d'**opérateurs bords**

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

telle que $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n (car $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$).

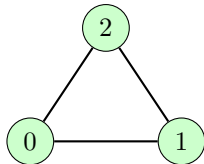
La donnée d'un tel couple est appelée **complexe de chaînes**.

Définition :

- i) Le $n^{\text{ième}}$ **groupe d'homologie** de K est le quotient $H_n(K) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$.
- ii) Le $n^{\text{ième}}$ **nombre de Betti** est le nombre $\beta_n(K) = \dim H_n(K)$.

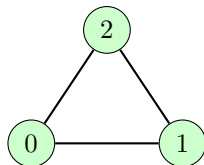
Théorie simpliciale

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



Théorie simpliciale

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :

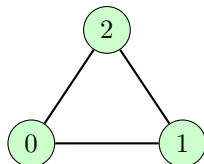


$$\begin{cases} C_0(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_1(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_n(\mathbb{S}^1) &= 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0 \end{cases}$$

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Théorie simpliciale

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



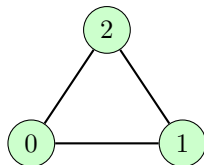
$$\begin{cases} C_0(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_1(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_n(\mathbb{S}^1) &= 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0 \end{cases}$$

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- $\partial_1\{01\} = \{1\} + \{0\}$, $\partial_1\{20\} = \{2\} + \{0\}$, $\partial_1\{12\} = \{2\} + \{1\}$
- $\partial_1(\{01\} + \{12\} + \{20\}) = 2(\{0\} + \{1\} + \{2\}) = 0$

Théorie simpliciale

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



$$\begin{cases} C_0(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_1(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_n(\mathbb{S}^1) &= 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0 \end{cases}$$

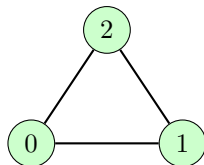
$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- $\partial_1\{01\} = \{1\} + \{0\}$, $\partial_1\{20\} = \{2\} + \{0\}$, $\partial_1\{12\} = \{2\} + \{1\}$
- $\partial_1(\{01\} + \{12\} + \{20\}) = 2(\{0\} + \{1\} + \{2\}) = 0$

$$\begin{cases} H_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\}) \text{ et } \beta_1(\mathbb{S}^1) = 1 \end{cases}$$

Théorie simpliciale

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_0(\mathbb{S}^1) & = & \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_1(\mathbb{S}^1) & = & \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_n(\mathbb{S}^1) & = & 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0 \end{array} \right.$$

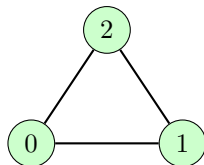
$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- $\partial_1\{01\} = \{1\} + \{0\}$, $\partial_1\{20\} = \{2\} + \{0\}$, $\partial_1\{12\} = \{2\} + \{1\}$
- $\partial_1(\{01\} + \{12\} + \{20\}) = 2(\{0\} + \{1\} + \{2\}) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\}) \text{ et } \beta_1(\mathbb{S}^1) = 1 \\ H_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = C_0(\mathbb{S}^1) / \mathbb{F}_2^2 \cong \mathbb{F}_2^3 / \mathbb{F}_2^2 \cong \mathbb{F}_2 \text{ et } \beta_0(\mathbb{S}^1) = 1 \end{array} \right.$$

Théorie simpliciale

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_0(\mathbb{S}^1) & = & \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_1(\mathbb{S}^1) & = & \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\} \cong \mathbb{F}_2^3 \\ C_n(\mathbb{S}^1) & = & 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0 \end{array} \right.$$

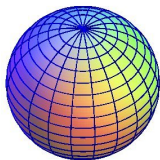
$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- $\partial_1\{01\} = \{1\} + \{0\}$, $\partial_1\{20\} = \{2\} + \{0\}$, $\partial_1\{12\} = \{2\} + \{1\}$
- $\partial_1(\{01\} + \{12\} + \{20\}) = 2(\{0\} + \{1\} + \{2\}) = 0$

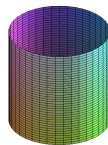
$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\}) \text{ et } \beta_1(\mathbb{S}^1) = 1 \\ H_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = C_0(\mathbb{S}^1) / \mathbb{F}_2^2 \cong \mathbb{F}_2^3 / \mathbb{F}_2^2 \cong \mathbb{F}_2 \text{ et } \beta_0(\mathbb{S}^1) = 1 \\ H_n(\mathbb{S}^1) = 0 \text{ et } \beta_n(\mathbb{S}^1) = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Théorie simpliciale

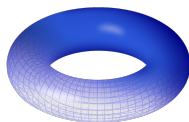
Idée : l'homologie simpliciale "compte le nombre de trous en dimension n ".



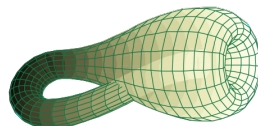
$$H_n(S^2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$H_n(C) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 2 \\ \mathbb{F}_2^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$H_n(K) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 2 \\ \mathbb{F}_2^2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

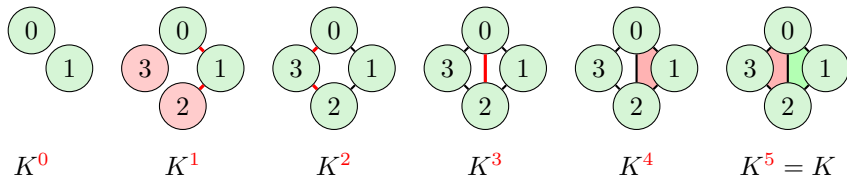
Filtration et persistance

Soit K un complexe simplicial.

Définition :

Une **filtration** de K est une suite croissante de sous-complexes de K :

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^N = K$$



On dit que K est un **complexe filtré**.

Théorème : (Structure de l'homologie persistante)

Soit K un complexe filtré. Pour chaque degré n , on a

$$H_n(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot \mathbb{F}_2[t] / (t^{c_l}) \right)$$

Théorème : (Structure de l'homologie persistante)

Soit K un complexe filtré. Pour chaque degré n , on a

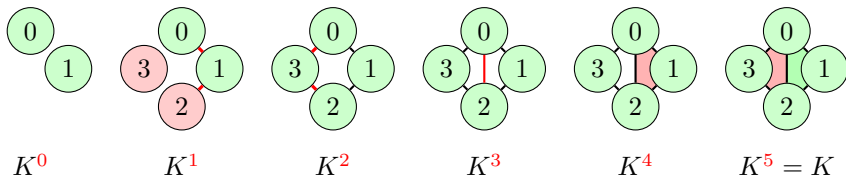
$$H_n(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot \mathbb{F}_2[t] / (t^{c_l}) \right)$$

Définition : (Représentation graphique de l'homologie persistante)

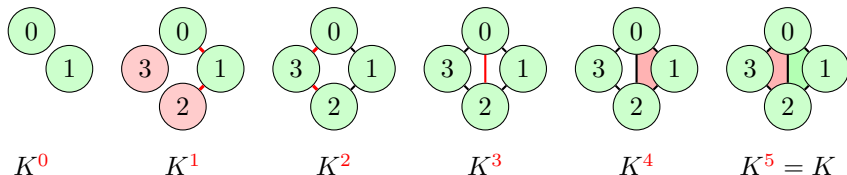
Le **code barre** de $H_n(K)$ est un graphe dont l'abscisse décrit le **temps de filtration** et où un élément de $H_n(K)$ (une **classe**) qui :

- **naît** au temps a_j et ne **meurt jamais** est un intervalle $[a_j, \infty[$
- **naît** au temps b_l et **meurt** au temps $b_l + c_l$ est un intervalle $[b_l, b_l + c_l]$

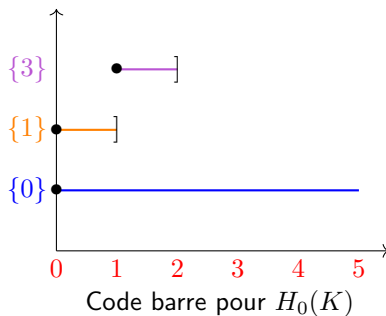
Filtration et persistance



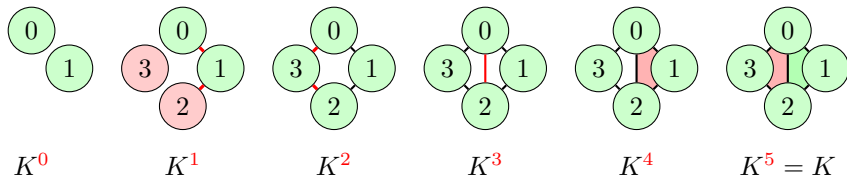
Filtration et persistance



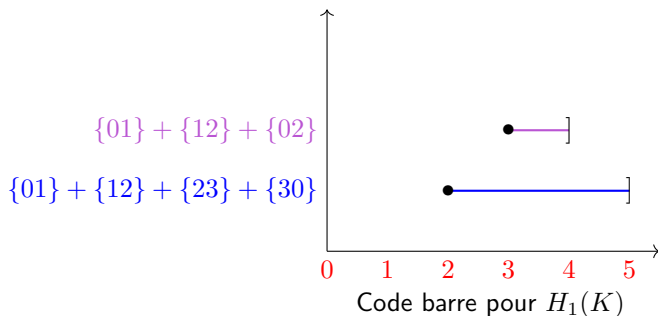
$$H_0(K) = \mathbb{F}_2[t] \oplus (\mathbb{F}_2[t]/t) \oplus (t \cdot \mathbb{F}_2[t]/t)$$



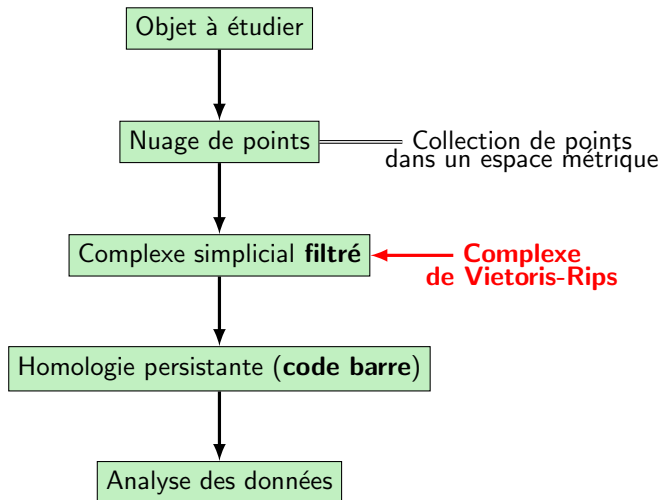
Filtration et persistance



$$H_1(K) = (t^2 \cdot k[t] / t^3) \oplus (t^3 \cdot k[t] / t)$$



Analyse Topologique de Données (TDA) :



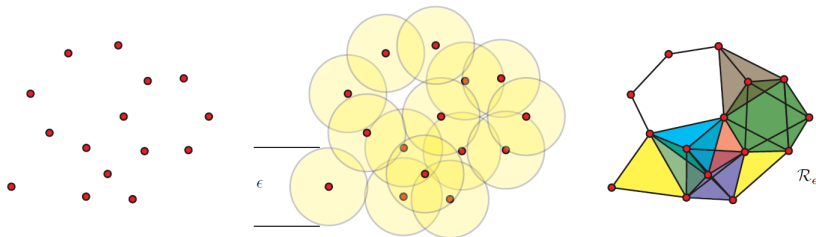
Analyse topologique de données

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un **nuage de points** et $\epsilon \geq 0$ un **paramètre**.

Définition :

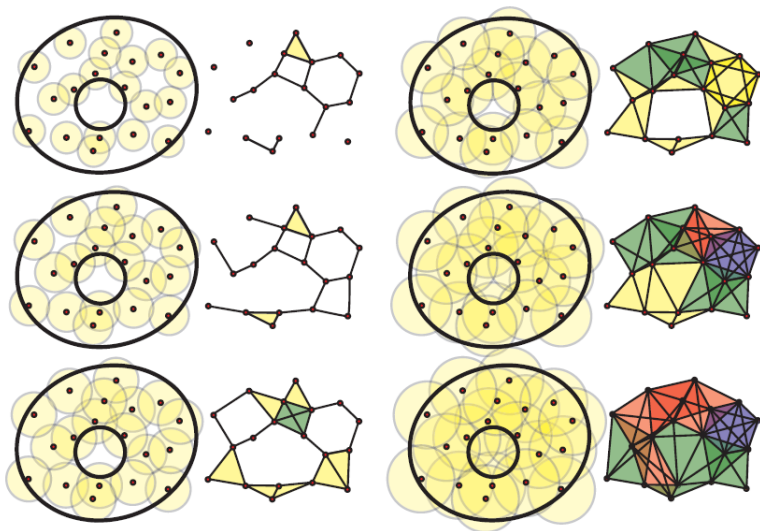
Le **complexe de Vietoris-Rips** $\mathcal{R}_\epsilon(X)$ est le complexe simplicial où :

- les sommets sont les points de $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $\sigma = \{x_1, \dots, x_k\}$ est un k -simplex ssi $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$ pour tout $(x_i, x_j) \in \sigma^2$.



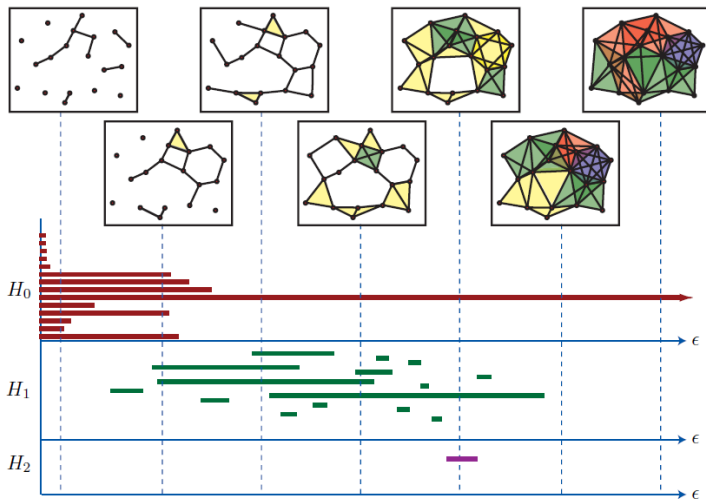
Analyse topologique de données

→ On obtient une **filtration de complexes** en faisant **varier le paramètre ϵ** .



Analyse topologique de données

→ On peut calculer l'**homologie persistante** et donc les **codes barres associés**.



Homologie persistante, TDA et analyse musicale ?

Problématiques :

- Comment associer un complexe filtré à une pièce de musique ?
- Dans quelles mesures l'homologie persistante et l'analyse topologique de données peuvent être utilisées dans le contexte de l'analyse musicale ?

Homologie persistante, TDA et analyse musicale ?

Problématiques :

- Comment associer un complexe filtré à une pièce de musique ?
- Dans quelles mesures l'homologie persistante et l'analyse topologique de données peuvent être utilisées dans le contexte de l'analyse musicale ?

Idées :

- Une partition est l'ensemble des ses mesures distinctes.
- La DFT comme distance sur le nuage de point ainsi obtenu.

Modélisation : la DFT bi-dimensionnelle

1 Homologie persistante

2 Modélisation : la DFT bi-dimensionnelle

- La Transformée de Fourier Discrète
- Persistance et DFT bi-dimensionnelle
- Propriétés : transformations et isométries

3 Applications à l'analyse musicale

La Transformée de Fourier Discrète

On peut étudier certaines **structures musicales** (accords, gammes, rythmes, mesures...) en modélisant à l'aide de fonctions définies sur \mathbb{Z}_n .

Idée : travailler avec une base bien choisie de cet espace de fonctions.



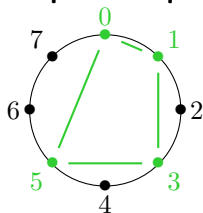
La Transformée de Fourier Discrète

On peut étudier certaines **structures musicales** (accords, gammes, rythmes, mesures...) en modélisant à l'aide de fonctions définies sur \mathbb{Z}_n .

Idée : travailler avec une base bien choisie de cet espace de fonctions.



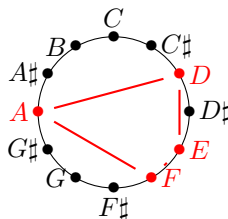
Temps d'attaques



$$\mathcal{T} = \{0, 1, 3, 5\} \subset \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \mapsto (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$$

Classes de hauteurs



$$\mathcal{P} = \{9, 2, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}_{12}$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \mapsto (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

La Transformée de Fourier Discrète

Définition :

La **Transformée de Fourier Discrète (DFT)** d'un ensemble de **temps d'attaques** \mathcal{T} ou de **classes de hauteurs** \mathcal{P} est donnée par la DFT des fonctions caractéristiques associées :

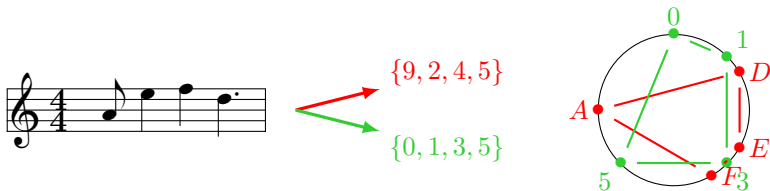
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{T}}} &: \mathbb{Z}_t \longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \sum_{k \in \mathcal{T}} \exp\left(\frac{-2i\pi kx}{8}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{P}}} &: \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \sum_{k \in \mathcal{P}} \exp\left(\frac{-2i\pi kx}{12}\right)\end{aligned}$$

Les **coefficients de Fourier** sont donnés par les t, p -uplets suivant :

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(0), \mathcal{F}_{\mathcal{T}}(1), \dots, \mathcal{F}_{\mathcal{T}}(7)) \qquad (\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(0), \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(1), \dots, \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(11))$$

Idée : temps d'attaques et classes de hauteurs dans un seul ensemble.



$$(\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(\textcolor{green}{0}, \textcolor{red}{9}), (\textcolor{green}{2}, \textcolor{red}{1}), (\textcolor{green}{4}, \textcolor{red}{3}), (\textcolor{green}{5}, \textcolor{red}{5})\} \subset \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$$

Persistence et DFT bi-dimensionnelle



$$\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(0, 9), (2, 1), (4, 3), (5, 5)\} \subset \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$$

Persistence et DFT bi-dimensionnelle



$$\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(0, 9), (2, 1), (4, 3), (5, 5)\} \subset \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$$

- $t = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) l'**unité de temps** ($\circ = 1$, $\flat = 2$, $\natural = 4$, $\sharp = 8, \dots$)
- $p = 12m$ ($m \in \mathbb{N}$) l'**ambitus** ($m =$ **nombre d'octaves**)

Persistence et DFT bi-dimensionnelle



$$\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(0, 9), (2, 1), (4, 3), (5, 5)\} \subset \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$$

- $t = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) l'**unité de temps** ($\circ = 1$, $\flat = 2$, $\text{♩} = 4$, $\text{♪} = 8, \dots$)
- $p = 12m$ ($m \in \mathbb{N}$) l'**ambitus** ($m = \text{nombre d'octaves}$)

Définition :

1) Une **mesure** est un sous-ensemble $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$, où un élément de \mathcal{B} est une **note** caractérisée par deux coordonnées :

- son **temps d'attaque** modulo t
- sa **classe de hauteur** modulo p

Persistence et DFT bi-dimensionnelle



$$\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(0, 9), (2, 1), (4, 3), (5, 5)\} \subset \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$$

- $t = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) l'**unité de temps** ($\circ = 1$, $\flat = 2$, $\half = 4$, $\quarter = 8, \dots$)
- $p = 12m$ ($m \in \mathbb{N}$) l'**ambitus** ($m =$ **nombre d'octaves**)

Définition :

1) Une **mesure** est un sous-ensemble $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$, où un élément de \mathcal{B} est une **note** caractérisée par deux coordonnées :

- i) son **temps d'attaque** modulo t
- ii) sa **classe de hauteur** modulo p

2) Une **partition** \mathcal{S} est l'ensemble de ses mesures **distinctes** modulo (t, p) :

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_N\} \text{ avec } \mathcal{B}_i \subset \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p \text{ et } \mathcal{B}_i \neq \mathcal{B}_j \text{ si } i \neq j.$$



$$\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\} \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$$

Persistence et DFT bi-dimensionnelle



$$\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\} \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$$

Matrice caractéristique :

$$\widehat{\mathbb{1}_{(\mathcal{T}, \mathcal{P})}} : (\mathcal{T}, \mathcal{P}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,12}(\{0, 1\})$$

Définition :

La **DFT d'une mesure** $(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$ est la DFT de sa fonction caractéristique $\mathbb{1}_{(\mathcal{T}, \mathcal{P})}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(\mathcal{T}, \mathcal{P})} = \widehat{\mathbb{1}_{(\mathcal{T}, \mathcal{P})}} : \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{(k, l) \in (\mathcal{T}, \mathcal{P})} \exp\left(\frac{-2i\pi kx}{t}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ly}{p}\right) \end{aligned}$$

Les **coefficients de Fourier** sont donnés par la matrice $t \times p$:

$$\left(\mathcal{F}_{\mathcal{T}, \mathcal{P}}(x, y)\right)_{x, y} \in \mathcal{M}_{t, p}(\mathbb{C})$$

Persistence et DFT bi-dimensionnelle

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition dans $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$.

Persistence et DFT bi-dimensionnelle

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition dans $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$. Pour tout i , on a une matrice de coefficients de Fourier associée à la mesure \mathcal{B}_i :

$$\widehat{M}_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(0,0) & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(0,1) & \dots & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(0,p) \\ \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(1,0) & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(1,1) & \dots & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(1,p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(t-1,0) & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(t-1,1) & \dots & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(t-1,p-1) \end{pmatrix}$$

Persistence et DFT bi-dimensionnelle

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition dans $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$. Pour tout i , on a une matrice de coefficients de Fourier associée à la mesure \mathcal{B}_i :

$$\widehat{M}_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(0,0) & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(0,1) & \dots & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(0,p) \\ \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(1,0) & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(1,1) & \dots & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(1,p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(t-1,0) & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(t-1,1) & \dots & \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(t-1,p-1) \end{pmatrix}$$

Définition :

Pour tout $i \neq j$, la **DFT-distance** entre les mesures \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j est donnée par

$$d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \| \widehat{M}_{\mathcal{B}_i} - \widehat{M}_{\mathcal{B}_j} \|_1 = \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^p | \mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(k,l) - \mathcal{F}_{\mathcal{B}_j}(k,l) |$$

Nuage de points

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition dans $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$.

- **Points** : mesures \mathcal{B}_i auxquelles on associe $\widehat{M}_{\mathcal{B}_i}$
- **Distance** : DFT-distance sur les matrices $\widehat{M}_{\mathcal{B}_i}$

→ On peut ainsi construire un **complexe filtré** à partir de \mathcal{S} et donc calculer l'**homologie persistante** et les **codes barres** associés.

Persistence et DFT bi-dimensionnelle

Un exemple : $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5\}$



Dans $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{24}$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(6, 9), (7, 11)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 12), (1, 12), (2, 14), (3, 12), (4, 11), (6, 4), (7, 7)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(0, 9), (1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 7), (7, 7)\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(0, 7), (1, 5), (2, 5), (3, 3), (4, 5), (6, 0), (7, 5)\}$$

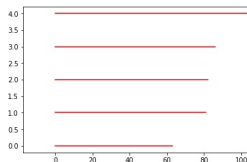
$$\mathcal{B}_5 = \{(0, 3), (0, 7), (0, 11)\}$$

Persistence et DFT bi-dimensionnelle

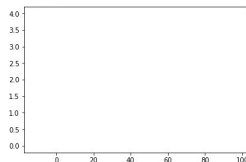


Les distances et codes barres associées à \mathcal{S} :

(1, 5)	(1, 3)	(1, 4)	(4, 5)	(1, 2)	(3, 5)	(2, 3)	(2, 5)	(3, 4)	(2, 4)
378, 73	488, 05	492, 53	493, 78	515, 11	522, 42	548, 72	550, 14	572, 54	605, 70
63%	81%	82%		86%	87%	91%		95%	99%

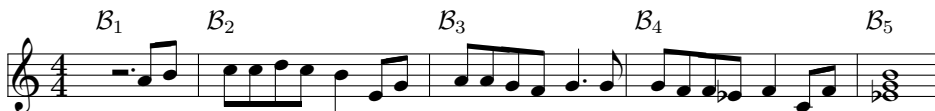


Code barre en degré 0.

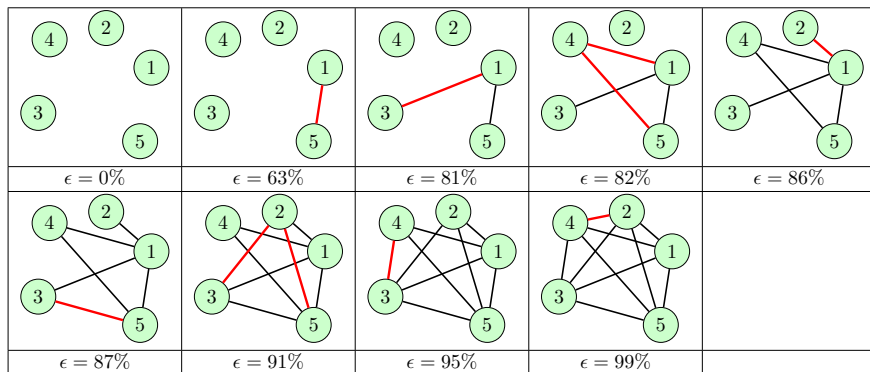


Code barre en degré 1.

Persistence et DFT bi-dimensionnelle



La filtration associée à \mathcal{S} :



On peut étendre l'action du groupe diédral D_{24} aux mesures d'une partition.

On peut étendre l'action du groupe diédral D_{24} aux mesures d'une partition.

Définition :

Soient $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$ une mesure et $(m, n) \in \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$.

- 1) Une (m, n) -**rotation** de \mathcal{B} est une application $\rho_{m,n} : \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$ telle que

$$\rho_{m,n} \cdot \mathcal{B} = \{(m + t, n + p), (t, p) \in (\mathcal{T}, \mathcal{P})\}.$$

- 2) Une (m, n) -**symétrie** de \mathcal{B} est une application $\sigma_{m,n} : \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$ telle que

$$\sigma_{m,n}(\mathcal{B}) = \{(m - t, n - p), (t, p) \in (\mathcal{T}, \mathcal{P})\}.$$

Quelques propriétés : transformations et isométries

Soit $\mathcal{B} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\} \subset \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.



Quelques propriétés : transformations et isométries

Soit $\mathcal{B} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\} \subset \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.



1) $\rho_{1,0} \cdot \mathcal{B} = \{(0, 5), (1, 0), (2, 2), (3, 4)\}$ (**permutation cyclique** des positions) :



\mapsto



Quelques propriétés : transformations et isométries

Soit $\mathcal{B} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\} \subset \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.



1) $\rho_{1,0} \cdot \mathcal{B} = \{(0, 5), (1, 0), (2, 2), (3, 4)\}$ (**permutation cyclique** des positions) :



2) $\rho_{0,5} \cdot \mathcal{B} = \{(0, 5), (1, 7), (2, 9), (3, 10)\}$ (**transposition** des classes de hauteurs) :



Quelques propriétés : transformations et isométries

Soit $\mathcal{B} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\} \subset \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.



1) $\rho_{1,0} \cdot \mathcal{B} = \{(0, 5), (1, 0), (2, 2), (3, 4)\}$ (**permutation cyclique** des positions) :



2) $\rho_{0,5} \cdot \mathcal{B} = \{(0, 5), (1, 7), (2, 9), (3, 10)\}$ (**transposition** des classes de hauteurs) :



3) $\sigma_{2,2} \cdot \mathcal{B} = \{(2, 2), (1, 0), (0, 10), (3, 9)\}$ (**symétrie** sur \mathcal{T} et \mathcal{P}) :



Quelques propriétés : transformations et isométries

Lemme :

Soit \mathcal{B} une mesure de $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$.

Pour toute (m, n) -rotation $\rho_{m,n}$ et toute (m, n) -symétrie $\sigma_{m,n}$, on a

$$i) \mathcal{F}_{\rho_{m,n} \cdot \mathcal{B}}(x, y) = \exp\left(\frac{-2i\pi mx}{t}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ny}{p}\right) \times \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(x, y)$$

$$ii) \mathcal{F}_{\sigma_{m,n} \cdot \mathcal{B}}(x, y) = \exp\left(\frac{-2i\pi mx}{t}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ny}{p}\right) \times \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(x, y)}$$

Quelques propriétés : transformations et isométries

Lemme :

Soit \mathcal{B} une mesure de $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$.

Pour toute (m, n) -rotation $\rho_{m,n}$ et toute (m, n) -symétrie $\sigma_{m,n}$, on a

$$i) \mathcal{F}_{\rho_{m,n} \cdot \mathcal{B}}(x, y) = \exp\left(\frac{-2i\pi mx}{t}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ny}{p}\right) \times \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(x, y)$$

$$ii) \mathcal{F}_{\sigma_{m,n} \cdot \mathcal{B}}(x, y) = \exp\left(\frac{-2i\pi mx}{t}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi ny}{p}\right) \times \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(x, y)}$$

Théorème :

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux mesures de $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$.

Pour toute (m, n) -rotation $\rho_{m,n}$ et toute (m, n) -symétrie $\sigma_{m,n}$, on a

$$d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = d_{\text{DFT}}(\rho_{m,n} \cdot \mathcal{B}, \rho_{m,n} \cdot \mathcal{B}') = d_{\text{DFT}}(\sigma_{m,n} \cdot \mathcal{B}, \sigma_{m,n} \cdot \mathcal{B}')$$

Autrement dit, les rotations et les symétries sont des **isométries** sur l'ensemble des mesures de muni de la DFT-distance.

Quelques propriétés : transformations et isométries

Corollaire :

Soit \mathcal{B} une mesure de $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}_t$ et tout $n \in \mathbb{Z}_p$, on a

$$d_{\text{DFT}}(\rho_{m-1,n-1}(\mathcal{B}), \rho_{m,n}(\mathcal{B})) = d_{\text{DFT}}(\rho_{m,n}(\mathcal{B}), \rho_{m+1,n+1}(\mathcal{B}))$$

Quelques propriétés : transformations et isométries

Corollaire :

Soit \mathcal{B} une mesure de $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}_t$ et tout $n \in \mathbb{Z}_p$, on a

$$d_{\text{DFT}}(\rho_{m-1,n-1}(\mathcal{B}), \rho_{m,n}(\mathcal{B})) = d_{\text{DFT}}(\rho_{m,n}(\mathcal{B}), \rho_{m+1,n+1}(\mathcal{B}))$$

Sur les temps d'attaques :



$$d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4)$$

Quelques propriétés : transformations et isométries

Corollaire :

Soit \mathcal{B} une mesure de $\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_p$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}_t$ et tout $n \in \mathbb{Z}_p$, on a

$$d_{\text{DFT}}(\rho_{m-1,n-1}(\mathcal{B}), \rho_{m,n}(\mathcal{B})) = d_{\text{DFT}}(\rho_{m,n}(\mathcal{B}), \rho_{m+1,n+1}(\mathcal{B}))$$

Sur les temps d'attaques :



$$d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4)$$

Sur les hauteurs :

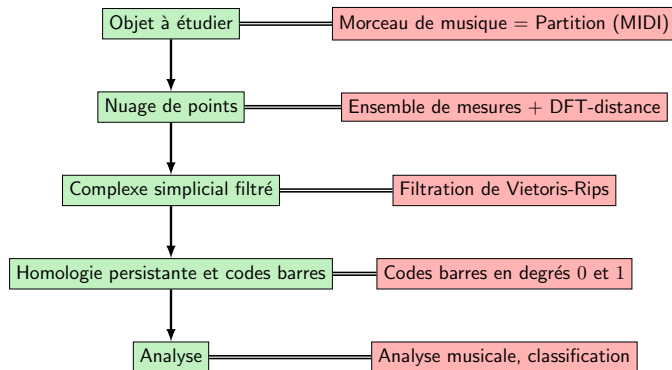


$$d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = \dots = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{12}) = d_{\text{DFT}}(\mathcal{B}_{12}, \mathcal{B}_1)$$

Applications à l'analyse musicale

- 1 Homologie persistante
- 2 Modélisation : la DFT bi-dimensionnelle
- 3 Applications à l'analyse musicale
 - La DFT sur le Tonnetz
 - Vers une classification du style musical ?

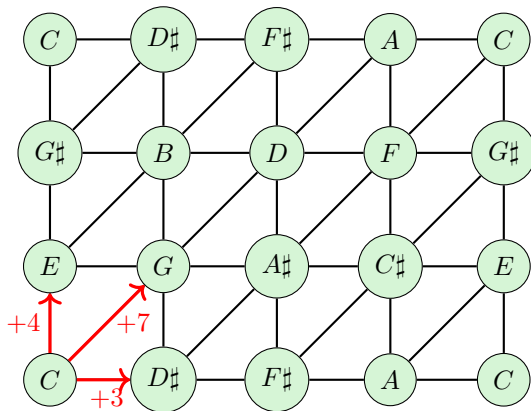
Applications à l'analyse musicale



- Qu'est-ce que cette nouvelle construction apporte musicalement ?
- Comment s'en servir en pratique ?
- Comment lire les codes barres et que racontent-ils sur les pièces étudiées ?

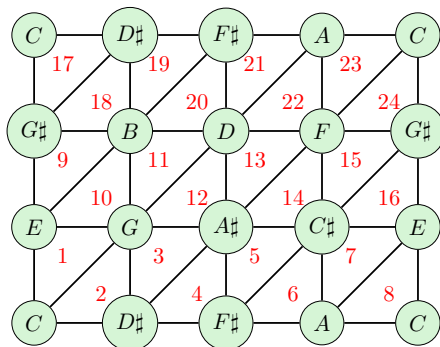
La DFT sur le Tonnetz

Idée : Observer les H_0 et H_1 associés au Tonnetz.



Domaine fondamental du Tonnetz $T[3, 4, 5]$

La DFT sur le Tonnetz

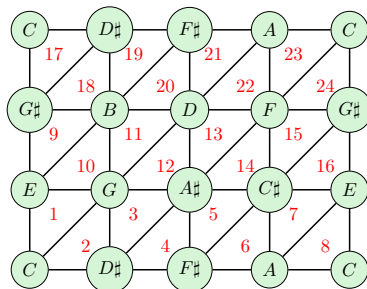


Soit \mathcal{S} la partition associée au Tonnetz $T[3, 4, 5]$:

B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9

...

La DFT sur le Tonnetz



Dans $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{12}$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(0, 0), (0, 4), (0, 7)\} \rightarrow C$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 0), (0, 3), (0, 7)\} \rightarrow Cm$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(0, 3), (0, 7), (0, 10)\} \rightarrow D\sharp$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(0, 3), (0, 6), (0, 10)\} \rightarrow D_m\sharp$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(0, 1), (0, 6), (0, 10)\} \rightarrow F\sharp$$

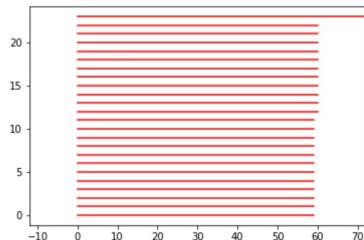
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\mathcal{B}_{23} = \{(0, 0), (0, 5), (0, 9)\} \rightarrow F$$

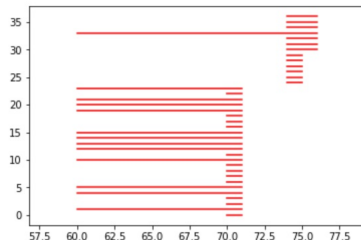
$$\mathcal{B}_{24} = \{(0, 0), (0, 5), (0, 8)\} \rightarrow F_m$$

La DFT sur le Tonnetz

On peut maintenant calculer les codes barres associés à la partition des 24 accords du Tonnetz $T[3, 4, 5]$ via la DFT-distance :



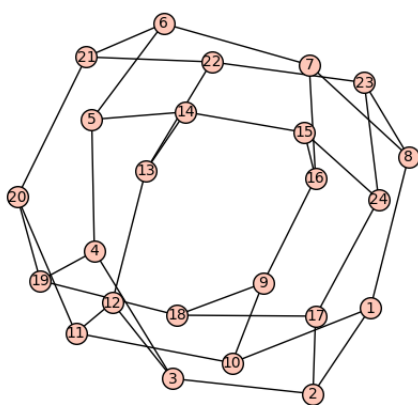
Code barre en degré 0.



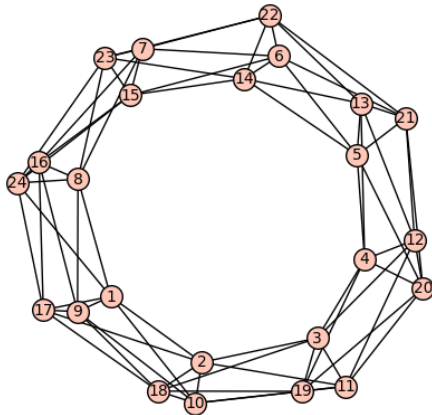
Code barre en degré 1.

La DFT sur le Tonnetz

En degré 0 (le H_0), les complexes à $t = 60\%$ puis à $t = 72\%$ de la filtration :



Graphe à 60%

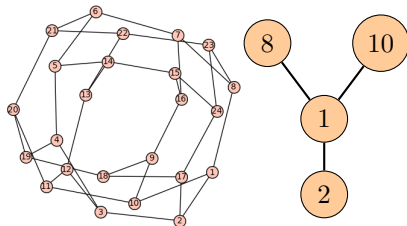


Graphe à 72%

En degré 0, on retrouve l'objet topologique associé au domaine fondamental du Tonnetz : ici, **on retrouve bien le tore !**

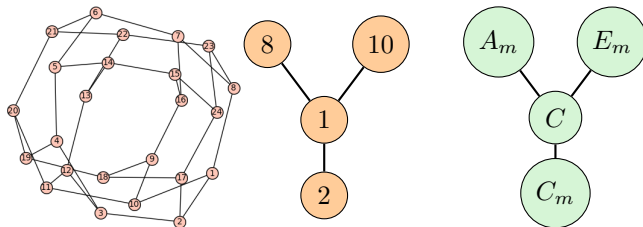
La DFT sur le Tonnetz

Plus précisément, à $t = 60\%$, chaque sommet possède exactement trois voisins :



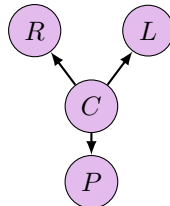
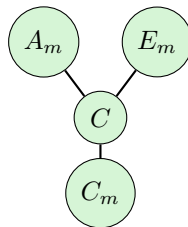
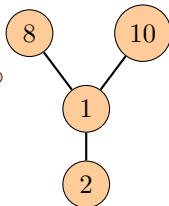
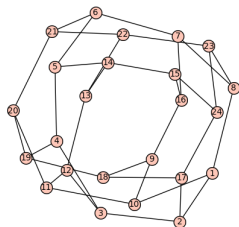
La DFT sur le Tonnetz

Plus précisément, à $t = 60\%$, chaque sommet possède exactement trois voisins :



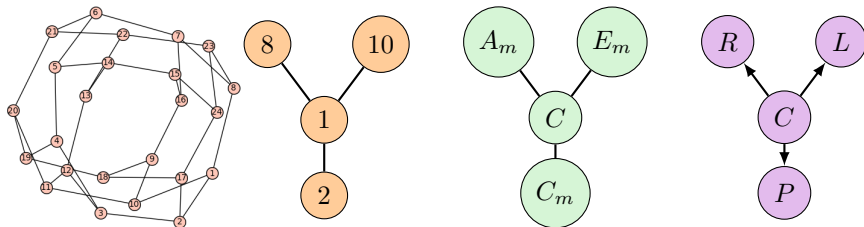
La DFT sur le Tonnetz

Plus précisément, à $t = 60\%$, chaque sommet possède exactement trois voisins :



La DFT sur le Tonnetz

Plus précisément, à $t = 60\%$, chaque sommet possède exactement trois voisins :

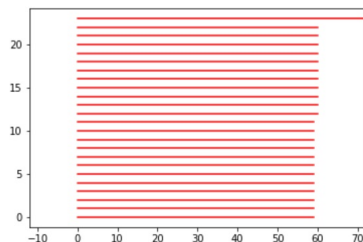


Théorème :

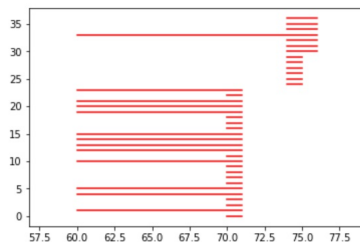
Le graphe obtenu à 60% de la filtration est donné par le **graphe de Cayley** du Tonnetz $T[3, 4, 5]$ généré par les transformations P , L et R .

La DFT sur le Tonnetz

Les codes barres associés au Tonnetz $T[3, 4, 5]$:



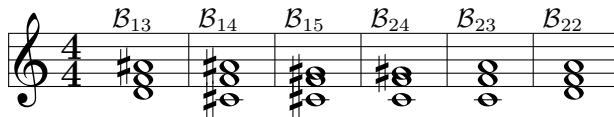
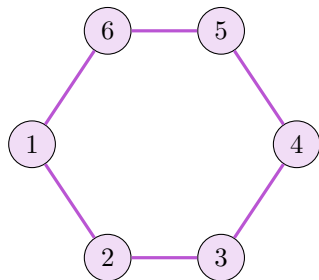
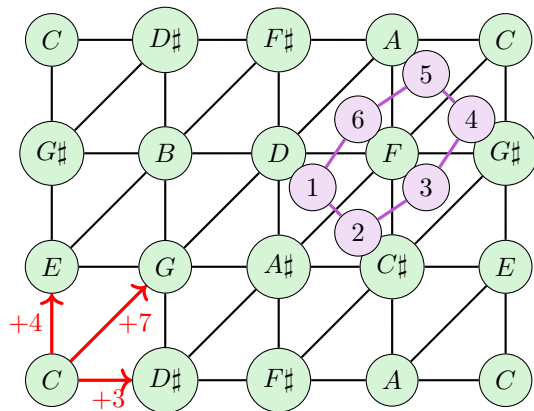
Code barre en degré 0.



Code barre en degré 1.

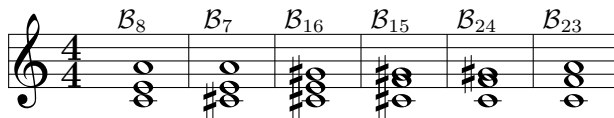
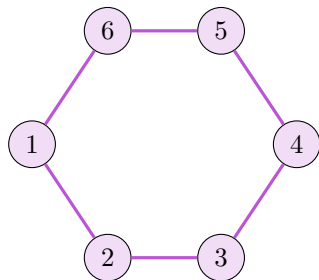
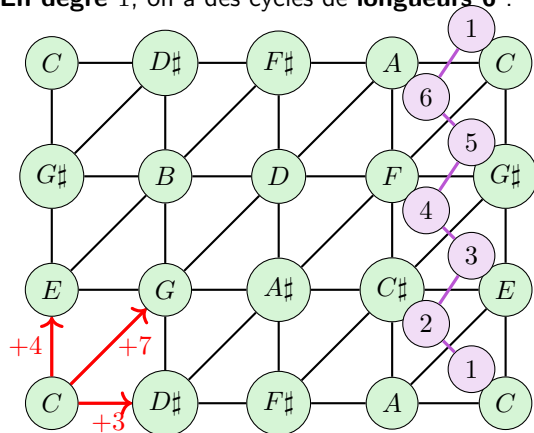
La DFT sur le Tonnetz

En degré 1, on a des cycles de **longueurs 6** :



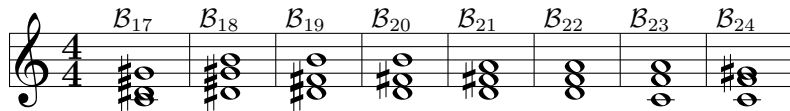
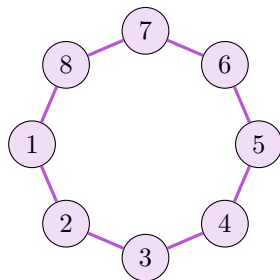
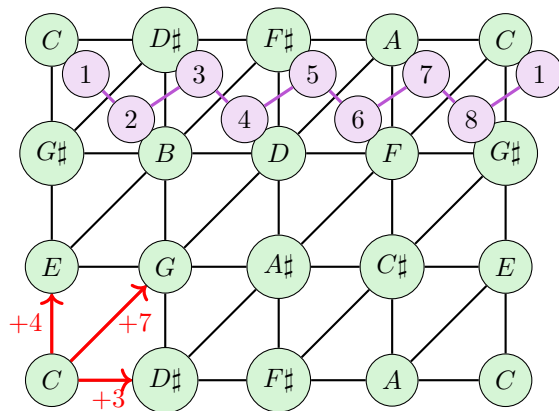
La DFT sur le Tonnetz

En degré 1, on a des cycles de **longueurs 6** :



La DFT sur le Tonnetz

Et des cycles de **longueurs 8** :



Cycles sur le Tonnetz $T[3, 4, 5]$

On obtient ainsi deux façons de construire des cycles en degré 1 dans $T[3, 4, 5]$:
avec les 6 **accords contenant une note donnée** (cycles de longueurs 6) et
en utilisant l'**ordre des axes** dans \mathbb{Z}_{12} :

- axe des tierces (+3) : cycles de longueurs $8 = 2 \times$ (ordre de 3 dans \mathbb{Z}_{12}).
- axe des tierces (+4) : cycles de longueurs $6 = 2 \times$ (ordre de 4 dans \mathbb{Z}_{12}).

Cycles sur le Tonnetz $T[3, 4, 5]$

On obtient ainsi deux façons de construire des cycles en degré 1 dans $T[3, 4, 5]$:
avec les 6 **accords contenant une note donnée** (cycles de longueurs 6) et
en utilisant l'**ordre des axes** dans \mathbb{Z}_{12} :

- axe des tierces (+3) : cycles de longueurs $8 = 2 \times$ (ordre de 3 dans \mathbb{Z}_{12}).
- axe des tierces (+4) : cycles de longueurs $6 = 2 \times$ (ordre de 4 dans \mathbb{Z}_{12}).

On peut également généraliser aux 11 autres Tonnetz $T[a, b, c]$
(avec $a + b + c = 0 \bmod 12$) :

$T[1, 1, 10]$; $T[1, 2, 9]$; $T[1, 3, 8]$; $T[1, 4, 7]$; $T[1, 5, 6]$;

$T[2, 2, 8]$; $T[2, 3, 7]$; $T[2, 4, 6]$; $T[2, 5, 5]$; $T[3, 3, 6]$; $T[4, 4, 4]$

La DFT sur le Tonnetz

Tonnetz	Domaine fondamental	Longueurs des cycles				
		4	6	8	10	12
$T[1, 2, 9], T[2, 3, 7]$	Tore		×	×		×
$T[1, 3, 8], T[3, 4, 5]$			×	×		
$T[1, 4, 7]$			×			
$T[1, 1, 10], T[2, 5, 5]$	Cylindre					×
$T[1, 5, 6]$	Collier de 6 tétraèdres				×	
$T[2, 2, 8]$	2 cylindres		×			
$T[2, 4, 6]$	2 colliers de 3 tétraèdres	×	×			
$T[3, 3, 6]$	3 tétraèdres (vides)	×				
$T[4, 4, 4]$	4 triangles (pleins)					

Tonnetz $T[a, b, c]$ et les cycles en degré 1.

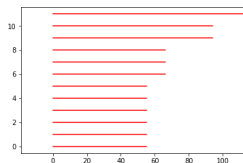
La DFT sur le Tonnetz

Remarque : Pour les Tonnetz non "connexes", le code barre en degré 0 renvoie les différentes composantes qui le constituent.

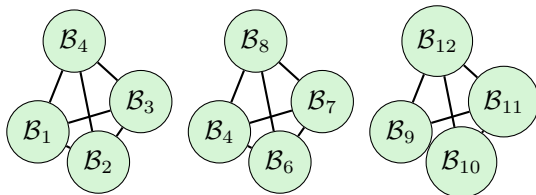
La DFT sur le Tonnetz

Remarque : Pour les Tonnetz non "connexes", le code barre en degré 0 renvoie les différentes composantes qui le constituent.

Exemple : $T[3, 3, 6]$ est constitué de 3 tétraèdres.



Code barre en degré 0
associé à $T[3, 3, 6]$.



Complexe associa à $T[3, 3, 6]$
à 80% de la filtration.



Vers une classification du style musical ?

Comparer des codes barres :

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition composée de N mesures distinctes. On lui associe une **famille de codes barres** :

$$\begin{cases} BC_0(\mathcal{S}) &= \{[b_i, d_i] \mid 1 \leq i \leq r_0, \text{ avec } b_i \in \mathbb{N}\} - [b_{r_0}, \infty] \\ BC_1(\mathcal{S}) &= \{[b_i, d_i] \mid 1 \leq i \leq r_1, \text{ avec } b_i \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

Vers une classification du style musical ?

Définition :

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition et $BC_d(\mathcal{S})$ les codes barres associés avec r_d le nombre de barres.

- La **d -moyenne persistante** associée à \mathcal{S} est donnée par

$$\mu_d(\mathcal{S}) = \frac{1}{r_d} \sum_{i=1}^{r_d} (d_i - b_i)$$

Vers une classification du style musical ?

Définition :

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition et $BC_d(\mathcal{S})$ les codes barres associés avec r_d le nombre de barres.

- La **d -moyenne persistante** associée à \mathcal{S} est donnée par

$$\mu_d(\mathcal{S}) = \frac{1}{r_d} \sum_{i=1}^{r_d} (d_i - b_i)$$

- La **d -variance persistante** associée à \mathcal{S} est donnée par

$$\nu_d(\mathcal{S}) = \sqrt{\frac{1}{r_d} \sum_{i=1}^{r_d} ((d_i - b_i) - \mu_d(\mathcal{S}))^2}$$

Vers une classification du style musical ?

Définition :

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ une partition et $BC_d(\mathcal{S})$ les codes barres associés avec r_d le nombre de barres.

- La **d -moyenne persistante** associée à \mathcal{S} est donnée par

$$\mu_d(\mathcal{S}) = \frac{1}{r_d} \sum_{i=1}^{r_d} (d_i - b_i)$$

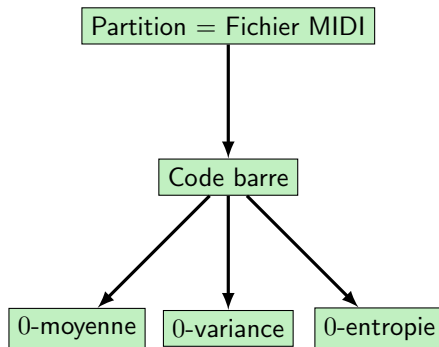
- La **d -variance persistante** associée à \mathcal{S} est donnée par

$$\nu_d(\mathcal{S}) = \sqrt{\frac{1}{r_d} \sum_{i=1}^{r_d} ((d_i - b_i) - \mu_d(\mathcal{S}))^2}$$

- La **d -entropie persistante** associée à \mathcal{S} est donnée par

$$\epsilon_d(\mathcal{S}) = - \sum_{i=1}^{r_d} \rho_i \log \rho_i \quad \text{avec} \quad \rho_i = \frac{d_i - b_i}{\sum_{i=1}^{r_d} d_i - b_i}$$

Vers une classification du style musical ?



→ Un fichier MIDI devient ainsi un triplet (Moyenne, Variance, Entropie) $\in \mathbb{R}^3$

Vers une classification du style musical ?

Du Heavy Metal contre du Baroque

5 groupes de Heavy Metal, 15 morceaux par groupe :

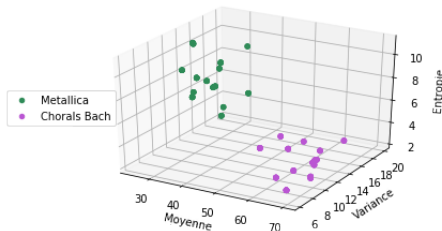
Metallica	Scorpions	Iron Maiden	Judas Priest	Powerwolf
Master of Puppets (1986) Enter Sandman (1991) Nothing Else Matters (1991) Fade to Black (1984) Bleeding Me (1996) Human (1999) ...	Rock you like a Hurricane (1984) Still Loving You (1984) Wind of Change (1990) Blackout (1982) Sting in the Tail (2010) Send me an Angel (1990) ...	Fear of the Dark (1992) Run to the Hills (1982) The Trooper (1983) Hallowed Be Thy Name (1982) Dance of the Death (2003) The Book of Souls (2015) ...	Breaking the Law (1980) Painkiller (1990) Turbo Lover (1986) Living After Midnight (1980) Electric Eye (1982) Hell Patrol (1990) ...	Nightside of Siberia (2018) Sanctified with Dynamite (2011) Werewolves of Armenia (2009) Sanctified with Dynamite (2011) Armata Strigoi (2015) Blessed and Possessed (2015) ...

15 morceaux issus des chorals de Jean-Sébastien Bach (1685-1750) :

Chorals de Bach				
No. 1 BWV 269	No 4. BWV 9	No 7. BWV 389	No 10. BWV 687	No. 13 BWV 261
No. 2 BWV 347	No 5. BWV 9	No 8. BWV 40	No 11. BWV 41	No. 14 BWV 184
No 3. BWV 2	No 6. BWV 281	No 9. BWV 248	No 12. BWV 65	No. 15 BWV 277

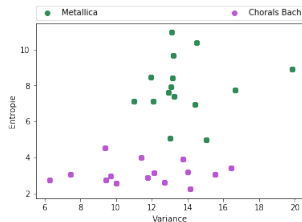
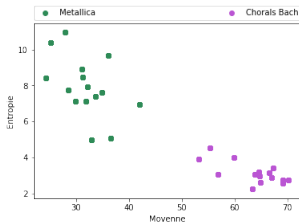
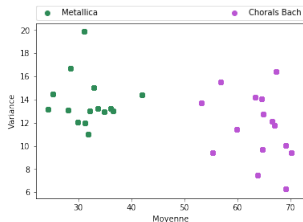
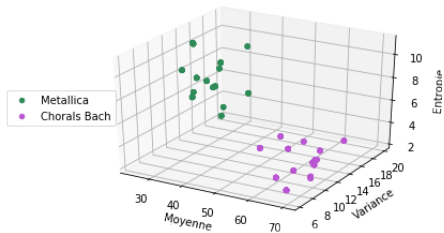
Vers une classification du style musical ?

Du **Heavy Metal** contre du **Baroque**



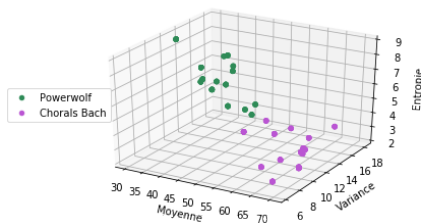
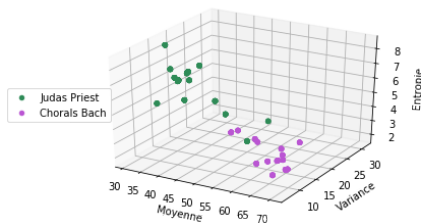
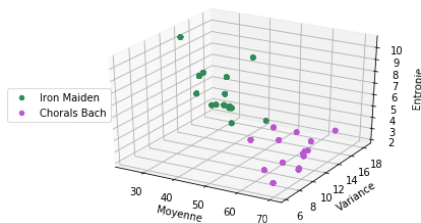
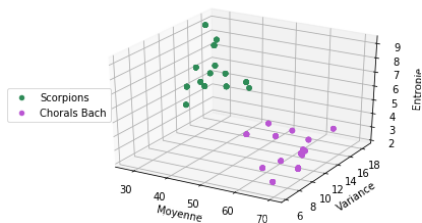
Vers une classification du style musical ?

Du Heavy Metal contre du Baroque



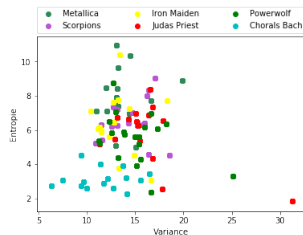
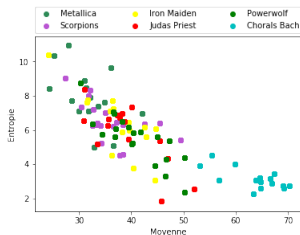
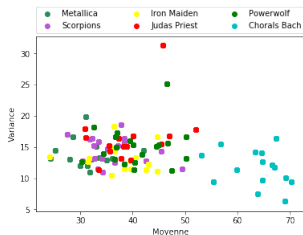
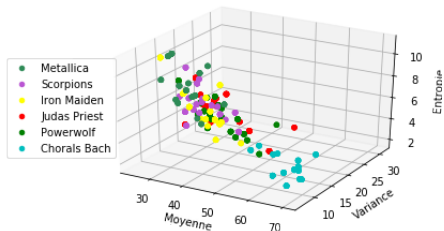
Vers une classification du style musical ?

Du Heavy Metal contre du Baroque



Vers une classification du style musical ?

Du Heavy Metal contre du Baroque

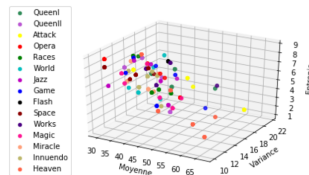
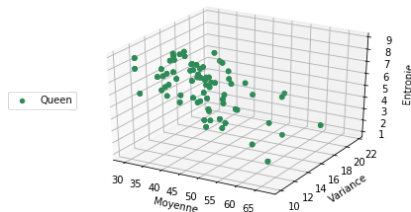


Vers une classification du style musical ?

Sur le groupe **Queen**

70 morceaux issus des 15 albums du groupe Queen (1973-1995) :

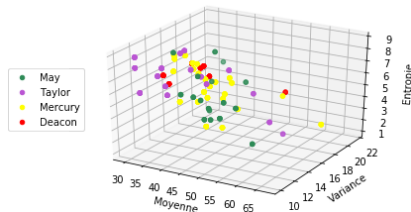
Queen				
Keep Yourself Alive (1973)	Bohemian Rhapsody (1975)	Don't Stop me Now (1977)	Under Pressure (1982)	I Want it all (1989)
Seven Seas of Rhye (1974)	Somebody to Love (1976)	Another One Bites the Dust (1980)	Radio Ga Ga (1984)	Innuendo (1991)
Killer Queen (1974)	Tie Your Mother Down (1976)	Play the Game (1980)	I Want to Break Free (1984)	The Show Must Go On (1991)
Love of my Life (1975)	We are the Champions (1977)	Flash (1980)	A Kind of Magic (1986)	Made in Heaven (1995)



Vers une classification du style musical ?

Sur le groupe **Queen**

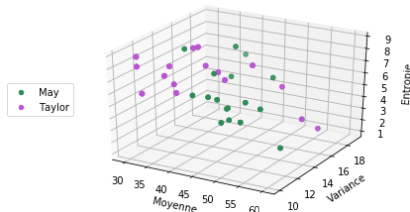
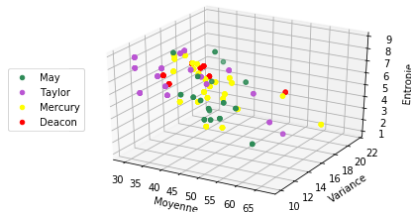
Les morceaux triés par composition : **F. Mercury** (chant/piano), **B. May** (guitariste), **J. Deacon** (bassiste), **R. Taylor** (batteur)



Vers une classification du style musical ?

Sur le groupe **Queen**

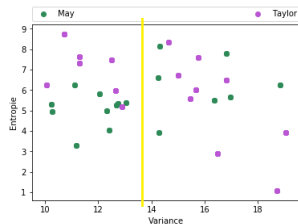
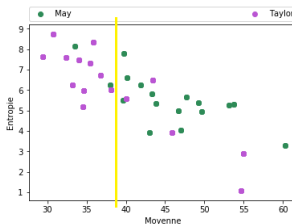
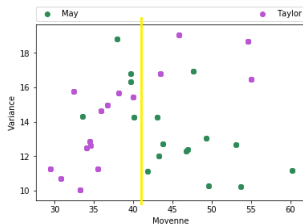
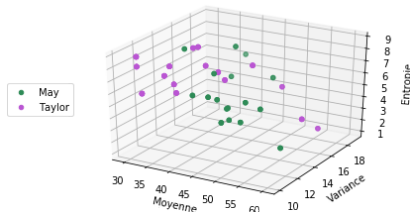
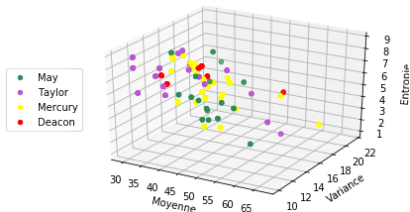
Les morceaux triés par composition : **F. Mercury** (chant/piano), **B. May** (guitariste), **J. Deacon** (bassiste), **R. Taylor** (batteur)



Vers une classification du style musical ?

Sur le groupe **Queen**

Les morceaux triés par composition : **F. Mercury** (chant/piano), **B. May** (guitariste), **J. Deacon** (bassiste), **R. Taylor** (batteur)

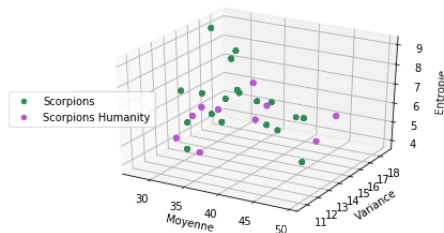


Vers une classification du style musical ?

Sur le groupe **Scorpions**

30 morceaux de Scorpions dont 10 issus de l'album **Humanity** (2007) :

Scorpions	Humanity (2007)
Rock You Like a Hurricane (1984)	Hour 1
Still Loving You (1984)	The Game of Life
Wind of Change (1990)	We Were Born to Fly
Blackout (1982)	The Future Never Dies
Sting in the Tail (2011)	You're Loving Me to Death
Send me an Angel (1990)	321
Big City Night (1982)	Love Will Keep Us Alive
...	...

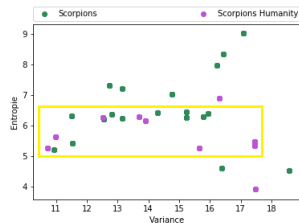
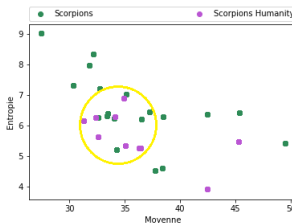
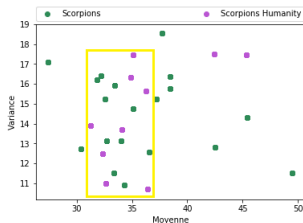
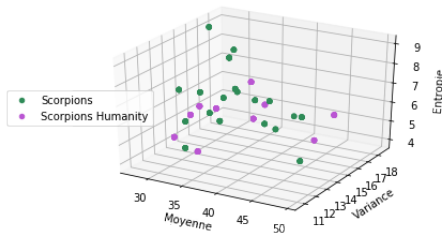


Vers une classification du style musical ?

Sur le groupe **Scorpions**

30 morceaux de Scorpions dont 10 issus de l'album **Humanity** (2007) :

Scorpions	Humanity (2007)
Rock You Like a Hurricane (1984)	Hour 1
Still Loving You (1984)	The Game of Life
Wind of Change (1990)	We Were Born to Fly
Blackout (1982)	The Future Never Dies
Sting in the Tail (2011)	You're Loving Me to Death
Send me an Angel (1990)	321
Big City Night (1982)	Love Will Keep Us Alive
...	...



MERCI POUR VOTRE
ATTENTION !