

ANALYSE TOPOLOGIQUE DES STRUCTURES MUSICALES VIA L'HOMOLOGIE PERSISTANTE

Victoria Callet

Doctorante en Mathématiques à l'IRMA, Strasbourg
sous la supervision de Pierre Guillot et Moreno Andreatta

victoria.callet@math.unistra.fr

Séminaire - IRIMAS, UHA, Mulhouse

12/05/2022



L'homologie persistante, c'est quoi ?

- Outil de la **théorie simpliciale**.
- **But :** Mesurer l'évolution de l'homologie simpliciale à travers le "temps".
- Entre la topologie algébrique et les mathématiques appliquées.
- Analyse Topologique des Données → **reconnaissance de forme**.
- Différents domaines d'applications : médecine, biologie, physique, **musique**,...

Introduction - Plan de l'exposé

1 Théorie simpliciale

- Complexes simpliciaux
- Complexes de chaînes
- Homologie simpliciale

2 Homologie persistante

- Filtration et persistance
- Visualisation par les codes barres
- Analyse topologique des données

3 Homologie persistante et analyse musicale

- Application aux mesures d'un morceau
- Des cycles en degré 1
- Degré 0 et structure des morceaux

I/ THÉORIE SIMPLICIALE

1) Complexes simpliciaux

Définition :

Un complexe simplicial est un couple (V, K) où V est un ensemble de **sommets** et $K \subset \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de **simplexes** tels que

- $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$
- si $\sigma \in K$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in K$.

1) Complexes simpliciaux

Définition :

Un complexe simplicial est un couple (V, K) où V est un ensemble de **sommets** et $K \subset \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de **simplexes** tels que

- $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$
- si $\sigma \in K$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in K$.

Vocabulaire :

- Si $\sigma \in K$ est un simplexe, alors $\dim \sigma = |\sigma| - 1$
- On dit que σ est un **n -simplex** si $|\sigma| = n + 1$
- La dimension du complexe est $\dim(V, K) = \sup_{\sigma \in K} \dim \sigma$
- En général, on désigne par K le complexe simplicial (V, K) .

1) Complexes simpliciaux

On peut toujours penser à un complexe via sa **réalisation géométrique** :



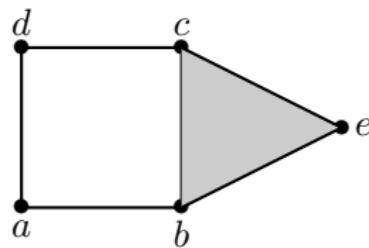
Réalisation géométrique des n -simplices.

1) Complexes simpliciaux

On peut toujours penser à un complexe via sa **réalisation géométrique** :



Réalisation géométrique des n -simplices.



Un complexe simplicial (V, K) de dimension 2 : l'ensemble des sommets est $V = \{a, b, c, d, e\}$ et le "plus gros simplexe" est le triangle $\{c, b, e\}$.

2) Complexes de chaînes

On considère le **corps \mathbb{F}_2 à deux éléments**.

Soit K un complexe simplicial.

Définition :

- Le $n^{\text{ième}}$ **groupe de chaîne** $C_n(K, \mathbb{F}_2)$ de K est le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel sur l'ensemble des n -simplexes de K .
- Une n -**chaîne** $c \in C_n(K)$ est une somme formelle $c = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} \sigma$ où $\lambda_{\sigma} \in \mathbb{F}_2$.

Notations : Quand le contexte est clair, on écrit $C_n(K)$ ou C_n pour $C_n(K, \mathbb{F}_2)$.

2) Complexes de chaînes

On considère le **corps \mathbb{F}_2 à deux éléments**.

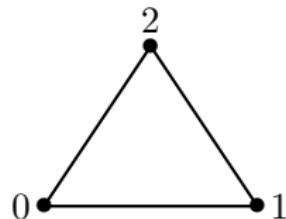
Soit K un complexe simplicial.

Définition :

- Le $n^{\text{ième}}$ **groupe de chaîne** $C_n(K, \mathbb{F}_2)$ de K est le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel sur l'ensemble des n -simplexes de K .
- Une n -**chaîne** $c \in C_n(K)$ est une somme formelle $c = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} \sigma$ où $\lambda_{\sigma} \in \mathbb{F}_2$.

Notations : Quand le contexte est clair, on écrit $C_n(K)$ ou C_n pour $C_n(K, \mathbb{F}_2)$.

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



$$C_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\}$$

$$C_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\}$$

$$C_n(\mathbb{S}^1) = 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0$$

Le complexe simplicial \mathbb{S}^1

2) Complexes de chaînes

Définition :

L'**opérateur bord** $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ est un morphisme défini linéairement sur une chaîne c via son action sur les simplexes $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de c :

$$\partial_n \sigma = \sum_i \{v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

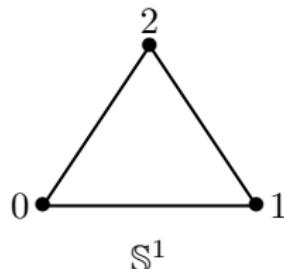
2) Complexes de chaînes

Définition :

L'**opérateur bord** $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ est un morphisme défini linéairement sur une chaîne c via son action sur les simplexes $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de c :

$$\partial_n \sigma = \sum_i \{v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

L'exemple de la sphère \mathbb{S}^1 :



$$\partial_1 \{01\} = \{1\} + \{0\}$$

$$\partial_1 \{12\} = \{2\} + \{1\}$$

$$\partial_1 \{02\} = \{2\} + \{0\}$$

$$\partial_1 (\{01\} + \{12\} + \{20\}) = 2(\{0\} + \{1\} + \{2\}) = 0$$

2) Complexes de chaînes

Lemme : (Fondamental)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composition suivante est nulle :

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

On a ainsi une suite de groupes de chaînes et d'opérateurs bords

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

telle que $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n .

2) Complexes de chaînes

Lemme : (Fondamental)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composition suivante est nulle :

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

On a ainsi une suite de groupes de chaînes et d'opérateurs bords

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

telle que $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n .

Définition :

Un **complexe de chaîne** est un couple $((C_*)_*, \partial)$ où $(C_*)_*$ est un ensemble de groupes de chaîne et ∂ est l'opérateur bord associé.

3) Homologie simpliciale

Soit K un complexe simplicial.

Notations:

- $Z_n(K) = \ker \partial_n$ est l'ensemble des **n -cycles**
- $B_n(K) = \text{im } \partial_{n+1}$ est l'ensemble des **n -bords**

Puisque $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, on a $B_n(K) \subset Z_n(K)$ pour tout n .

3) Homologie simpliciale

Soit K un complexe simplicial.

Notations:

- $Z_n(K) = \ker \partial_n$ est l'ensemble des **n -cycles**
- $B_n(K) = \text{im } \partial_{n+1}$ est l'ensemble des **n -bords**

Puisque $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, on a $B_n(K) \subset Z_n(K)$ pour tout n .

Définition :

- Le $n^{\text{ième}}$ **groupe d'homologie** de K est le quotient

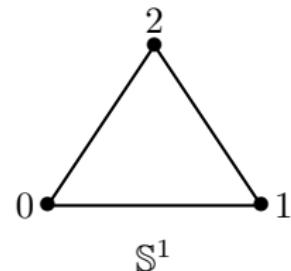
$$H_n(K) = Z_n(K) / B_n(K).$$

- Le $n^{\text{ième}}$ **nombre de Betti** est le nombre $\beta_n(K) = \dim H_n(K)$.

3) Homologie simpliciale

L'exemple de \mathbb{S}^1 :

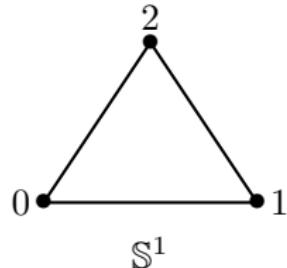
$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



3) Homologie simpliciale

L'exemple de \mathbb{S}^1 :

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

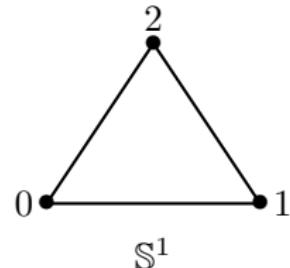


- $B_1(\mathbb{S}^1) = \text{im } \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = Z_1(\mathbb{S}^1) / B_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1$.
 $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\})$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.

3) Homologie simpliciale

L'exemple de \mathbb{S}^1 :

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

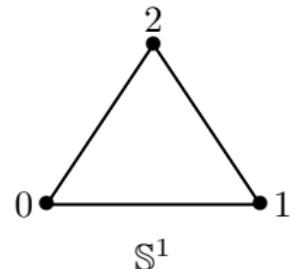


- $B_1(\mathbb{S}^1) = \text{im } \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = Z_1(\mathbb{S}^1) / B_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1$.
 $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\})$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_0(\mathbb{S}^1) = Z_0(\mathbb{S}^1) / B_0(\mathbb{S}^1)$, mais $\dim B_0(\mathbb{S}^1) = \dim \text{im } \partial_1 = 2$
 $Z_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 = C_0(\mathbb{S}^1)$ et donc $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ and $\beta_0(\mathbb{S}^1) = 1$.

3) Homologie simpliciale

L'exemple de \mathbb{S}^1 :

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

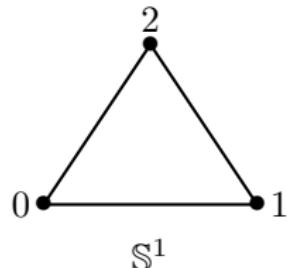


- $B_1(\mathbb{S}^1) = \text{im } \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = Z_1(\mathbb{S}^1) / B_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1$.
 $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\})$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_0(\mathbb{S}^1) = Z_0(\mathbb{S}^1) / B_0(\mathbb{S}^1)$, mais $\dim B_0(\mathbb{S}^1) = \dim \text{im } \partial_1 = 2$
 $Z_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 = C_0(\mathbb{S}^1)$ et donc $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ and $\beta_0(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_n(\mathbb{S}^1) = 0$ dans tous les autres cas.

3) Homologie simpliciale

L'exemple de \mathbb{S}^1 :

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



- $B_1(\mathbb{S}^1) = \text{im } \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = Z_1(\mathbb{S}^1) / B_1(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_1$.
 $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\})$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_0(\mathbb{S}^1) = Z_0(\mathbb{S}^1) / B_0(\mathbb{S}^1)$, mais $\dim B_0(\mathbb{S}^1) = \dim \text{im } \partial_1 = 2$
 $Z_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 = C_0(\mathbb{S}^1)$ et donc $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ and $\beta_0(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_n(\mathbb{S}^1) = 0$ dans tous les autres cas.

Généralisation : pour tous n et k , on a $H_n(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II/ HOMOLOGIE PERSISTANTE

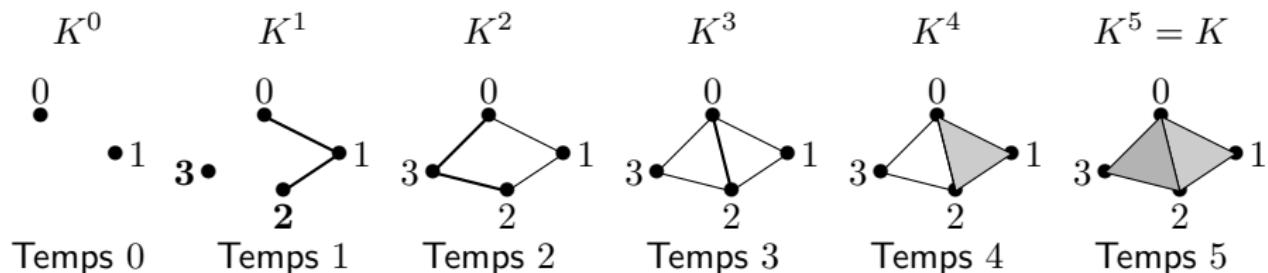
1) Filtration et persistance

Soit K un complexe simplicial.

Définition :

Une **filtration** de K est une suite croissante de sous-complexes de K :

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^N = K$$



On dit que K est un **complexe filtré**.

1) Filtration et persistance

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^N = K$$

Pour toute paire (i, p) , on a $\eta^{i,p} : K^i \hookrightarrow K^{i+p}$.

1) Filtration et persistance

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^N = K$$

Pour toute paire (i, p) , on a $\eta^{i,p} : K^i \hookrightarrow K^{i+p}$.

Pour chaque degré n , on a

$$0 \longrightarrow H_n(K^0) \xrightarrow{\eta_n^{0,1}} H_n(K^1) \xrightarrow{\eta_n^{1,1}} \dots \xrightarrow{\eta_n^{N-2,1}} H_n(K^{N-1}) \xrightarrow{\eta_n^{N-1,1}} \textcolor{red}{H_n(K)}$$

1) Filtration et persistance

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^N = K$$

Pour toute paire (i, p) , on a $\eta^{i,p} : K^i \hookrightarrow K^{i+p}$.

Pour chaque degré n , on a

$$0 \longrightarrow H_n(K^0) \xrightarrow{\eta_n^{0,1}} H_n(K^1) \xrightarrow{\eta_n^{1,1}} \dots \xrightarrow{\eta_n^{N-2,1}} H_n(K^{N-1}) \xrightarrow{\eta_n^{N-1,1}} \textcolor{red}{H_n(K)}$$

Définition :

Soit K un complexe simplicial **filtré**.

(i) Le $p^{\text{ième}}$ **groupe d'homologie persistante** de degré n associé à K^i est

$$H_n^{i,p}(K, \mathbb{F}_2) = H_n^{i,p}(K) := \text{im } \eta_n^{i,p} : H_n(K^i) \rightarrow H_n(K^{i+p}).$$

(ii) Le $p^{\text{ième}}$ **nombre de Betti persistant** de degré n associé à K^i

$$\beta_n^{i,p}(K, \mathbb{F}_2) = \beta_n^{i,p}(K) := \dim H_n^{i,p}(K).$$

1) Filtration et persistance

Théorème : (Structure de l'homologie persistante)

Soit K un complexe filtré.

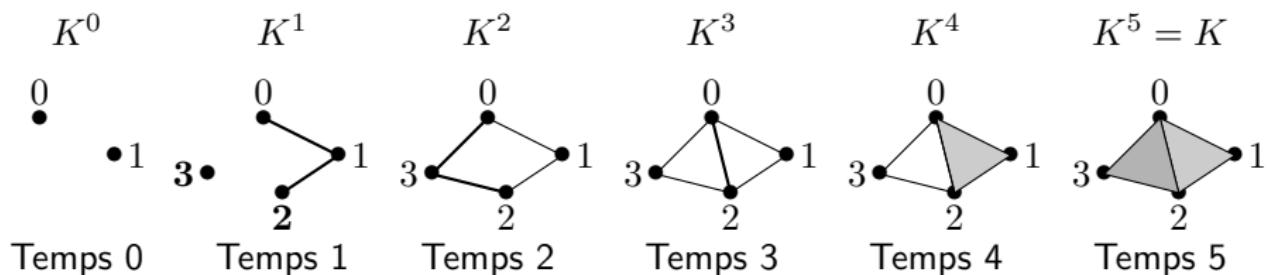
$$H_*(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot \mathbb{F}_2[t] / (t^{c_l}) \right)$$

1) Filtration et persistance

Théorème : (Structure de l'homologie persistante)

Soit K un complexe filtré.

$$H_*(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot \mathbb{F}_2[t]/(t^{c_l}) \right)$$



$$\text{En degré 0 : } H_0(K) = \mathbb{F}_2[t] \oplus (\mathbb{F}_2[t]/t) \oplus (t \cdot \mathbb{F}_2[t]/t)$$

2) Visualisation par les codes barres

Soit K un complexe filtré.

$$H_*(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot \mathbb{F}_2[t] / (t^{c_l}) \right)$$

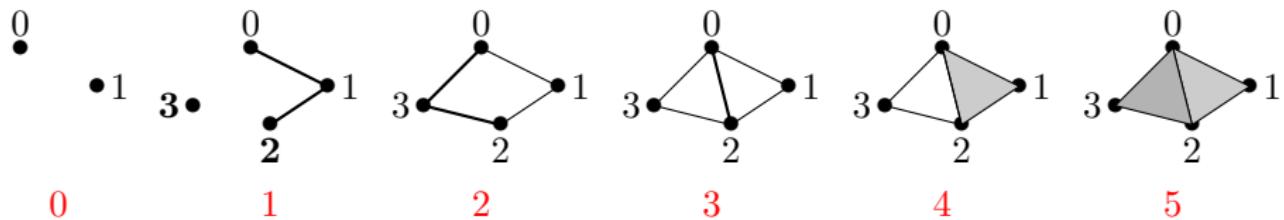
Définition :

Le **code barre** $H_*(K)$ est un graphe dont l'abscisse décrit le **temps de filtration**

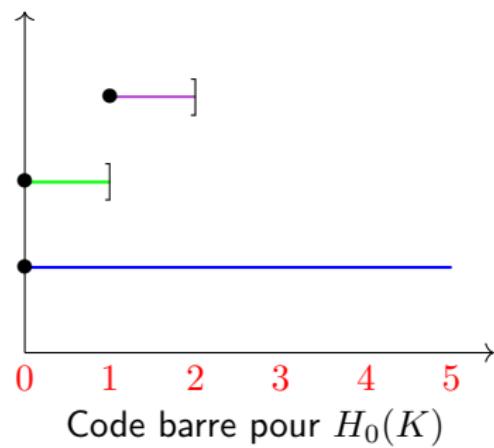
- une classe qui **naît** au temps a_j et ne **meurt jamais** est un intervalle $[a_j, \infty[$
- une classe qui **naît** au temps b_l et **meurt** au temps $b_l + c_l$ est un intervalle $[b_l, b_l + c_l]$

2) Visualisation par les codes barres

En degré 0 :

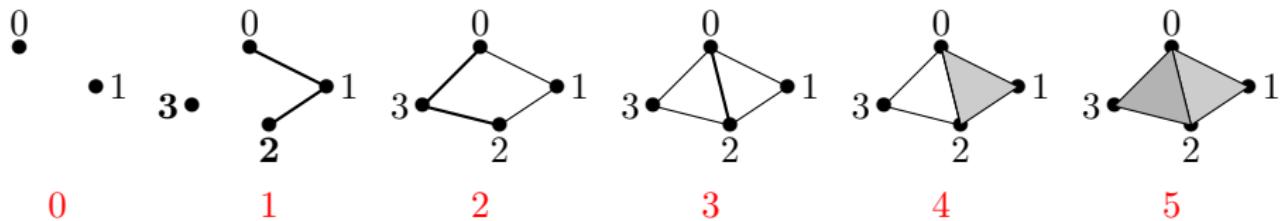


$$H_0(K) = \mathbb{F}_2[t] \oplus (\mathbb{F}_2[t]/t) \oplus (t \cdot \mathbb{F}_2[t]/t)$$

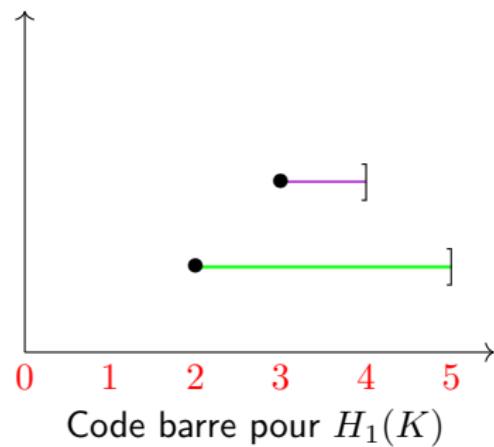


2) Visualisation par les codes barres

En degré 1 :

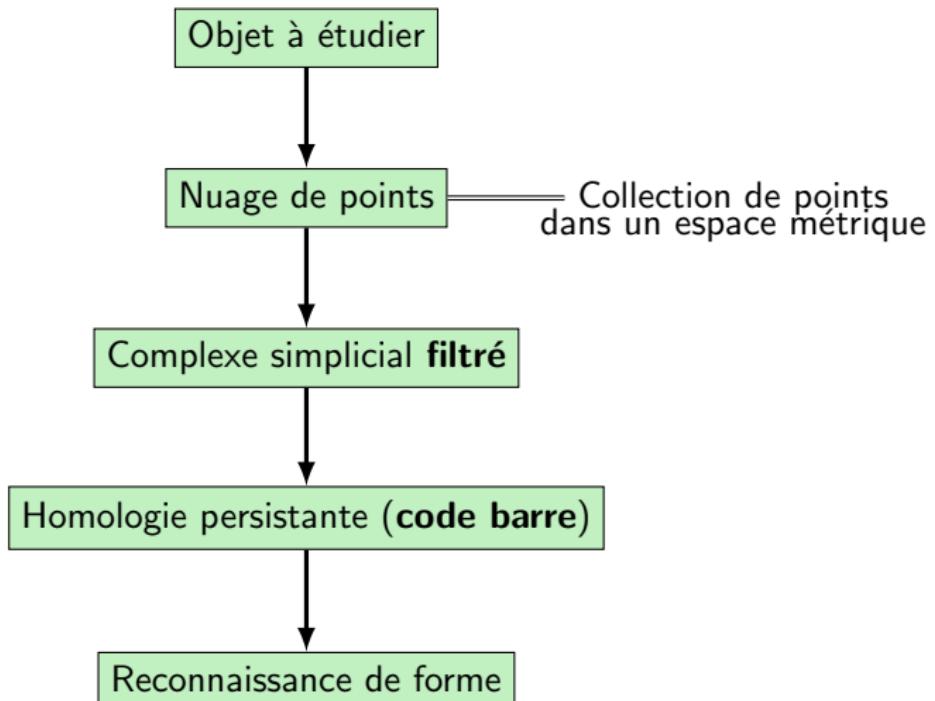


$$H_1(K) = \left(t^2 \cdot k[t] / t^3 \right) \oplus \left(t^3 \cdot k[t] / t \right)$$



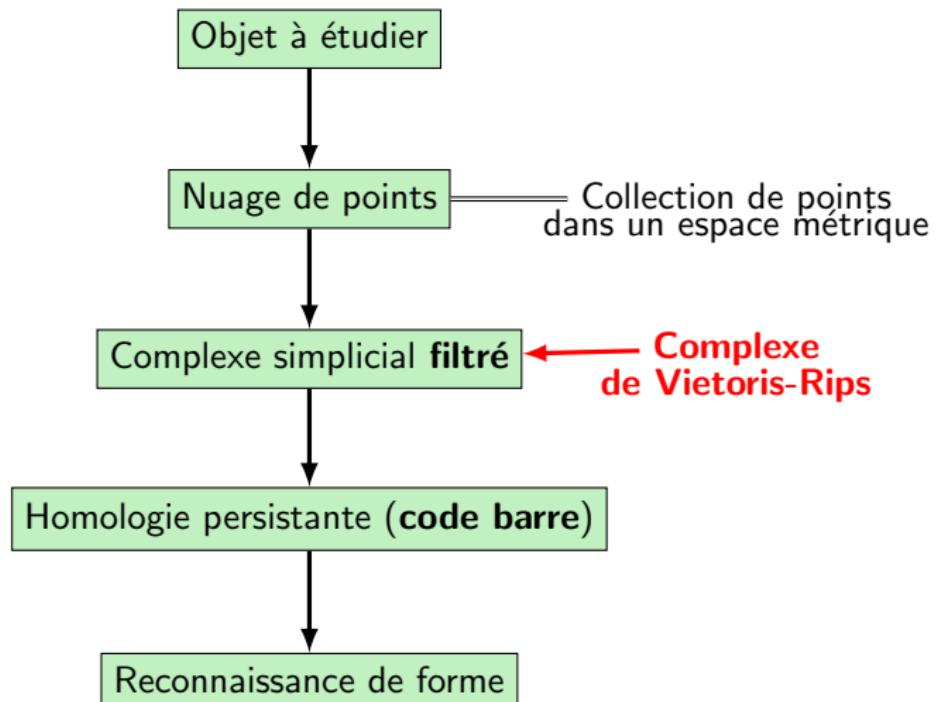
3) Analyse topologique des données

Analyse Topologique de Données (TDA) :



3) Analyse topologique des données

Analyse Topologique de Données (TDA) :



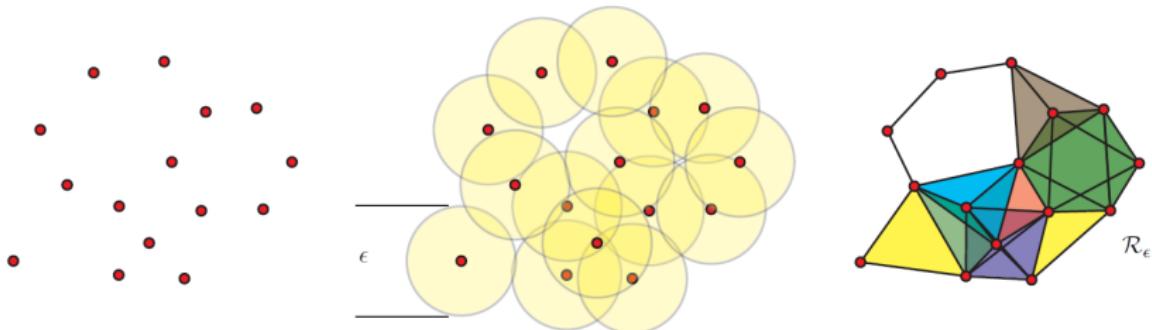
3) Analyse topologique des données

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un **nuage de points** et $\epsilon \geq 0$ un **paramètre**.

Définition :

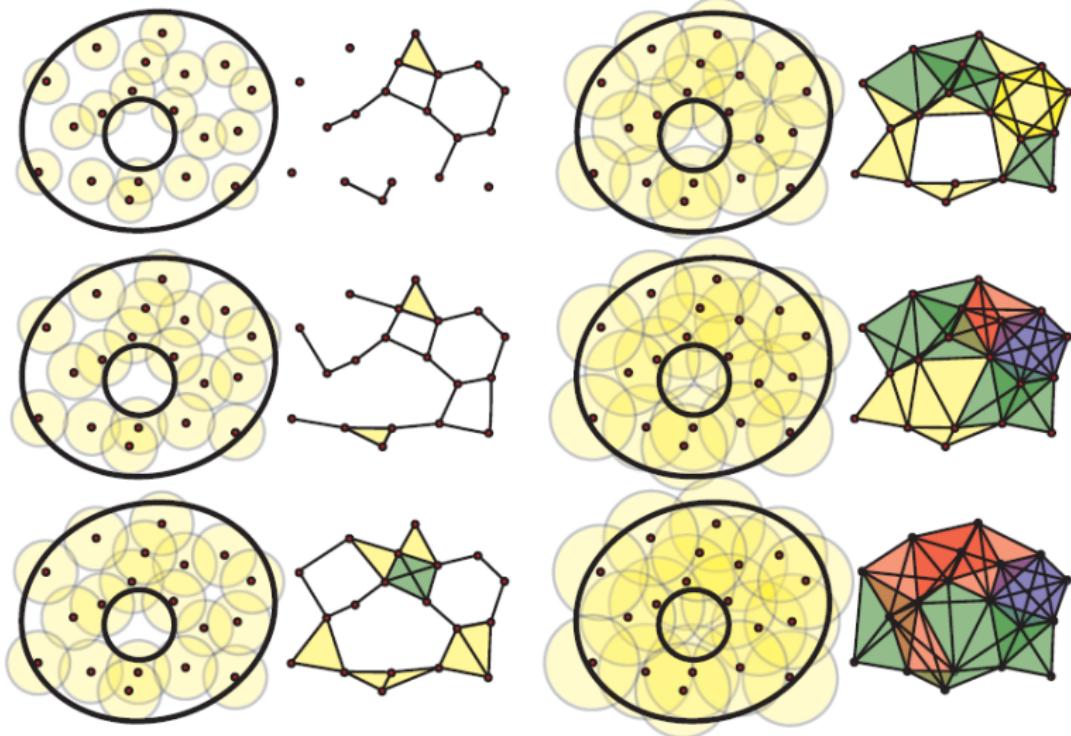
Le **complexe de Vietoris-Rips** $\mathcal{R}_\epsilon(X)$ est le complexe simplicial où :

- les sommets sont les points de $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $\sigma = \{x_1, \dots, x_k\}$ est un k -simplex ssi $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$ pour tout $(x_i, x_j) \in \sigma^2$.



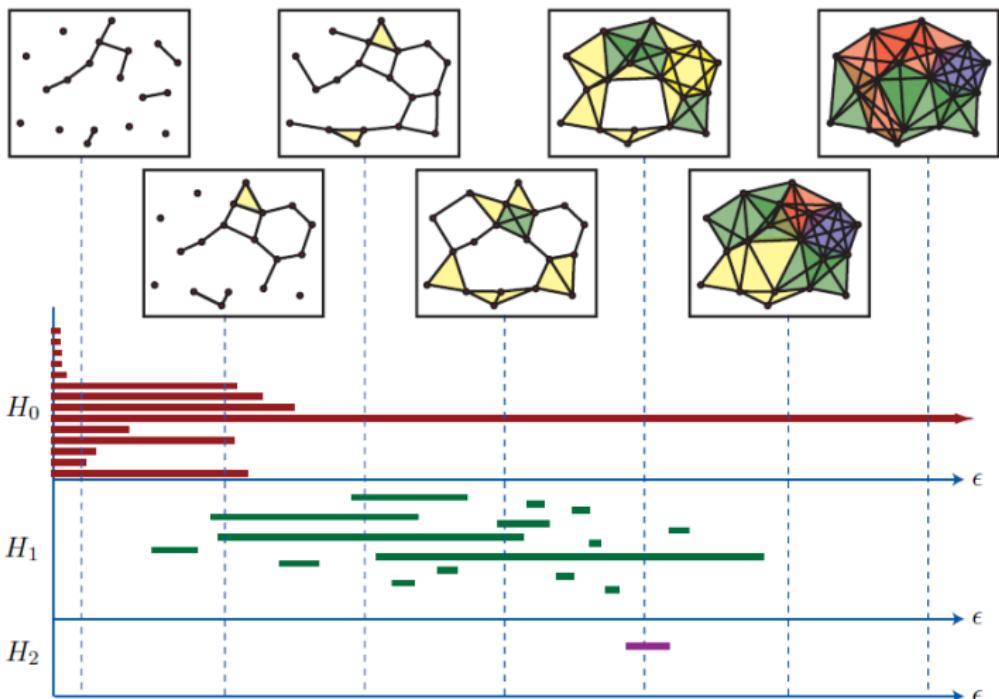
3) Analyse topologique des données

→ On obtient une **filtration de complexes** en faisant varier le paramètre ϵ .



3) Analyse topologique des données

→ On peut calculer l'homologie persistante et donc les **codes barres associés**.



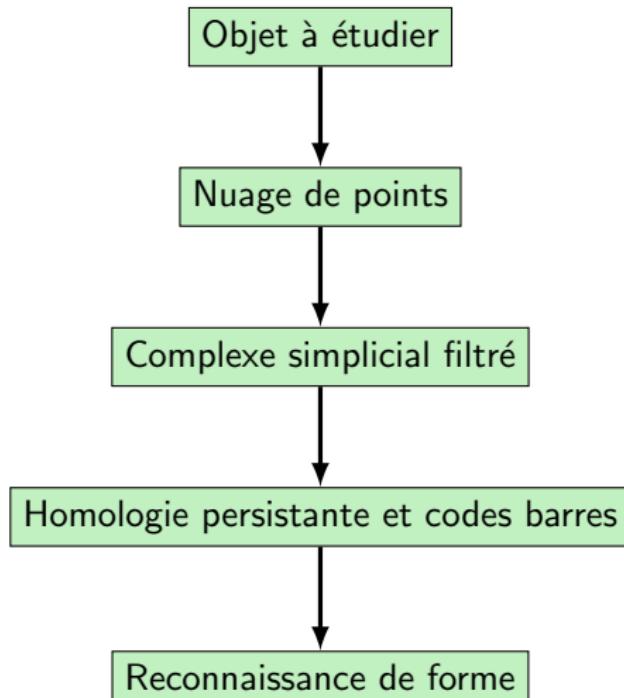
III/ HOMOLOGIE PERSISTANTE ET ANALYSE MUSICALE

Problématiques :

- Comment associer un complexe filtré à une pièce de musique ?
- Dans quelles mesures l'homologie persistante et l'analyse topologique de données peuvent être utilisées dans le contexte de l'analyse musicale ?

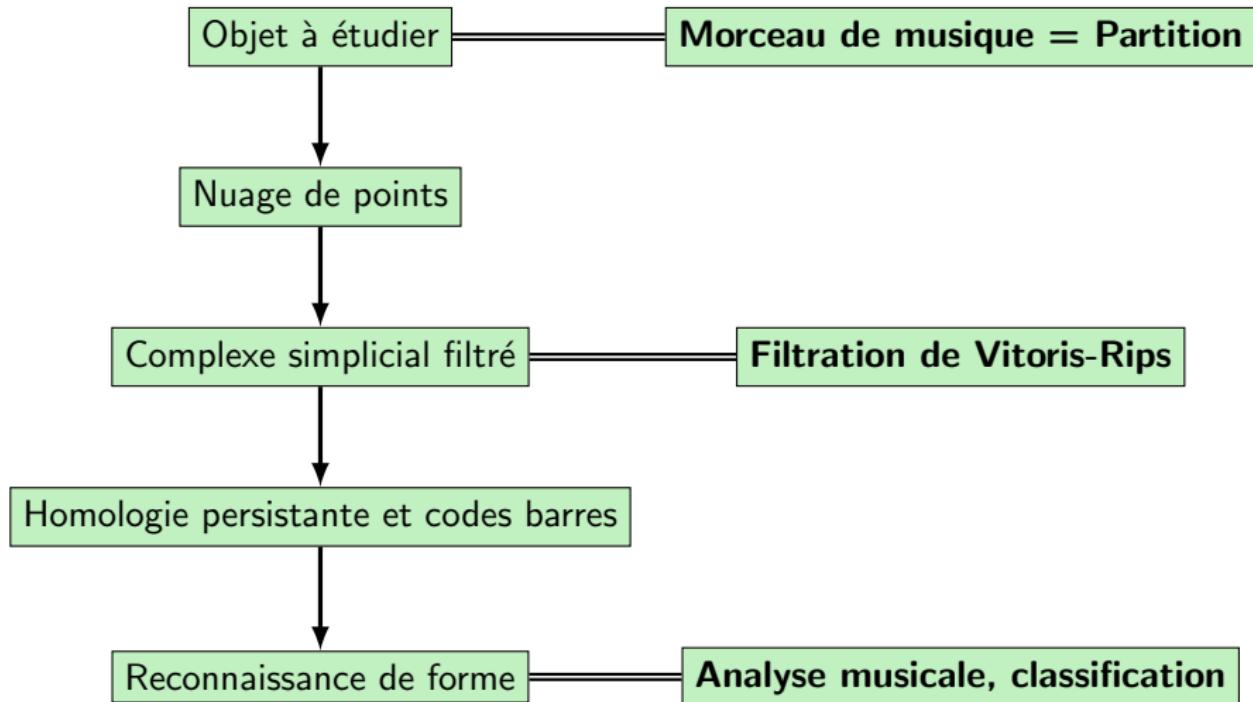
Homologie persistante et analyse musicale

Analyse Topologique de Données :



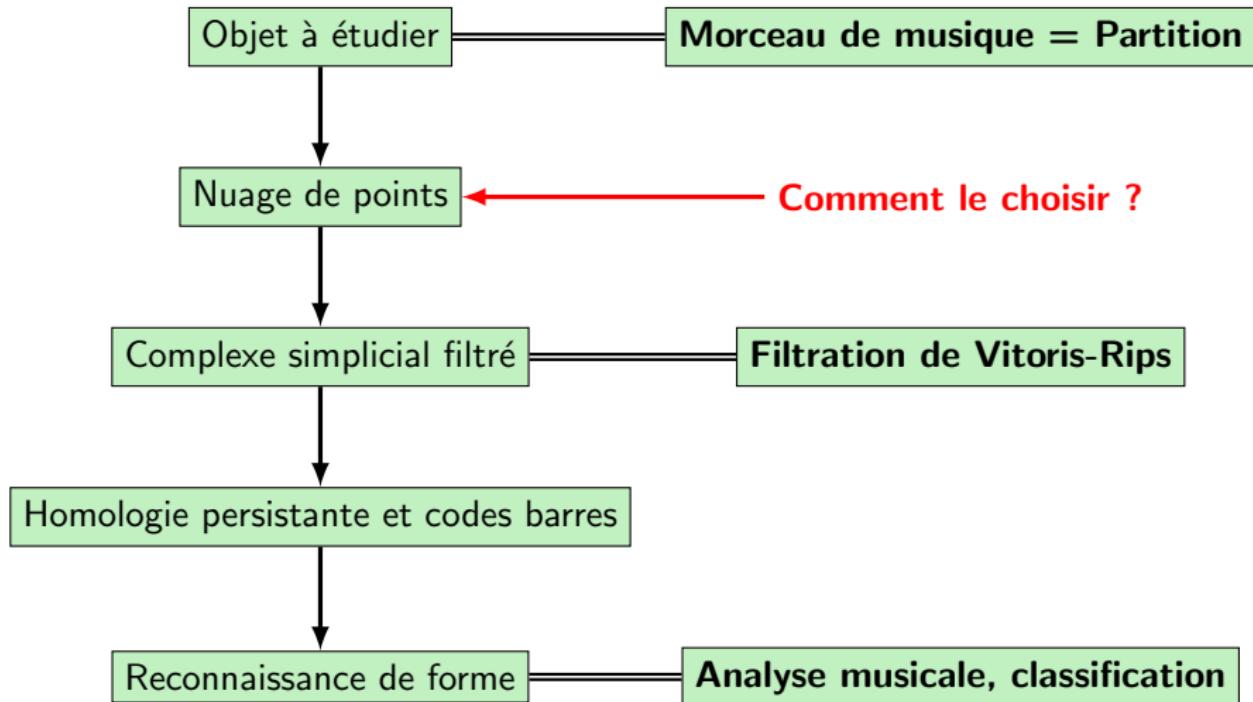
Homologie persistante et analyse musicale

Analyse Topologique de Données :



Homologie persistante et analyse musicale

Analyse Topologique de Données :



1) Application aux mesures d'un morceau

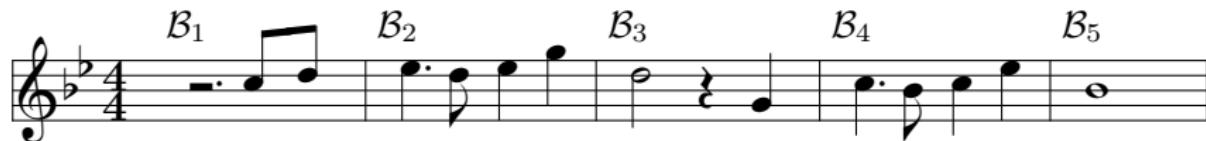
Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles \mathcal{B}_i de \mathbb{R}^3 appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure \mathcal{B}_i est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.

1) Application aux mesures d'un morceau

Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles \mathcal{B}_i de \mathbb{R}^3 appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure \mathcal{B}_i est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.



1) Application aux mesures d'un morceau

Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles \mathcal{B}_i de \mathbb{R}^3 appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure \mathcal{B}_i est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.



$$\mathcal{B}_1 = \{(3, 1/2, C_5), (7/2, 1/2, D_5)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 3/2, E_5\flat), (3/2, 1/2, D_5), (2, 1, E_5\flat), (3, 1, G_5)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(0, 2, D_5), (3, 1, G_4)\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(0, 3/2, C_5), (3/2, 1/2, B_4\flat), (2, 1, C_5), (3, 1, E_5\flat)\}$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(0, 4, B_4\flat)\}$$

P

1) Application aux mesures d'un morceau

Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles \mathcal{B}_i de \mathbb{R}^3 appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure \mathcal{B}_i est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.



$$\mathcal{B}_1 = \{(3, 1/2, C_5), (7/2, 1/2, D_5)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 3/2, E_5\flat), (3/2, 1/2, D_5), (2, 1, E_5\flat), (3, 1, G_5)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(0, 2, D_5), (3, 1, G_4)\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{(0, 3/2, C_5), (3/2, 1/2, B_4\flat), (2, 1, C_5), (3, 1, E_5\flat)\}$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(0, 4, B_4\flat)\}$$

P

Partition

Sous-ensembles de \mathbb{R}^3

1) Application aux mesures d'un morceau

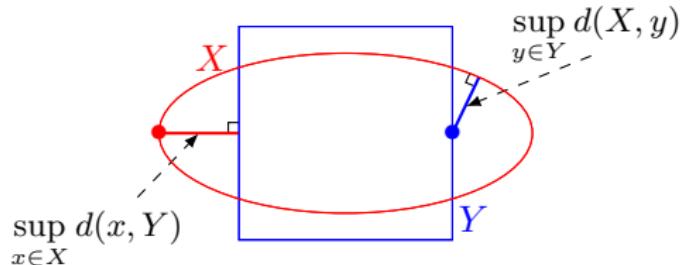
Définition : (Distance de Hausdorff)

Soient X et Y deux espaces métriques compacts munis d'une même distance d .

La **distance de Hausdorff** entre X et Y est donnée par :

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y) ; \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}$$

avec $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$ et $d(X, y) = \inf_{x \in X} d(x, y)$



1) Application aux mesures d'un morceau

On peut appliquer la **distance de Hausdorff** à deux mesures $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathbb{R}^3$, avec d_1 la distance donnée par $d_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_j|$:

$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \max \left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_j \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_j); \quad \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_i, n_j) \right\}$$

1) Application aux mesures d'un morceau

On peut appliquer la **distance de Hausdorff** à deux mesures $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathbb{R}^3$, avec d_1 la distance donnée par $d_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_j|$:

$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \max \left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_j \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_j); \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_i, n_j) \right\}$$



	\mathcal{B}_1	\mathcal{B}_2	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_4	\mathcal{B}_5
\mathcal{B}_1	0	1.07	1.16	0.987	1.82
\mathcal{B}_2		0	0.688	0.111	1.71
\mathcal{B}_3			0	0.577	1.55
\mathcal{B}_4				0	1.6
\mathcal{B}_5					0

1) Application aux mesures d'un morceau

On peut appliquer la **distance de Hausdorff** à deux mesures $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathbb{R}^3$, avec d_1 la distance donnée par $d_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_j|$:

$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \max \left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_j \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_j); \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_i, n_j) \right\}$$



	\mathcal{B}_1	\mathcal{B}_2	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_4	\mathcal{B}_5
\mathcal{B}_1	0	1.07	1.16	0.987	1.82
\mathcal{B}_2		0	0.688	0.111	1.71
\mathcal{B}_3			0	0.577	1.55
\mathcal{B}_4				0	1.6
\mathcal{B}_5					0

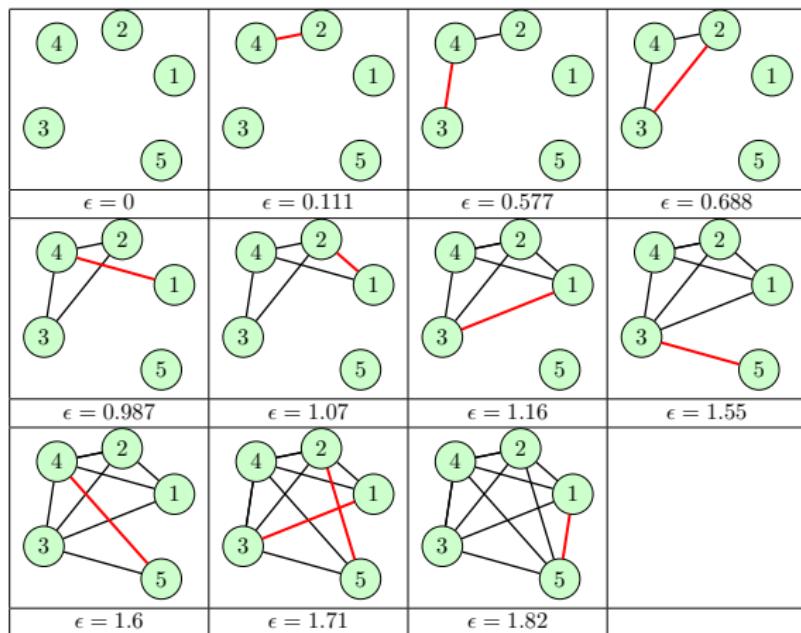
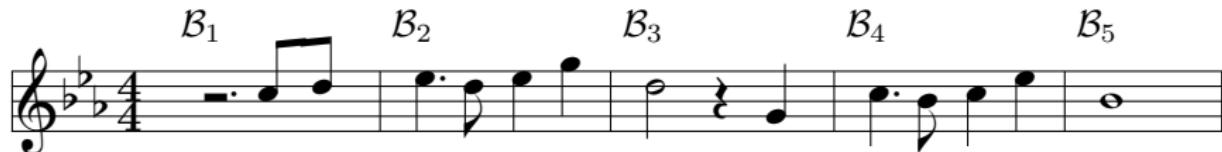
Partition

Sous-ensembles de \mathbb{R}^3

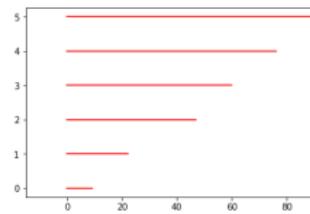
Distance de Hausdorff

NUAGE DE POINTS DANS \mathbb{R}^3

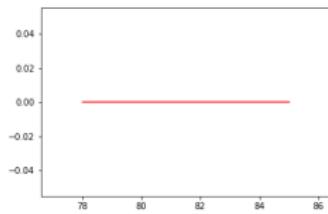
1) Application aux mesures d'un morceau



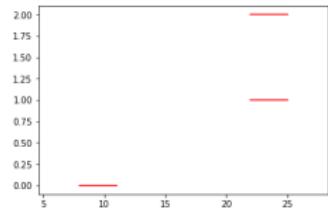
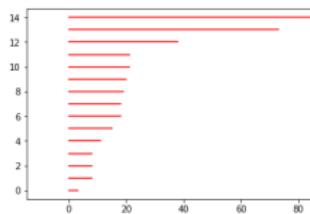
1) Application aux mesures d'un morceau



Code barre pour H_0
6 composantes à 0%



Code barre pour H_1
1 cycle à 78%



Une partition S avec 15 mesures distinctes.

Code barre pour H_0
15 composantes à 0%

Code barre pour H_1
3 cycles à 8% et 22%

L'information topologique de chaque partition
est contenue dans la famille des codes barres associée.

2) Des cycles en degré 1

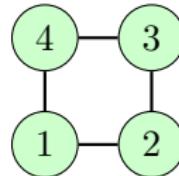
Idée : les éléments du H_1 représentent des **boucles musicales**.

2) Des cycles en degré 1

Idée : les éléments du H_1 représentent des **boucles musicales**.



$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4) = d_H(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \approx 0.083$$
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \approx 0.111$$

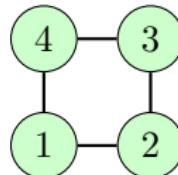


2) Des cycles en degré 1

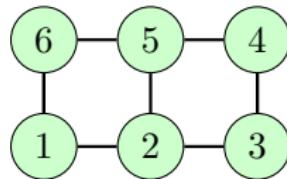
Idée : les éléments du H_1 représentent des **boucles musicales**.



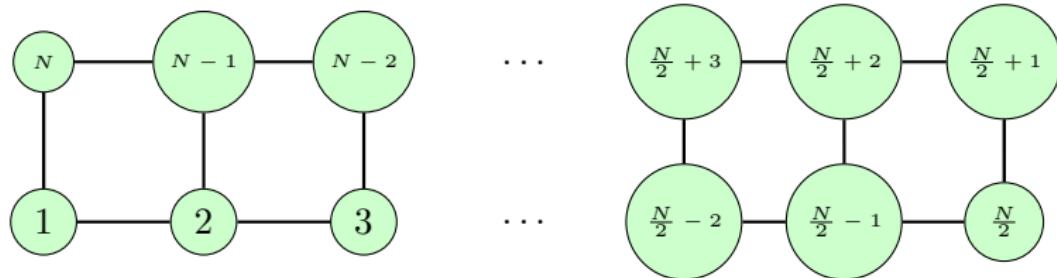
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4) = d_H(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \approx 0.083$$
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \approx 0.111$$



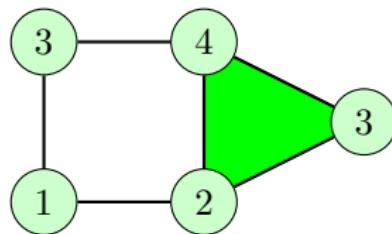
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_6) = d_H(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \approx 0.083$$
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) = d_H(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6) \approx 0.111$$



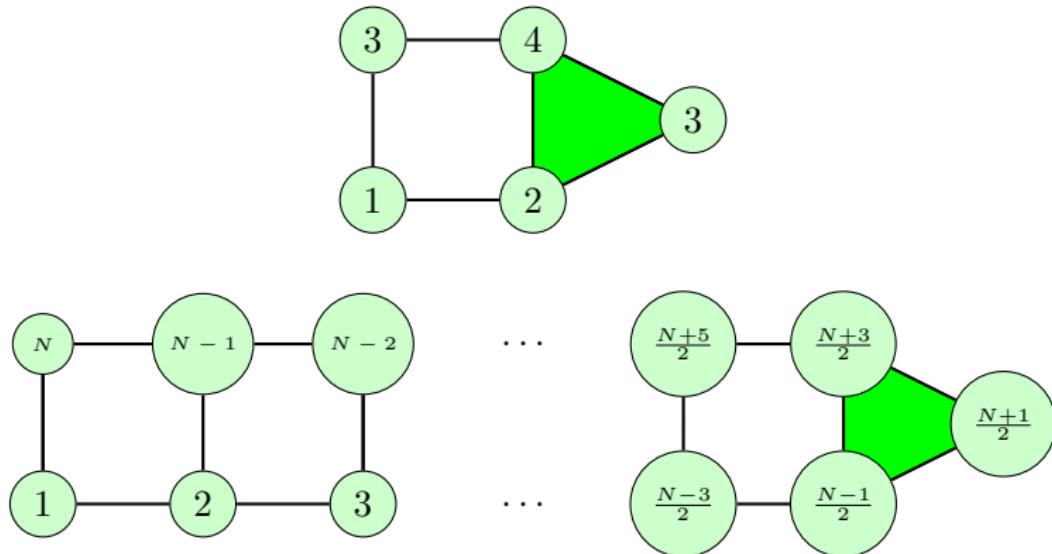
2) Des cycles en degré 1



2) Des cycles en degré 1



2) Des cycles en degré 1



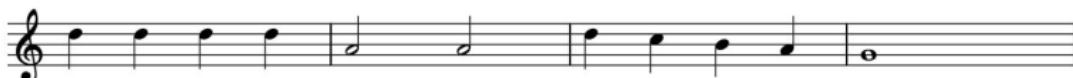
3) Degré 0 et structure des morceaux

Idée : le H_0 donne des informations sur la **structure globale** d'une pièce grâce aux différentes **composantes connexes du complexe**.

3) Degré 0 et structure des morceaux

Idée : le H_0 donne des informations sur la **structure globale** d'une pièce grâce aux différentes **composantes connexes du complexe**.

Un morceau avec 12 mesures distinctes :



3) Degré 0 et structure des morceaux



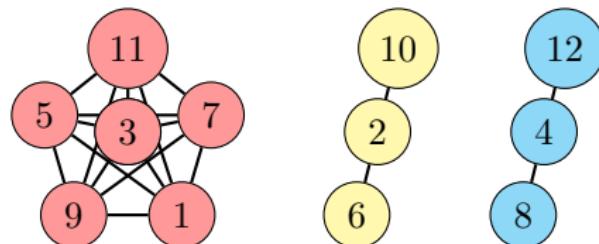
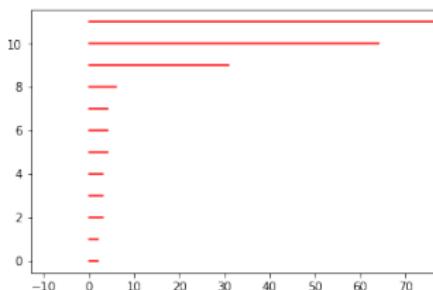
- Noires ♫
- Blanches ♪
- Rondes ♦

3) Degré 0 et structure des morceaux



- Noires ♫
- Blanches ♪
- Rondes ♂

Le code barre en degré 0 et le complexe associé à 6% :



3) Degré 0 et structure des morceaux

Application : Sur la bande-son du film *Le Fabuleux Destin d'Amélie Poulain*,
Comptine d'un autre été: L'Après-midi

Comptine d'un autre été : l'Après midi

"Le Fabuleux Destin d'Amélie Poulain"

Yann Tiersen

$\text{♩} = 96$

1. $\text{♩} = 96$

2.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

44.

45.

46.

47.

48.

49.

50.

51.

52.

53.

54.

55.

56.

57.

58.

59.

60.

61.

62.

63.

64.

65.

66.

67.

68.

69.

70.

71.

72.

73.

74.

75.

76.

77.

78.

79.

80.

81.

82.

83.

84.

85.

86.

87.

88.

89.

90.

91.

92.

93.

94.

95.

96.

97.

98.

99.

100.

101.

102.

103.

104.

105.

106.

107.

108.

109.

110.

111.

112.

113.

114.

115.

116.

117.

118.

119.

120.

121.

122.

123.

124.

125.

126.

127.

128.

129.

130.

131.

132.

133.

134.

135.

136.

137.

138.

139.

140.

141.

142.

143.

144.

145.

146.

147.

148.

149.

150.

151.

152.

153.

154.

155.

156.

157.

158.

159.

160.

161.

162.

163.

164.

165.

166.

167.

168.

169.

170.

171.

172.

173.

174.

175.

176.

177.

178.

179.

180.

181.

182.

183.

184.

185.

186.

187.

188.

189.

190.

191.

192.

193.

194.

195.

196.

197.

198.

199.

200.

201.

202.

203.

204.

205.

206.

207.

208.

209.

210.

211.

212.

213.

214.

215.

216.

217.

218.

219.

220.

221.

222.

223.

224.

225.

226.

227.

228.

229.

230.

231.

232.

233.

234.

235.

236.

237.

238.

239.

240.

241.

242.

243.

244.

245.

246.

247.

248.

249.

250.

251.

252.

253.

254.

255.

256.

257.

258.

259.

260.

261.

262.

263.

264.

265.

266.

267.

268.

269.

270.

271.

272.

273.

274.

275.

276.

277.

278.

279.

280.

281.

282.

283.

284.

285.

286.

287.

288.

289.

290.

291.

292.

293.

294.

295.

296.

297.

298.

299.

300.

301.

302.

303.

304.

305.

306.

307.

308.

309.

310.

311.

312.

313.

314.

315.

316.

317.

318.

319.

320.

321.

322.

323.

324.

325.

326.

327.

328.

329.

330.

331.

332.

333.

334.

335.

336.

337.

338.

339.

340.

341.

342.

343.

344.

345.

346.

347.

348.

349.

350.

351.

352.

353.

354.

355.

356.

357.

358.

359.

360.

361.

362.

363.

364.

365.

366.

367.

368.

369.

370.

371.

372.

373.

374.

375.

376.

377.

378.

379.

380.

381.

382.

383.

384.

385.

386.

387.

388.

389.

390.

391.

392.

393.

394.

395.

396.

397.

398.

399.

400.

401.

402.

403.

404.

405.

406.

407.

408.

409.

410.

411.

412.

413.

414.

415.

416.

417.

418.

419.

420.

421.

422.

423.

424.

425.

426.

427.

428.

429.

430.

431.

432.

433.

434.

435.

436.

437.

438.

439.

440.

441.

442.

443.

444.

445.

446.

447.

448.

449.

450.

451.

452.

453.

454.

455.

456.

457.

458.

459.

460.

461.

462.

463.

464.

465.

466.

467.

468.

469.

470.

471.

472.

473.

474.

475.

476.

477.

478.

479.

480.

481.

482.

483.

484.

485.

486.

487.

488.

489.

490.

491.

492.

493.

494.

495.

496.

497.

498.

499.

500.

501.

502.

503.

504.

505.

506.

507.

508.

509.

510.

511.

512.

513.

514.

515.

516.

517.

518.

519.

520.

521.

522.

523.

524.

525.

526.

527.

528.

529.

530.

531.

532.

533.

534.

535.

536.

537.

538.

539.

540.

541.

542.

543.

544.

545.

546.

547.

548.

549.

550.

551.

552.

553.

554.

555.

556.

557.

558.

559.

560.

561.

562.

563.

564.

565.

566.

567.

568.

569.

570.

571.

572.

573.

574.

575.

576.

577.

578.

579.

580.

581.

582.

583.

584.

585.

586.

587.

588.

589.

590.

591.

592.

593.

594.

595.

596.

597.

598.

599.

600.

601.

602.

603.

604.

605.

606.

607.

608.

609.

610.

611.

612.

613.

614.

615.

616.

617.

618.

619.

620.

621.

622.

623.

624.

625.

626.

627.

628.

629.

630.

631.

632.

633.

634.

635.

636.

637.

638.

639.

640.

641.

642.

643.

644.

645.

646.

647.

648.

649.

650.

651.

652.

653.

654.

655.

656.

657.

658.

659.

660.

661.

662.

663.

664.

665.

666.

667.

668.

669.

670.

671.

672.

673.

674.

675.

676.

677.

678.

679.

680.

681.

682.

683.

684.

685.

686.

687.

688.

689.

690.

691.

692.

693.

694.

695.

696.

697.

698.

699.

700.

701.

702.

703.

704.

705.

706.

707.

708.

709.

710.

711.

712.

713.

714.

715.

716.

717.

718.

719.

720.

721.

722.

723.

724.

725.

726.

727.

728.

729.

730.

731.

732.

733.

734.

735.

736.

737.

738.

739.

740.

741.

742.

743.

744.

745.

746.

747.

748.

749.

750.

751.

752.

753.

754.

755.

756.

757.

758.

759.

760.

761.

762.

763.

764.

765.

766.

767.

768.

769.

770.

771.

772.

773.

774.

775.

776.

777.

778.

779.

780.

781.

782.

783.

784.

785.

786.

787.

788.

789.

790.

791.

792.

793.

794.

795.

796.

797.

798.

799.

800.

801.

802.

803.

804.

805.

806.

807.

808.

809.

8010.

8011.

8012.

8013.

8014.

8015.

8016.

8017.

8018.

8019.

8020.

8021.

8022.

8023.

8024.

8025.

8026.

8027.

8028.

8029.

8030.

8031.

8032.

8033.

8034.

8035.

8036.

8037.

8038.

8039.

8040.

8041.

8042.

8043.

8044.

8045.

8046.

8047.

8048.

8049.

8050.

8051.

8052.

8053.

8054.

8055.

8056.

8057.

8058.

8059.

8060.

8061.

8062.

8063.

8064.

8065.

8066.

8067.

8068.

8069.

8070.

8071.

8072.

8073.

8074.

8075.

8076.

8077.

8078.

8079.

8080.

8081.

8082.

8083.

8084.

8085.

8086.

8087.

8088.

8089.

8090.

8091.

8092.

8093.

8094.

8095.

8096.

8097.

8098.

8099.

80100.

80101.

80102.

80103.

80104.

80105.

80106.

80107.

80108.

80109.

80110.

80111.

80112.

80113.

80114.

80115.

80116.

80117.

80118.

80119.

80120.

80121.

80122.

80123.

80124.

80125.

80126.

80127.

80128.

80129.

80130.

80131.

80132.

80133.

80134.

80135.

80136.

80137.

80138.

80139.

80140.

80141.

80142.

80143.

80144.

80145.

80146.

80147.

80148.

80149.

80150.

80151.

80152.

80153.

80154.

80155.

80156.

80157.

80158.

80159.

80160.

80161.

80162.

80163.

80164.

80165.

80166.

80167.

80168.

80169.

80170.

80171.

80172.

80173.

80174.

80175.

80176.

80177.

80178.

80179.

80180.

80181.

80182.

80183.

80184.

80185.

80186.

80187.

80188.

80189.

80190.

80191.

80192.

80193.

80194.

80195.

80196.

80197.

80198.

80199.

80200.

80201.

80202.

80203.

80204.

80205.

80206.

80207.

80208.

80209.

80210.

80211.

80212.

80213.

80214.

80215.

80216.

80217.

80218.

80219.

80220.

80221.

80222.

80223.

80224.

80225.

80226.

80227.

80228.

80229.

80230.

80231.

80232.

80233.

80234.

80235.

80236.

80237.

80238.

80239.

80240.

80241.

80242.

80243.

80244.

80245.

80246.

80247.

80248.

80249.

80250.

80251.

80252.

80253.

80254.

80255.

80256.

80257.

80258.

80259.

80260.

80261.

80262.

80263.

80264.

80265.

80266.

80267.

80268.

80269.

80270.

80271.

80272.

80273.

80274.

80275.

80276.

80277.

80278.

80279.

80280.

80281.

80282.

80283.

80284.

80285.

80286.

80287.

80288.

80289.

80290.

80291.

80292.

80293.

80294.

80295.

80296.

80297.

80298.

80299.

80300.

80301.

80302.

80303.

80304.

80305.

80306.

80307.

80308.

80309.

80310.

80311.

80312.

80313.

80314.

80315.

80316.

80317.

80318.

80319.

80320.

80321.

80322.

80323.

80324.

80325.

80326.

80327.

80328.

80329.

80330.

80331.

80332.

80333.

80334.

80335.

80336.

80337.

80338.

80339.

80340.

80341.

80342.

80343.

80344.

80345.

80346.

80347.

80348.

80349.

80350.

80351.

80352.

80353.

80354.

80355.

80356.

80357.

80358.

80359.

80360.

80361.

80362.

80363.

80364.

80365.

80366.

80367.

80368.

80369.

80370.

80371.

80372.

80373.

80374.

80375.

80376.

80377.

80378.

80379.

80380.

80381.

80382.

80383.

80384.

80385.

80386.

80387.

80388.

80389.

80390.

80391.

80392.

80393.

80394.

80395.

80396.

80397.

80398.

80399.

80400.

80401.

80402.

80403.

80404.

80405.

80406.

80407.

80408.

80409.

80410.

80411.

80412.

80413.

80414.

80415.

80416.

80417.

80418.

80419.

80420.

80421.

80422.

80423.

80424.

80425.

80426.

80427.

80428.

80429.

80430.

80431.

80432.

80433.

80434.

80435.

80436.

80437.

80438.

80439.

80440.

80441.

80442.

80443.

80444.

80445.

80446.

80447.

80448.

80449.

80450.

80451.

80452.

80453.

80454.

80455.

80456.

80457.

80458.

80459.

80460.

80461.

80462.

80463.

80464.

80465.

80466.

80467.

80468.

80469.

80470.

80471.

80472.

80473.

80474.

80475.

80476.

80477.

80478.

80479.

80480.

80481.

80482.

80483.

80484.

80485.

80486.

80487.

80488.

80489.

80490.

80491.

80492.

80493.

80494.

80495.

80496.

80497.

80498.

80499.

80500.

80501.

80502.

80503.

80504.

80505.

80506.

80507.

80508.

80509.

80510.

80511.

80512.

80513.

80514.

80515.

80516.

80517.

80518.

80519.

80520.

80521.

80522.

80523.

80524.

80525.

80526.

80527.

80528.

80529.

80530.

80531.

80532.

80533.

80534.

80535.

80536.

80537.

80538.

80539.

80540.

80541.

80542.

80543.

80544.

80545.

80546.

80547.

80548.

80549.

80550.

80551.

80552.

80553.

80554.

80555.

80556.

80557.

80558.

80559.

80560.

80561.

80562.

80563.

80564.

80565.

80566.

80567.

80568.

80569.

80570.

80571.

80572.

80573.

80574.

80575.

80576.

80577.

80578.

80579.

80580.

80581.

80582.</p

3) Degré 0 et structure des morceaux

Comptine d'un autre été : l'Après midi

"Le Fabuleux Destin d'Amélie Poulain"

Yann Tiersen

$\text{♩} = 96$

1 - 4

5 - 8

9 - 12

13 - 16

17 - 20

21 - 24

25 - 28

29

21 - 24

25 - 28

29 - 32

- Accompagnement
- Premier thème
- Second thème
- Troisième thème
- Conclusion

3) Degré 0 et structure des morceaux

L'accompagnement, les différents thèmes et la conclusion :

Accompagnement



Premier thème



Second thème



Troisième thème

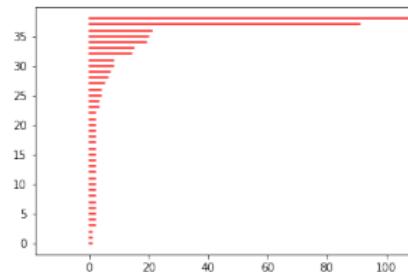


Conclusion



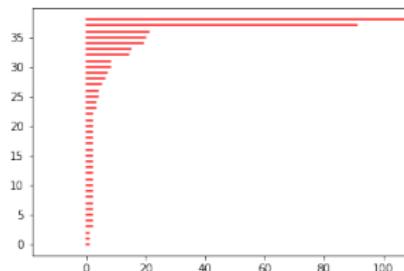
3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 0 :

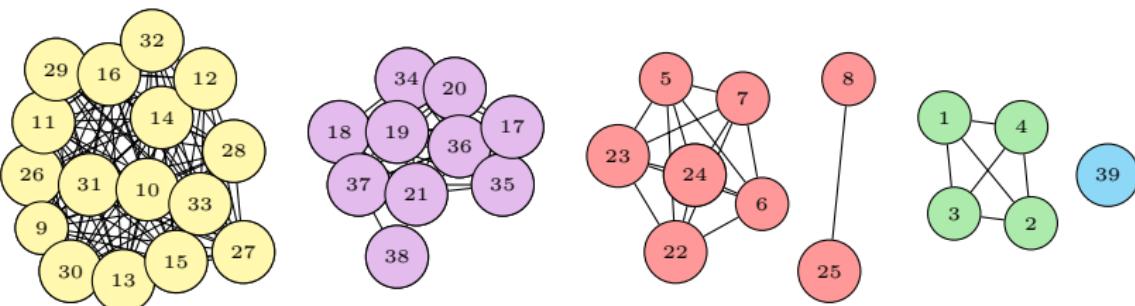


3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 0 :



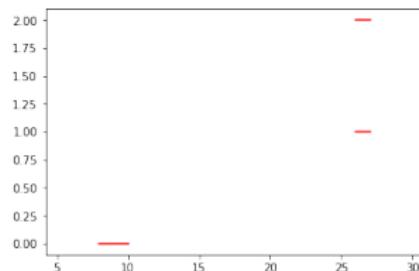
Le complexe associé à 14% :



Chaque composante caractérise un thème de la pièce.
Notre approche détecte la structure générale du morceau !

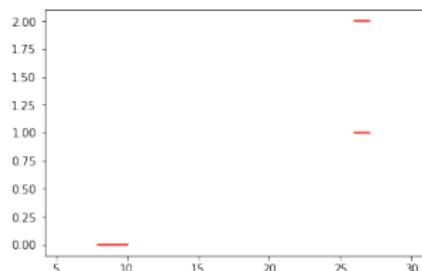
3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 1 :

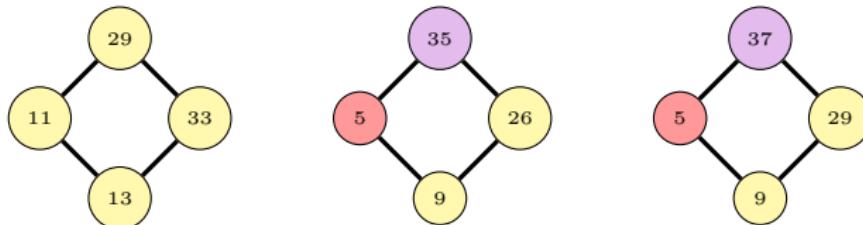


3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 1 :



Les trois cycles en dimension 1 :



→ Pas d'interprétation musicale évidente de ces cycles.

Conclusion et perspectives

- Notre approche capte la structure globale d'une pièce grâce au H_0 .
- Le H_1 reste encore difficile à interpréter musicalement.
- Tester notre approche sur un grand corpus musical et comparer les résultats.
- Comprendre comment et pourquoi apparaissent les cycles en dimension 1 et ce qu'ils révèlent du morceau.
- Faire de nouveaux choix de distances pour capter d'autres informations sur la pièce.

MERCI POUR VOTRE
ATTENTION !

Introduction - Quelques références

-  Louis Bigo and Moreno Andreatta.
Filtration of pitch-class sets complexes.
In *Mathematics and computation in music*, volume 11502 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 213–226. Springer, Cham, 2019.
-  Mattia G. Bergomi, Adriano Baratè, and Barbara Di Fabio.
Towards a topological fingerprint of music.
In *Computational topology in image context*, volume 9667 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 88–100. Springer, [Cham], 2016.
-  Robert Ghrist.
Barcodes: the persistent topology of data.
Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 45(1):61–75, 2008.
-  William A. Sethares and Ryan Budney.
Topology of musical data.
J. Math. Music, 8(1):73–92, 2014.
-  Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson.
Computing persistent homology.
Discrete Comput. Geom., 33(2):249–274, 2005.