

LISTA 1 - (COM783) MECÂNICA DE SISTEMAS INTELIGENTES
Programa de Engenharia Mecânica (PEM)

Prof. Luã Guedes Costa, DS.c
Maria Victoria Almeida do Carmo – 125153065

Rio de Janeiro,
Agosto de 2025

1 Questão

Em sua grande maioria, sistemas dinâmicos não lineares não possuem soluções analíticas, ou, quando possuem, estas têm um escopo restrito. Por isso, é necessário recorrer a métodos numéricos para avaliar o comportamento desses sistemas. Nesse contexto, implemente os seguintes métodos numéricos:

- Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) de passo fixo.
- Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) adaptativo de ordens 4 e 5, com controle automático de erro.

A implementação deve ser feita de forma generalizada, isto é, abstraída em funções ou classes. Explique por que essa abordagem é importante no contexto de modelagem computacional. Para validar os métodos, simule um oscilador harmônico linear descrito pela equação a seguir e compare os resultados obtidos com sua solução analítica correspondente. Faça uma análise de convergência da solução.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \gamma \sin(\Omega t)$$

Por fim, discuta em quais contextos a utilização desses métodos é mais adequada e, nos casos em que não forem recomendados, quais outros métodos poderiam ser empregados como alternativa.

1.1 Solução

Ambos os métodos, RK4 e DOPRI45, foram implementados como funções que dão apenas um step com seus respectivos coeficientes, assim a mudança associada ao passo adaptativo foi feita no loop de solução. Primeiro serão avaliadas as respostas obtidas com o de quarta ordem em conjunto com a análise de convergência da solução.

Esses métodos de integração são utilizados amplamente para solução de equações diferenciais de diferentes tipos de problemas, tê-los construídos de forma generalizada permite que o autor precise programar seu solucionador apenas uma vez e o tenha de disponível para qualquer situação, sendo necessário apenas alguns ajustes e não gaste tempo contruindo tudo novamente - como uma chave que abre diversas fechaduras.

Foram implementada todas as soluções analíticas disponíveis com a variação do coeficiente de amortecimento, ζ , para ser possível avaliar se a resposta numérica respondia bem às mudanças do sistema. Além disso, diferentes passos fixos foram testados conjuntamente, o que permite comparação direta das suas performances e de seus erros absolutos associados a solução analítica.

A primeira situação foi realizada com os parâmetros: $\zeta = 0,05$, $\gamma = 2$, $\omega_n = 2\pi$, $\omega_e = 2\omega_n$ e $dt = [0, 2; 0, 1; 0,05]$. As condições iniciais escolhidas foram $x_0, v_0 = [1, 2]$ e o tempo de simulação foi 30 segundos inicialmente para enxergar melhor o período transiente. O resultado pode ser observado na Figura 1. É possível notar com clareza que o maior passo, 0,2, é o que possui maior erro, e a medida que diminuímos esse passo, o erro acompanha essa queda. No período transiente essa grande diferença entre a resposta analítica e numérica é melhor observada, de forma que no permanente até o maior dt parece manter um comportamento uniforme e repetitivo de erro. Há uma diminuição brusca entre os passos 0,2 e 0,1.

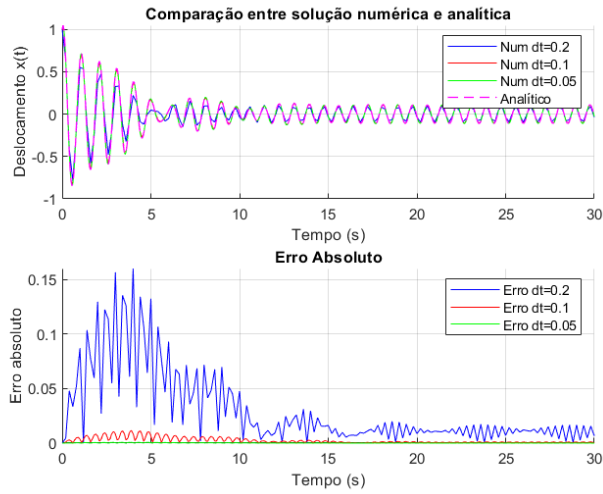


Figura 1: Solução por RK4 com $dt = [0, 2; 0, 1; 0, 05]$.

Modificando agora os passos para $dt = [0, 1; 0, 05; 0, 01]$ obtem-se a Figura 2. Imediatamente é necessário notar que a escala do erro absoluto se altera, pois pode parecer que o erro do 0,1 é tão grande quanto o do 0,2, mas saímos de um erro absoluto máximo de 0,16 para um máximo de 0,012. Novamente, há uma queda considerável ao diminuir o passo na metade e todos apresentam uma estabilização após o período transiente.

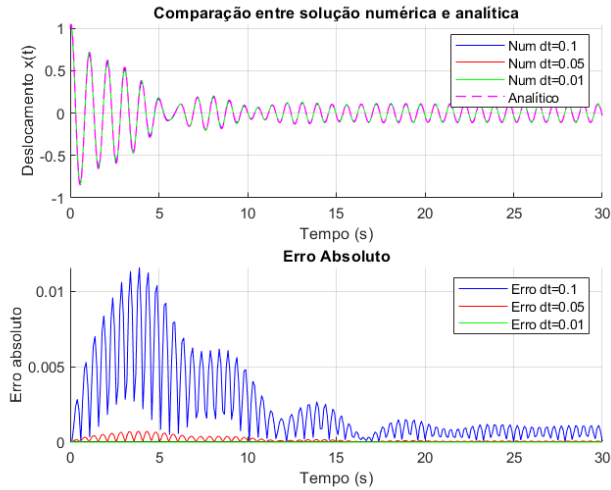


Figura 2: Solução por RK4 com $dt = [0, 1; 0, 05; 0, 01]$.

Tendo observado a convergência do erro e optando por passos com resultados melhores, continua-se a avaliação do método mas agora modificando o fator de amortecimento obtendo diferentes respostas

analíticas. Como nas figuras anteriores o sistema era subamortecido, testou-se sem amortecimento, $\zeta = 0$, criticamente amortecido, $\zeta = 1$, e superamortecido, $\zeta > 1$. As respostas e erros absolutos do sistema podem ser vistas nas Figuras 3, 4 e 5.

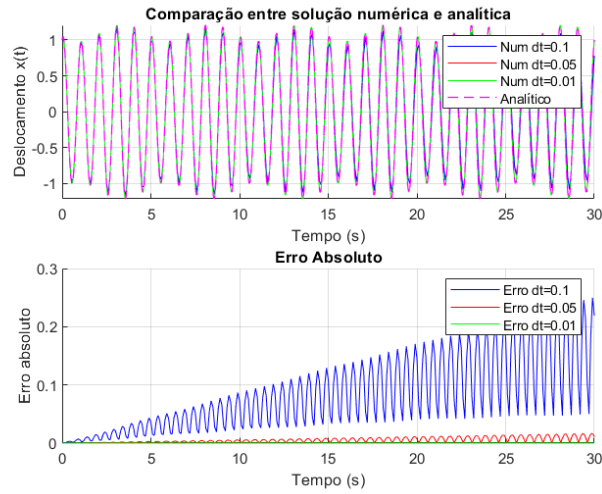


Figura 3: Solução por RK4 de sistema sem amortecimento, $\zeta = 0$.

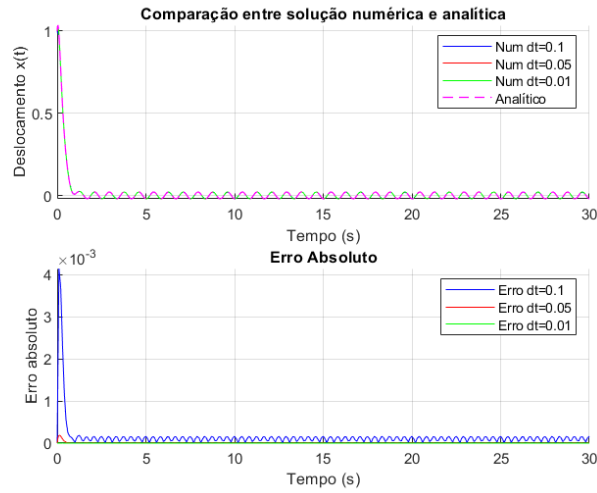


Figura 4: Solução por RK4 de sistema criticamente amortecido, $\zeta = 1$.

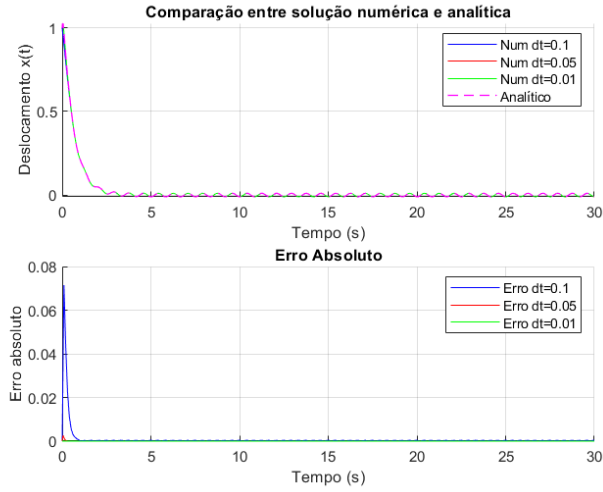


Figura 5: Solução por RK4 de sistema superamortecido, $\zeta > 1$.

Para o sistema sem amortecimento o passo de 0,1 nitidamente não é capaz de convergir, o $dt = 0,0$ tem seu erro aumentado também com o tempo, mas de maneira menos aparente e o menor passo sustenta bem a convergência da resposta. Nos demais casos do sistema os 3 passos se comportam bem, até porque a resposta transiente morre rapidamente, ficando apenas com a resposta particular do forçamento. Testou-se esses dois últimos casos para observar se a solução numérica seria capaz de seguir a mudança brusca de resposta do sistema associada a um grande amortecimento, o que foi realizado sem maiores problemas.

Posto isso, a análise será feita agora do passo adaptativo, o DOPRI45. O mesmo sistema subamortecido foi imposto, com os mesmos parâmetros, a diferença está na construção do método que exige dentro dele um controle do erro de modo que o passo dt aumente ou diminua de acordo com a necessidade. O método foi desenvolvido com base no livro *Solving Ordinary Differential Equations* (E. Hairer et al., 2008). Enquanto no RK4 o item analisado para convergência foi o passo dt , no método adaptativo serão controladas as tolerâncias absoluta e relativa ($atol$ e $rtol$), associadas ao cálculo do erro decisório para adaptação do passo. Além dos gráficos anteriores, duas informações adicionais são obtidas: o número de passos aceitos/rejeitados e um gráfico dos passos ao longo do tempo de simulação.

Inicialmente se determinou $rtol = 10^{-1}$ e $atol = 10^{-4}$, o que entregou o resultado visível na Figura 6. Essas tolerâncias geraram o uso de 90 passos, tendo rejeitado apenas 13. A resposta claramente não acompanha bem os dados analíticos, obtendo erros grandes quando comparados ao método anterior. Mesmo assim é possível notar uma diminuição progressiva do erro, o que já fornece indícios de uma convergência de resposta do método.

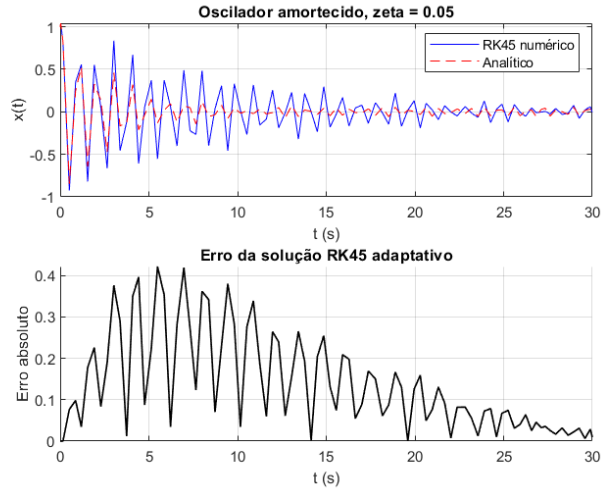


Figura 6: Solução por DOPRI45 com $rtol = 10^{-1}$ e $atol = 10^{-4}$.

Desse modo, as tolerâncias foram diminuídas com o intuito de melhorar a resposta numérica. Na Figura 7, é possível observar a melhora nítida da resposta do sistema, visto que foi estreitado o limite de erro aceito, fazendo o número de passos utilizados sair de 90 para 214 - a Figura 8 mostra a mudança dos passos no tempo de simulação. O erro antes que antes estava em 0,4 diminuiu para ficar no máximo em 0,002 durante o período transiente.

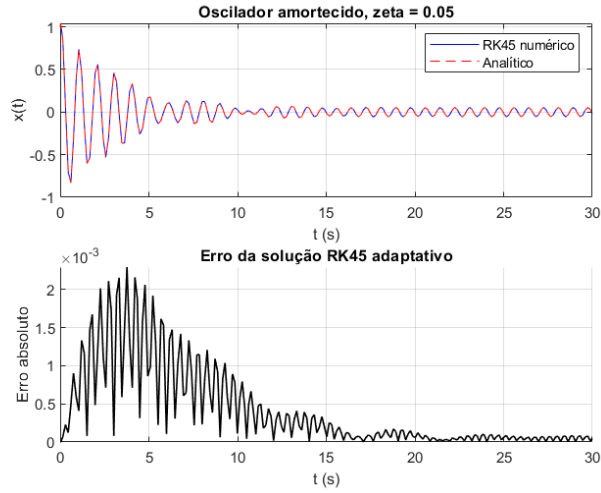


Figura 7: Solução por DOPRI45 com $rtol = 10^{-3}$ e $atol = 10^{-6}$.

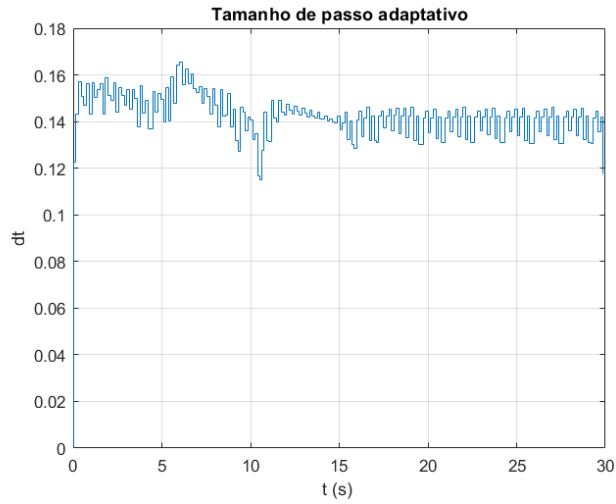


Figura 8: Variação do passo dt com $rtol = 10^{-3}$ e $atol = 10^{-6}$.

Dando prosseguimento, diminuiu-se mais ainda as tolerâncias visando observar principalmente o comportamento da adaptação do passo, visto que o erro já está em um espaço baixo comparado ao rk4. Posto isso, trabalhando com $rtol = 10^{-6}$ e $atol = 10^{-9}$, o número de passos aceitos muda para 971, enquanto o programa rejeitou 202 passos. A adaptação intensa de passos pode ser vista na Figura 9, e também é possível observar que antes o dt se encontrava no intervalo de 0,12 a 0,16 - Figura 8 - enquanto agora ele oscila entre 0,025 e 0,04, consolidando um passo e intervalo menores.

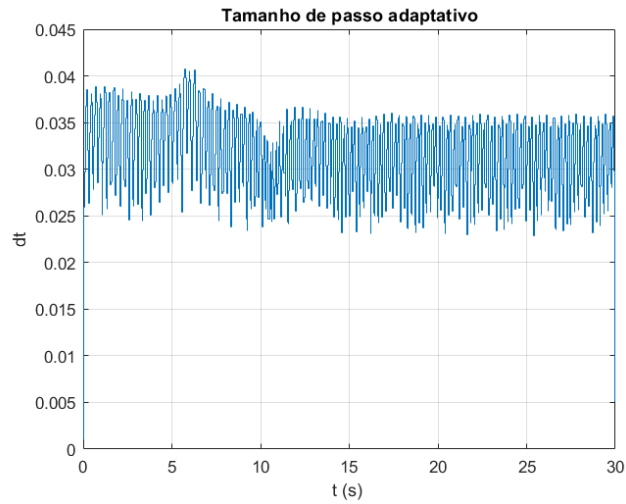


Figura 9: Variação do passo dt com $rtol = 10^{-6}$ e $atol = 10^{-9}$.

Por fim, o sistema final foi rodado por mais tempo (100 segundos) para mostrar a convergência do erro.

Como esperado, ao diminuir a tolerância, o erro acompanha a queda (Figura 10), ficando no espaço de 10^{-6} , bem inferior ao caso anterior e do Runge-kutta de 4ª ordem. Novamente, o tempo oscila mais no período transiente e converge, diminuindo ao longo do período de simulação.

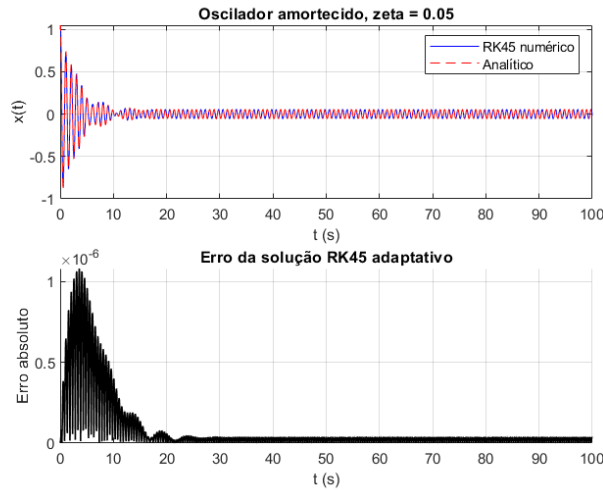


Figura 10: Solução por DOPRI45 com $rtol = 10^{-6}$ e $atol = 10^{-9}$.

Considerando as situações de uso o RK4 é mais adequado para problemas mais simples, para EDO's de ordem mais baixa, ou quando se precisa de pontos igualmente espaçados no tempo - como para obtenção de Função de Resposta em Frequência ou mapas de Poincaré (será visto na questão subsequente). A precisão pode não ser tão alta, mas é consistente devido ao mesmo passo. No entanto se o sistema possui regiões críticas de mudança esse método não detecta, ou seja, seria necessário usar um passo pequeno ao longo de toda a simulação para captar uma curta mudança brusca de comportamento. Além de acumular erro local com o tempo, ou seja, em grandes tempos de simulação o erro de energia pode crescer consideravelmente.

Dependendo da aplicação existem alternativas de uso, sistemas que mudam mais e adaptam o passo de acordo com a necessidade como o Dormand-Prince são uma boa opção para sistemas dinâmicos mais complexos. Esse método tem uma maior eficiência numérica, sendo bem aplicado para sistemas com regiões de comportamento diferente.

Contudo, para os chamados problemas rígidos nenhum desses dois métodos é recomendado. Esses problemas possuem escalas de tempo diferentes dentro do próprio sistema, ou seja, enquanto algumas variáveis mudam muito devagar outras mudam muito rápido, e para garantir a estabilidade do sistema o RK4 ou DOPRI45 teriam que manter a escala mais rápida mesmo que o interesse seja só na parte lenta, o que sistematicamente é ineficiente. A recomendação de método para esses casos são os chamados métodos implícitos, que, ao invés de calcular o próximo estado do sistema diretamente, ele formula uma equação que relaciona o estado atual com o estado futuro. Eles são mais custosos computacionalmente por resolverem equações em cada passo, mas são muito mais estáveis. Exemplo desses métodos são: BDF (Backward Differentiation Formula), Radau IIA, Rosenbrock.

2 Questão

O Mapa de Poincaré é uma ferramenta extremamente útil para avaliar a dinâmica de um sistema. Existem formas distintas de obtenção desses mapas, dependendo do sistema dinâmico. Implemente um procedimento numérico para obter o mapa de Poincaré para o caso particular de sistemas com excitação harmônica. Para isso, siga os passos descritos abaixo:

(a) Com auxílio do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para solução dos sistemas dinâmicos, avalie os mapas de Poincaré dos seguintes sistemas:

- Oscilador linear não dissipativo:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \gamma \sin(\Omega t)$$

- Oscilador biestável tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = \gamma \sin(\Omega t)$$

- Pêndulo simples:

$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\phi) = \gamma \sin(\Omega t)$$

No caso do oscilador linear não dissipativo, avalie diferentes relações entre a frequência natural, ω_n , e frequência de forçamento adimensional, Ω . Para os casos do oscilador tipo Duffing e o pêndulo simples, avalie diferentes combinações entre amplitude de forçamento adimensional, γ , e frequência de forçamento adimensional, Ω . Adicionalmente, discuta a topologia do espaço de fase de cada caso.

(b) Tente implementar o item anterior utilizando o método Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) para solucionar os sistemas dinâmicos e obter seus respectivos mapas de Poincaré. Discuta as principais dificuldades durante a implementação, e, se necessário, descreva as ferramentas adicionais utilizadas para uma implementação bem-sucedida.

2.1 Solução - letra a

Utilizando o método de passo fixo (RK4) a implementação do Mapa de Poincaré foi feita de maneira bem simples, visto que os pontos são tirados em espaços de tempo determinados e repetidos e com um passo fixo é possível dividir o tempo de simulação de maneira exata e constante.

A solução pelo método foi mantida exatamente igual, apenas se determinou o tempo final a partir do período de excitação e o passo é um exato divisor desse mesmo período. Desse modo, bastou inserir um condicional no próprio loop de resolução do sistema de modo que ele guardasse a resposta em um dado momento a cada passagem de período inteiro.

Com o intuito de retirar o período transiente do sistema para obter um mapa mais "limpo", as respostas utilizadas para plotagem foram as correspondentes a partir de 85% do tempo de simulação - mais detalhes podem ser visualizados no código.

Começando pelo oscilador linear não-dissipativo, os parâmetros utilizados foram: $x_0, v_0 = [0, 0]$, $dt = 0,01$, $\gamma = 2$, $\omega_n = 2\pi$, $\omega_e = 1, 2\omega_n$ e $t_f = 100T_e$. Lembrando que o período de excitação, T_e , é igual a 2π dividido por ω_e . Com esses dados, obteve-se o primeiro mapa, visível na Figura 11)

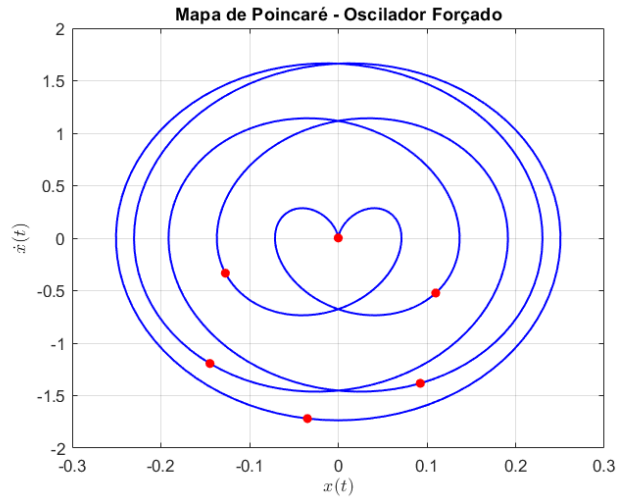


Figura 11: Mapa de Poincaré - Oscilador linear $\omega_e = 1, 2\omega_n$

O espaço de fase apresenta órbitas periódicas e fechadas, característica de sistemas conservativos (se mantém a energia total). Os pontos se distribuem de forma regular e também descrevem curvas fechadas, o que nos indica um movimento quase ou periódico, devido as órbitas - como conhecemos o sistema sabemos ser periódico. A topologia então é regular e não-caótica, com as trajetórias no espaço de fase sendo toros 2D achatados.

Mudando a relação entre as frequências natural e de excitação conseguimos obter outros mapas, como podem ser vistos nas Figuras 12 e 13. Quando analisamos o caso no qual a frequência de excitação é cinco vezes a frequência natural nota-se uma órbita periódica de período 5 (5 pontos vermelhos), ainda tendo um sistema regular, sem dissipação e sem caos, mesma análise topológica de estrutura em toro - Figura 12.

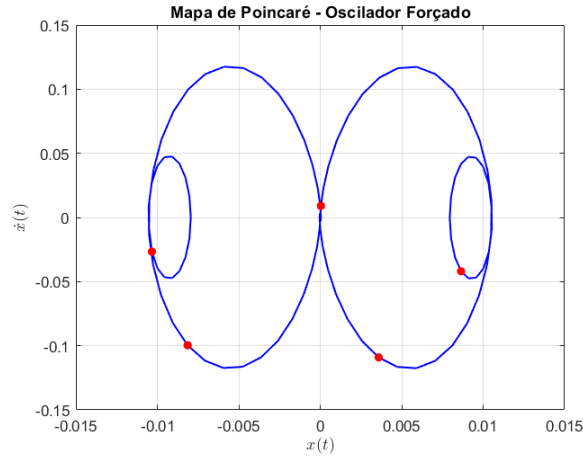


Figura 12: Mapa de Poincaré - Oscilador linear $\omega_e = 5\omega_n$

Já o sistema em ressonância, $\omega_e = \omega_n$, a trajetória se afasta da origem e cresce continuamente enchendo um anel, não havendo curvas fechadas (sem periodicidades). O código construído só considera a partir de 85% do tempo de simulação, se a plotagem fosse inteira essa espiral nasceria no centro, sendo toda preenchida, mostrando que, em ressonância e sem amortecimento, a amplitude apenas aumenta sem parar (Figura 13). Apesar de parecer, não é uma figura sólida, são linhas seguidas e próximas umas das outras, assim como os pontos.

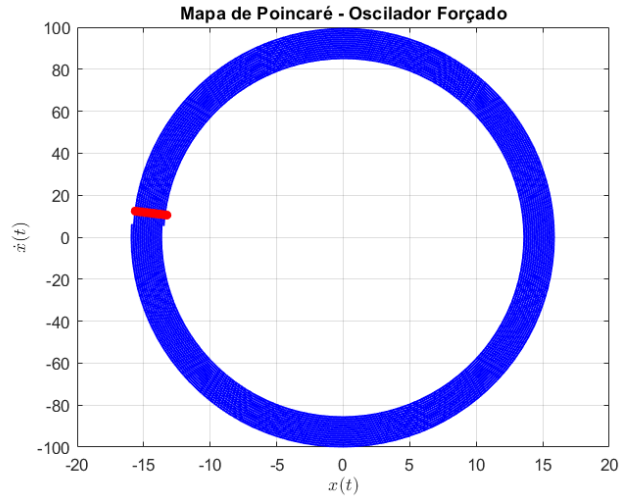


Figura 13: Mapa de Poincaré - Oscilador linear $\omega_e = \omega_n$.

Analisando agora o oscilador biestável de Duffing, os parâmetros de simulação utilizados foram os mesmos, como passo e tempo final, mas os demais fatores foram: $\alpha = -1, 2$, $\beta = 0, 3$, $\gamma = 2$, $\zeta = 0, 05$

e $\omega_e = 1, 2$. É importante salientar que o comportamento desse oscilador muda bastante de acordo com o valor escolhido para α e β , podendo até ser caótico.

Observando a Figura 14, tem-se que com essa escolha de termos o Duffing é monoestável (há um único poço), então há uma resposta periódica de período 1 (1 ponto vermelho). Como o sistema é dissipativo qualquer condição inicial converge para essa órbita. A não-linearidade acaba deformando a elipse um pouco, mas não há toros invariantes nem caos.

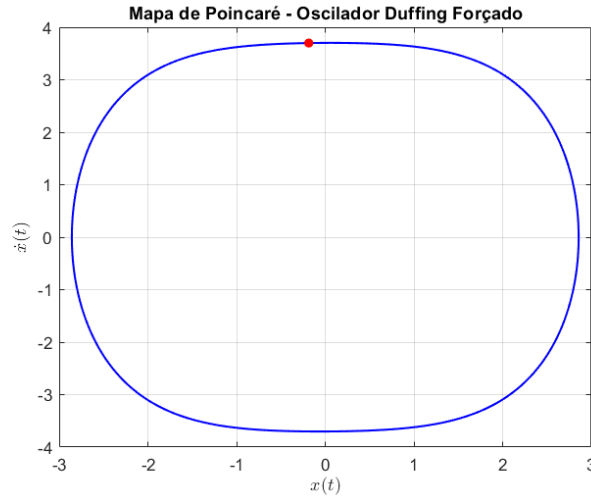


Figura 14: Mapa de Poincaré - Oscilador Duffing $\omega_e = 1,5$ e $\gamma = 2$.

Mantendo a intensidade de excitação e aumentando a frequência - Figura 15 - deixa-se de ter um ponto fixo atrator para ter um círculo invariante atrator (um toro 1D de Poincaré), ou seja, as trajetórias passam a convergir para uma curva e não para um ponto, obtendo um sistema quasi-periódico, sem caos no comportamento.

Por fim, agora alterando a relação, possuindo uma intensidade superior à frequência de excitação - Figura 16. Depois do transiente a solução converge para uma resposta periódica, voltamos a ter um ponto fixo estável. A forma assimétrica provavelmente pe fruto da não linearidade do sistema. Novamente, não há caos aparente.

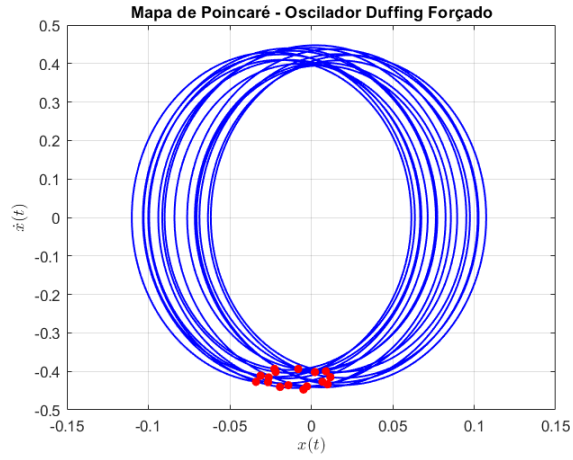


Figura 15: Mapa de Poincaré - Oscilador Duffing $\omega_e = 5$ e $\gamma = 2$.

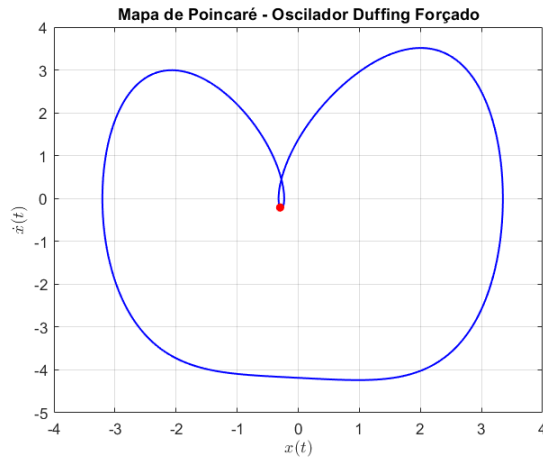


Figura 16: Mapa de Poincaré - Oscilador Duffing $\omega_e = 1$ e $\gamma = 5$.

Analisando o pêndulo simples, os parâmetros utilizados foram: $\gamma = 1$, $\omega_n = 2\pi$, $\omega_e = 2\omega_n$, $\zeta = 0,05$ - os demais termos associados a simulação foram mantidos iguais assim como na análise anterior. Com esses dados, se obtém a Figura 17. Nesse caso, voltamos a ter não só um ponto invariante, mas uma curva de pontos, aparece como um anel. O espaço de fase se parece com uma resposta que se repete a cada 2 períodos, com essas curvas que se mantém/repetem dos pontos de Poincaré. É um sistema dissipativo, então as curvas não estão coincidentes, apenas próximas, diminuindo sempre a energia do sistema. Mantendo todos os demais termos e apenas modificando a intensidade de forçamento γ a geometria principal não muda, ela apenas deforma levemente, mas as características topológicas se mantêm - Figura 18. É relevante salientar que aumentando o tempo de simulação o ciclo interno vai aumentando e ficando ainda mais próximo do externo, podendo até parecer ser apenas um grande período, embora não sejam e não coincidam.

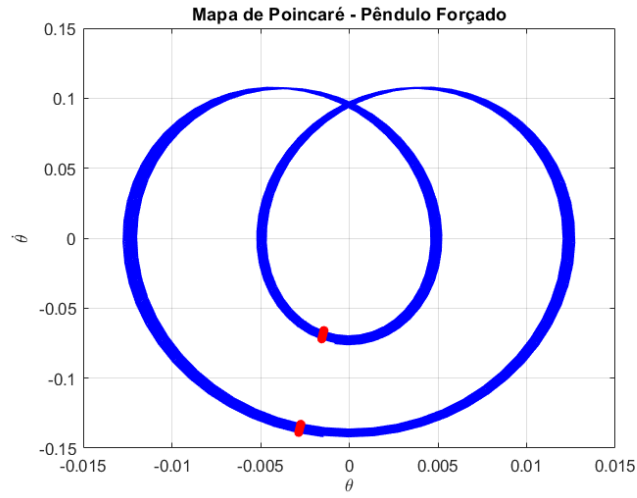


Figura 17: Mapa de Poincaré - Pêndulo simples $\gamma = 1$ e $\omega_e = 2\omega_n$.

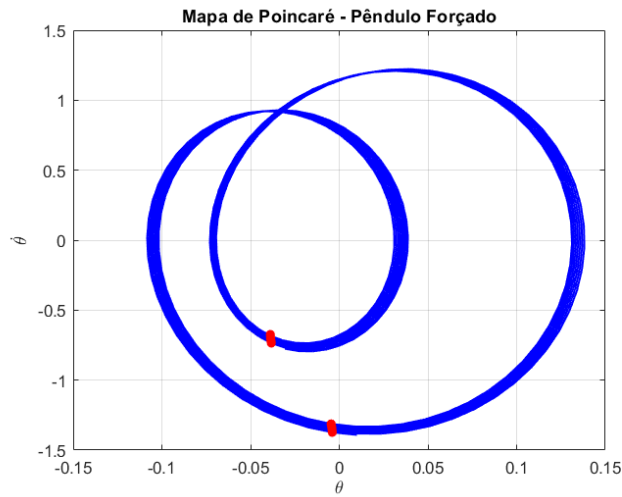


Figura 18: Mapa de Poincaré - Pêndulo simples $\gamma = 10$ e $\omega_e = 2\omega_n$.

Apenas para efeito de comparação, se aumentou a frequência de excitação para cinco vezes a frequência natural, de modo que as diferentes curvas de atração ficassem visíveis através dos pontos de poincaré, além do comportamento dissipativo e quasi-periódico (estrutura toroidal) do sistema com o espaço de fase - Figura 19.

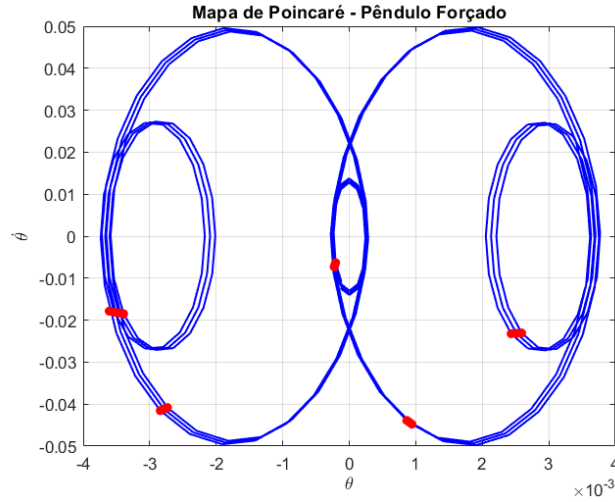


Figura 19: Mapa de Poincaré - Pêndulo simples $\gamma = 1$ e $\omega_e = 5\omega_n$.

2.2 Solução - letra b

Deixando de utilizar o método de passo fixo não é mais possível fazer uso da formulação anterior para obter o mapa de Poincaré dos sistemas propostos. Isso ocorrer, pois, como explicado, fez-se uso do próprio passo integrativo para determinação dos pontos salvos da solução que seriam utilizados no mapeamento, então se o passo muda o tempo inteiro esse controle não tem como ser feito, visto que não se controla mais o período assim.

Então, como a obtenção dos pontos não poderia mais depender do passo, procurou-se outra solução para obter esses valores da resposta periodicamente. A solução proposta foi de criar um vetor de tempo que fosse formado por tempos espaçados de acordo com o mesmo período de excitação T_e e, então, interpolar os valores encontrados a partir da solução de passo adaptativo para esses tempos "criados". Existem outras formas provavelmente mais precisas, que acumulem menos erros, do que essa que envolve interpolar, no entanto essa serviu bem ao proposto e é pouco custosa computacionalmente.

Comparativamente se reproduziu alguns dos gráficos dos sistemas utilizados na letra a, para visualizar se esse novo método estava sendo eficiente na obtenção dos pontos. Esses novos gráficos podem ser vistos nas Figuras 20, 21 e 22.

Pode parecer que as curvas estão menos fluidas do que no método anterior, mas essa aparência diz respeito a resolução do sistema, se as tolerâncias forem mais estreitadas, as curvas ficam mais arredondadas, apesar do custo computacional ser maior. O que realmente está sendo comparado aqui são os pontos do mapa de Poincaré, que estão consistentes com os obtidos anteriormente com o passo fixo. O mapa da Fig. 22 pode inicialmente aparentar ter pontos errados por estarem em pontos diferentes dos da Fig. 17, mas na verdade as curvas de pontos estão igualmente espaçadas em ambos os gráficos, apenas foram captados em instantes do período diferentes.

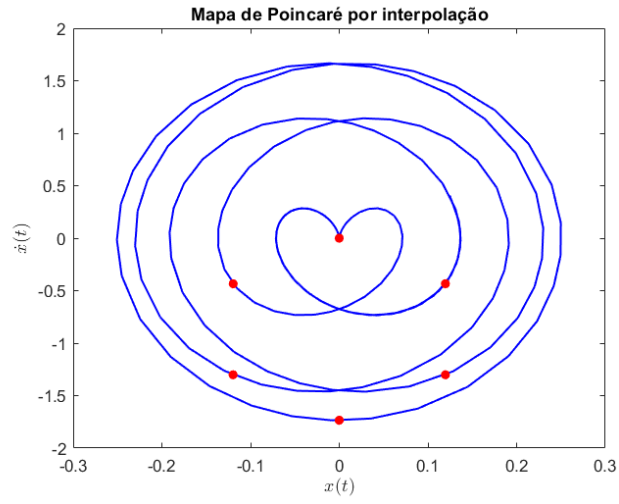


Figura 20: Mapa de Poincaré (DOPRI45)- Oscilador linear $\omega_e = 1, 2\omega_n$.

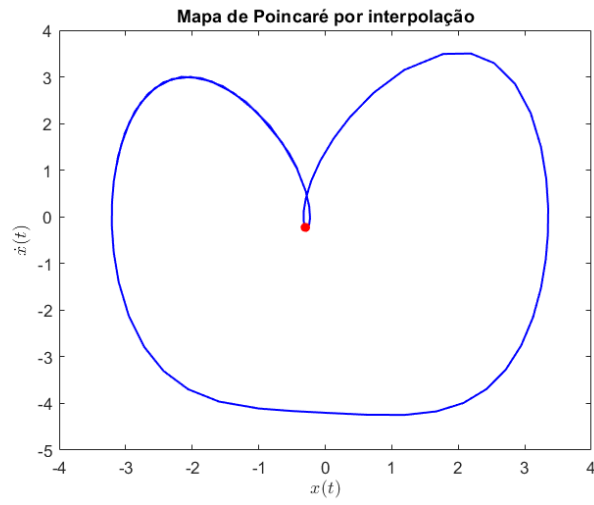


Figura 21: Mapa de Poincaré (DOPRI45) - Oscilador Duffing $\omega_e = 1$ e $\gamma = 5$.

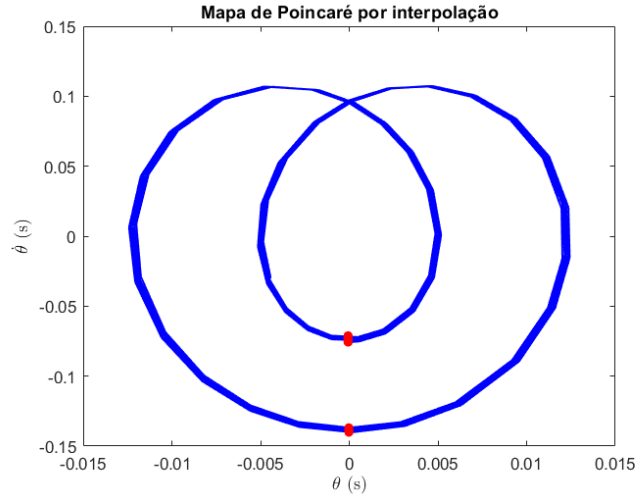


Figura 22: Mapa de Poincaré (DOPRI45) - Pêndulo simples $\omega_e = 2\omega_n$ e $\gamma = 1$.

3 Questão

Determine os pontos de equilíbrio e avalie a natureza da estabilidade desses pontos para os sistemas listados abaixo. Realize a análise de forma analítica, sempre que possível, e, quando não for possível, implemente a solução numericamente. Se houver, discuta os casos em que a natureza dos pontos de equilíbrio não pode ser determinada pela análise de autovalores e autovetores.

(a) Oscilador tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

(b) Pêndulo simples:

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\phi) = 0$$

(c) Sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

(d) Sistema multiestável com 2 graus de liberdade:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\dot{x}_1 - 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (1 + \alpha_1)x_1 + \beta_1x_1^3 - \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) = 0 \\ \rho\ddot{x}_2 + 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha_2x_2 + \beta_2x_2^3 + \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Generalize a implementação numérica para este tipo de avaliação, de modo que seja flexível e aplicável a qualquer sistema dinâmico.

3.1 Solução - letra a

O primeiro passo é obter o sistema no formato de espaço de fases $\dot{x} = f(\bar{x})$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \dot{x}_2 = -2\zeta\bar{x}_2 - \alpha\bar{x}_1 - \beta\bar{x}_1^3 \end{cases}$$

Com isso, se obtém os pontos de equilíbrio considerando $f(\bar{x}) = 0$,

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -2\zeta\bar{x}_2 - \alpha\bar{x}_1 - \beta\bar{x}_1^3 = 0 \end{cases}$$

Desse modo, $\bar{x}_2 = 0$, o que deixa a análise do segundo termo: $\bar{x}_1(\alpha + \beta\bar{x}_1^2) = 0$

Então, os pontos de equilíbrio do oscilador tipo Duffing são da Eq. 1 :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (0, 0) \\ (x_1, x_2) &= (\sqrt{-\alpha/\beta}, 0) \\ (x_1, x_2) &= (-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0) \end{aligned} \tag{1}$$

O segundo passo é obter a matriz jacobiana do sistema, que tem o formato da Eq. 2, para fazer a análise da natureza dos pontos de equilíbrio através dos autovalores da mesma. A matriz Jacobiana do sistema será a Eq. 3

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x_1^2 & -2\zeta \end{bmatrix} \tag{3}$$

Utilizando como referência o livro do Savi (2017), serão obtidos os autovalores dessa matriz com o traço dela ($tr(J_x)$) e seu determinante ($det(J_x)$), de modo que é definida uma subvariável $\Delta = tr(J_x)^2 - 4det(J_x)$. Assim, os autovalores correspondentes da Jacobiana do sistema serão os da Eq. 5.

$$\lambda_{1,2} = 1/2[tr(J_x) \pm \sqrt{\Delta}] \tag{4}$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \pm (\zeta^2 - \alpha - 3\beta x_1^2)^{1/2} \tag{5}$$

Essa obtenção de auto valores nada mais é do que a resolução da equação característica de um problema de autovalor envolvendo essa matriz jacobiana, o uso do traço e determinante só torna a obtenção mais direta, mas é exatamente o mesmo processo. Estando em mãos dos autovalores, é possível substituir para o caso do pontos de equilíbrio já encontrados, para analisar a natureza de cada um deles de acordo com os parâmetros.

- Ponto de equilíbrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$
 $\lambda_{1,2} = -\zeta \pm (\zeta^2 - \alpha)^{1/2}$
 Irá depender apenas dos valores de ζ e α , então a análise será feita de acordo com os mesmo:
 - se $\alpha > 0$, $\alpha > \zeta^2$ e $\zeta > 0$: a parte real dos autovalores será negativa e haverá uma parte imaginária diferente de zero, logo será um *ponto tipo espiral estável*.
 - se $\alpha > 0$, $\alpha > \zeta^2$ e $\zeta = 0$: a parte real dos autovalores será zero e haverá uma parte imaginária diferente de zero, logo será um *ponto tipo centro*. Esse ponto pode ser considerado *estável*
 - se $\alpha < 0$ e $\zeta < (\zeta^2 - \alpha)^{1/2}$: a parte real dos autovalores será uma hora positiva outra hora negativa e a parte imaginária será igual zero, logo será um *ponto tipo sela instável*.
 - se $\alpha < 0$ e $\zeta > (\zeta^2 - \alpha)^{1/2}$: a parte real dos autovalores será negativa e a parte imaginária será igual zero, logo será um *ponto tipo sorvedouro estável*.
- Ponto de equilíbrio $(x_1, x_2) = (\pm\sqrt{-\alpha/\beta}, 0)$
 $\lambda_{1,2} = -\zeta \pm (\zeta^2 + 2\alpha)^{1/2}$
 - se $\alpha > 0$, $\zeta > 0$ e $\zeta < (\zeta^2 + 2\alpha)^{1/2}$: a parte real dos autovalores será uma hora positiva outra hora negativa e a parte imaginária será igual zero, logo será um *ponto tipo sela instável*.
 - se $\alpha > 0$, $\zeta > 0$ e $\zeta < (\zeta^2 + 2\alpha)^{1/2}$: a parte real dos autovalores será uma hora positiva outra hora negativa e a parte imaginária será igual zero, logo será um *ponto tipo sela instável*.
 - se $\alpha > 0$, $\zeta = 0$: a parte real dos autovalores será uma hora positiva outra hora negativa e a parte imaginária será igual zero, logo será um *ponto tipo sela instável*.
 - se $\alpha < 0$, $\alpha > 0$, $5\zeta^2$ e $\zeta > 0$: a parte real dos autovalores será negativa e haverá uma parte imaginária diferente de zero, logo será um *ponto tipo espiral estável*.
 - se $\alpha < 0$, $\alpha > 0$, $5\zeta^2$ e $\zeta = 0$: a parte real dos autovalores será zero e haverá uma parte imaginária diferente de zero, logo será um *ponto tipo centro*. Esse ponto pode ser considerado *estável*

3.2 Solução - letra b

O primeiro passo é obter o sistema no formato de espaço de fases $\dot{\theta} = f(\bar{\theta})$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\omega_n^2 \sin(\theta_1) \end{cases}$$

Com isso, se obtém os pontos de equilíbrio considerando $f(\bar{\theta}) = 0$,

$$\begin{cases} \theta_2 = 0 \\ -\omega_n^2 \sin(\theta_1) = 0 \end{cases}$$

Desse modo, $\theta_2 = 0$, o que deixa a análise do segundo termo: $-\omega_n^2 \sin(\theta_1) = 0$. Então, os pontos de equilíbrio do pêndulo simples não-amortecido são os da Eq. 6. O resultado na verdade daria todas as variações de ângulo que fornecessem seno igual a zero, então um $k\pi$, com $k = 1, 2, 3, \dots$, mas conhecendo o sistema pêndulo sabemos ser π e 0.

$$\begin{aligned} (\theta_1, \theta_2) &= (0, 0) \\ (\theta_1, \theta_2) &= (\pi, 0) \end{aligned} \tag{6}$$

O segundo passo é obter a matriz jacobiana do sistema, que tem o formato da Eq. 2 mostrada anteriormente, para fazer a análise da natureza dos pontos de equilíbrio através dos autovalores da mesma. A matriz Jacobiana do pêndulo será a Eq. 7:

$$\mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 \cos(\theta_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Utilizando como referência o livro do Savi (2017), serão obtidos os autovalores dessa matriz com o traço dela ($\text{tr}(\mathbf{J}_\theta)$) e seu determinante ($\det(\mathbf{J}_\theta)$), de modo que é definida uma subvariável $\Delta = \text{tr}(\mathbf{J}_x)^2 - 4\det(\mathbf{J}_x)$ e o cálculo é feito de acordo com a Eq.4. Assim, os autovalores correspondentes da Jacobiana do sistema serão os da Eq. 8.

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_n (-\cos(\theta_1))^{1/2} \quad (8)$$

Estando em mãos dos autovalores, é possível substituir para o caso do pontos de equilíbrio já encontrados, para analisar a natureza de cada um deles de acordo com os parâmetros.

- Ponto de equilíbrio $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$
 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$
- Nesse caso, a parte real é sempre zero e a imaginária diferente de zero, o que configura um *ponto tipo centro*. Esse ponto pode ser considerado *estável*.
- Ponto de equilíbrio $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$
 $\lambda_{1,2} = \pm \omega_n$
- Nesse caso, a parte real é hora positiva, hora negativa e a imaginária é igual a zero, o que configura um *ponto tipo sela instável*.

3.3 Solução - letra c

Para os dois próximos sistemas foi utilizada uma solução mais numérica com substituição de valores dos parâmetros para determinação da natureza dos pontos de equilíbrio. O algoritmo foi validado com o item (a) e parte dele conseguiu obter a resposta do (b), mas como em (b) o sistema de pêndulo está sem amortecimento, é como se ele nunca parasse em um ponto de equilíbrio, o que dificulta essa análise da natureza do ponto por autovalores.

Então, dando prosseguimento, agora será feita análise no Sistema de Lorenz. O primeiro passo como feito anteriormente é colocar o sistema no formato espaço de estados.

O primeiro passo é obter o sistema no formato de espaço de fases $\dot{X} = f(\bar{x})$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Com isso, se obtém os pontos de equilíbrio considerando $f(\bar{x}) = 0$,

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ x(\rho - z) - y = 0 \\ xy - \beta z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos como pontos de equilíbrio do sistema de Lorenz os termos da Eq. 9

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 0) \\ (x, y, z) &= (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \\ (x, y, z) &= (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \end{aligned} \quad (9)$$

O segundo passo é obter a matriz jacobiana do sistema, que tem o formato da Eq. 2 mostrada anteriormente só que expandida para 3 dimensões, para fazer a análise da natureza dos pontos de equilíbrio através dos autovalores da mesma. A matriz Jacobiana do sistema será a Eq. 10.

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Foram determinados analiticamente os autovalores gerais da equação e até substituídos considerando os pontos de equilíbrio comentados, mas as equações ficaram grandes então foram deixadas apenas no código. Diante disso, para a análise da natureza dos pontos, foi feita a substituição dos valores das constantes - $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$ - e os autovalores encontrados juntamente com sua natureza foram:

- Ponto de equilíbrio $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
Autovalores numéricos:

$$\begin{cases} +11,8277 + 0i \\ -2,6667 + 0i \\ -22,8277 + 0i \end{cases}$$

- Nesse caso, tem 3 autovalores reais e 2 positivos, então é um *ponto tipo sela instável*.

- Pontos de equilíbrio $(x, y, z) = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$
Autovalores numéricos:

$$\begin{cases} -13,8546 + 0i \\ 0,0940 - 10,1945i \\ 0,0940 + 10,1945i \end{cases}$$

- Nesse caso, tem um autovalor real negativo e um par conjugado com parte real positiva, o que configura um *ponto tipo espiral instável*.

3.4 Solução - letra d

Para o sistema multiestável com 2 graus de liberdade a resolução do problema foi inteiramente feita de forma numérica. O sistema no formato espaço de estados fica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -2\zeta_1 v_1 + 2\zeta_2(v_2 - v_1) - (1 + \alpha_1)x_1 - \beta_1 x_1^3 + \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = (1/\rho)(-(2\zeta_2)(v_2 - v_1) - \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2^3 - \rho\Omega_s^2 * (x_2 - x_1)) \end{cases}$$

No algoritmo o processo é o mesmo de igualar a zero para obter os pontos de equilíbrio, mas dessa vez os parâmetros foram numéricos: $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, 5, \zeta_1 = 0, 05, \zeta_2 = 0, 08, \rho = 0, 5$ e $\Omega_s = 3$. Resultando nos pontos de equilíbrio na Eq. 11.

$$\begin{aligned} (x_1, v_1, x_2, v_2) &= (0; 0; 0; 0) \\ (x_1, v_1, x_2, v_2) &= (1, 0742; 0; 1, 1109; 0) \\ (x_1, v_1, x_2, v_2) &= (-1, 0742; 0; -1, 1109; 0) \end{aligned} \tag{11}$$

Analisando a natureza de equilíbrio desses pontos, tem-se:

- Ponto de equilíbrio $(x_1, v_1, x_2, v_2) = (0; 0; 0; 0)$
Autovalores numéricos:

$$\begin{cases} -0.2591 - 3.2544i \\ -0.2591 + 3.2544i \\ -1.5002 - 0.0000i \\ 1.4385 + 0.0000i \end{cases}$$

- Nesse caso, tem 2 autovalores reais com sinais opostos e 1 par conjugado com parte real negativa, então é um *ponto tipo sela instável*.

- Ponto de equilíbrio $(x_1, v_1, x_2, v_2) = (1, 0742; 0; 1, 1109; 0)$
Autovalores numéricos:

$$\begin{cases} -0.2456 + 4.3928i \\ -0.2456 - 4.3928i \\ -0.0444 + 1.9232i \\ -0.0444 - 1.9232i \end{cases}$$

- Nesse caso, tem os autovalores iguais a 2 pares conjugados com parte real negativa, o que configura um *ponto tipo espiral estável*.

- Ponto de equilíbrio $(x_1, v_1, x_2, v_2) = (-1, 0742; 0; -1, 1109; 0)$
Autovalores numéricos:

$$\begin{cases} -0.2456 + 4.3928i \\ -0.2456 - 4.3928i \\ -0.0444 + 1.9232i \\ -0.0444 - 1.9232i \end{cases}$$

- Nesse caso, tem os autovalores iguais a 2 pares conjugados com parte real negativa, o que configura um *ponto tipo espiral estável*.

4 Questão

Implemente a bacia de atração de pontos de equilíbrio (pontos fixos) estáveis para todos os sistemas descritos nas letras (a), (b) e (d) da questão anterior utilizando os seguintes espaços ou subespaços:

- (a) Espaço de estados $x \times \dot{x}$
- (b) Espaço de estados $\phi \times \dot{\phi}$
- (c) Subespaços de estados: $x_1 \times x_2$, $x_1 \times \dot{x}_1$, e $x_2 \times \dot{x}_2$

Solução - letra a

Para plotar a bacia de atração do oscilador tipo Duffing, os parâmetros utilizados foram: $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 0, 1$. Os pontos de equilíbrio usados foram os obtidos na questão anterior, estabelecendo um range de condições iniciais. A Figura 23 foi a primeira bacia feita com 50 posições e 50 velocidades, é notável que uma imagem começa a se formar, mas ainda bem pixelada. Quando se aumenta para 100 (Figura 24) e 200 pontos (Figura 25), se observa de forma mais fluida o desenho de convergência para os 2 pontos de equilíbrio estáveis e a condição de instabilidade do ponto sela. Logicamente, para plotar mais pontos o código levou mais tempo, tendo a primeira imagem com apenas 50 pontos saído em segundos.

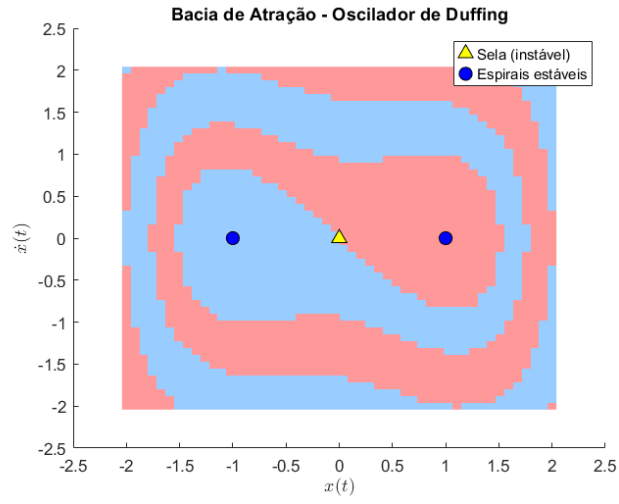


Figura 23: Bacia de atração - Oscilador Duffing 50×50 .

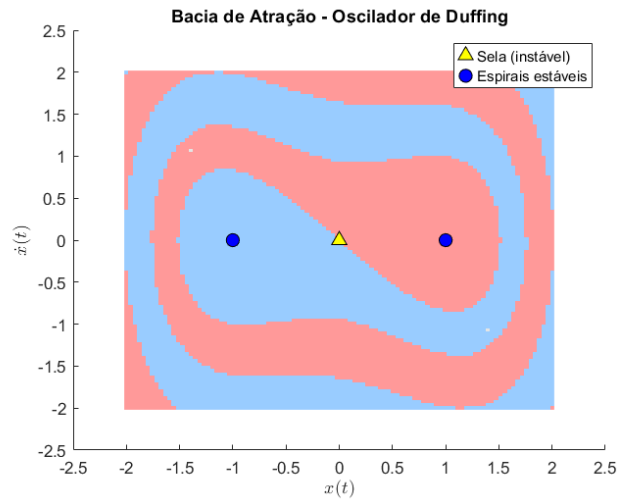


Figura 24: Bacia de atração - Oscilador Duffing 100×100 .

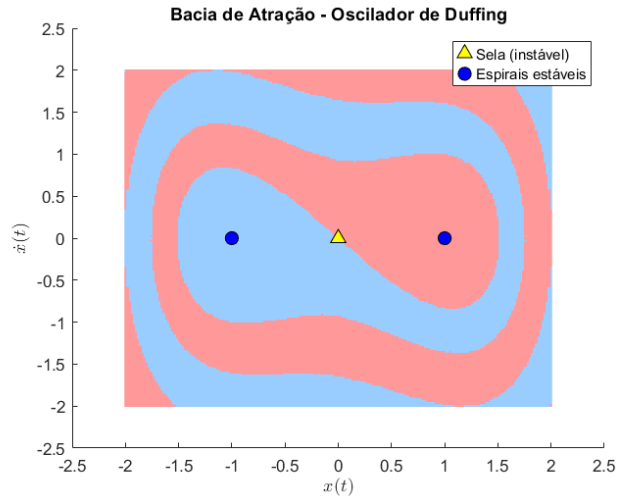


Figura 25: Bacia de atração - Oscilador Duffing 200×200 .

Solução - letra b

O programa escrito anteriormente para o Duffing não funcionou para o pêndulo amortecido, ele entregava o resultado como se nenhum valor convergisse quando é sabido que o ponto $(0, 0)$ é um atrator - Figura 26. Foi suposto que o problema seria a tolerância de proximidade muito pequena, ou tempo de simulação insuficiente, mas mesmo ao mudar esses parâmetros não foi possível obter a bacia de atração do sistema.

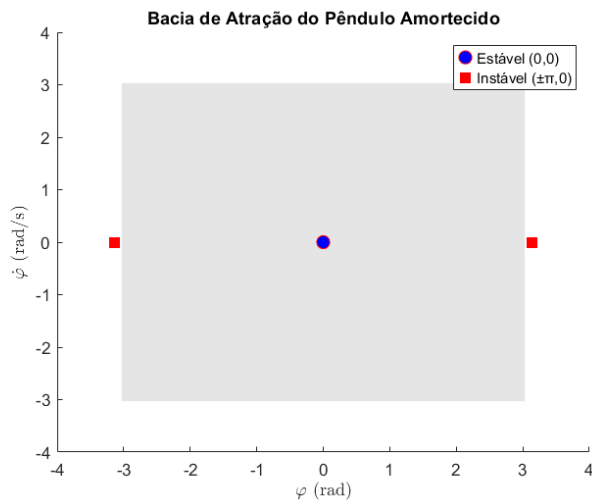


Figura 26: Bacia de atração - Oscilador Duffing 200×200 .

Solução - letra c

O mesmo programa foi então ajustado e aplicado para o sistema multiestável com 3 graus de liberdade. Um pequeno ajuste foi feito no código de forma a observar os pontos ao redor do ponto final da simulação e não apenas o final para melhor observar a convergência aos equilíbrios, isso melhorou o resultado. Vale ressaltar que isso foi testado para o pêndulo amortecido o que continuou sem ser efetivo para ele. Devido ao fato do resultado desse sistema ter sido obtido de maneira inteiramente numérica os parâmetros aqui usados são os mesmo da questão 3 letra d (subseção 3.4), assim como os pontos de equilíbrio obtidos. Posto isso, os três gráficos solicitados foram inicialmente obtidos com uma malha de 50×50 das variáveis em questão e podem ser vistos nas Figuras 27, 28 e 29. Se torna bem notável os pontos estáveis, que formam regiões de atração realmente, e o instável, que repele para os demais. Os gráficos foram obtidos novamente aumentando a malha para 100×100 (Figuras 30, 31 e 32) e 200×200 (Figuras 33, 34 e 35).

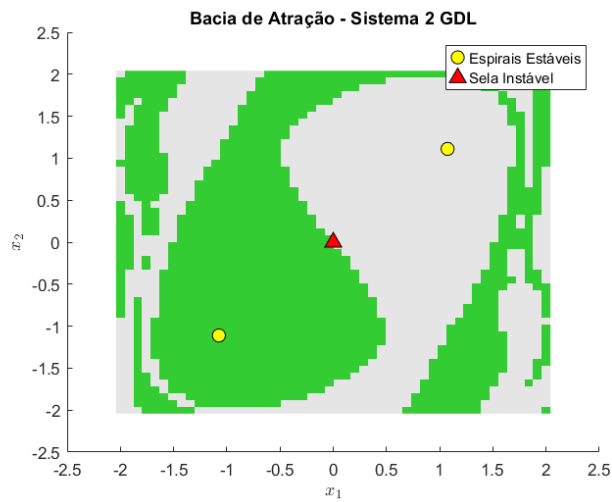


Figura 27: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - $x_1 \times x_2$ (50×50).

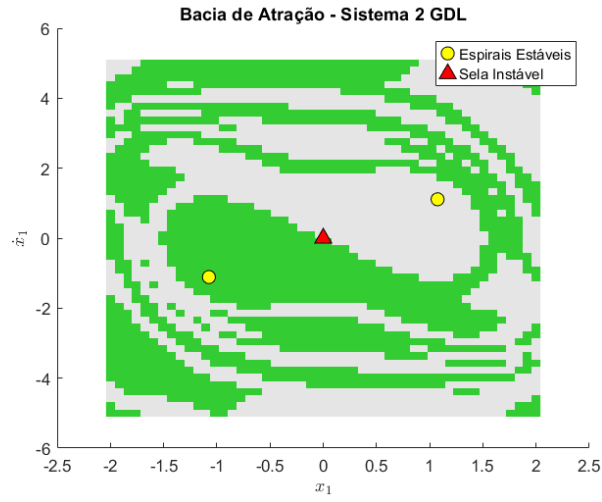


Figura 28: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - x_1 x \dot{x}_1 (50x50).

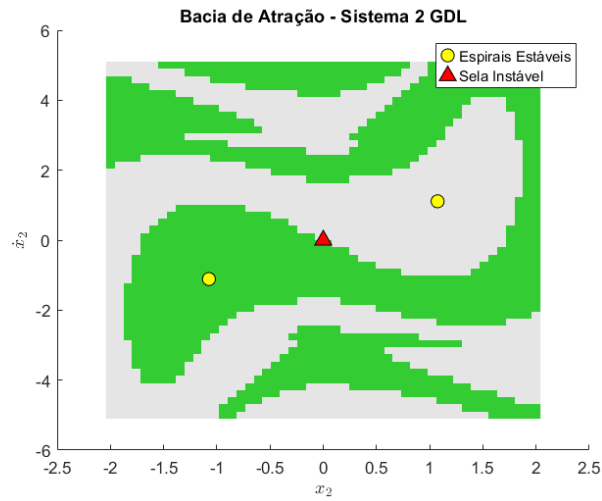


Figura 29: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - x_2 x \dot{x}_2 (50x50).

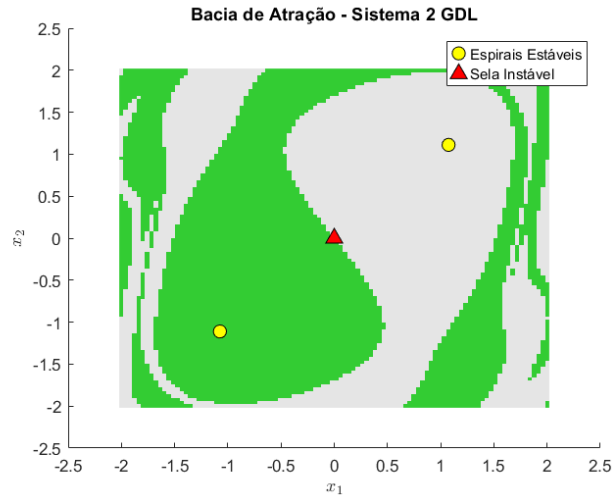


Figura 30: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - $x_1 \times x_2$ (100x100).

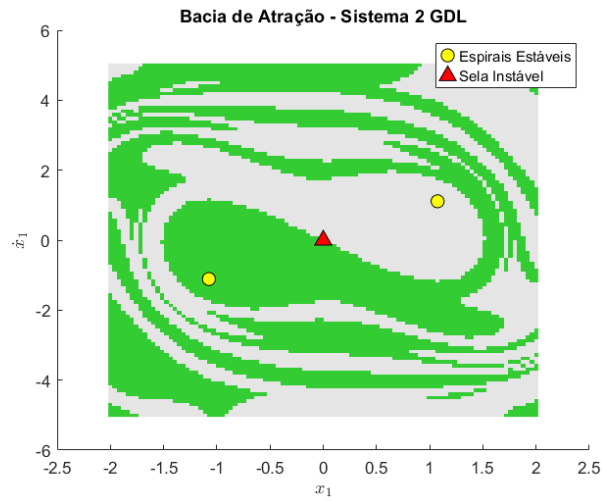


Figura 31: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - $x_1 \times \dot{x}_1$ (100x100).

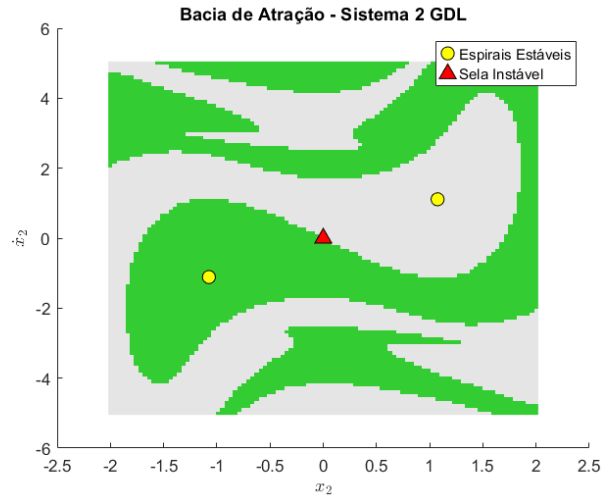


Figura 32: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - $x_2 \times \dot{x}_2$ (100x100).

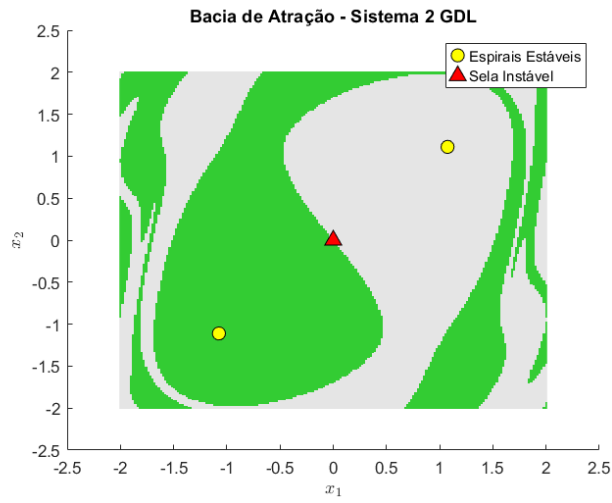


Figura 33: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - $x_1 \times x_2$ (200x200).

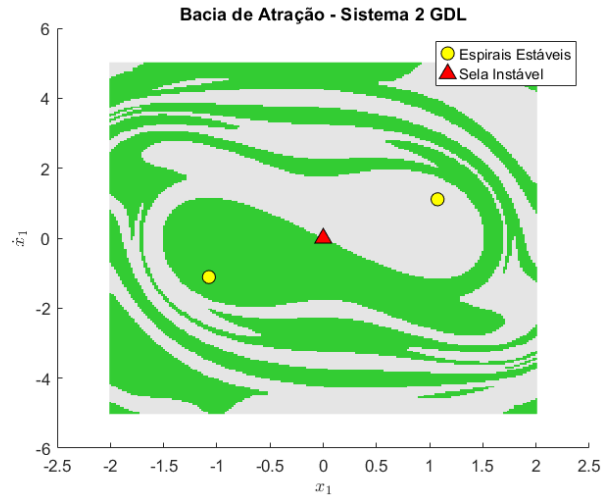


Figura 34: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - x_1 x \dot{x}_1 (200x200).

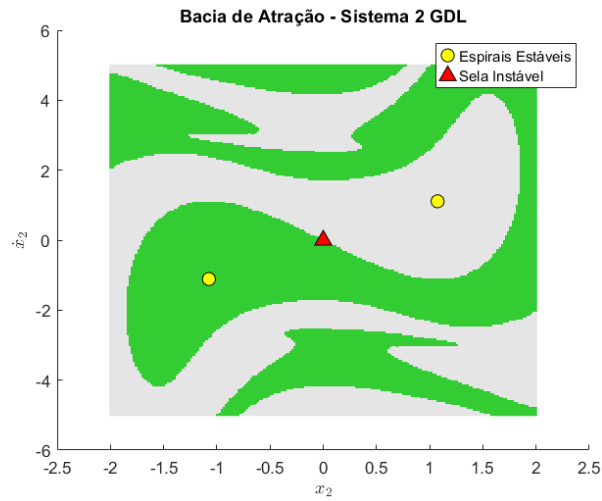


Figura 35: Bacia de atração - Sistema Multiestável 2 GDL - x_2 x \dot{x}_2 (200x200).

Referências Bibliográficas

- [1] SAVI, M. A., **Dinâmica Não-Linear e Caos**. 2. ed. E-papers Serviços Editoriais Ltda, 2017.
- [2] HAIRER, E., NORSETT, S. P., WANNER, G. **Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems**. 2. ed. Springer, 2008.