

LISTA 2 - MECÂNICA DE SISTEMAS INTELIGENTES
Programa de Engenharia Mecânica (PEM)

Prof. Luã G. Costa, DS.c
Maria Victoria Almeida do Carmo – 125153065

Rio de Janeiro,
Setembro de 2025

1 Questão

Utilizando os conceitos discutidos em sala, obtenha o modelo constitutivo linear para materiais magnetostrictivos a partir da determinação de uma energia livre e da desigualdade de Clausius-Duhem.

1.1 Solução

A construção dessa dedução foi baseada na dedução feita para materiais piezoelétricos, realizando as devidas correções que dizem respeito aos efeitos magnéticos. O primeiro passo a ser feito é observar o formato da 1ª Lei da Termodinâmica, visível na Eq. 1.

$$\frac{D}{Dt}(K + u) = \dot{W} + \dot{Q} + \dot{W}_m \quad (1)$$

Os termos já conhecidos podem ser lembrados: K sendo a energia cinética, U como a energia interna, \dot{W} é a taxa de trabalho das forças externas e \dot{Q} é a taxa de calor. No entanto um novo termo aparece, \dot{W}_m , que está associado a taxa de trabalho das forças magnéticas. Diferente do campo elétrico, o campo magnético não é representado como uma variação de pequenas carga, pois não existem "cargas magnéticas livres". Então, ao invés de um potencial escalar, se utiliza um potencial vetorial magnético, \mathbf{A} , de modo que seu rotacional é igual ao vetor indução magnética, \mathbf{B} , como pode ser visto na Eq. 2 - ξ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

$$B_i = \xi_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (2)$$

Tendo isso em mãos, prosseguimos com a definição de \dot{W}_m através da integral de superfície dos termos (Eq. 4). Foi também utilizado o teorema de divergência, para obtermos essa integral em termos de volume, visto que os termos da 1ª Lei da Termodinâmica podem também ser expressos no formato de integrais volumétricas e, depois, é possível obter um equacionamento local retirando a integração comum.

$$\dot{W}_m = \int_S n_i (A_j \dot{B}_j) dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_I} (A_j \dot{B}_j) dV = \int_V \frac{\partial A_j}{\partial x_I} \dot{B}_j + A_j \frac{\partial \dot{B}_j}{\partial x_I} dV \quad (3)$$

Desse modo, tem-se dois termos, mas o segundo termo envolve a divergência de \mathbf{B} , que pela lei de Gauss para campo magnético, é zero - $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, logo, ficamos só com um termo. Apesar de, no processo elétrico, essa passagem para obtenção do campo elétrico através da derivada parcial de cargas ser direta, no magnético não é tanto assim. Pelo princípio energético, a densidade de energia magnética é igual ao produto entre o vetor intensidade do campo, \mathbf{H} , e o de indução magnética, \mathbf{B} , de modo que ao derivar essa energia em relação a indução, se obtém o campo. Isso acaba por definir o H_i como variável termodinamicamente conjugada a B_i , e o primeiro termo resultante de Eq. 4 pode ser reorganizado de modo que fique como a Eq.

$$\dot{W}_m = \int_V H_j \dot{B}_j dV \quad (4)$$

Retornando à 1ª Lei, podemos alterar todos os termos para as suas associadas integrais volumétricas e isolar, tirando a integral, para o caso local, de modo a obter a equação 5. Os termos referidos são: \dot{e} é taxa de energia interna, ρ é densidade de massa, σ é o tensor de tensões, $\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}$ é a derivada do tensor deformação, q é o vetor fluxo de calor, r_h é a geração de calor interna por massa, H é o vetor intensidade de campo magnético e B é o vetor indução magnética.

$$\int_V \rho \dot{e}_j dV = \int_V (\sigma : \nabla \dot{u} - \nabla q + \rho r_h + H \dot{B}) dV \rightarrow \rho \dot{e}_j = \sigma : \nabla \dot{u} - \nabla q + \rho r_h + H \dot{B} \quad (5)$$

Através da desigualdade de Clausius-Duhem (Eq. 6 associada à 2ª Lei da Termodinâmica, podemos substituir o termo $\nabla q - \rho r_h$ ao isolá-lo da equação 10, e obter a desigualdade associada aos materiais magnetostrictivos.

$$\rho \theta \dot{s} + \nabla q - \rho r_h - q \cdot g \geq 0 \quad (6)$$

$$\rho(\theta \dot{s} - \dot{e}) + \sigma : \dot{\varepsilon} + H \dot{B} - q \cdot g \geq 0 \quad (7)$$

Para continuar a partir daqui devemos definir uma energia livre no meio disponível para realização de trabalho, h , sendo composta por energia interna, entropia, temperatura e também a energia magnética associada. Uma maneira de saber quais termos magnéticos se envolvem nessa energia livre é observar quais elementos ao serem associados geram a unidade de energia (joule). Pensando dessa maneira, temos um produto entre campo e indução, visto que \mathbf{H} tem unidade A/m e \mathbf{B} é T (Tesla), equivalente a Wb/m^2 , sendo $Wb = J/A$, então o produto entre esses dois termos dá J/m^3 . Desse modo, temos a equação 8. Essa pode ser reorganizada e colocada em função da energia interna e e obtermos a derivada dessa energia para substituímos na Eq. 10. A substituição da equação 15 na 10, resulta na Eq.

$$h = e - \theta s - \frac{1}{\rho}(H \cdot B) \quad (8)$$

$$\dot{e} = \dot{h} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s} + \frac{1}{\rho}(\dot{H} B + H \dot{B}) \quad (9)$$

$$-\rho(\theta \dot{s} - \dot{h}) + \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{H} B - q \cdot g \geq 0 \quad (10)$$

Assume-se que a energia livre seja uma função que dependa da deformação, ε , do campo magnético, H , e da temperatura, θ . E então, sua derivação seria algo no formato da equação 11. Podemos então, substituir esse \dot{h} na equação 10 e obter a equação 13.

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial h}{\partial H} \cdot \dot{H} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta} \quad (11)$$

$$(\sigma - \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}) : \dot{\varepsilon} - (B + \rho \frac{\partial h}{\partial H}) \cdot \dot{H} - \rho(s + \frac{\partial h}{\partial \theta}) \cdot \dot{\theta} - q \cdot g \geq 0 \quad (12)$$

Considerando os processos como reversíveis (conservativos), há apenas um termo dissipativo na equação 13, que é o último $q \cdot g$, então os demais devem ser iguais a zero, o que nos leva as chamadas equações de consistência termodinâmicas, visíveis na equação 14.

$$(\sigma - \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}) : \dot{\varepsilon} - (B + \rho \frac{\partial h}{\partial H}) \cdot \dot{H} - \rho(s + \frac{\partial h}{\partial \theta}) \cdot \dot{\theta} - q \cdot g \geq 0 \quad (13)$$

$$\sigma_R = \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}; \quad B_R = -\rho \frac{\partial h}{\partial H}; \quad s_R = -\frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (14)$$

Agora, é preciso fazer uma proposta de como a energia livre seria, usaremos a mesma proposta do piezo, apenas fazendo as adaptações necessárias ao magnetismo. Será considerado um processo reversível, como

já foi dito, e linear, com baixos campos magnéticos e baixa magnetoestricção. Assim, a proposta pode ser vista na Eq. em sua forma vetorial e indicial.

$$\begin{aligned}\rho h &= \frac{1}{2}\varepsilon : C^H : \varepsilon - \frac{1}{2}\mu^\varepsilon \cdot H \cdot H - e \cdot H : \varepsilon \\ h &= \frac{1}{2\rho}[C_{ijkl}^H \varepsilon_k l \varepsilon_m n] - \frac{1}{2\rho}[\mu_{ij}^\varepsilon H_i H_j] - \frac{1}{\rho}e_{ijk} H_i \varepsilon_{jk}\end{aligned}\quad (15)$$

Tendo isso em mãos, o último passo é substituir esse h nas equações constitutivas - de consistência termodinâmica (14). Estamos interessados nas substituições associadas a tensão e a campo, a parte de entropia não nos interessa tanto no momento. Substituindo nas relações teremos as Equações 16 e 17.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\rho}{2\rho} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} [C_{ijkl}^H \varepsilon_k l \varepsilon_m n] - \frac{\rho}{2\rho} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} [\mu_{kl}^\varepsilon H_k H_l] - \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} [e_{klm} H_k \varepsilon_{lm}] \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^H \varepsilon_k l - e_{klm} H_k\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}B_i &= \frac{\rho}{2\rho} \frac{\partial h}{\partial H_i} [C_{ijkl}^H \varepsilon_k l \varepsilon_m n] + \frac{\rho}{2\rho} \frac{\partial h}{\partial H_i} [\mu_{kl}^\varepsilon H_k H_l] + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial h}{\partial H_i} [e_{klm} H_k \varepsilon_{lm}] \\ B_i &= \mu_{ik}^\varepsilon H_k + e_{ikl} \varepsilon_{kl}\end{aligned}\quad (17)$$

Desse modo, as equações constitutivas dos materiais magnetostrictivos, tendo como base as equações do materiais piezoelétricos podem ser escritas na forma vetorial como na Eq. 23. Lembrando que os superescritos em C e em μ estão associados ao fato desses coeficientes estarem relacionados a campo magnético H constante e deformação constante ε .

$$\begin{cases} \sigma = C^H \varepsilon - e^T H \\ B = \mu^\varepsilon H - e \varepsilon \end{cases}\quad (18)$$

2 Questão

2.1 Questão

A construção desse modelo requer mais cuidado e é mais complexa do que o que foi feito nas questões 3 e 4. Primeiramente, será explicada a lógica aplicada para implementação do modelo proposto por Brinson. Tendo em mente a equação constitutiva proposta pela autora, temos a equação final 19.

$$\sigma - \sigma_0 = C(\beta)\varepsilon_0 - C(\beta_0)\beta_S + \gamma_S(\beta)\beta_S - \gamma_S(\beta_0)\beta_{S0} + \Theta(\theta - \theta_0)\quad (19)$$

Com $C(\beta)$, $C(\beta_0)$, $\gamma_S(\beta)$ e $\gamma_S(\beta_0)$, simbolizando que C e γ são funções de β e β_0 . No código utilizado, tensão e temperatura foram impostos, além de deformação inicial, então 19 foi reorganizada deixando em evidência ε . É importante saber também o que os termos significam: σ, σ_0 são as tensões do momento e inicial; C está associada a constante elástica do material, que varia com a composição estrutural dele (β); $\varepsilon, \varepsilon_0$ são as deformações do momento e iniciais; γ_S está associado a constante elástica também e à

deformação residual máxima, ε_R ; β é a soma das porcentagens de martensita maclada (β_T) - associada a temperatura) e demaclada (β_S - associada a tensão) do material; Θ é uma constante associada a temperatura do material e θ, θ_0 são temperaturas do momento e iniciais.

Associada a equação constitutiva, algumas outras relações precisam ser colocadas, como podem ser vistas nas equações 20, 21 e 22. Os termos associados a condições iniciais são iguais, só trocam para β_0, β_{S0} e β_{TO} . Os termos C_a, C_m, Θ e ε_R são constantes e fornecidos pela questão.

$$\beta = \beta_S + \beta_T \quad (20)$$

$$C(\beta) = C_a + \beta(C_m - C_a) \quad (21)$$

$$\gamma(\beta) = -C(\beta)\varepsilon_R \quad (22)$$

Atrelado a isso, existe mais um detalhe: a mudança de tensão ou temperatura pode acarretar mudança de fase, que vai levar a mudanças nos valores de β_S e β_T . As equações que calculam como ocorre essa mudança dependendo de em qual tipo de estrutura o material está podem ser vistas nas equações 22 e 23 da Brinson (1993). Essa atualização de β é feita usando mais um conjunto de constantes associadas ao material como temperaturas de mudança de fase inicial e final, associada a mudança entre martensita maclada, demaclada e austenita - M_s, M_f, A_s e A_f . Além de tensões críticas também associadas a mudança de fase para martensita demaclada (ida ou volta) - σ_s e σ_f .

É primordial o cálculo correto dessa mudança de fase e também a correta atualização dos novos valores de β_0, β_{S0} e β_{TO} , quando se muda completamente de fase. Sendo assim, note que para fase martensítica maclada, $\beta_{S0} = 1$ e $\beta_{TO} = 0$, enquanto na demaclada $\beta_{S0} = 0$ e $\beta_{TO} = 1$, e na austenítica ambos os β s são iguais a zero.

As mudanças de fase ocorrem da seguinte maneira, considerando processos reversíveis:

- Considerando $\theta < A_s$, tensionar o material a partir de $\sigma > \sigma_s$ induz uma transformação de martensita maclada para martensita demaclada, de modo que ao alcançar σ_f , o corpo já é totalmente martensita demaclada. Descarregando esse corpo, $\sigma < \sigma_s$, o material permanece martensítico demaclado;
- Mantendo sem tensão e subindo a temperatura, $\theta > A_s$, há indução de mudança de fase para a austenítica, sendo completada após alcançar A_f ;
- Se ainda em alta temperatura, $\theta > A_s$, houver aumento de tensão, $\sigma > \sigma_s$, a mudança para martensita demaclada passa a ocorrer novamente, e ao descarregar, ele transforma para austenita;
- Se a temperatura for sendo gradualmente abaixada, $\theta < A_f$ passa a ocorrer uma mudança de fase para martensita maclada, que será concluída após atingir A_s .

Desse modo, primeiro foram consideradas condições iniciais de martensita maclada, com deformação, temperatura e tensão iniciais zeradas, para aplicar inicialmente um carregamento gradual, depois descarregar, e depois um aquecimento gradual e depois resfriar. O gráfico associado a como se configura o carregamento do material pode ser visto na Figura 1.

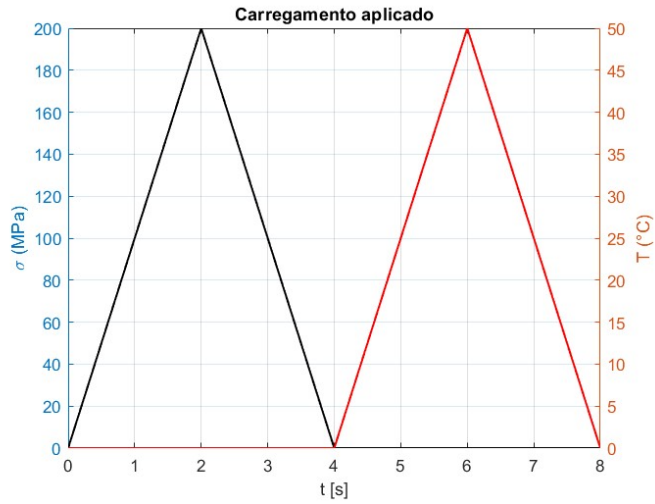


Figura 1: Carregamento do SMA - tensão e temperatura - efeito memória de forma.

Com isso, se obteve a curva de tensão x deformação do material, para ver se é possível visualizar o laço típico de materiais de memória de forma. O que pode ser facilmente visto na Figura 2. O efeito pode ainda ser melhor visto em um gráfico 3d que também integre a mudança de temperatura - Figura 3.

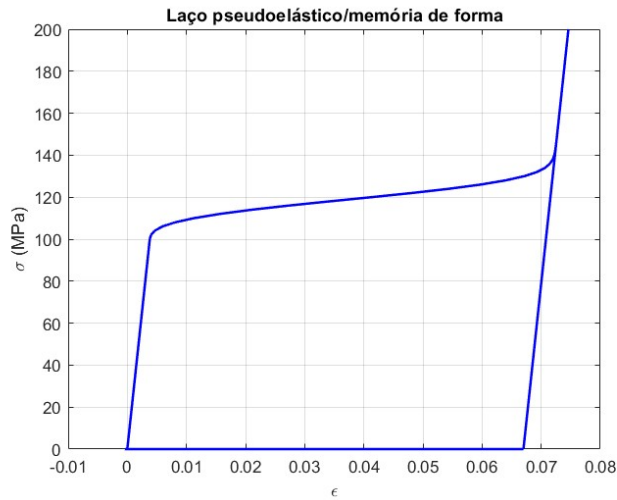


Figura 2: Curva tensão x deformação - efeito memória de forma.

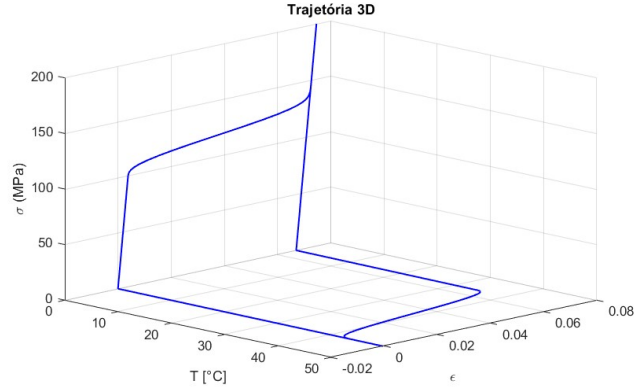


Figura 3: Curva tensão x deformação x temperatura - efeito memória de forma.

Como pôde ser observado, foi possível construir a simulação para reproduzir esses gráficos vistos no artigo da Brinson, no entanto a implementação ainda apresenta espaços para melhoria, visto que ao plotar o gráfico do β - Figura 4 - nota-se que ao final não está havendo um salvamento correto do valor de β_T , associado a martensita maclada. Analisando e conhecendo o processo, também se observa a implementação e provavelmente tal erro esteja associado a direção do carregamento para execução da transformação de fase - ou seja, no código deve haver uma maneira de identificar a direção que o carregamento está vindo, para executar mudança tanto de martensita para austenita quanto austenita para martensita, de maneira correta. Infelizmente, não foi possível realizar esse ajuste de maneira eficaz no código, então esses resultados foram trazidos.

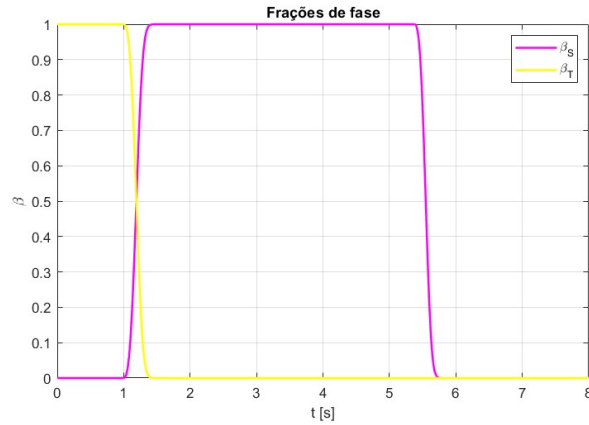


Figura 4: Porcentagem de martensita maclada e demaçada no corpo - efeito memória de forma.

Quanto ao efeito pseuelástico, as condições iniciais são diferentes, uma temperatura que garanta 100% de austenita é mantida constante, enquanto um carregamento é imposto de forma gradual, de maneira que leve até uma martensita demaçada e depois retirado, retornando a austenita. Assim, o carregamento imposto pode ser visto na figura 5.

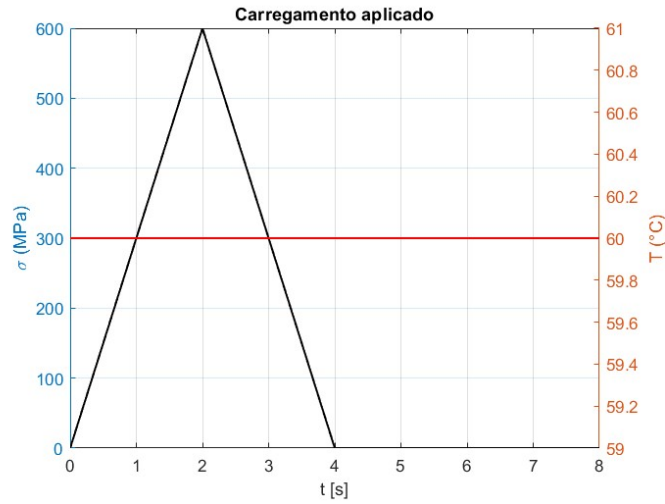


Figura 5: Carregamento do SMA - tensão e temperatura - efeito pseudoelástico.

Novamente, o problema de direcionamento da tensão é sentido, logo no gráfico que mostra a variação de β com o tempo - figura 6 - é possível notar que algo não está correto: apesar do formato e mudança para o β_S está coerente, as curvas de mudança estão retas e abruptas e não devidamente curvas de transformação. Isso indica que o β está mudando devido apenas aos batentes de condições iniciais propostos, e não seguindo as formulações de mudança. Desse modo, os gráficos de tensão x deformação não adquirem o formato correto, dando até certa incongruência em relação a deformação, como se ela fosse negativa e o material comprimisse - figuras 7 e 8.

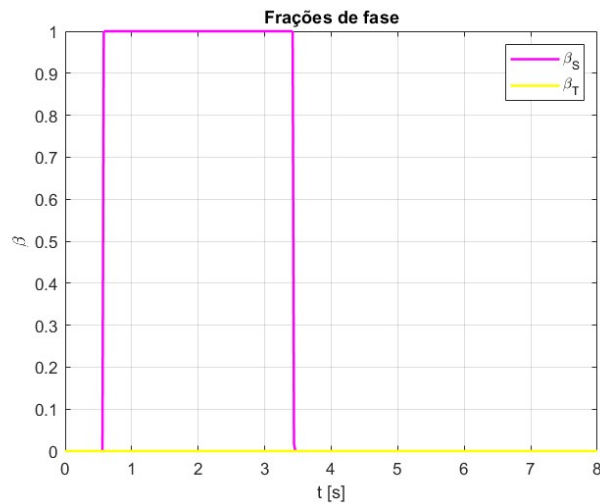


Figura 6: Porcentagem de martensita maclada e demaclada no corpo - efeito pseudoelástico.

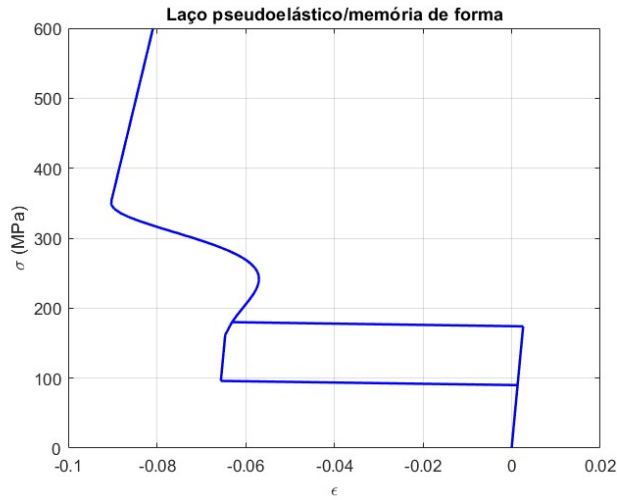


Figura 7: Curva tensão x deformação - efeito pseudoelástico.

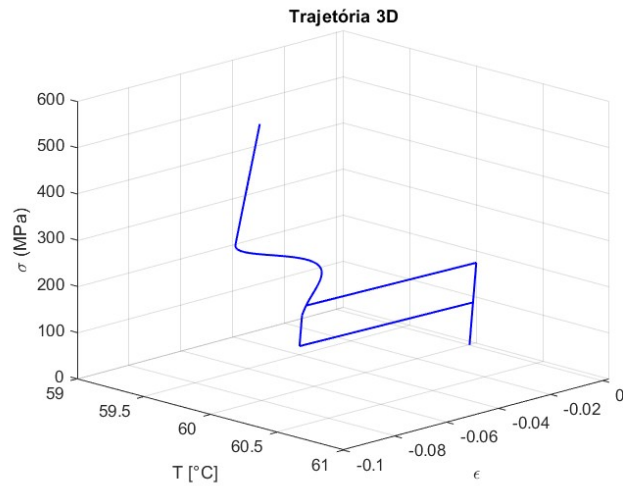


Figura 8: Curva tensão x deformação x temperatura - efeito pseudoelástico.

Apesar dos resultados não terem saído perfeitos, o processo de aprendizagem e construção da implementação parece se encaminhar corretamente, precisando de mais alguns ajustes que o torne ideal. O processo e construção do modelo proporcionou incrível aprendizado e aprofundamento do funcionamento das ligas com memória de forma, permitindo compreender certas nuances que apenas a prática e a contínua tentativa e falha podem proporcionar.

3 Questão

3.1 Solução

Para a execução dessa questão, a estruturação foi seguida da maneira que a questão estabelece. Desse modo, os 3 sistemas foram definidos como funções e suas soluções foram obtidas numericamente, de modo que o resultado de sua tensão, v , fosse utilizado para o cálculo de uma tensão média. A critério de comparação, as potências dos sistemas foram expostas juntas, inclusive variações na distância do batente do sistema não-suave, g . Atrelado a isso, uma plotagem da resposta da tensão considerando o ponto de meia varredura da banda, $\omega = 30 \text{ rad/s}$, também foi obtida para verificar se as leituras de potência estavam sendo coerentes. Por fim, uma medição da largura de banda também foi feita, considerando que foram medidas 3 amplitudes diferentes, $A = [2, 5; 5; 9, 81] \text{ m/s}^2$, pois a largura de banda quantifica o número de frequências próximas que apresentam uma alta potência média, sendo um bom critério comparador para colheita de energia.

Os gráficos da potência média dos sistemas, que consideram os 3 tamanhos de A , podem ser visto nas figuras 9, 10 e 11. A escolha de mostrá-los em sequência é fornecer uma comparação mais rica sobre os comportamentos dos sistemas em seguida.

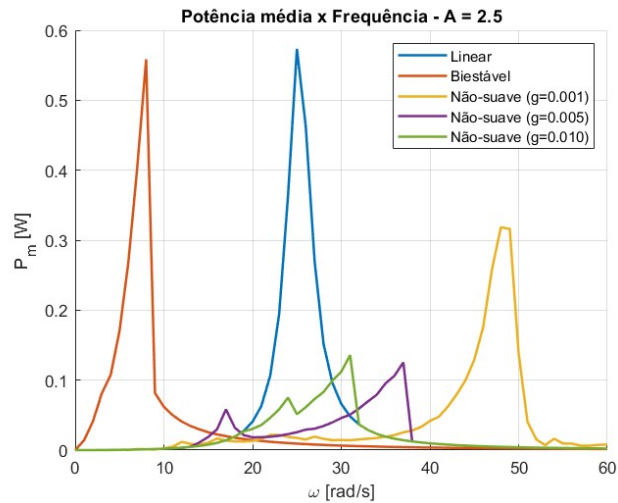


Figura 9: Potência média de sistema linear, biestável e não suave, com $A = 2,5 \text{ m/s}^2$ e $g = [0,001; 0,005; 0,01] \text{ m}$.

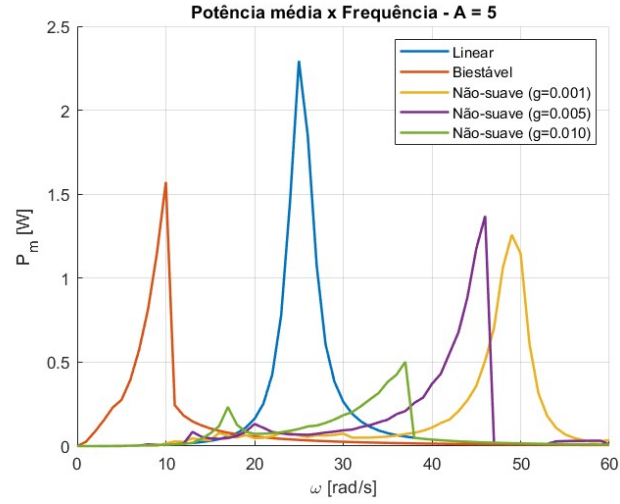


Figura 10: Potência média de sistema linear, biestável e não suave, com $A = 5 \text{ m/s}^2$ e $g = [0, 001; 0, 005; 0, 01] \text{ m}$.

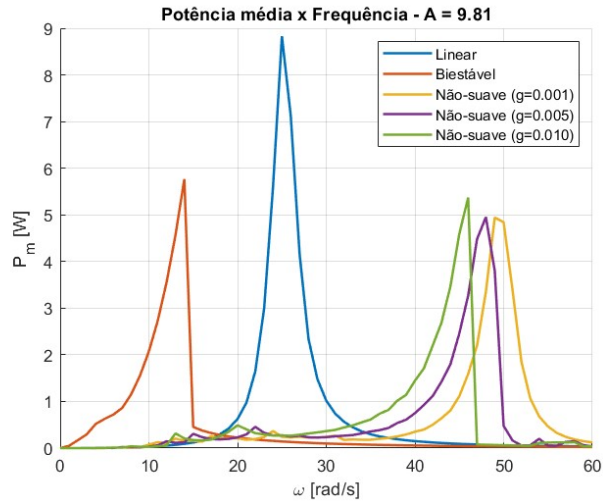


Figura 11: Potência média de sistema linear, biestável e não suave, com $A = 9,81 \text{ m/s}^2$ e $g = [0, 001; 0, 005; 0, 01] \text{ m}$.

Nas figuras 9, 10 e 11, observa-se que o sistema linear apresenta um pico bem definido na vizinhança da frequência natural ($\approx 25 \text{ rad/s}$). Esse comportamento é esperado, pois trata-se de um sistema ressonante típico. No entanto, o pico é bastante estreito, o que se reflete diretamente na largura de banda obtida, pois, para todas as amplitudes de excitação - $A = [2, 5; 5; 9,81] \text{ m/s}^2$ - a largura de banda do sistema linear se manteve constante em $BW = 2 \text{ rad/s}$, evidenciando que ele é eficiente apenas em uma faixa muito restrita de frequências. Isso limita a capacidade de colheita de energia quando a excitação possui variação espectral

mais ampla.

O sistema biestável, por sua vez, apresenta uma resposta distinta nos gráficos, com picos deslocados em relação à frequência natural do sistema linear, consequência da não linearidade introduzida pelo potencial duplo estável. Apesar de gerar maior diversidade de respostas dinâmicas, os resultados de largura de banda parecem indicar que essa configuração não proporcionou ganhos significativos em relação ao sistema linear. Para $A = 2.5$, a largura de banda foi ainda menor ($BW = 1$ rad/s), aumentando para 2 rad/s em $A = 5$ e $A = 9.81$. Assim, os gráficos mostram que, embora a resposta biestável modifique o espectro de potência média, a eficiência em termos de banda de operação permanece limitada. No entanto, conhecendo a natureza desse sistema, sabemos que ele precisa de maiores intensidades para oscilar entre seus dois pontos de equilíbrio estáveis, então, testando um aumento grande da intensidade, $A = 30$, obtemos a Figura 13, situação na qual a largura de banda do sistema biestável passa a ser $BW = 4$ rad/s, mostrando um resultado melhor. De qualquer maneira, ajuste de parâmetros, como α e β podem vir a proporcionar resultados ainda melhores.

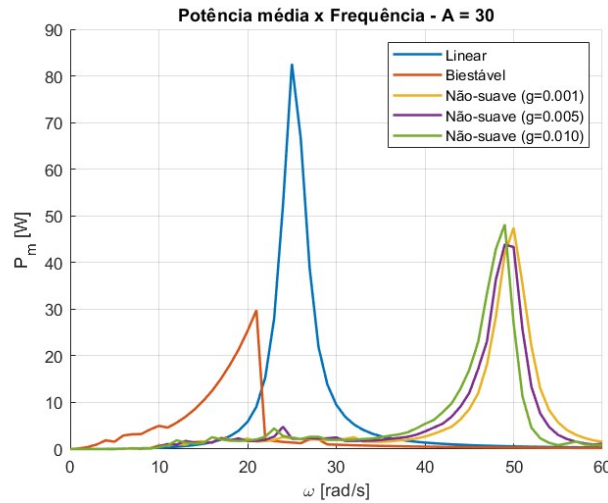


Figura 12: Potência média de sistema linear, biestável e não suave, com $A = 30 \text{ m/s}^2$ e $g = [0, 001; 0, 005; 0, 01] \text{ m}$.

Já o sistema não-suave, que incorpora batentes, apresentou as curvas mais interessantes nos gráficos de potência média. Ao contrário do sistema linear, os picos de potência média se espalham em diferentes regiões de frequência, especialmente para valores maiores do parâmetro g . Essa dispersão se traduz em um aumento expressivo da largura de banda. Para $A = 2, 5$, por exemplo, os resultados foram de 3 rad/s ($g = 0.001$), 4 rad/s ($g = 0.005$) e até 7 rad/s ($g = 0.010$), o que fica bem evidente nos gráficos pela maior extensão das regiões com potência significativa. Para $A = 5$, as larguras de banda ficaram entre 2 e 3 rad/s, ainda superiores ao caso linear em alguns parâmetros. Já em $A = 9.81$, o comportamento se estabiliza, com larguras de banda de 3 rad/s para todos os valores de g . Esse padrão mostra que a não linearidade introduzida pelo batente pode ampliar a faixa útil de operação, melhorando a capacidade de colheita de energia em situações práticas de excitação de espectro variável. No entanto, existe um limite, o aumento exagerado da distância ao batente pode levar o sistema não-suave a responder como o sistema linear, como pode ser visto na Figura ??, onde a curva do sistema com batente $g = 0, 1$ sobrepõe a curva do sistema linear.

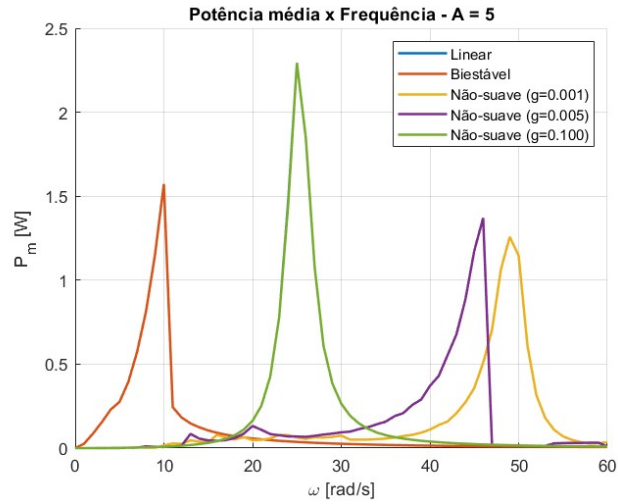


Figura 13: Potência média de sistema linear, biestável e não suave, com $A = 5 \text{ m/s}^2$ e $g = [0, 001; 0, 005; 0, 1] \text{ m}$.

Se medirmos a resposta da tensão para diferentes pontos de ω , logicamente teremos diferentes respostas e sistemas parecendo se sair melhores ou piores, visto que as curvas possuem picos diferentes. No entanto, foi plotada a figura 14, para podermos observar certas coisas nas diferentes respostas dos sistemas.

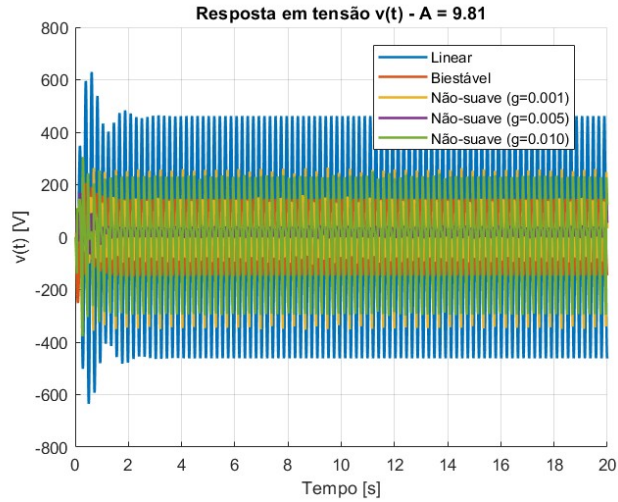


Figura 14: Resposta em tensão, para $A = 9.81$ e $\omega = 30 \text{ rad/s}$.

Nesse gráfico também se nota a influência das não linearidades. O sistema linear apresenta oscilações periódicas bem definidas, restritas em amplitude, condizentes com sua resposta em frequência estreita. Já o sistema biestável e, principalmente, o não-suave, mostram sinais mais ricos e com amplitudes maiores em alguns casos se olharmos cuidadosamente, nada se sobrepõe, indicando que a energia coletada pode ser

Parâmetros	Valor	Unidade
ζ	0.025	-
A	$2.5 \rightarrow 9,81$	m/s^2
ω	$1 \rightarrow 9,81$	rad/s
a	15	$N/(K \cdot m \cdot kg)$
b	$60 \cdot 10^4$	$N/(m^3 \cdot kg)$
T_a	313	K
T_m	287	K

Tabela 1: Parâmetros sugeridos.

mais significativa em regimes fora da ressonância linear. Esses sinais em $v(t)$, obtidos para $\omega = 30$ rad/s, confirmam que a inclusão das não linearidades permite extrair energia mesmo em condições onde o sistema linear não seria eficiente.

Em resumo, a comparação entre os gráficos e os valores de largura de banda evidencia que a adição de não linearidades — tanto pelo sistema biestável quanto pelo sistema não-suave — pode ampliar o potencial de colheita de energia. O efeito é mais marcante no sistema não-suave devido aos valores de A utilizados, especialmente para baixas amplitudes e maiores valores de, onde a largura de banda chega a 7 rad/s, mais que o triplo da obtida no sistema linear. Assim, os resultados demonstram que, embora o sistema linear seja eficiente em uma frequência bem definida, a introdução de mecanismos não lineares aumenta a robustez e a versatilidade da colheita de energia em cenários práticos, podendo se tornar ainda melhor com o certo ajuste de parâmetros, pois os sistemas não-lineares são altamente sensíveis a eles.

4 Questão

O modelo constitutivo proposto por Falk (1980) é uma alternativa viável para modelagem de sistemas dinâmicos compostos por materiais com memória de forma devido a sua simplicidade. O modelo de oscilador abaixo possui uma força de restituição de acordo com esse modelo de SMAs:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\dot{x}(t) + a(T - T_a)x(t) - bx(t)^3 + \frac{b^2}{4a(T_a - T_m)}x(t)^5 = A\sin(\omega t) \quad (23)$$

Mostre como um oscilador com memória de forma pode ser utilizado para atenuação de vibrações. Utilize os parâmetros como referência (modifique, caso necessário):

4.1 Solução

O objetivo desse exercício é observar como o oscilador proposto se comporta atenuando vibrações em um sistema, mas para ter algum ponto de comparação, analisou-se em conjunto um oscilador linear com amortecimento simples, de formato equivalente e a equação 24, de modo que a comparação entre o comportamento dos 2 sistemas fosse bem direta. Atrelado a isso, a massa do sistema foi considerada igual a 1 e k_{eq} representa a rigidez desse oscilador e para ter um critério de comparação mais equivalente, ele foi colocado como $k_{eq} = a \cdot (T - T_m)$.

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\sqrt{k_{eq}}\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) = A\sin(\omega t) \quad (24)$$

Como critério comparativo em relação a atenuação de vibração, é lógica a escolha da amplitude dos sistemas em determinadas frequências. Posto isso, fez-se uma breve varredura em frequência dos dois sistema, coletando a máxima amplitude associada aquele ω , com o intuito de visualizar melhor as regiões que viriam a ser críticas, como uma zonas próximas a ressonância - aproximação da frequência de excitação à natural do sistema. Essa varredura pode ser vista na figura 15.

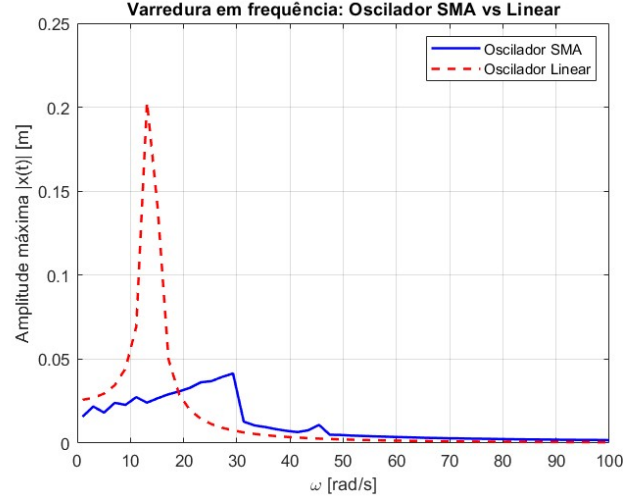


Figura 15: Varredura em frequência captando máximos - SMA x Oscilador Linear.

O comportamento do oscilador linear é esperado: um pico de amplitude associado a sua frequência natural, já que foi considerado um único grau de liberdade. É interessante observar o comportamento do oscilador com SMA: o comportamento é mais amortecido e não linear. O SMA distribui mais a energia, "achatando" o pico, então se vê uma resposta mais suave, com menos amplificação máxima, sendo mais espalhada ao longa da faixa de frequência. Ou seja, nesse caso, o SMA atua muito bem como um atenuador de vibração quando se observa de maneira geral o comportamento do sistema.

Uma outra maneira de comparar esses comportamentos é observar a resposta no tempo de ambos os sistema dentro de uma frequência de excitação específica. Com auxílio da figura 15, sabe-se que a região de alta amplitude de vibração do oscilador linear amortecido esta entre 10 e 20 rad/s, o que nos permite usar esse intervalo de avaliação da resposta dos sistemas.

Se apenas a resposta do sistema fosse avaliada poderia levar a conclusões precipitadas acerca da capacidade do sistema com SMA ser uma atenuador de vibrações. Isso pode claramente visto quando se observa a Fig. 16, quando a frequência de excitação é 20 rad/s. Pela Fig. 15 já é possível notar que a amplitude do sistema com SMA seria ligeiramente maior que o linear, e isso realmente ocorre.

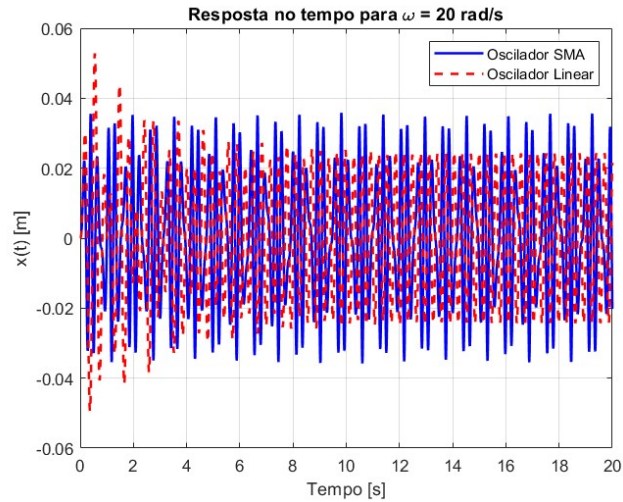


Figura 16: Resposta do sistema no tempo, com $\omega = 20$ rad/s.

Esse comportamento vai seguir de 20 rad/s até o fim do intervalo de frequências analisado, com os pontos entre 20 e 30 rad/s apresentando a resposta do sistema com SMA maior do que a do oscilador linear. Isso pode parecer que a presença do material com memória de forma amplifica a resposta do sistema, mas na verdade só não está sendo visto o comportamento inteiro do problema.

Observemos agora com outra frequência de excitação, $\omega = 17$ rad/s, figura 17. Aqui já está no intervalo mais próximo a ressonância do oscilador linear, e é justamente nessa área que se tem mais interesse de atuação de atenuadores de vibração, de modo a mitigar grandes deslocamentos que podem gerar falhas estruturais. O sistema com SMA já passa a apresentar uma amplitude bem menor se comparado ao oscilador simples, até mesmo no regime transiente de operação.

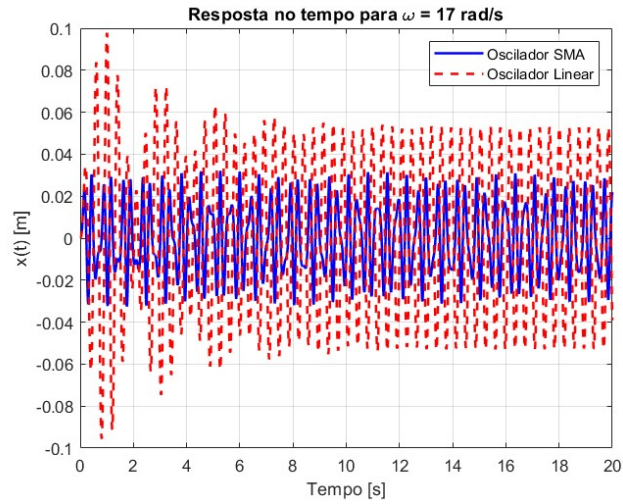


Figura 17: Resposta do sistema no tempo, com $\omega = 17$ rad/s.

Continuando nesse intervalo mais crítico de operação do sistema linear, pensando que em uma situação real seria desejável de algum modo diminuir essa amplitude de vibração, analisa-se uma outra frequência $\omega = 15$ rad/s na figura 18. Note que o sistema com SMA se desloca muito menos do que o oscilador linear, o que configura o comportamento de um bom atenuador de vibrações.

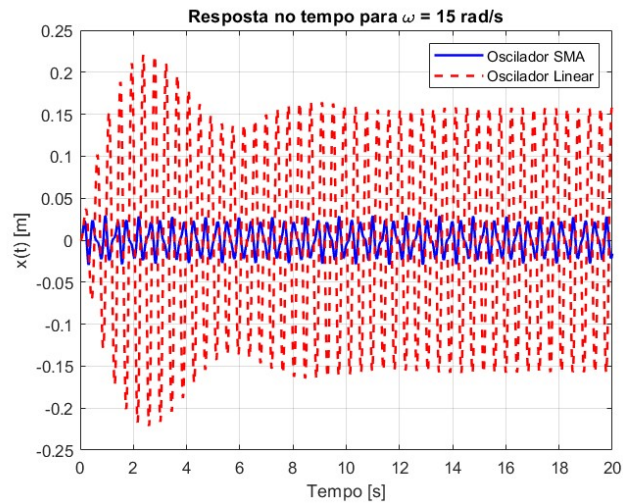


Figura 18: Resposta do sistema no tempo, com $\omega = 15$ rad/s.

Indo ainda mais próximo para o ponto de ressonância do sistema, $\omega = 14$ rad/s, é possível notar na figura 19 que o oscilador simples apresenta um comportamento de crescimento exagerado de deslocamento, enquanto o oscilador com SMA permanece oscilando sem amplificação, considerando que ele está sofrendo

ação de um forçamento harmônico. Ou seja, mais uma vez, tem-se uma boa atenuação da vibração justamente num espaço de operação crítico do sistema, deslocando o ponto de ressonância e diminuindo a amplitude crítica máxima do sistema.

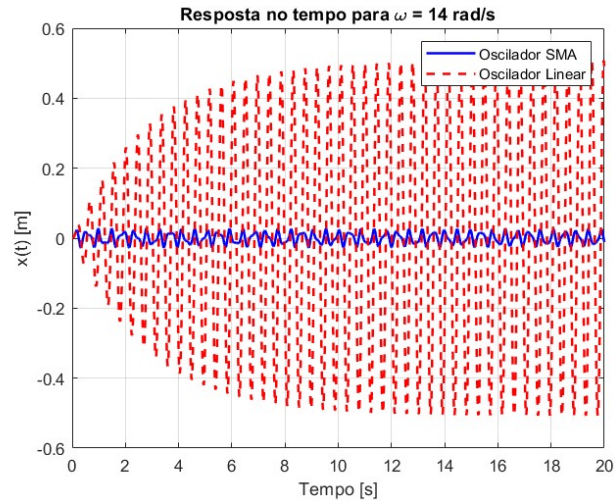


Figura 19: Resposta do sistema no tempo, com $\omega = 14$ rad/s.

A escolha da amplitude foi arbitrária em $A = 5$, e sua mudança não gerou alterações significativas nos gráficos, apenas aumentando ou diminuindo o deslocamento máximo, mas não seu formato geral, dentro do analisado.

Referências Bibliográficas

[1] Brinson, L. “One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 4, no. 2, pp. 229–242, 1993.

[2] Falk, F. “Model free energy, mechanics, and thermodynamics of shape memory alloys”. *Acta Metallurgica*, vol. 28, no. 12, pp. 1773–1780, 1980.