# Дебильник по предмету: «Математическая логика» Четвертый семестр.

Специальность 02.03.03.
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.
Преподаватель - Косовская Татьяна Матвеевна.
Группа 244.
Санкт-Петербург 2020.

Фомина В.В.

Набрано в LaTeX

Дата изменения: 22 июня 2020 г. 09:24

# Содержание


**1 Пропозициональные формулы. Таблицы истинности. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии и противоречия. 4**

**2 Теоремы о представимости пропозициональной формулы с помощью формул, содержащих только три, две или одну логическую связку. 4**

**3 Теоремы о ДНФ и КНФ. Полином Жегалкина. 5**

**4 Понятия исчисления и формальной теории. Вывод, выводимая формула, полнота и непротиворечивость. Допустимое правило. 6**

**5 Секвенциальное исчисление высказываний. Допустимые правила секвенциального исчисления высказываний. 6**

**6 Теоремы о семантическом обосновании секвенциального исчисления высказываний. 6**

**7 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний. 6**

**8 Метод резолюций для исчисления высказываний. Обоснование доказательства следования A1, ... , An ⇒ B1, ... , Bk. 6**

**9 Предикатные формулы: терм, атомарная формула, предикатная формула. Область действия квантора, свободные и связанные вхождения предметной переменной в формулу. Терм, свободный для подстановки в формулу вместо свободных вхождений предметной переменной. 7**

**10 Интерпретации. Общезначимые и выполнимые формулы, противоречия. 9**

**11 Смысл формулы с n свободными переменными в заданной интерпретации. 10**

**12 Секвенциальное исчисление предикатов. Необходимость соблюдения ограничений на кванторные правила (примеры). 11**

**13 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления предикатов. 11**

**14 Метод резолюций для исчисления предикатов. Обоснование доказательства следствия A1, ... , An ⇒ B1, ... , Bk. 11**

15 Понятие формальной теории. Формальные теории с равенством (примеры). Аксиомы для равенства и аксиомы согласования с равенством. 11

16 Формальная арифметика (аксиоматическая теория чисел). 12

17 Первая теорема Геделя. 13

18 Вторая теорема Геделя. 14

19 Консервативность расширения формальной арифметики бесконечно большими числами. 14

20 Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Его отсутствие в аксиоматических теориях множеств. 14

21 Теория типов Рассела. 15

22 Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля. 15

23 Ординальные числа. 15

24 Конструктивные объекты. Формулы Бэкуса. 15

25 Примеры математических понятий алгоритма. 15

# 1 Пропозициональные формулы. Таблицы истинности. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии и противоречия.

**Определение 1.1** (Высказывание).

**Высказыванием** называется утверждение, относительно которого можно однозначно сказать истинно оно или ложно.

**Определение 1.2** (Пропозициональная переменная).

**Пропозициональные переменные** – переменные для высказываний.

Имеют два значения: истина или ложь.

**Определение 1.3** (Пропозициональные формулы).

- пропозициональная переменная
- $A$ – пропозициональная формула → $\neg A$ – пропозициональная формула
- $A,\ B$ – пропозициональные формулы, $*$ – бинарная связка → $A * B$ – пропозициональная формула

**Замечание 1.1** (Основные равносильности (не самые очевидные)).

- Склеивание

  $A \,\&\, B \ \vee\ \neg A \,\&\, C \Leftrightarrow A \,\&B \ \vee\ \neg A \,\&\, C \ \vee\ B \,\&\, C$

  $(A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee C) \,\&\, (B \vee C)$
- $A \leftrightarrow B \ \Leftrightarrow\ (A \to B) \,\&\, (B \to A) \ \Leftrightarrow\ (\neg A \vee B) \,\&\, (\neg B \vee A) \ \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\ \neg A \,\&\, (\neg B \vee A) \ \vee\ B \,\&\, (\neg B \vee A) \ \Leftrightarrow\ (\neg A \,\&\, \neg B) \ \vee\ (B \,\&\, A)$
- $A \oplus B \ \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$
- $A \mid B \ \Leftrightarrow\ \neg(A \,\&\, B)$
- $A \downarrow B \ \Leftrightarrow\ \neg(A \vee B)$

# 2 Теоремы о представимости пропозициональной формулы с помощью формул, содержащих только три, две или одну логическую связку.

**Теорема 2.1.**

По всякой пропозициональной формуле можно построить равносильную ей, содержащую только связки из одного множества:

- $\{\&, \ \vee, \ \neg\}$
- $\{\&, \ \neg\}$
- $\{\vee, \ \neg\}$
- $\{ \mid \}$
- $\{ \downarrow \}$

## 3 Теоремы о ДНФ и КНФ. Полином Жегалкина.

**Теорема 3.1** (Теорема о ДНФ)**.**

По всякой пропозициональной формуле, не являющейся противоречием, можно построить равносильную ей ДНФ.

**Теорема 3.2** (Теорема о полиноме Жегалкина)**.** По всякой пропозициональной формуле можно построить полином Жегалкина.

**Обозначение 3.1.** Для всякой пропозициональной формулы полином Жегалкина ровно один с точностью до перестановки слагаемых (ДНФ и КНФ могут быть разные).

**Теорема 3.3** (Теорема о КНФ)**.**

По всякой пропозициональной формуле, не являющейся тавтологией, можно построить равносильную ей КНФ.

4 Понятия исчисления и формальной теории. Вывод, выводимая формула, полнота и непротиворечивость. Допустимое правило.

5 Секвенциальное исчисление высказываний. Допустимые правила секвенциального исчисления высказываний.

6 Теоремы о семантическом обосновании секвенциального исчисления высказываний.

7 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний.

8 Метод резолюций для исчисления высказываний. Обоснование доказательства следования A1, ... , An $\Rightarrow$ B1, ... , Bk.

# 9 Предикатные формулы: терм, атомарная формула, предикатная формула. Область действия квантора, свободные и связанные вхождения предметной переменной в формулу. Терм, свободный для подстановки в формулу вместо свободных вхождений предметной переменной.

**Определение 9.1.**

**Предметная константа** - имя предмета.

**Определение 9.2.**

**Предметная переменная** - переменная, которая в качестве своих значений может принимать предметные константы.

**Определение 9.3.**

Символ $F$ в формальном языке является **функциональным символом**, если для любого символа , представляющий объект в языке, $F(X)$ снова является символом, представляющим объект на этом языке

**Определение 9.4 (Терм).**

1. Предметная константа является термом.
2. Предметная переменная является термом.
3. Если $t_1, \ \ldots, \ t_n$ – термы, $f - n$-местный функциональный символ, то выражение $f(t_1 \ \ldots, \ t_n)$ является термом.
4. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 3 этого определения, не являются термом.

**Определение 9.5 (Атомарная формула).**

1. Если $t_1, \ \ldots, \ t_n$ – термы, $P - n$-местный предикатный символ, то $P(t_1, \ \ldots, \ t_n)$ является атомарной формулой.
2. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п. 1 этого определения не являются атомарной формулой.

**Определение 9.6 (Предикатная формула).**

1. Атомарная формула является предикатной формулой.
2. Если А – предикатная формула, то $\neg A$ является предикатной формулой.
3. Если А, В – предикатные формулы, * – бинарная логическая связка, то $(A * B)$ является предикатной формулой.

4. Если А – предикатная формула, $x$ – предметная переменная, то $\forall xA$ и $\exists xA$ являются предикатными формулами.
5. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 4 этого определения, не являются предикатными формулами.

**Определение 9.7.**

**Кванторным комплексом** называется выражение вида $\forall x$ или $\exists x$, где $x$ – имя предметной переменной.

**Определение 9.8.**

**Областью действия квантора** называется формула, стоящая непосредственно вслед за кванторным комплексом, содержащим это вхождение квантора.

**Пример 9.1.**

$$\forall x \underbrace{(P(x,\ y,\ z) \ \to \ \exists y \underbrace{\forall z \ \underbrace{Q(x,\ y,\ z)}_{3}}_{2})}_{1}$$

Цифрами 1, 2, и 3 отмечены области действия соответсвенно квантора всеобщности по переменной $x$, квантора существования по переменное $y$ и квантора всеобщности по переменной $z$.

**Определение 9.9.**

**Вхождение** предметной переменной в формулу называется **связанным**, если оно находится в кванторном комплексе или в области действия квантора по этой переменной.

**Определение 9.10.**

Вхождения предметных переменных, не являющиеся связанными, называются **свободными**.

**Пример 9.2.**

Переменные, связанные одним и тем же квантором подчёркнуты одинаково.

$$\forall \underline{x}(P(\underline{x},\ y,\ z)) \to \ \exists \underline{\underline{y}}\forall \underline{\underline{z}}Q(\underline{x},\ \underline{\underline{y}},\ \underline{\underline{z}})$$

Первые два вхождения предметных переменных $y$ и $z$ являются свободными.

**Определение 9.11.**

Терм $t$ называется **свободным для подстановки в формулу F вместо свободных вхождений предметной переменной** $x$, если $t$ не содержит переменных, в области действия кванторов по которым имеется свободное вхождение переменной $x$.

**Определение 9.12.**

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

**Определение 9.13.**

Формула, у которой ни одна переменная не имеет как свободных, так и связанных вхождений, называется **чистой**.

# 10 Интерпретации. Общезначимые и выполнимые формулы, противоречия.

Значение предикатной формулы можно вычислить, проинтерпретировав входящие в неё символы, т.е. задав содержательный смысл предметным константам, функциональным и предикатным символам.

**Определение 10.1.**

Для того, чтобы **задать интерпретацию формулы** достаточно

- задать область интерпретации $D$ – множество констант;
- каждому $n$-местному функциональному символу $f$ поставить в соответсвие конкретную функцию из $D^n$ в $D$.
- каждому $n$-местному предикатному символу $P$ поставить в соотвествие конкретное отношение над $D^n$.

Значение атомарной формулы в заданной интерпретаци на заданном наборе значений входящих в неё свободных переменных вычисляется в соответствии с заданной интерпретацией.

Если вычислены значения формул $A$ и $B$ в заданной интерпретации на заданном наборе значений входящих в них свободных переменных, то значения формул $\neg A$ и $A * B$ вычисляются в соответсвие с таблицами истинности для логических связок $\neg$ и $*$.

Если $x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m$ – список (быть может пустой) всех свободных переменных, входящих в формулу $P(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$, то для вычисления значения формулы $\forall x P(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$ ($\exists x P(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$) на наборе значений $b_1,\ \ldots,\ b_m$ свободных переменных $y_1,\ \ldots,\ y_m$ достаточно вычислить значения $P(a,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$ при $a \in D$. Если при всех значениях $a \in D$ эти формулы истинны, то $\forall x P(x,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$ истинна, в противном случае она ложна (соответсвенно если при всех значениях $a \in D$ эти формулы ложны, то $\exists x P(x,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$ ложна, в противном случае она истнна).

**Следствие 10.1.**

Из способа вычисления значения предикатной формулы следует, что оно зависит только от значений свободных переменных.

**Определение 10.2.**

Формула называется **истинной (ложной)** в заданной интерпретации, если она истинна (ложна) на всех наборах значений из области интерпретации, подставляемых вместо свободных вхождений переменных этой формулы.

**Определение 10.3.** Формула называется **выполнимой** в заданной интерпретации, если она истинна хоть на одном наборе значений из области интерпретации, подставляемых вместо свободных вхождений предметных переменных этой формулы.

**Определение 10.4.**

Формула называется **общезначимой (противоречием)**, если она истинна (ложна) в любой интерпретации.

**Определение 10.5.**

Формула называется **выполнимой**, если она выполнима хоть в одной интерпретации.

То есть формула выполнима, если хоть в одной интерпретации хоть на одном наборе значений свободных переменных из области интерпретации она истинна.

**Определение 10.6.**

Формула $B$ логически следует из формул $A_1, \ \ldots, \ A_n$, если в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных, для которых все формулы $A_1, \ \ldots, \ A_n$ истинны, формула $B$ тоже истинна.

**Обозначение 10.1.** $A_1, \ \ldots, \ A_n \Rightarrow B$

При этом $(A_1, \ \ldots, \ A_n \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A_1 \,\&\ldots\&\, A_n \to B$ общезначима).

**Обозначение 10.2.**

$[P]_t^x$ – результат подстановки терма $t$ в формулу $P$ вместо всех свободных вхождений переменной $x$.

# 11 Смысл формулы с n свободными переменными в заданной интерпретации.

**Определение 11.1** (Высказывание)**.**

**Высказыванием** называется утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Значение предикатной формулы зависит только от значений свободных переменных.

**Определение 11.2** (Замкнутая формула)**.**

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

- замкнутая формула задаёт высказывание
- формула с одной свободной переменной задаёт свойство объектов из $D$
- формула с $n$ свободными переменными задат $n$-местное отношение между объектами из $D$

# 12 Секвенциальное исчисление предикатов. Необходимость соблюдения ограничений на кванторные правила (примеры).

# 13 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления предикатов.

**Теорема 13.1** (Выводимость чистой секвенции).

Чистая секвенция выводима в секвенциальном исчислении предикатов, тогда и только тогда, когда её формульный образ общезначим.

**Следствие 13.1.**

Секвенциальное исчисление предикатов, в котором используются только чистые формулы, полно и непротиворечиво.

# 14 Метод резолюций для исчисления предикатов. Обоснование доказательства следствия A1, ... , An ⇒ B1, ... , Bk.

# 15 Понятие формальной теории. Формальные теории с равенством (примеры). Аксиомы для равенства и аксиомы согласования с равенством.

**Определение 15.1** (Формальная теория).

Для того, чтобы задать **формальную теорию**, достаточно

- задать её сигнатуру $< D,\ F,\ P >$, где

  $D$ – конечное множество констант

  $F$ – конечное множество функциональных символов

  $P$ – конечное множество предикатных символов

- задать собственные аксиомы ФТ (если равенство входит в $P$, то аксиомы для равенства)

- выбрать исчисления, в которых будем строить вывод

**Определение 15.2** (Формальная теория с равенством).

Формальная теория называется **формальной теорией с равенством**, если в ней имеется выделенный двухместный предикат $=$ и выполнимы следующие аксиомы

- $ER \qquad \forall x\ (x = x)$

- $ES \qquad \forall xy\ (x = y \to y = x)$
- $ET \qquad \forall xyz\ (x = y\ \&\ y = z \to x = z)$

**Аксиома 15.1** (Аксиомы согласования с равенством)**.**

- $\forall xy\ (x = y \to (P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
- $\forall xy\ (x = y \to (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

**Пример 15.1** (Примеры формальных теорий с равенством)**.**

- формальная арифметика
- теория групп (равенство элементов)
- геометрия (равенство точек)

# 16 Формальная арифметика (аксиоматическая теория чисел).

- $FA$ – формальная теория в сигнатуре $< 0;\ S,\ +,\ *,\ \wedge;\ =>$
- аксиомы согласования с равенством:
  - $\forall xy\ (x = y\ \to\ S(x) = S(y))$
  - $\forall xya\ (x = y\ \to\ x + a = y + a)$
  - $\forall xya\ (x = y\ \to\ a + x = a + y)$

Аналогично для $*$ и $\wedge$.

- $\forall xyz\ (x = y\ \&\ y = z\ \to\ (x * y) * z = x * (y * z))$
- $\forall xya\ (x = y\ \to\ x * a = y * a)$
- $\forall xya\ (x = y\ \to\ a * x = a * y)$

**Аксиома 16.1** (Собственные аксиомы арифметики)**.**

1. $\forall x\ \neg(S(x) = 0)$
2. Однозначность
   $\forall xy\ (S(x) = S(y)\ \to\ x = y)$
3. Определение сложения
   $\forall x\ (x + 0 = x)$
   $\forall xy\ (x + S(y) = S(x + y))$

4. Определение умножения

   $\forall x\ (x * 0 = 0)$

   $\forall xy\ (x * S(y) = x * y + x)$

5. $\forall x\ (x^0 = S(0))$

   $\forall xy\ x^{S(y)} = x^y * x$

6. Аксиома индукции:

   для всякой формулы $A(x)$ со свободной переменной $x$:

   $A(0)\ \&\ \forall x\ (A(x)\ \rightarrow\ A(S(x)))\ \rightarrow\ \forall x\ A(x)$

# 17 Первая теорема Геделя.

Пусть задан алфавит $\{a_1,\ \ldots,\ a_{p-1}\}$

$\#a_i \stackrel{\text{def}}{=} i$ – номер символа $a_i$

$\#(a_{i_1},\ \ldots,\ a_{i_n}) \stackrel{\text{def}}{=} i_1 \ldots i_n$ – число, записанное цифрами $i_1,\ \ldots,\ i_n$ в $p$-ичной системе счисления.

Т.к. формула в формальной арифметике – это конечный набор символов в фиксированном алфавите, то каждое слово получает номер, по которому формула может быть восстановлена.

Т.к. вывод – конечная последовательность формул, т.е. конечное слово, то каждый вывод имеет номер и по нему однозначно восстанавливается.

Гёдель рассмотрел предикат:

$\vDash (X, \#\varphi)$ – $X$ является номером вывода формулы $\varphi$

Для него доказано, что истинность и выводимость одно и то же.

После этого была рассмотрена формула:

$G(\#\varphi) = \forall X\ (\vDash (X, \#\varphi)\ \rightarrow\ \exists Y\ (Y < X\ \&\ \vDash (Y,\ \#\neg\varphi)))$

Свойство формулы $G(\#\varphi)$. Если $FA$ непротиворечиво, то

- если $\varphi$ выводима, то $G(\#\varphi) =$ Л.
- если $\varphi$ невыводима, то $G(\#\varphi) =$ И.

Формула $G(\#\varphi)$ имеет номер. Обозначим его $\#G$. Рассмотрим формулу $G(\#G)$.

**Теорема 17.1** (Первая теорема Гёделя (три формулировки))**.**

1. Если $FA$ непротиворечива, то она не полна (философская).
2. Если $FA$ непротиворечива, то в ней существует замкнутая формула такая, что невыводима ни она, ни её отрицание.

3. Если $FA$ непротиворечива, то в ней не выводимы ни $G(\#G)$, ни $\neg G(\#G)$.

**Утверждение 17.1.** Если $FA$ непротиворечива, то $\varphi$ выводима тогда и только тогда, когда $G(\#\varphi)$.

# 18 Вторая теорема Геделя.

**Лемма 18.1.**

$FA$ непротиворечива тогда и только тогда, когда в ней выводима формула $S(0) = 0$ (т.е. $1 = 0$)

**Теорема 18.1** (Вторая теорема Гёделя)**.**

1. Если средствами формальной арифметики можно доказать, что она непротиворечива, то она противоречива.
2. Если в формальной арифметике выводима формула $\forall x \neg \vDash (x, \#(S(0) = 0))$, то в ней выводима формула $S(0) = 0$.

# 19 Консервативность расширения формальной арифметики бесконечно большими числами.

# 20 Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Его отсутствие в аксиоматических теориях множеств.

- Наивная теория множеств (Георг Кантор)
  - понятие "множество"является неопределяемым понятием, которое может быть задано в виде $\{x : \varphi(x)\}$ – "множество объектов, удовлетворяющих формуле $\varphi(x)$ некоторого формализованного языка"
  - $M = \{x : \varphi(x)\}$, принадлежность ко множеству определяется эквивалентностью $\forall x\ (x \in M \leftrightarrow \varphi(x))$
- Парадокс Рассела
  - рассмотрим множество $A = \{x : \neg(x \in x)\}$ (множества, которые не содержат себя в качестве элемента) $A \in A$ или $A \notin A$?
  - доказано, что ни то, ни другое не верно
  - $A \in A \leftrightarrow \neg(A \in A)$ – эта формула ложна, значит в наивной теории множеств доказуема ложная формула; можем для всякой формулы доказать и $P$, и $\neg P$, т.е. наивная теория множеств противоречива.
- В теории типов Рассела и Аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля парадокса нет.

21 Теория типов Рассела.

22 Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля

23 Ординальные числа.

24 Конструктивные объекты. Формулы Бэкуса.

25 Примеры математических понятий алгоритма.