

Дебильник по предмету:  
«Математическая логика»  
Четвертый семестр.

Специальность 02.03.03.

Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Преподаватель - Григорьева Татьяна Матвеевна.

Группа 244.

Санкт-Петербург 2020.

Фомина В.В.

Набрано в **Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**

Дата изменения: 20 июня 2020 г. 16:40

## Содержание

|    |  |   |
|----|--|---|
| 1  | Пропозициональные формулы. Таблицы истинности. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии и противоречия.   | 4 |
| 2  | Теоремы о представимости пропозициональной формулы с помощью формул, содержащих только три, две или одну логическую связку.  | 4 |
| 3  | Теоремы о ДНФ и КНФ. Полином Жегалкина.  | 4 |
| 4  | Понятия исчисления и формальной теории. Вывод, выводимая формула, полнота и непротиворечивость. Допустимое правило.  | 4 |
| 5  | Секвенциальное исчисление высказываний. Допустимые правила секвенциального исчисления высказываний.  | 4 |
| 6  | Теоремы о семантическом обосновании секвенциального исчисления высказываний.   | 4 |
| 7  | Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний.  | 4 |
| 8  | Метод резолюций для исчисления высказываний. Обоснование доказательства следования $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_k$ .   | 4 |
| 9  | Предикатные формулы: терм, атомарная формула, предикатная формула. Область действия квантора, свободные и связанные вхождения предметной переменной в формулу. Терм, свободный для подстановки в формулу вместо свободных вхождений предметной переменной. | 5 |
| 10 | Интерпретации. Общезначимые и выполнимые формулы, противоречия.  | 7 |
| 11 | Смысл формулы с $n$ свободными переменными в заданной интерпретации.   | 9 |
| 12 | Секвенциальное исчисление предикатов. Необходимость соблюдения ограничений на кванторные правила (примеры).  | 9 |
| 13 | Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления предикатов.  | 9 |
| 14 | Метод резолюций для исчисления предикатов. Обоснование доказательства следствия $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_k$ .  | 9 |

|    |   |   |
|----|---|---|
| 15 | Понятие формальной теории. Формальные теории с равенством (примеры). Аксиомы для равенства и аксиомы согласования с равенством. | 9 |
| 16 | Формальная арифметика (аксиоматическая теория чисел).   | 9 |
| 17 | Первая теорема Геделя.  | 9 |
| 18 | Вторая теорема Геделя.  | 9 |
| 19 | Консервативность расширения формальной арифметики бесконечно большими числами.  | 9 |
| 20 | Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Его отсутствие в аксиоматических теориях множеств.                                  | 9 |
| 21 | Теория типов Рассела.   | 9 |
| 22 | Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля.   | 9 |
| 23 | Ординальные числа.  | 9 |
| 24 | Конструктивные объекты. Формулы Бэкуса.   | 9 |
| 25 | Примеры математических понятий алгоритма.   | 9 |

- 1 Пропозициональные формулы. Таблицы истинности. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии и противоречия.
- 2 Теоремы о представимости пропозициональной формулы с помощью формул, содержащих только три, две или одну логическую связку.
- 3 Теоремы о ДНФ и КНФ. Полином Жегалкина.
- 4 Понятия исчисления и формальной теории. Вывод, выводимая формула, полнота и непротиворечивость. Допустимое правило.
- 5 Секвенциальное исчисление высказываний. Допустимые правила секвенциального исчисления высказываний.
- 6 Теоремы о семантическом обосновании секвенциального исчисления высказываний.
- 7 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний.
- 8 Метод резолюций для исчисления высказываний. Обоснование доказательства следования  $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_k$ .

## 9 Предикатные формулы: терм, атомарная формула, предикатная формула. Область действия квантора, свободные и связанные вхождения предметной переменной в формулу. Терм, свободный для подстановки в формулу вместо свободных вхождений предметной переменной.

**Определение 9.1.**

**Предметная константа** - имя предмета.

**Определение 9.2.**

**Предметная переменная** - переменная, которая в качестве своих значений может принимать предметные константы.

**Определение 9.3.**

Символ  $F$  в формальном языке является **функциональным символом**, если для любого символа, представляющий объект в языке,  $F(X)$  снова является символом, представляющим объект на этом языке

**Определение 9.4 (Терм).**

1. Предметная константа является термом.
2. Предметная переменная является термом.
3. Если  $t_1, \dots, t_n$  – термы,  $f$  –  $n$ -местный функциональный символ, то выражение  $f(t_1 \dots, t_n)$  является термом.
4. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 3 этого определения, не являются термом.

**Определение 9.5 (Атомарная формула).**

1. Если  $t_1, \dots, t_n$  – термы,  $P$  –  $n$ -местный предикатный символ, то  $P(t_1, \dots, t_n)$  является атомарной формулой.
2. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п. 1 этого определения не являются атомарной формулой.

**Определение 9.6 (Предикатная формула).**

1. Атомарная формула является предикатной формулой.
2. Если  $A$  – предикатная формула, то  $\neg A$  является предикатной формулой.
3. Если  $A, B$  – предикатные формулы,  $*$  – бинарная логическая связка, то  $(A * B)$  является предикатной формулой.

4. Если  $A$  – предикатная формула,  $x$  – предметная переменная, то  $\forall xA$  и  $\exists xA$  являются предикатными формулами.
5. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 4 этого определения, не являются предикатными формулами.

### Определение 9.7.

**Кванторным комплексом** называется выражение вида  $\forall x$  или  $\exists x$ , где  $x$  – имя предметной переменной.

### Определение 9.8.

**Областью действия квантора** называется формула, стоящая непосредственно вслед за кванторным комплексом, содержащим это вхождение квантора.

### Пример 9.1.

$$\underbrace{\forall x (P(x, y, z) \rightarrow \underbrace{\underbrace{\exists y \forall z Q(x, y, z)}_2}_{3})}_1$$

Цифрами 1, 2, и 3 отмечены области действия соответственно квантора всеобщности по переменной  $x$ , квантора существования по переменной  $y$  и квантора всеобщности по переменной  $z$ .

### Определение 9.9.

**Вхождение** предметной переменной в формулу называется **связанным**, если оно находится в кванторном комплексе или в области действия квантора по этой переменной.

### Определение 9.10.

Вхождения предметных переменных, не являющиеся связанными, называются **свободными**.

### Пример 9.2.

Переменные, связанные одним и тем же квантором подчеркнуты одинаково.

$$\forall \underline{x} (P(\underline{x}, y, z)) \rightarrow \exists \underline{y} \forall \underline{z} Q(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$$

Первые два вхождения предметных переменных  $y$  и  $z$  являются свободными.

### Определение 9.11.

Терм  $t$  называется **свободным для подстановки в формулу  $F$  вместо свободных вхождений предметной переменной  $x$** , если  $t$  не содержит переменных, в области действия кванторов по которым имеется свободное вхождение переменной  $x$ .

### Определение 9.12.

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

### Определение 9.13.

Формула, у которой ни одна переменная не имеет как свободных, так и связанных вхождений, называется **чистой**.

## 10 Интерпретации. Общезначимые и выполнимые формулы, противоречия.

Значение предикатной формулы можно вычислить, проинтерпретировав входящие в неё символы, т.е. задав содержательный смысл предметным константам, функциональным и предикатным символам.

### Определение 10.1.

Для того, чтобы **задать интерпретацию формулы** достаточно

- задать область интерпретации  $D$  – множество констант;
- каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f$  поставить в соответствие конкретную функцию из  $D^n$  в  $D$ .
- каждому  $n$ -местному предикатному символу  $P$  поставить в соответствие конкретное отношение над  $D^n$ .





- 11 Смысл формулы с  $n$  свободными переменными в заданной интерпретации.
- 12 Секвенциальное исчисление предикатов. Необходимость соблюдения ограничений на кванторные правила (примеры).
- 13 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления предикатов.
- 14 Метод резолюций для исчисления предикатов. Обоснование доказательства следствия  $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_k$ .
- 15 Понятие формальной теории. Формальные теории с равенством (примеры). Аксиомы для равенства и аксиомы согласования с равенством.
- 16 Формальная арифметика (аксиоматическая теория чисел).
- 17 Первая теорема Геделя.
- 18 Вторая теорема Геделя.
- 19 Консервативность расширения формальной арифметики бесконечно большими числами.
- 20 Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Его отсутствие в аксиоматических теориях множеств.
- 21 Теория типов Рассела.
- 22 Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля.
- 23 Ординальные числа.
- 24 Конструктивные объекты. Формулы Бэкуса.
- 25 Примеры математических понятий алгоритма.