Дебильник по предмету:
«Математическая логика»
Четвертый семестр.

Специальность 02.03.03.
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.
Преподаватель - Григорьева Татьяна Матвеевна.
Группа 244.
Санкт-Петербург 2020.

Фомина В.В.

Набрано в LaTeX

Дата изменения: 20 июня 2020 г. 18:32

Содержание

1 Пропозициональные формулы. Таблицы истинности. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии и противоречия.

2 Теоремы о представимости пропозициональной формулы с помощью формул, содержащих только три, две или одну логическую связку.

3 Теоремы о ДНФ и КНФ. Полином Жегалкина.

4 Понятия исчисления и формальной теории. Вывод, выводимая формула, полнота и непротиворечивость. Допустимое правило.

5 Секвенциальное исчисление высказываний. Допустимые правила секвенциального исчисления высказываний.

6 Теоремы о семантическом обосновании секвенциального исчисления высказываний.

7 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний.

8 Метод резолюций для исчисления высказываний. Обоснование доказательства следования A1, ... , An $\Rightarrow$ B1, ... , Bk.

9 Предикатные формулы: терм, атомарная формула, предикатная формула. Область действия квантора, свободные и связанные вхождения предметной переменной в формулу. Терм, свободный для подстановки в формулу вместо свободных вхождений предметной переменной.

Определение 9.1.

Предметная константа - имя предмета.

Определение 9.2.

Предметная переменная - переменная, которая в качестве своих значений может принимать предметные константы.

Определение 9.3.

Символ F в формальном языке является **функциональным символом**, если для любого символа , представляющий объект в языке, $F(X)$ снова является символом, представляющим объект на этом языке

Определение 9.4 (Терм).

1. Предметная константа является термом.
2. Предметная переменная является термом.
3. Если $t_1, \ \ldots, \ t_n$ – термы, $f - n$-местный функциональный символ, то выражение $f(t_1 \ \ldots, \ t_n)$ является термом.
4. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 3 этого определения, не являются термом.

Определение 9.5 (Атомарная формула).

1. Если $t_1, \ \ldots, \ t_n$ – термы, $P{-}n$-местный предикатный символ, то $P(t_1, \ \ldots, \ t_n)$ является атомарной формулой.
2. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п. 1 этого определения не являются атомарной формулой.

Определение 9.6 (Предикатная формула).

1. Атомарная формула является предикатной формулой.
2. Если A – предикатная формула, то $\neg A$ является предикатной формулой.
3. Если A, B – предикатные формулы, * – бинарная логическая связка, то $(A * B)$ является предикатной формулой.

4. Если A – предикатная формула, x – предметная переменная, то $\forall x A$ и $\exists x A$ являются предикатными формулами.

5. Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 4 этого определения, не являются предикатными формулами.

Определение 9.7.

Кванторным комплексом называется выражение вида $\forall x$ или $\exists x$, где x – имя предметной переменной.

Определение 9.8.

Областью действия квантора называется формула, стоящая непосредственно вслед за кванторным комплексом, содержащим это вхождение квантора.

Пример 9.1.

$$\forall x \underbrace{\left(P(x,\ y,\ z)\ \to\ \exists y \underbrace{\forall z\ \underbrace{Q(x,\ y,\ z)}_{3}}_{2}\right)}_{1}$$

Цифрами 1, 2, и 3 отмечены области действия соответсвенно квантора всеобщности по переменной x, квантора существования по переменное y и квантора всеобщности по переменной z.

Определение 9.9.

Вхождение предметной переменной в формулу называется **связанным**, если оно находится в кванторном комплексе или в области действия квантора по этой переменной.

Определение 9.10.

Вхождения предметных переменных, не являющиеся связанными, называются **свободными**.

Пример 9.2.

Переменные, связанные одним и тем же квантором подчёркнуты одинаково.

$$\forall \underline{x}(P(\underline{x},\ y,\ z)) \to\ \exists \underline{\underline{y}} \forall \underline{\underline{\underline{z}}} Q(\underline{x},\ \underline{\underline{y}},\ \underline{\underline{\underline{z}}})$$

Первые два вхождения предметных переменных y и z являются свободными.

Определение 9.11.

Терм t называется **свободным для подстанвки в формулу F вместо свободных вхождений предметной переменной** x, если t не содержит переменных, в области действия кванторов по которым имеется свободное вхождение переменной x.

Определение 9.12.

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

Определение 9.13.

Формула, у которой ни одна переменная не имеет как свободных, так и связанных вхождений, называется **чистой**.

10 Интерпретации. Общезначимые и выполнимые формулы, противоречия.

Значение предикатной формулы можно вычислить, проинтерпретировав входящие в неё символы, т.е. задав содержательный смысл предметным константам, функциональным и предикатным символам.

Определение 10.1.

Для того, чтобы **задать интерпретацию формулы** достаточно

- задать область интерпретации D – множество констант;
- каждому n-местному функциональному символу f поставить в соответсвие конкретную функцию из D^n в D.
- каждому n-местному предикатному символу P поставить в соотвествие конкретное отношение над D^n.

Значение атомарной формулы в заданной интерпретаци на заданном наборе значений входящих в неё свободных переменных вычисляется в соответствии с заданной интерпретацией.

Если вычислены значения формул A и B в заданной интерпретации на заданном наборе значений входящих в них свободных переменных, то значения формул $\neg A$ и $A * B$ вычисляются в соответсвие с таблицами истинности для логических связок $\neg$ и $*$.

Если $x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m$ – список (быть может пустой) всех свободных переменных, входящих в формулу $P(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$, то для вычисления значения формулы $\forall x P(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$ ($\exists x P(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$) на наборе значений $b_1,\ \ldots,\ b_m$ свободных переменных $y_1,\ \ldots,\ y_m$ достаточно вычислить значения $P(a,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$ при $a \in D$. Если при всех значениях $a \in D$ эти формулы истинны, то $\forall x P(x,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$ истинна, в противном случае она ложна (соответсвенно если при всех значениях $a \in D$ эти формулы ложны, то $\exists x P(x,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$ ложна, в противном случае она истнна).

Следствие 10.1.

Из способа вычисления значения предикатной формулы следует, что оно зависит только от значений свободных переменных.

Определение 10.2.

Формула называется **истинной (ложной)** в заданной интерпретации, если она истинна (ложна) на всех наборах значений из области интерпретации, подставляемых вместо свободных вхождений переменных этой формулы.

Определение 10.3. Формула называется **выполнимой** в заданной интерпретации, если она истинна хоть на одном наборе значений из области интерпретации, подставляемых вместо свободных вхождений предметных переменных этой формулы.

Определение 10.4.

Формула называется **общезначимой (противоречием)**, если она истинна (ложна) в любой интерпретации.

Определение 10.5.

Формула называется **выполнимой**, если она выполнима хоть в одной интерпретации.

То есть формула выполнима, если хоть в одной интерпретации хоть на одном наборе значений свободных переменных из области интерпретации она истинна.

Определение 10.6.

Формула B логически следует из формул $A_1, \ \ldots, \ A_n$, если в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных, для которых все формулы $A_1, \ \ldots, \ A_n$ истинны, формула B тоже истинна.

Обозначение 10.0.1. $A_1, \ \ldots, \ A_n \Rightarrow B$

При этом $(A_1, \ \ldots, \ A_n \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A_1 \,\&\ldots\&\, A_n \to B$ общезначима).

Обозначение 10.0.2.

$[P]^x_t$ – результат подстановки терма t в формулу P вместо всех свободных вхождений переменной x.

11 Смысл формулы с n свободными переменными в заданной интерпретации.

Определение 11.1 (Высказывание)**.**

Высказыванием называется утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно.

Значение предикатной формулы зависит только от значений свободных переменных.

Определение 11.2 (Замкнутая формула)**.**

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

- замкнутая формула задаёт высказывание
- формула с одной свободной переменной задаёт свойство объектов из D
- формула с n свободными переменными задат n-местное отношение между объектами из D

12 Секвенциальное исчисление предикатов. Необходимость соблюдения ограничений на кванторные правила (примеры).

13 Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления предикатов.

Теорема 13.1 (Выводимость чистой секвенции).

Чистая секвенция выводима в секвенциальном исчислении предикатов, тогда и только тогда, когда её формульный образ общезначим.

Следствие 13.1.

Секвенциальное исчисление предикатов, в котором используются только чистые формулы, полно и непротиворечиво.

14 Метод резолюций для исчисления предикатов. Обоснование доказательства следствия A1, ... , An ⇒ B1, ... , Bk.

15 Понятие формальной теории. Формальные теории с равенством (примеры). Аксиомы для равенства и аксиомы согласования с равенством.

Определение 15.1 (Формальная теория).

Для того, чтобы задать **формальную теорию**, достаточно

- задать её сигнатуру $< D,\ F,\ P >$, где

  D – конечное множество констант

  F – конечное множество функциональных символов

  P – конечное множество предикатных символов

- задать собственные аксиомы ФТ (если равенство входит в P, то аксиомы для равенства)

- выбрать исчисления, в которых будем строить вывод

Определение 15.2 (Формальная теория с равенством).

Формальная теория называется **формальной теорией с равенством**, если в ней имеется выделенный двухместный предикат $=$ и для любой формулы A этой теории выводимы

16 Формальная арифметика (аксиоматическая теория чисел).

17 Первая теорема Геделя.

18 Вторая теорема Геделя.

19 Консервативность расширения формальной арифметики бесконечно большими числами.

20 Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Его отсутствие в аксиоматических теориях множеств.

21 Теория типов Рассела.

22 Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля

23 Ординальные числа.

24 Конструктивные объекты. Формулы Бэкуса.

25 Примеры математических понятий алгоритма.