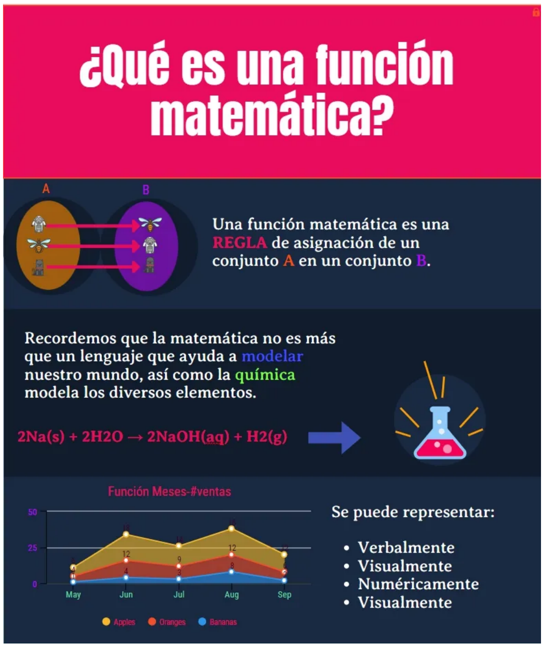
Funciones

> Una función es una regla o expresión de correspondencia dada entre los elementos de dos conjuntos (x,y), donde cada parte del conjunto x está relacionada con un único elemento del conjunto y. Una función es como una máquina, entra un elemento x (variable independiente) y sale un elemento y (variable dependiente), que es el resultado final de reemplazar las variables y resolver la ecuación:

```
y = f(x)
```



Concepto fundamental de las funciones:

- Obtener un valor que va a variar de otros factores

Ejemplo:

- En Uber, el costo del trayecto depende de la distancia recorrida.
- En este caso lo que regresa la función es el costo del trayecto.

Formas de representar una función:

- Verbalmente
  - Ejemplo: “El precio aumento en 2 dólares por cada kilómetro recorrido”
- Numéricamente
  - Puede ser con una tabla de valores donde tenemos un valor x y un valor f(x) que le corresponde
- Visualmente
  - La gráfica en un plano cartesiano, una forma muy común de comprobar si es una función de esta manera, es trazar una línea sobre la función y si pasa a tocar más de 1 punto, entonces no es una función.
- Algebraicamente
  - Ejemplo: función de la parábola f(x)=x^2

Tipos de variables

Dominio y rango de una función

- **El dominio** de una funciones son todos los valores que pueden tomar x y que están definidas en F(x). Son los valores que se admiten en x
- **El rango:** son todos los resultados que nos va a regresar la función a lo largo de las x que nosotros ingresamos

Símbolos matemáticos

Simbolos de igualdad o relación:

- = igual, representa que dos objetos son iguales
- '> mayor qué, indica que un número es mayor que otro
- '< menor qué, indica que un número es menor que otro
- ≥ mayor o igual qué, se usa para establecer intervalos
- ≤ menor o igual qué, se usa para establecer intervalos
- ≠ diferente qué, indica que no son iguales.
- ≈ aproximación, indica que un número es aproximadamente. →> mucho mayor, indica que un número es mucho mucho mayor a otro
- << mucho menor, indica que un número es mucho mucho menor a otro
- ∞ Infinito, indica un número muy grande
- ∞+ infinito positivo.
- ∞- infinito negativo.

Símbolos de operaciones acumulativas, normalmente se encuentran en series geométricas o de expansión.

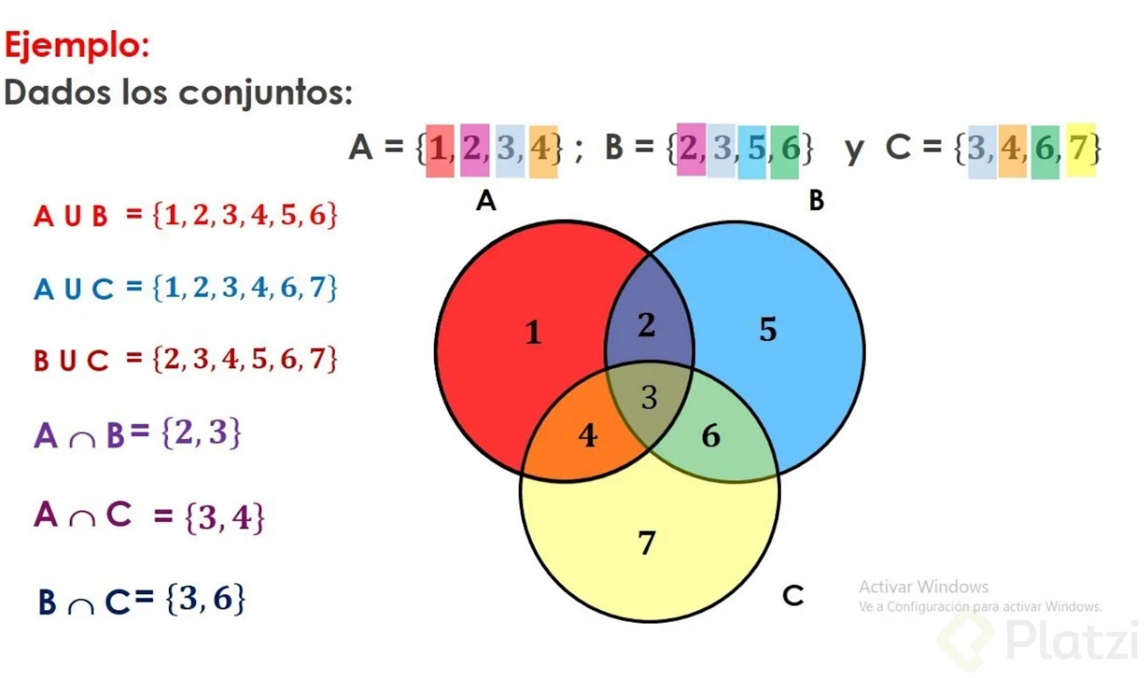
- ∑ Sigma, indica sumatoria.
- ∏ Producto, tiene un límite inferior y un superior al igual que la sumatoria.

Conjuntos

1. **Ω** (omega).
2. La unión es cuando todos los elementos de los conjuntos se unen. ∪ (unión).
3. Intercesión son todos aquellos números que se comparten de los dos conjuntos. ∩ (intercesión).
4. ∈ (pertenece)

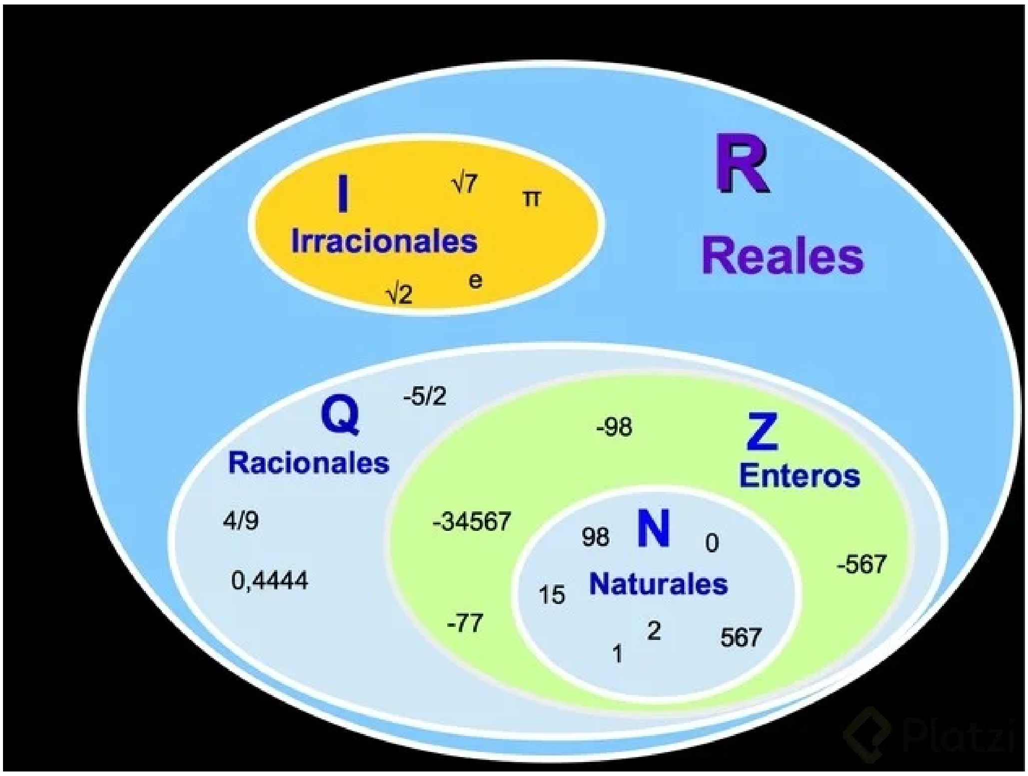
- Los conjuntos tienden a escribirse con mayúscula.

1. *∈/ ** (no pertenece)
2. **ø** (conjunto vacío). también se puede encontrar cómo dos llaves vacías ({}).

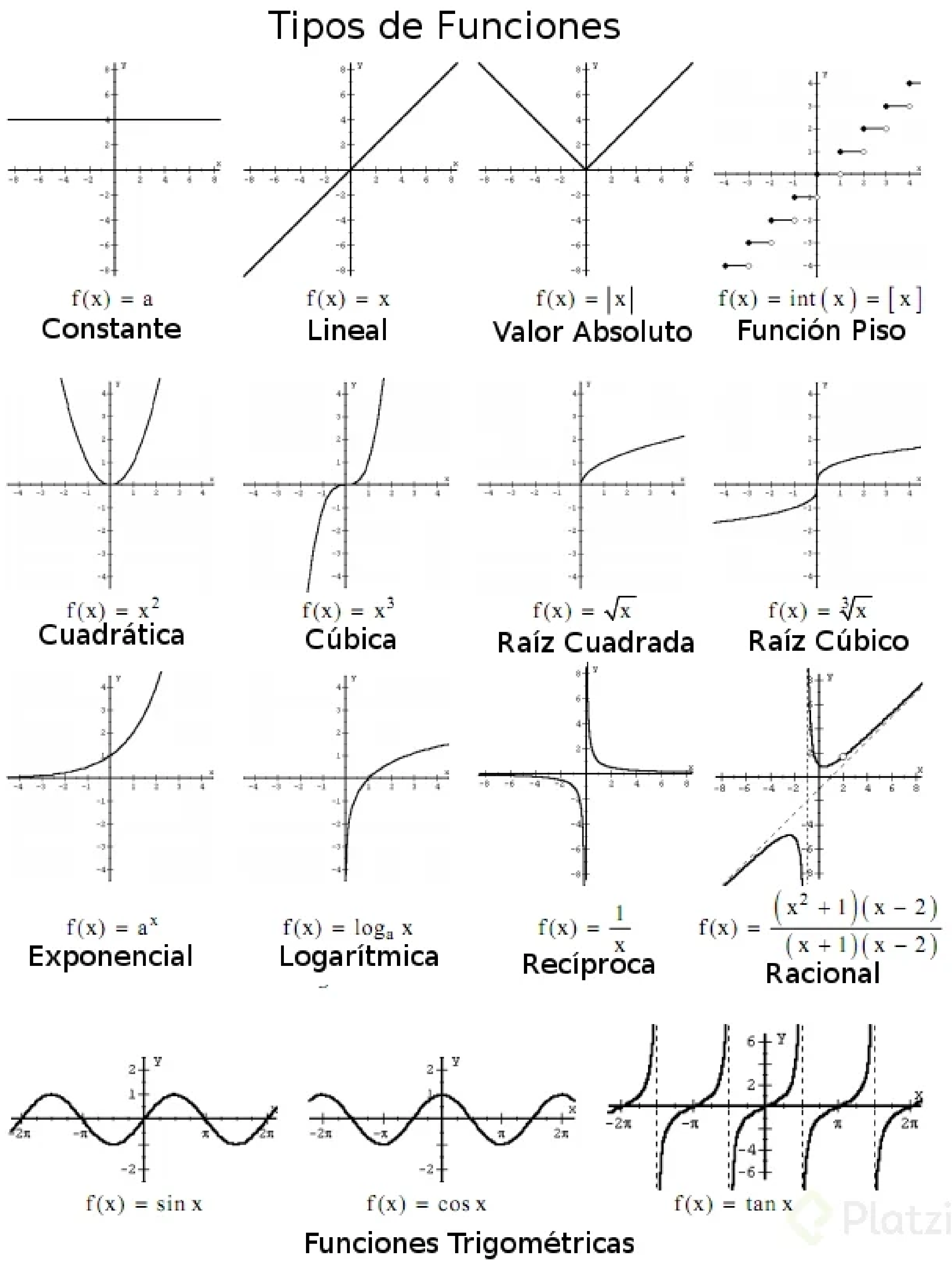


Conjuntos de números

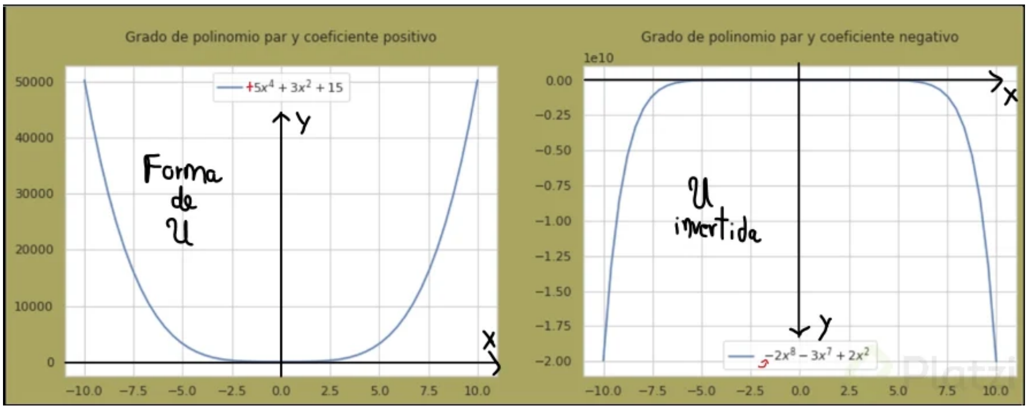
1. Números naturales **N**
2. Tal que (**:**) o se puede poner también (**|**)
3. Diferente o desigual (**≠**)
4. Números enteros (**Z**)
5. Números racionales (**Q**)
6. Números irracionales (**I**). Se pueden definir como todos aquellos números que tienen una expansión decimal y que no se pueden escribir de forma racional.
7. Números reales (**R**). básicamente la unión de todos (N, Z, Q, I, R)

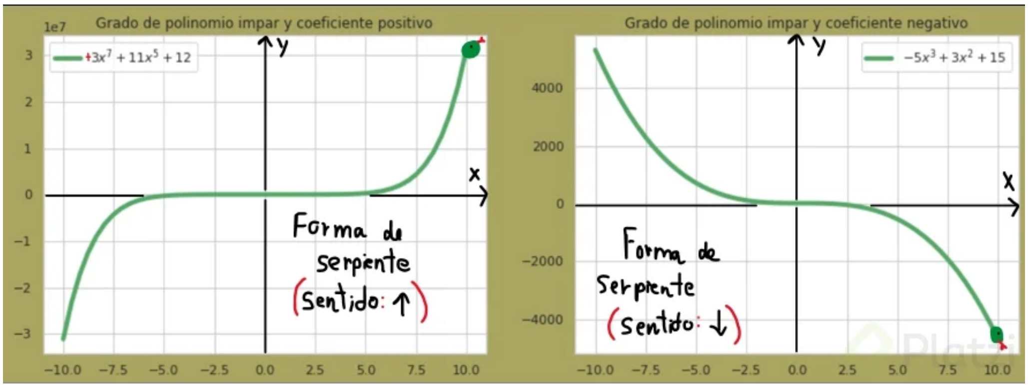


Formas de las gráficas según el tipo de función



Funciones polinómicas





Funciones trancendentes

> Las Funciones Trascendentes son aquellas funciones que NO están formadas por expresiones algebraicas.

Es decir, **++NO++** están formadas por variables y números que están relacionados por operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación* y radicación*) como pueden ser los polinomios.

Función Exponencial $f(x) = a^x$

Función Logarítmica $f(x) = \log_b x$

Funciones Trigonométricas
$$\begin{cases} f(x) = sen \quad x \\ f(x) = tag \quad x \\ f(x) = A\cos(Bx + C) \end{cases}$$

Funciones seccionadas

- Las funciones seccionadas son funciones que se comportan de manera diferente dependiendo de los trozos o secciones
- Las funciones seccionadas se definen H (x)
- enumerate es una función en Python que nos permite tener el índice y el elemento de un arreglo
- Existen muchas funciones seccionadas
- La función real valor absoluto se define sobre el conjunto de todos los números reales asignando a cada número real su respectivo valor absoluto

Hay una función muy interesante llamada ***"sigmoide"***. La función que representa una sigmoide es la siguiente:

> f(x) = (1 + e^(-x))^(-1)

Donde e es el número de Euler.

Esta función tiene propiedades muy interesantes. Por ejemplo, se puede demostrar que su derivada es igual a:

> f′(x) = f(x)*[1 - f(x)]

Pero lo que quiero resaltar es su comportamiento, el cual es muy similar al de la función escalón de Heaviside, ya que solo toma valores entre 0 y 1, es decir, su rango es (0, 1).

Esta función es muy usada cuando se trabaja con redes neuronales.

Si quieren implementar la función sigmoide en Python, aquí les dejo el código:

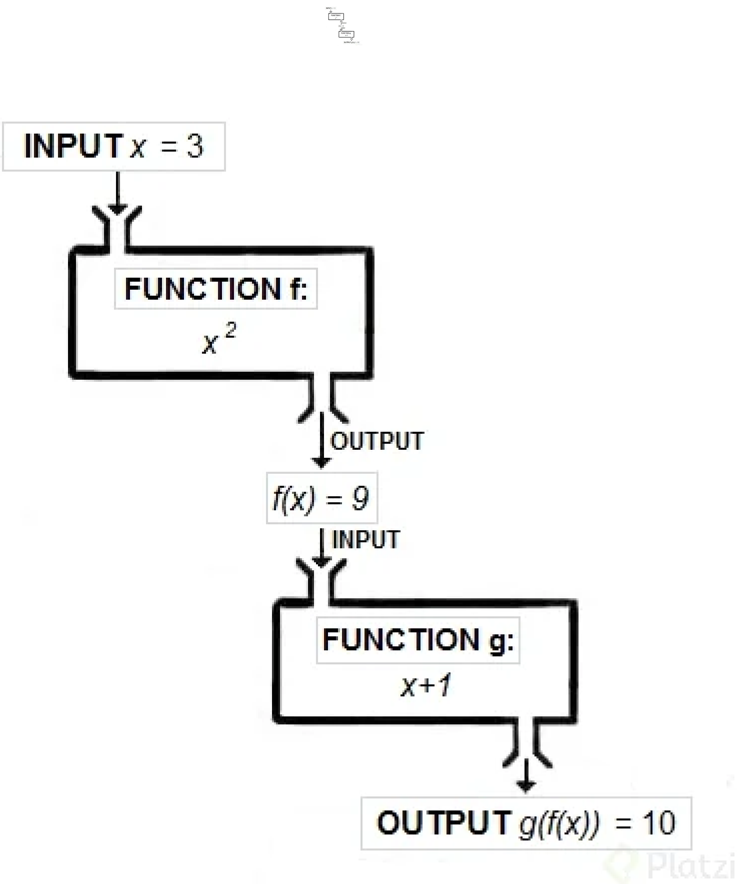
```
import numpy as np

def f(x):
    return (1 + np.exp(-x))**(-1)
```

Funciones compuestas

una **función compuesta** se obtiene cuando se pasa como argumento de la función principal el valor de otra función, en este ejemplo tenemos:

- f(x)=x**2
- g(x)=x+1 se busca el valor de ***g(f(x))*** siendo x=3



Funciones reales

Se les llama funciones reales porque tanto su dominio como el codominio (recuerda que al codominio también se le puede llamar rango o imagen) están contenidos en el conjunto de los números reales. Es decir, el conjunto que contiene a los números racionales e irracionales. En otras palabras cualquier número que se te ocurra que no sea imaginario. Todos los ejemplos que veamos a lo largo de este curso serán sobre números reales.

Una vez que ya tenemos claro cuáles son las funciones reales y por qué se les llama así, pasemos a describir algunas de sus características.

Función par

Una función es par si cumple la siguiente relación a lo largo de su dominio:

$$f(-x) = f(x)$$

Si lo notaste, esta relación nos dice que una función es par si es simétrica al eje vertical (eje Y). Por ejemplo, una parábola es una función es par.

Función impar

Una función es impar si cumple la siguiente relación a lo largo de su dominio:

$$f(-x) = -f(x)$$

Esta relación nos indica que una función es impar si es simétrica al eje horizontal (eje X). Por ejemplo, una función cúbica es impar.

Las dos características o propiedades anteriores están muy relacionadas con la simetría. Puedes comprobarlas tú mismo con diferentes funciones e incluso hacer una pequeña rutina en Python que compruebe si una función es par o impar.

Función acotada

Una función es acotada si su codominio (también conocido como rango o imagen) se encuentra entre dos valores, es decir, está acotado. Esta definición se define como que hay un número m que para todo valor del dominio de la función se cumple que:

$$-m \leq f(x) \leq m$$

Por ejemplo, la función seno o coseno están acotadas en el intervalo [-1, 1] dentro de su co-dominio.

Funciones monótonas

Estas funciones son útiles de reconocer o analizar debido a que nos permiten saber si una función crece o decrece en alguno de sus intervalos. Que algo sea monótono significa que no tiene variaciones. Entonces las funciones monótonas son aquellas que dentro de un intervalo **I**, perteneciente a los números reales, cumple alguna de estas propiedades:

1. La función es monótona y estrictamente creciente:

$$\text{si para todo } x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

No te preocupes si es un poco difícil de leer esta definición que para eso estoy aquí para explicarte. La forma correcta de leer esto es *"si para todo x1 y x2 que pertenecen al intervalo I, tal que x1 sea menor a x2, si y solo si f(x1) sea menor a f(x2)"*. En palabras mucho más sencillas, lo que nos dice esta definición es que **x1** siempre tiene que ser menor que **x2** en nuestro intervalo **I**, y que al evaluar **x2** en la función el resultado de esto siempre será mayor que si evaluamos la función en **x1**. Para las siguientes tres definiciones restantes no cambia mucho la forma en la que se interpretan.

2. La función es monótona y estrictamente decreciente:

$$\text{si para todo } x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3. La función es monótona y creciente:

$$\text{si para todo } x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

4. La función es monótona y decreciente:

$$\text{si para todo } x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funciones periódicas

Las funciones periódicas son aquellas que se repiten cada cierto periodo, este periodo se denomina con la letra **T**. La relación que debe cumplir la función para ser periódica es la siguiente.

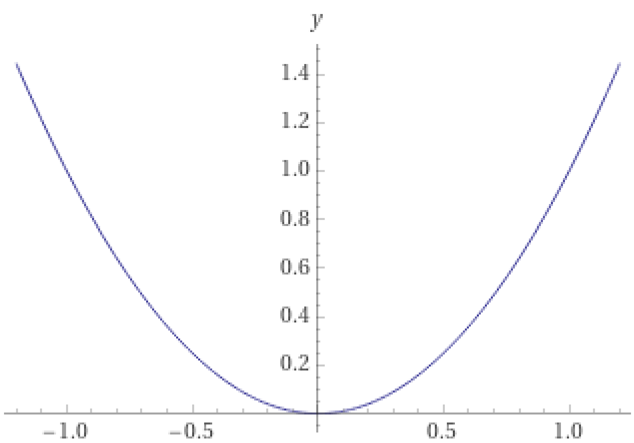
$$f(x) = f(x + T), T \neq 0$$

Por ejemplo, la función seno y coseno son funciones periódicas con un periodo T = 2π. Es decir que si nosotros calculamos f(x) y calculamos f(x + 2π) en la función seno el valor que nos den ambas expresiones es el mismo.

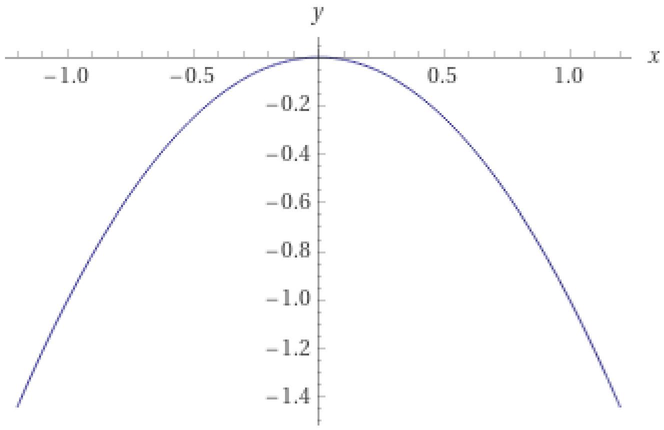
Funciones cóncavas y convexas

La forma de demostrar la concavidad de una función se puede hacer a través del análisis de derivadas consecutivas, pero aún no llegamos a eso, así que no te preocupes. A continuación, te dejo una forma súper intuitiva de ver si una función es cóncava o convexa.

Se dice que una función dentro de un intervalo **es convexa** si la función "abre hacia arriba". Es decir si se ve la siguiente manera:



Ahora, ¿qué sería una función cóncava? Pues así es, lo contrario de una convexa. Se dice que una función dentro de un intervalo **es concava** si la función "abre hacia abajo". Es decir si se ve la siguiente manera:



Como ves, identificar si una función es cóncava o convexa a través de su gráfica es muy sencillo. Pero si quieres enfrentar un reto, te dejo que cuando sepas que es una derivada regreses a esta clase y busques la forma de comprobar si una función es cóncava o convexa de forma analítica. Como pista, se hace a través del análisis de la segunda derivada.