Universidad de San Andrés

Práctica F: Áreas y TFC

Áreas

1. Calcular

   (a) El área limitada por el gráfico de $f(x) = x - 2$, la recta $x = 4$, el eje x y el eje y.

   (b) El área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$.

   (c) El área limitada por el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x para $-1 \leq x \leq 3$.

2. En cada uno de los siguientes casos, calcular el área de la región acotada encerrada por el gráfico de f y el eje x

   (a) $f(x) = x^2 - 6x$

   (b) $f(x) = 3(x^3 - x)$

3. Calcular, en cada caso, el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo indicado.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ en $[-1, 3]$

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ en $[-2, 1]$

   (c) $f(x) = \ln(x)$ en $[1, e]$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ en $[0, 4]$

4. En cada caso, calcular el área de la región encerrada por las curvas (sugerencia: hacer un gráfico aproximado que ayude a identificar el área pedida).

   (a) $y = x^2;\ y = 2x - x^2$

   (b) $y = x^{1/3};\ x = 0;\ y = 1$

   (c) $y = x^3 - 12x;\ y = x^2$

   (d) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ y = 0$

5. Calcular, en cada caso, el área encerrada entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, en el intervalo indicado.

   (a) $f(x) = e^x, \qquad g(x) = e^{-x}$ en $[-1, 1]$

   (b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ en $[0, 1]$

   (c) $f(x) = \dfrac{3x-3}{x+3}, \quad g(x) = (x-1)(2x+1)$ en $[-1, 1]$

6. En cada uno de los siguientes casos, calcular el área de la región acotada encerrada por los gráficos de f y g.

   (a) $f(x) = 8 - x^2, \quad g(x) = 2x$

   (b) $f(x) = (x+2)^2,\ g(x) = \sqrt{8(x+2)}$

   (c) $f(x) = \dfrac{4x}{1+4x^2},\ g(x) = 2x$

   (d) $f(x) = xe^x, \qquad g(x) = xe^{x^2}$

7. Sean $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ y $g(x) = -2x - 3$. Hallar el área de la región acotada por los gráficos de f y g y la recta $x = -3$.

8. Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 e^{3x+1}$ y $g(x) = 4e^{3x+1}$

9. Calcular el área de la región determinada por las restricciones $y \geq \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$; $y \leq \dfrac{x}{3} + 1$; $y \leq -x + 5$.

10. Considerar la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x+2}$, el eje x entre las rectas $x = 1$ y $x = a$ (con $0 < a < 1$). Hallar el valor de a para que el área de la región sea $\dfrac{37}{24}$.

11. Si el área comprendida entre la parábola $y = 4x^2$ (con $x \geq 0$) y una recta que pasa por el origen es 18, ¿cuál es la pendiente de dicha recta?

12. Una compañía determina que el ingreso marginal (en dólares por día) está dado por $MR(t) = 1 - \frac{1}{t+1}$ mientras que sus costos marginales (en dólares por día) están dados por $MC(t) = 80 - 0.2t$. Hallar la ganancia total de los primeros 8 días.

13. Una población sufre una epidemia de gripe, siendo $N(t)$ el número de personas enfermas en t días. Un estudio arroja que la gripe se expande a razón de $10t - \frac{108}{t^2}$ personas por día. Al iniciarse la epidemia, la población enferma es $N(1) = 120$. Hallar cuántos enfermos habrá a los 12 días si no se controla la epidemia.

14. En 2010 se publica una estimación para la tasa mundial de consumo de petróleo en tiempo de t años, dada por $2.4te^{0.03t}$ miles de millones de barriles anuales. Hallar la cantidad de petróloeo consumido entre 2010 y 2020.

Teorema fundamental del cálculo

15. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los dominios indicados:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \ln(t^2+1)\, dt$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin(x)} \frac{y}{2+y^3}\, dy$

(d) $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{u-1}{1+u}\, du, \quad x \geq 0$

(e) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \tan^2(t)\cos(t)\, dt, \ x \in (0,1)$

(f) $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{x^3} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt, \ x > 0$

16. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})dt}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\int_0^{2\ln(x)} \sqrt{t^2+1}dt}{3\ln(x)}$ (c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\int_2^{\sqrt{x}} 4e^{-t^2+4}dt - x}{(x-4)^2}$

17. Sea $f\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_0^{\sin(x)} \dfrac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Probar que f es creciente en $(0, \frac{\pi}{2})$.

18. Hallar el dominio, intervalos de crecimiento y extremos de las siguientes funciones

    (a) $F(x) = \int_0^{x} e^{-t^2} t^2 (t-1)(t-4)\, dt$

    (b) $F(x) = \int_1^{e^{x-3}} \ln^2(t) - 2\ln(t)\, dt$

    (c) $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{7-t^2} - e^{t^2+1}\, dt$

19. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 3 + \int_0^{x} \dfrac{1+\sin(t)}{2+t^2}\, dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

20. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 de F alrededor de $x_0 = 0$.

21. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que su recta tangente en $x = 4$ es $y = \frac{1}{4}x - 3$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 2$ de $f(x) = 3 + \int_4^{x^2} g(t)\, dt$.