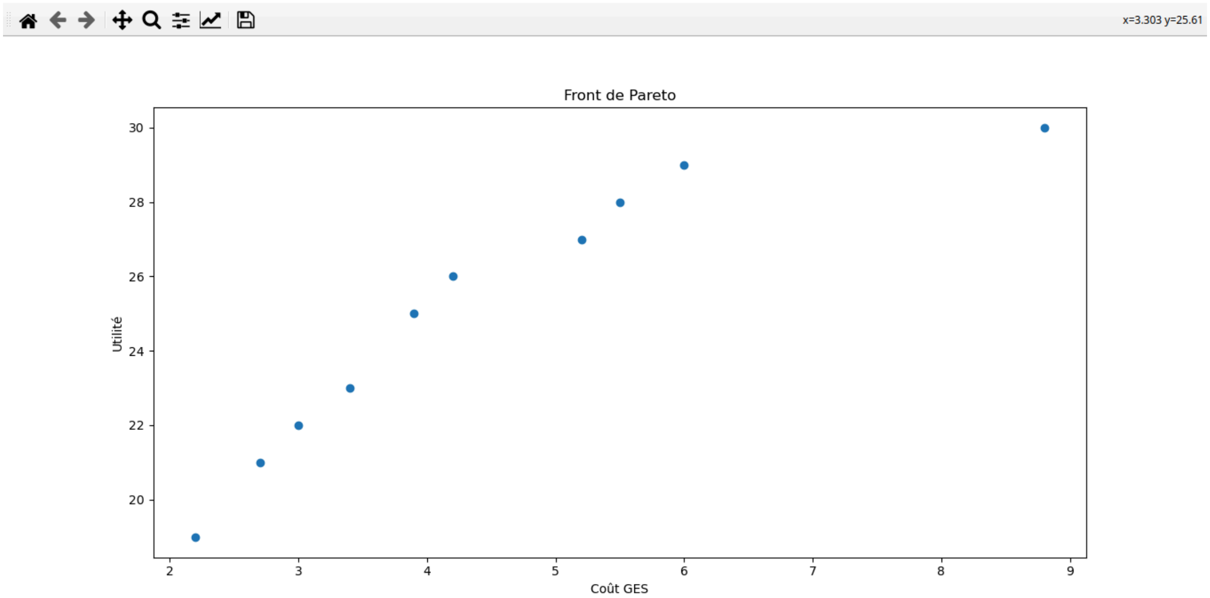
Question 9 - front de Pareto



<u>Front de Pareto</u>

Question 12

Nous allons démontrer ci-dessous que le système relationnel de Pareto-dominance, le système relationnel lexicographique relatif aux coûts GES et celui relatif aux valeurs d’utilité sont asymétriques, transitifs et négativement transitifs.

Ci-dessous, la démonstration que la relation de Pareto-dominance est asymétrique :

Montrons que la relation de Pareto-dominance PD est asymétrique, transitive et négativement transitive.

Asymétrique :

Montrons PD asymétrique soit $\forall (k_1 ; k_2)$ un couple de sacs-à-dos, $k_1 \, PD \, k_2 \Rightarrow \neg (k_2 \, PD \, k_1)$

Raisonnons par l'absurde. Supposons $(k_1 \, PD \, k_2) \wedge (k_2 \, PD \, k_1)$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
(k_1 \, PD \, k_2) \wedge (k_2 \, PD \, k_1) \iff & \big[(c_1 < c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \vee (c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2) \big] \\
& \wedge \big[(c_2 < c_1 \wedge u_2 \geq u_1) \vee (c_2 \leq c_1 \wedge u_2 > u_1) \big] \\
\iff & \big[(\underline{c_1 < c_2} \wedge u_1 \geq u_2) \wedge (\underline{c_2 < c_1} \wedge u_2 \geq u_1) \big] \\
& \vee \big[(c_1 < c_2 \wedge \underline{u_1 \geq u_2}) \wedge (c_2 \leq c_1 \wedge \underline{u_2 > u_1}) \big] \\
& \vee \big[(c_1 \leq c_2 \wedge \underline{u_1 > u_2}) \wedge (c_2 < c_1 \wedge \underline{u_2 \geq u_1}) \big] \\
& \vee \big[(c_1 \leq c_2 \wedge \underline{u_1 > u_2}) \wedge (c_2 \leq c_1 \wedge \underline{u_2 > u_1}) \big]
\end{aligned}
$$

Légende : — et — indiquent les contradictions respectivement sur les coûts GES c_i et les valeurs d'utilité u_i.

On obtient donc une contradiction. Ainsi PD est asymétrique.

Ci-dessous, la démonstration que la relation de Pareto-dominance est transitive :

Transitive :

Montrons PD transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$(k_1 \text{ PD } k_2) \wedge (k_2 \text{ PD } k_3) \Rightarrow (k_1 \text{ PD } k_3)$.

Supposons $(k_1 \text{ PD } k_2) \wedge (k_2 \text{ PD } k_3)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ PD } k_2) \wedge (k_2 \text{ PD } k_3) \Leftrightarrow [(c_1 > c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \vee (c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2)]$$
$$\wedge [(c_2 < c_3 \wedge u_2 \geq u_3) \vee (c_2 \leq c_3 \wedge u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [(c_1 < c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \wedge (c_2 < c_3 \wedge u_2 \geq u_3)]$$
$$\vee [(c_1 < c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \wedge (c_2 \leq c_3 \wedge u_2 > u_3)]$$
$$\vee [(c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2) \wedge (c_2 < c_3 \wedge u_2 \geq u_3)]$$
$$\vee [(c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2) \wedge (c_2 \leq c_3 \wedge u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (c_1 < c_3 \wedge u_1 \geq u_3) \vee (c_1 < c_3 \wedge u_1 > u_3)$$
$$\vee (c_1 < c_3 \wedge u_1 > u_3) \vee (c_1 \leq c_3 \wedge u_1 > u_3)$$

Par transitivité des opérateurs d'inégalité.

$$\Leftrightarrow k_1 \text{ PD } k_3$$

Ainsi PD est transitive

Ci-dessous, la démonstration que la relation de Pareto-dominance est négativement transitive :

Négativement transitive :

Montrons PD négativement transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$\neg(k_1 \, PD \, k_2) \land \neg(k_2 \, PD \, k_3) \Rightarrow \neg(k_1 \, PD \, k_3]$$

Supposons $\neg(k_1 \, PD \, k_2) \land \neg(k_2 \, PD \, k_3)$. On a alors :

$$\neg(k_1 \, PD \, k_2) \land \neg(k_2 \, PD \, k_3) \Leftrightarrow \neg[(c_1 < c_2 \land u_1 \geq u_2) \lor (c_1 \leq c_2 \land u_1 > u_2)]$$
$$\land \neg[(c_2 < c_3 \land u_2 \geq u_3) \lor (c_2 \leq c_3 \land u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [(c_1 \geq c_2 \lor u_1 < u_2) \land (c_1 > c_2 \lor u_1 \leq u_2)]$$
$$\land [(c_2 \geq c_3 \lor u_2 < u_3) \land (c_2 > c_3 \lor u_2 \leq u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (u_1 < u_2 \land c_1 > c_2) \land (u_2 < u_3 \land c_2 > c_3)$$

$$\Leftrightarrow (u_1 < u_3) \land (c_1 > c_3)$$ Par transitivité des opérateurs d'inégalité

$$\Leftrightarrow \neg(k_1 \, PD \, k_3)$$

Ainsi PD est négativement transitive.

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est asymétrique :

Montrons que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est asymétrique, transitive et négativement transitive.

Asymétrique :

Montrons LexC asymétrique soit $\forall (k_1 ; k_2)$ un couple de sacs-à-dos, $k_1 \text{ LexC } k_2 \Rightarrow \neg (k_2 \text{ LexC } k_1)$

Raisonnons par l'absurde. Supposons :
$(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_1)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_1)$$

$$\Leftrightarrow [c_1 < c_2 \vee (c_1 = c_2 \wedge u_1 > u_2)] \wedge [c_2 < c_1 \vee (c_2 = c_1 \wedge u_2 > u_1)]$$

$$\Leftrightarrow (\underline{c_1 < c_2} \wedge \underline{c_2 < c_1}) \vee (\underline{c_1 < c_2} \wedge \underline{c_2 = c_1} \wedge u_2 > u_1)$$

$$\vee (\underline{c_1 = c_2} \wedge u_1 > u_2 \wedge \underline{c_2 < c_1})$$

$$\vee (c_1 = c_2 \wedge c_2 = c_1 \wedge \underline{u_1 > u_2} \wedge \underline{u_2 > u_1})$$

Légende : — et — indiquent les contradictions respectivement sur les coûts GES c_i et les valeurs d'utilité u_i

On obtient donc une contradiction. Ainsi LexC est asymétrique.

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est transitive :

Transitive :

Montrons LexC transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_3) \Rightarrow (k_1 \text{ LexC } k_3)$$

Supposons $(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_3)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_3) \Leftrightarrow [c_1 < c_2 \vee (c_1 = c_2 \wedge u_1 > u_2)]$$
$$\wedge [c_2 < c_3 \vee (c_2 = c_3 \wedge u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_3) \vee (c_1 < c_2 \wedge c_2 = c_3 \wedge u_2 > u_3)$$
$$\vee (c_1 = c_2 \wedge c_2 < c_3 \wedge u_1 > u_2)$$
$$\vee (c_1 = c_2 \wedge c_2 = c_3 \wedge u_1 > u_2 \wedge u_2 > u_3)$$

$$\Leftrightarrow c_1 < c_3 \vee (c_1 < c_3 \wedge u_2 > u_3) \vee (c_1 < c_3 \wedge u_1 > u_2)$$
$$\vee (c_1 = c_3 \wedge u_1 > u_3)$$

Par transitivité des opérateurs d'égalité et d'inégalité.

$$\Leftrightarrow k_1 \text{ LexC } k_3$$

Ainsi LexC est transitive.

À la page suivante, la démonstration que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est négativement transitive :

Négativement transitive :

Montrons LexC négativement transitive soit $\forall (k_1; k_2; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$\neg (k_1 \text{ LexC } k_2) \land \neg (k_2 \text{ LexC } k_3) \Rightarrow \neg (k_1 \text{ LexC } k_3)$$

Supposons $\neg (k_1 \text{ LexC } k_2) \land \neg (k_2 \text{ LexC } k_3)$. On a alors :

$$\neg (k_1 \text{ LexC } k_2) \land \neg (k_2 \text{ LexC } k_3)$$

$$\Leftrightarrow \neg [c_1 < c_2 \lor (c_1 = c_2 \land u_1 > u_2)] \land \neg [c_2 < c_3 \lor (c_2 = c_3 \land u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [c_1 \geq c_2 \land (c_1 \neq c_2 \lor u_1 \leq u_2)] \land [c_2 \geq c_3 \land (c_2 \neq c_3 \lor u_2 \leq u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [c_1 > c_2 \lor (c_1 \geq c_2 \land u_1 \leq u_2)] \land [c_2 > c_3 \lor (c_2 \geq c_3 \land u_2 \leq u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (c_1 > c_2 \land c_2 > c_3) \lor (c_1 > c_2 \land c_2 \geq c_3 \land u_2 \leq u_3) \lor (c_1 \geq c_2 \land u_1 \leq u_2 \land c_2 > c_3) \lor (c_1 \geq c_2 \land u_1 \leq u_2 \land c_2 \geq c_3 \land u_2 \leq u_3)$$

$$\Leftrightarrow c_1 > c_3 \lor (c_1 > c_3 \land u_2 \leq u_3) \lor (c_1 > c_3 \land u_1 \leq u_2) \lor (c_1 \geq c_3 \land u_1 \leq u_3)$$ Par transitivité des opérateurs d'inégalité

$$\Leftrightarrow c_3 < c_1 \lor (c_3 < c_1 \land u_2 \leq u_3) \lor (c_3 < c_1 \land u_1 \leq u_2) \lor (c_3 \leq c_1 \land u_3 \geq u_1)$$

$$\Leftrightarrow \neg (k_1 \text{ LexC } k_3)$$

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est asymétrique :

Montrons que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est asymétrique, transitive et négativement transitive.

Asymétrique :

Montrons LexU asymétrique soit $(k_1 ; k_2)$ un couple de sacs-à-dos, $k_1 \text{ LexU } k_2 \Rightarrow \neg(k_2 \text{ LexU } k_1)$

Raisonnons par l'absurde. Supposons : $(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_1)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_1)$$

$$\Leftrightarrow [u_1 > u_2 \vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2)]$$

$$\wedge [u_2 > u_1 \vee (u_2 = u_1 \wedge c_2 < c_1)]$$

$$\Leftrightarrow (\underline{u_1 > u_2} \wedge \underline{u_2 > u_1}) \vee (\underline{u_1 > u_2} \wedge \underline{u_2 = u_1} \wedge c_2 < c_1)$$

$$\vee (\underline{u_1 = u_2} \wedge c_1 < c_2 \wedge \underline{u_2 > u_1})$$

$$\vee (u_1 = u_2 \wedge \underline{c_1 < c_2} \wedge u_2 = u_1 \wedge \underline{c_2 < c_1})$$

Légende : — et — indiquent les contradictions respectivement sur les valeurs d'utilité u_i et les coûts GES c_i.

On obtient donc une contradiction. Ainsi LexU est asymétrique.

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est transitive :

Transitive :

Montrons LexU transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_3) \Rightarrow (k_1 \text{ LexU } k_3)$$

Supposons $(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_3)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_3)$$

$$\Leftrightarrow [u_1 > u_2 \vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2)]$$
$$\wedge [u_2 > u_3 \vee (u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)]$$

$$\Leftrightarrow (u_1 > u_2 \wedge u_2 > u_3) \vee (u_1 > u_2 \wedge u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)$$
$$\vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2 \wedge u_2 > u_3)$$
$$\vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2 \wedge u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)$$

$$\Leftrightarrow (u_1 > u_3) \vee (u_1 > u_3 \wedge c_2 < c_3) \vee (u_1 > u_3 \wedge c_1 < c_2)$$
$$\vee (u_1 = u_3 \wedge c_1 < c_3)$$. Par transitivité des opérateurs d'égalité et d'inégalité

$$\Leftrightarrow k_1 \text{ LexU } k_3$$

Ainsi LexU est transitive.

À la page suivante, la démonstration que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est négativement transitive :

Négativement transitive :

Montrons LexU négativement transitive soit $(k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos:

$$\neg(k_1 \text{ LexU } k_2) \land \neg(k_2 \text{ LexU } k_3) \Rightarrow \neg(k_1 \text{ LexU}$$

Supposons $\neg(k_1 \text{ LexU } k_2) \land \neg(k_2 \text{ LexU } k_3)$.

$$\neg(k_1 \text{ LexU } k_2) \land \neg(k_2 \text{ LexU } k_3)$$

$$\Leftrightarrow \neg[u_1 > u_2 \lor (u_1 = u_2 \land c_1 < c_2)]$$

$$\land \neg[u_2 > u_3 \lor (u_2 = u_3 \land c_2 < c_3)]$$

$$\Leftrightarrow [u_1 \leq u_2 \land (u_1 \neq u_2 \lor c_1 \geq c_2)]$$

$$\land [u_2 \leq u_3 \land (u_2 \neq u_3 \lor c_2 \geq c_3)]$$

$$\Leftrightarrow [u_1 < u_2 \lor (u_1 \leq u_2 \land c_1 \geq c_2)]$$

$$\land [u_2 < u_3 \lor (u_2 \leq u_3 \land c_2 \geq c_3)]$$

$$\Leftrightarrow (u_1 < u_2 \land u_2 < u_3)$$

$$\lor (u_1 < u_2 \land u_2 \leq u_3 \land c_2 \geq c_3)$$

$$\lor (u_1 \leq u_2 \land c_1 \geq c_2 \land u_2 < u_3)$$

$$\lor (u_1 \leq u_2 \land c_1 \geq c_2 \land u_2 \leq u_3 \land c_2 \geq c_3)$$

$\iff u_1 < u_3 \lor (u_1 < u_3 \land c_2 \geq c_3)$

$\lor (u_1 < u_3 \land c_1 \geq c_2)$

$\lor (u_1 \leq u_3 \land c_1 \geq c_3)$ Par transitivité des opérateurs d'inégalité

$\iff u_3 > u_1 \lor (u_3 > u_1 \land c_3 \leq c_2) \lor (u_3 > u_1 \land c_2 \leq c_1)$

$\lor (u_3 \geq u_1 \land c_3 \leq c_1)$

$\iff \neg (k_1 \text{ LexU } k_3)$

Ainsi LexU est négativement transitive

La relation de Pareto-dominance, la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC et la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU sont asymétriques donc antisymétriques.

Elles sont donc antisymétriques et transitives d'où elles représentent un ordre strict.

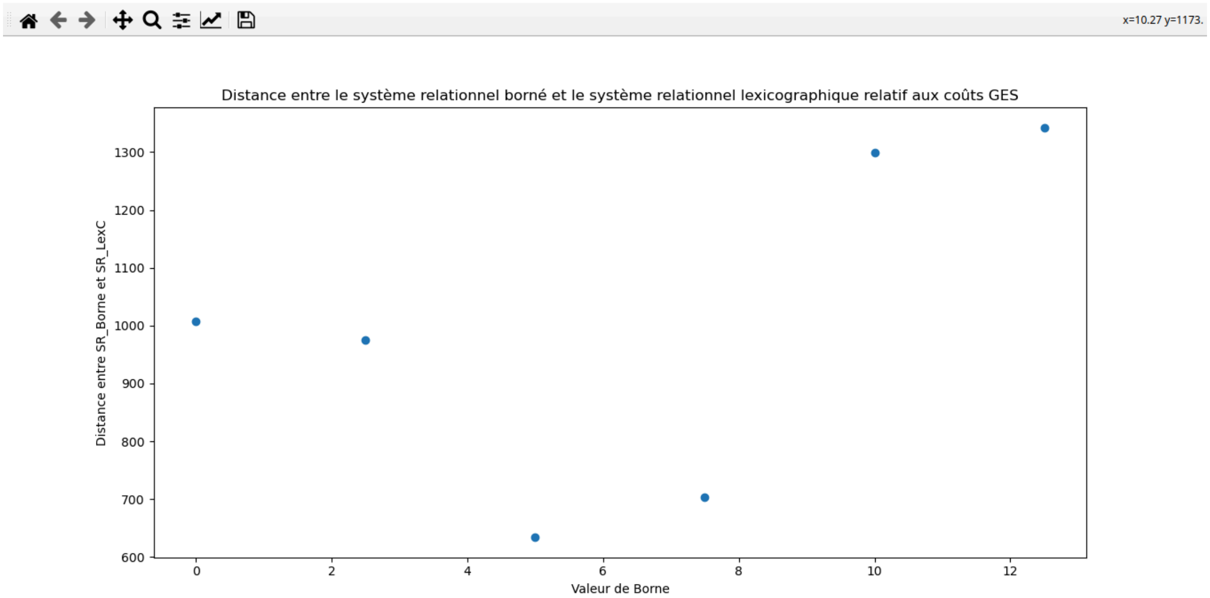
Elles sont également asymétriques et négativement transitives d'où elles représentent un ordre fort.

Question 14

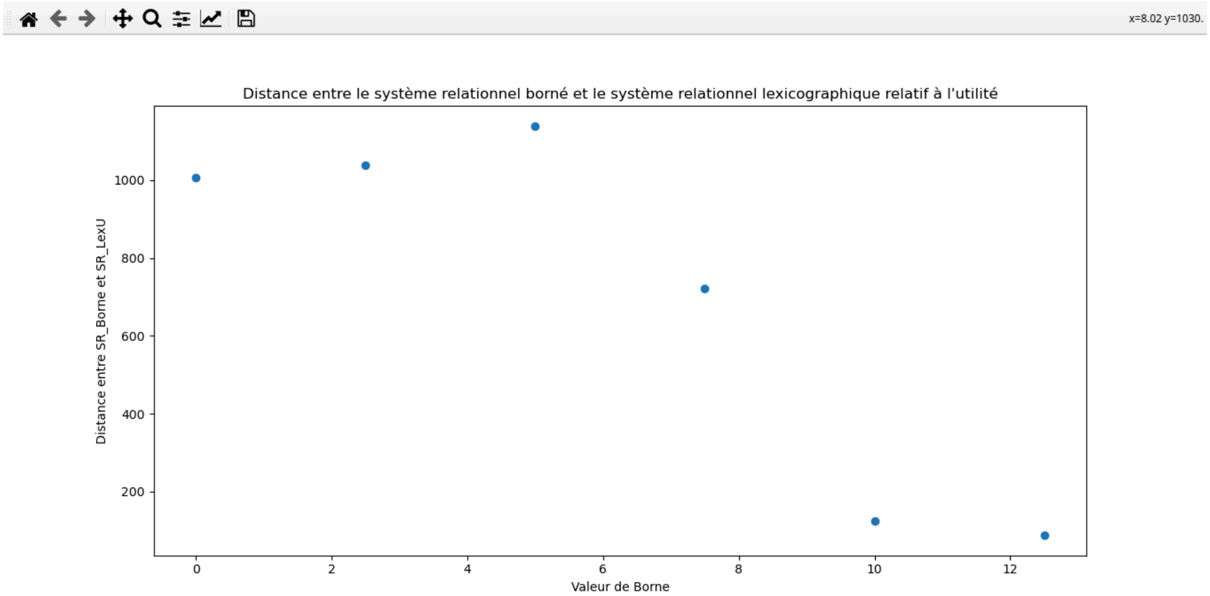
La distance entre le système relationnel de Pareto-dominance et la relation lexicographique relative au coût GES est : 626.5

La distance entre le système relationnel de Pareto-dominance et la relation lexicographique relative à l'utilité est : 626.5

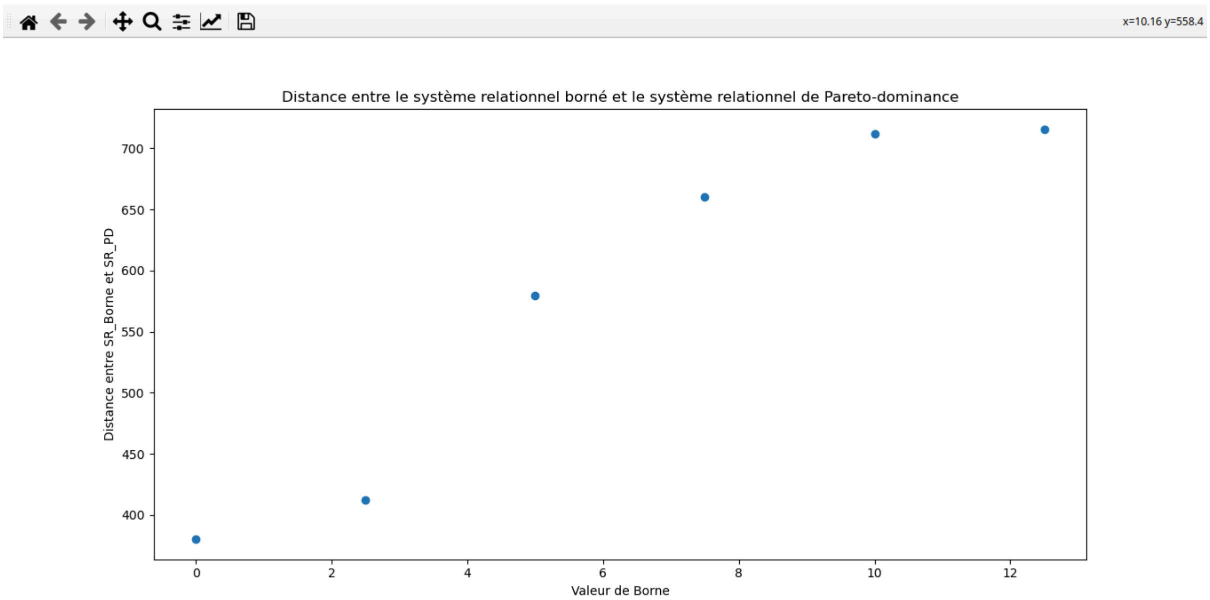
La distance entre la relation lexicographique relative à l'utilité et la relation lexicographique relative au coût GES est : 1253.0



<u>Distance entre le système relationnel borné et le système relationnel relatif aux coûts GES</u>

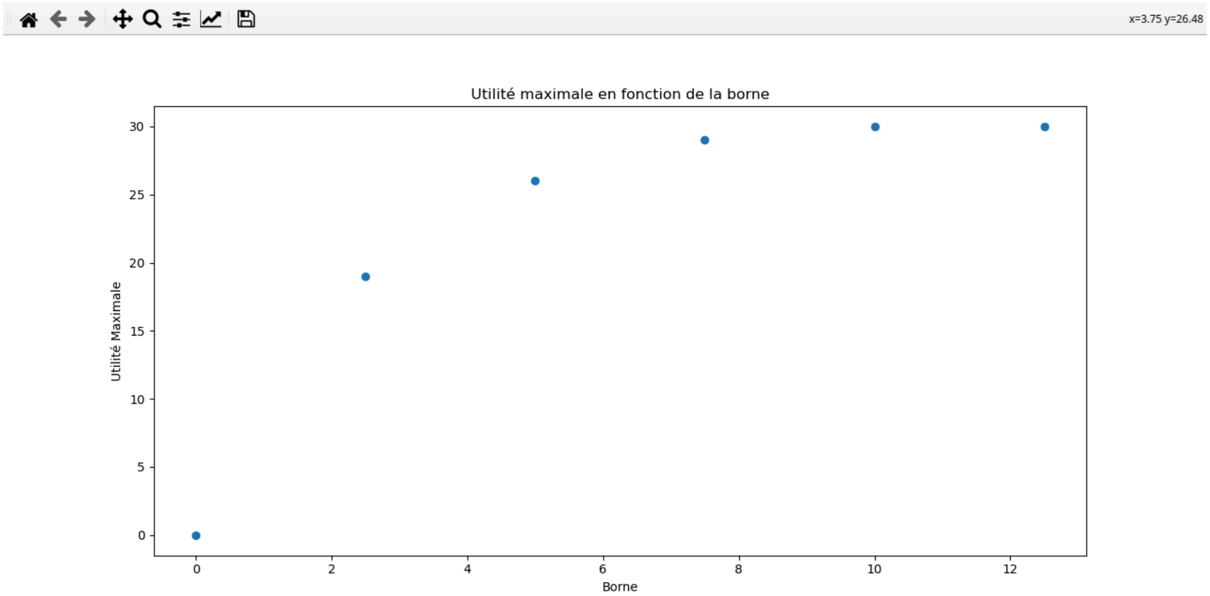


<u>Distance entre le système relationnel borné et le système relationnel relatif à l'uitilité</u>



<u>Distance entre le système relationnel borné et le système relationnel de Pareto-dominance</u>

Question 16



<u>Utilité maximale d'un sac à dos en fonction de la borne maximale relative à sa capacité</u>

Question 17

Le programme linéaire fonctionne comme suit :

17) Le programme linéaire est constitué comme suit :

- $\mathcal{U} = \{u_c, \forall c \in \mathcal{C}\}$ l'ensemble des valeurs d'utilité représentant l'ensemble des variables.

- $\forall (k_1 ; k_2) \in \mathcal{P}, \sum_{c \in k_1} u_c > \sum_{c \in k_2} u_c$,

l'ensemble des contraintes vérifiant la supériorité de la somme d'utilité d'un sac k_1 à celle d'un sac k_2 avec $(k_1 ; k_2) \in \mathcal{P}$

- Nous n'avons de fonction objectif

Afin de déterminer si un sac k_1 est préféré à un sac k_2, il suffit de s'assurer que les éléments composant k_1 respectent les inégalités ci-dessus en comparaison aux éléments composant k_2.