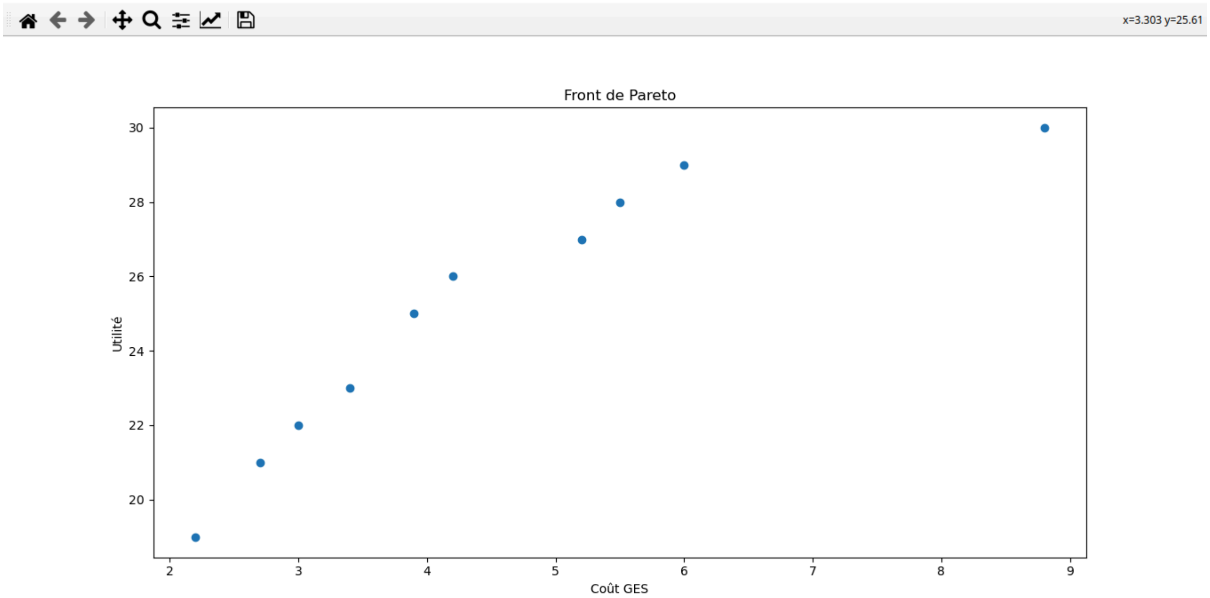
Question 9 - front de Pareto



Front de Pareto

Le graphique ci-dessus présente en abscisse le coût GES d'un sac-à-dos non dominé par la relation de Pareto-dominance et en ordonnée l'utilité de ce sac. On constate que la courbe du front de Pareto se rapproche de celle d'une fonction linéaire croissante.

Question 12

Nous allons démontrer ci-dessous que le système relationnel de Pareto-dominance, le système relationnel lexicographique relatif aux coûts GES et celui relatif aux valeurs d'utilité sont asymétriques, transitifs et négativement transitifs.

Ci-dessous, la démonstration que la relation de Pareto-dominance est asymétrique :

Montrons que la relation de Pareto-dominance PD est asymétrique, transitive et négativement transitive.

Asymétrique :

Montrons PD asymétrique soit $\forall (k_1 ; k_2)$ un couple de sacs-à-dos, $k_1 \, PD \, k_2 \Rightarrow \neg (k_2 \, PD \, k_1)$

Raisonnons par l'absurde. Supposons $(k_1 \, PD \, k_2) \wedge (k_2 \, PD \, k_1)$. On a alors :

$$(k_1 \, PD \, k_2) \wedge (k_2 \, PD \, k_1) \Leftrightarrow \left[(c_1 < c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \vee (c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2) \right]$$

$$\wedge \left[(c_2 < c_1 \wedge u_2 \geq u_1) \vee (c_2 \leq c_1 \wedge u_2 > u_1) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(\underline{c_1 < c_2} \wedge u_1 \geq u_2) \wedge (\underline{c_2 < c_1} \wedge u_2 \geq u_1) \right]$$

$$\vee \left[(c_1 < c_2 \wedge \underline{u_1 \geq u_2}) \wedge (c_2 \leq c_1 \wedge \underline{u_2 > u_1}) \right]$$

$$\vee \left[(c_1 \leq c_2 \wedge \underline{u_1 > u_2}) \wedge (c_2 < c_1 \wedge \underline{u_2 \geq u_1}) \right]$$

$$\vee \left[(c_1 \leq c_2 \wedge \underline{u_1 > u_2}) \wedge (c_2 \leq c_1 \wedge \underline{u_2 > u_1}) \right]$$

Légende : — et — indiquent les contradictions respectivement sur les coûts GES c_i et les valeurs d'utilité u_i.

On obtient donc une contradiction. Ainsi PD est asymétrique.

Ci-dessous, la démonstration que la relation de Pareto-dominance est transitive :

Transitive :

Montrons PD transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$(k_1 \text{ PD } k_2) \wedge (k_2 \text{ PD } k_3) \Rightarrow (k_1 \text{ PD } k_3)$.

Supposons $(k_1 \text{ PD } k_2) \wedge (k_2 \text{ PD } k_3)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ PD } k_2) \wedge (k_2 \text{ PD } k_3) \Leftrightarrow \left[(c_1 > c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \vee (c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2)\right] \wedge \left[(c_2 < c_3 \wedge u_2 \geq u_3) \vee (c_2 \leq c_3 \wedge u_2 > u_3)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(c_1 < c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \wedge (c_2 < c_3 \wedge u_2 \geq u_3)\right]$$
$$\vee \left[(c_1 < c_2 \wedge u_1 \geq u_2) \wedge (c_2 \leq c_3 \wedge u_2 > u_3)\right]$$
$$\vee \left[(c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2) \wedge (c_2 < c_3 \wedge u_2 \geq u_3)\right]$$
$$\vee \left[(c_1 \leq c_2 \wedge u_1 > u_2) \wedge (c_2 \leq c_3 \wedge u_2 > u_3)\right]$$

$$\Leftrightarrow (c_1 < c_3 \wedge u_1 \geq u_3) \vee (c_1 < c_3 \wedge u_1 > u_3)$$
$$\vee (c_1 < c_3 \wedge u_1 > u_3) \vee (c_1 \leq c_3 \wedge u_1 > u_3)$$

Par transitivité des opérateurs d'inégalité.

$\Leftrightarrow k_1 \text{ PD } k_3$

Ainsi PD est transitive

Ci-dessous, la démonstration que la relation de Pareto-dominance est négativement transitive :

Négativement transitive :

Montrons PD négativement transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$\neg (k_1 \text{ PD } k_2) \land \neg (k_2 \text{ PD } k_3) \Rightarrow \neg (k_1 \text{ PD } k_3)$$

Supposons $\neg (k_1 \text{ PD } k_2) \land \neg (k_2 \text{ PD } k_3)$. On a alors :

$$\neg (k_1 \text{ PD } k_2) \land \neg (k_2 \text{ PD } k_3) \Leftrightarrow \neg [(c_1 < c_2 \land u_1 \geq u_2) \lor (c_1 \leq c_2 \land u_1 > u_2)]$$

$$\land \neg [(c_2 < c_3 \land u_2 \geq u_3) \lor (c_2 \leq c_3 \land u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [(c_1 \geq c_2 \lor u_1 < u_2) \land (c_1 > c_2 \lor u_1 \leq u_2)]$$

$$\land [(c_2 \geq c_3 \lor u_2 < u_3) \land (c_2 > c_3 \lor u_2 \leq u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (u_1 < u_2 \land c_1 > c_2) \land (u_2 < u_3 \land c_2 > c_3)$$

$$\Leftrightarrow (u_1 < u_3) \land (c_1 > c_3)$$ Par transitivité des opérateurs d'inégalité

$$\Leftrightarrow \neg (k_1 \text{ PD } k_3)$$

Ainsi PD est négativement transitive.

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est asymétrique :

Montrons que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est asymétrique, transitive et négativement transitive.

Asymétrique :

Montrons LexC asymétrique soit $\forall (k_1 ; k_2)$ un couple de sacs-à-dos, $k_1 \text{ LexC } k_2 \Rightarrow \neg (k_2 \text{ LexC } k_1)$

Raisonnons par l'absurde. Supposons : $(k_1 \text{ LexC } k_2) \land (k_2 \text{ LexC } k_1)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexC } k_2) \land (k_2 \text{ LexC } k_1)$$

$$\Leftrightarrow [c_1 < c_2 \lor (c_1 = c_2 \land u_1 > u_2)] \land [c_2 < c_1 \lor (c_2 = c_1 \land u_2 > u_1)]$$

$$\Leftrightarrow (\underline{c_1 < c_2} \land \underline{c_2 < c_1}) \lor (\underline{c_1 < c_2} \land \underline{c_2 = c_1} \land u_2 > u_1)$$

$$\lor (\underline{c_1 = c_2} \land u_1 > u_2 \land \underline{c_2 < c_1})$$

$$\lor (c_1 = c_2 \land c_2 = c_1 \land \underline{u_1 > u_2} \land \underline{u_2 > u_1})$$

Légende : — et — indiquent les contradictions respectivement sur les coûts GES c_i et les valeurs d'utilité u_i

On obtient donc une contradiction. Ainsi LexC est asymétrique.

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est transitive :

Transitive :

Montrons LexC transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_3) \Rightarrow (k_1 \text{ LexC } k_3)$$

Supposons $(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_3)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexC } k_3) \Leftrightarrow [c_1 < c_2 \vee (c_1 = c_2 \wedge u_1 > u_2)] \wedge [c_2 < c_3 \vee (c_2 = c_3 \wedge u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_3) \vee (c_1 < c_2 \wedge c_2 = c_3 \wedge u_2 > u_3) \vee (c_1 = c_2 \wedge c_2 < c_3 \wedge u_1 > u_2) \vee (c_1 = c_2 \wedge c_2 = c_3 \wedge u_1 > u_2 \wedge u_2 > u_3)$$

$$\Leftrightarrow c_1 < c_3 \vee (c_1 < c_3 \wedge u_2 > u_3) \vee (c_1 < c_3 \wedge u_1 > u_2) \vee (c_1 = c_3 \wedge u_1 > u_3)$$

Par transitivité des opérateurs d'égalité et d'inégalité.

$$\Leftrightarrow k_1 \text{ LexC } k_3$$

Ainsi LexC est transitive.

À la page suivante, la démonstration que la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC est négativement transitive :

Négativement transitive :

Montrons LexC négativement transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$\neg(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge \neg(k_2 \text{ LexC } k_3) \Rightarrow \neg(k_1 \text{ LexC } k_3)$$

Supposons $\neg(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge \neg(k_2 \text{ LexC } k_3)$. On a alors :

$$\neg(k_1 \text{ LexC } k_2) \wedge \neg(k_2 \text{ LexC } k_3)$$

$$\Leftrightarrow \neg[c_1 < c_2 \vee (c_1 = c_2 \wedge u_1 > u_2)] \wedge \neg[c_2 < c_3 \vee (c_2 = c_3 \wedge u_2 > u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [c_1 \geqslant c_2 \wedge (c_1 \neq c_2 \vee u_1 \leqslant u_2)] \wedge [c_2 \geqslant c_3 \wedge (c_2 \neq c_3 \vee u_2 \leqslant u_3)]$$

$$\Leftrightarrow [c_1 > c_2 \vee (c_1 \geqslant c_2 \wedge u_1 \leqslant u_2)] \wedge [c_2 > c_3 \vee (c_2 \geqslant c_3 \wedge u_2 \leqslant u_3)]$$

$$\Leftrightarrow (c_1 > c_2 \wedge c_2 > c_3) \vee (c_1 > c_2 \wedge c_2 \geqslant c_3 \wedge u_2 \leqslant u_3) \vee (c_1 \geqslant c_2 \wedge u_1 \leqslant u_2 \wedge c_2 > c_3) \vee (c_1 \geqslant c_2 \wedge u_1 \leqslant u_2 \wedge c_2 \geqslant c_3 \wedge u_2 \leqslant u_3)$$

$$\Leftrightarrow c_1 > c_3 \vee (c_1 > c_3 \wedge u_2 \leqslant u_3) \vee (c_1 > c_3 \wedge u_1 \leqslant u_2) \vee (c_1 \geqslant c_3 \wedge u_1 \leqslant u_3)$$ Par transitivité des opérateurs d'inégalité

$$\Leftrightarrow c_3 < c_1 \vee (c_3 < c_1 \wedge u_2 \leqslant u_3) \vee (c_3 < c_1 \wedge u_1 \leqslant u_2) \vee (c_3 \leqslant c_1 \wedge u_3 \geqslant u_1)$$

$$\Leftrightarrow \neg(k_1 \text{ LexC } k_3)$$

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est asymétrique :

Montrons que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est asymétrique, transitive et négativement transitive.

Asymétrique :

Montrons LexU asymétrique soit $(k_1 ; k_2)$ un couple de sacs-à-dos, $k_1 \text{ LexU } k_2 \Rightarrow \neg(k_2 \text{ LexU } k_1)$

Raisonnons par l'absurde. Supposons : $(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_1)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_1)$$

$$\Leftrightarrow [u_1 > u_2 \vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2)]$$

$$\wedge [u_2 > u_1 \vee (u_2 = u_1 \wedge c_2 < c_1)]$$

$$\Leftrightarrow (\underline{u_1 > u_2} \wedge \underline{u_2 > u_1}) \vee (\underline{u_1 > u_2} \wedge \underline{u_2 = u_1} \wedge c_2 < c_1)$$

$$\vee (\underline{u_1 = u_2} \wedge c_1 < c_2 \wedge \underline{u_2 > u_1})$$

$$\vee (u_1 = u_2 \wedge \underline{c_1 < c_2} \wedge u_2 = u_1 \wedge \underline{c_2 < c_1})$$

Légende : — et — indiquent les contradictions respectivement sur les valeurs d'utilité u_i et les coûts GES c_i.

On obtient donc une contradiction. Ainsi LexU est asymétrique.

Ci-dessous, la démonstration que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est transitive :

Transitive :

Montrons LexU transitive soit $\forall (k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$$(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_3) \Rightarrow (k_1 \text{ LexU } k_3)$$

Supposons $(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_3)$. On a alors :

$$(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge (k_2 \text{ LexU } k_3)$$

$$\Leftrightarrow [u_1 > u_2 \vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2)]$$

$$\wedge [u_2 > u_3 \vee (u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)]$$

$$\Leftrightarrow (u_1 > u_2 \wedge u_2 > u_3) \vee (u_1 > u_2 \wedge u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)$$

$$\vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2 \wedge u_2 > u_3)$$

$$\vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2 \wedge u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)$$

$$\Leftrightarrow (u_1 > u_3) \vee (u_1 > u_3 \wedge c_2 < c_3) \vee (u_1 > u_3 \wedge c_1 < c_2)$$

$$\vee (u_1 = u_3 \wedge c_1 < c_3)$$. Par transitivité des opérateurs d'égalité et d'inégalité

$$\Leftrightarrow k_1 \text{ LexU } k_3$$

Ainsi LexU est transitive.

À la page suivante, la démonstration que la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU est négativement transitive :

Négativement transitive :

Montrons LexU négativement transitive soit $(k_1 ; k_2 ; k_3)$ un triplet de sacs-à-dos :

$\neg(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge \neg(k_2 \text{ LexU } k_3) \Rightarrow \neg(k_1 \text{ LexU}$

Supposons $\neg(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge \neg(k_2 \text{ LexU } k_3)$.

$\neg(k_1 \text{ LexU } k_2) \wedge \neg(k_2 \text{ LexU } k_3)$

$\Leftrightarrow \neg[u_1 > u_2 \vee (u_1 = u_2 \wedge c_1 < c_2)]$

$\wedge \neg[u_2 > u_3 \vee (u_2 = u_3 \wedge c_2 < c_3)]$

$\Leftrightarrow [u_1 \leq u_2 \wedge (u_1 \neq u_2 \vee c_1 \geq c_2)]$

$\wedge [u_2 \leq u_3 \wedge (u_2 \neq u_3 \vee c_2 \geq c_3)]$

$\Leftrightarrow [u_1 < u_2 \vee (u_1 \leq u_2 \wedge c_1 \geq c_2)]$

$\wedge [u_2 < u_3 \vee (u_2 \leq u_3 \wedge c_2 \geq c_3)]$

$\Leftrightarrow (u_1 < u_2 \wedge u_2 < u_3)$

$\vee (u_1 < u_2 \wedge u_2 \leq u_3 \wedge c_2 \geq c_3)$

$\vee (u_1 \leq u_2 \wedge c_1 \geq c_2 \wedge u_2 < u_3)$

$\vee (u_1 \leq u_2 \wedge c_1 \geq c_2 \wedge u_2 \leq u_3 \wedge c_2 \geq c_3)$

$\Longleftrightarrow \quad u_1 < u_3 \lor (u_1 < u_3 \land c_2 \geq c_3)$

$\lor (u_1 < u_3 \land c_1 \geq c_2)$

$\lor (u_1 \leq u_3 \land c_1 \geq c_3)$ Par transitivité des opérateurs d'inégalité

$\Longleftrightarrow \quad u_3 > u_1 \lor (u_3 > u_1 \land c_3 \leq c_2) \lor (u_3 > u_1 \land c_2 \leq c_1)$

$\lor (u_3 \geq u_1 \land c_3 \leq c_1)$

$\Longleftrightarrow \neg (k_1 \ \mathrm{Lexll}\ k_3)$

Ainsi Lexll est négativement transitive

La relation de Pareto-dominance, la relation lexicographique relative aux coûts GES LexC et la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité LexU sont asymétriques donc antisymétriques.

Elles sont donc antisymétriques et transitives d'où elles représentent un ordre strict.

Elles sont également asymétriques et négativement transitives d'où elles représentent un ordre fort.

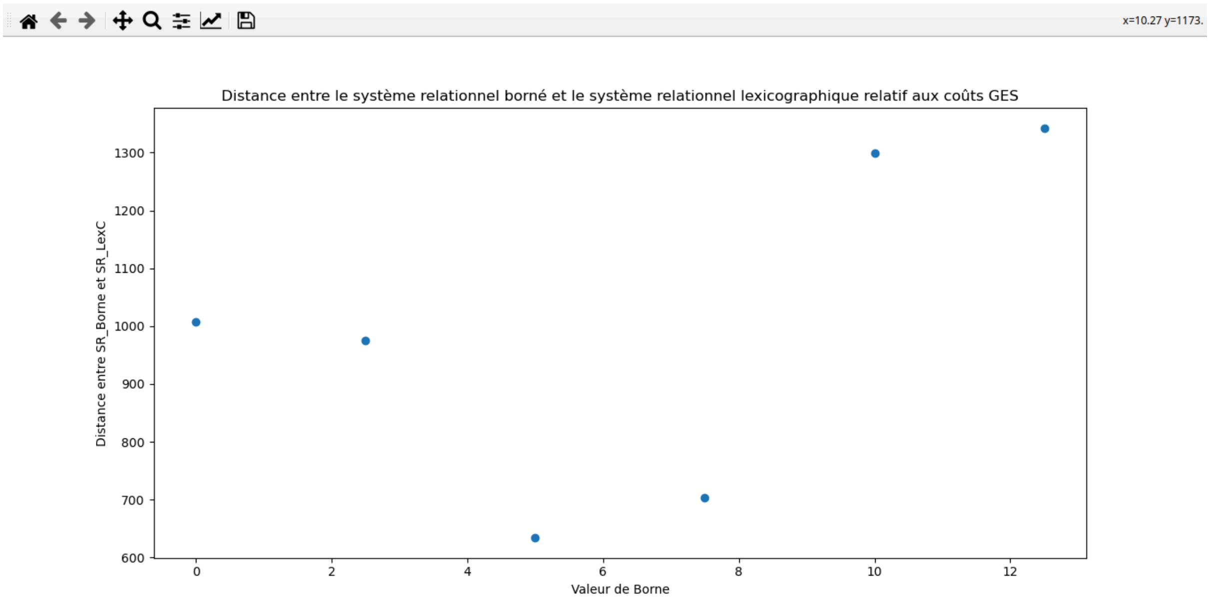
Question 14

La distance entre le système relationnel de Pareto-dominance et la relation lexicographique relative au coût GES est : 626.5

La distance entre le système relationnel de Pareto-dominance et la relation lexicographique relative à l'utilité est : 626.5

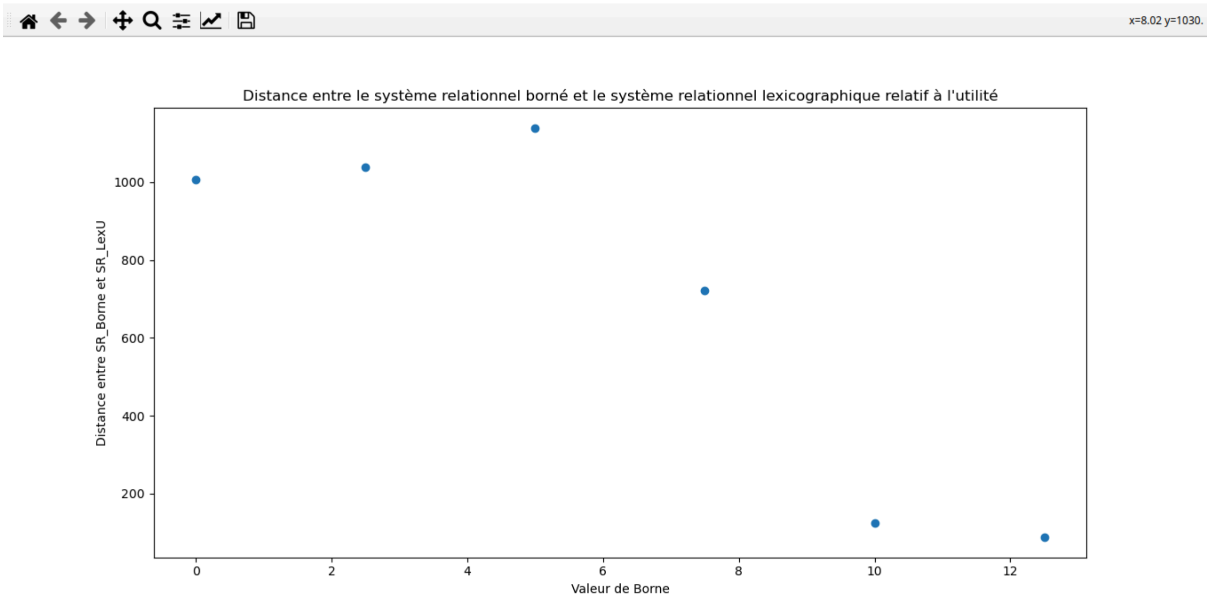
La distance entre la relation lexicographique relative à l'utilité et la relation lexicographique relative au coût GES est : 1253.0

En comparant la distance entre le système relationnel de Pareto-dominance et les deux systèmes relationnels lexicographiques, on constate que celle-ci vaut la moitié de la distance existant entre les deux systèmes relationnels. On en déduit que le système relationnel de Pareto-dominance est plus proche de chacun des systèmes relationnels lexicographiques que ces systèmes le sont entre eux.



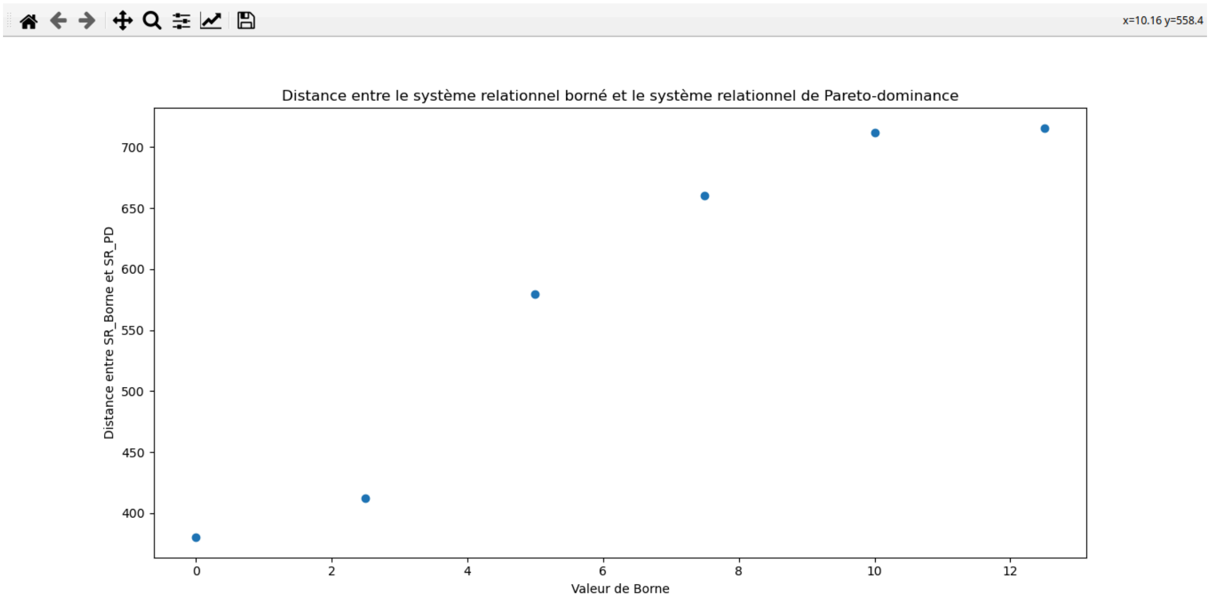
Distance entre le système relationnel borné et le système relationnel relatif aux coûts GES

Le graphique ci-dessus présente en abscisse la valeur de la borne supérieure des sacs-à-dos du système relationnel borné et en ordonnée la distance entre ce système relationnel et la relation lexicographique relative aux coûts GES. On peut diviser la courbe en deux moitiés dont le centre est, en abscisse, la borne de valeur 6. Sur la première moitié, la courbe se rapproche de celle d'une fonction linéaire décroissante tandis qu'elle se rapproche de celle d'une fonction linéaire croissante sur la deuxième moitié. On peut en déduire qu'entre une borne de valeur 0 et une borne de valeur 6, la distance entre les deux systèmes relationnels diminue. La tendance s'inverse après la borne de valeur 6.



Distance entre le système relationnel borné et le système relationnel relatif à l'uitilité

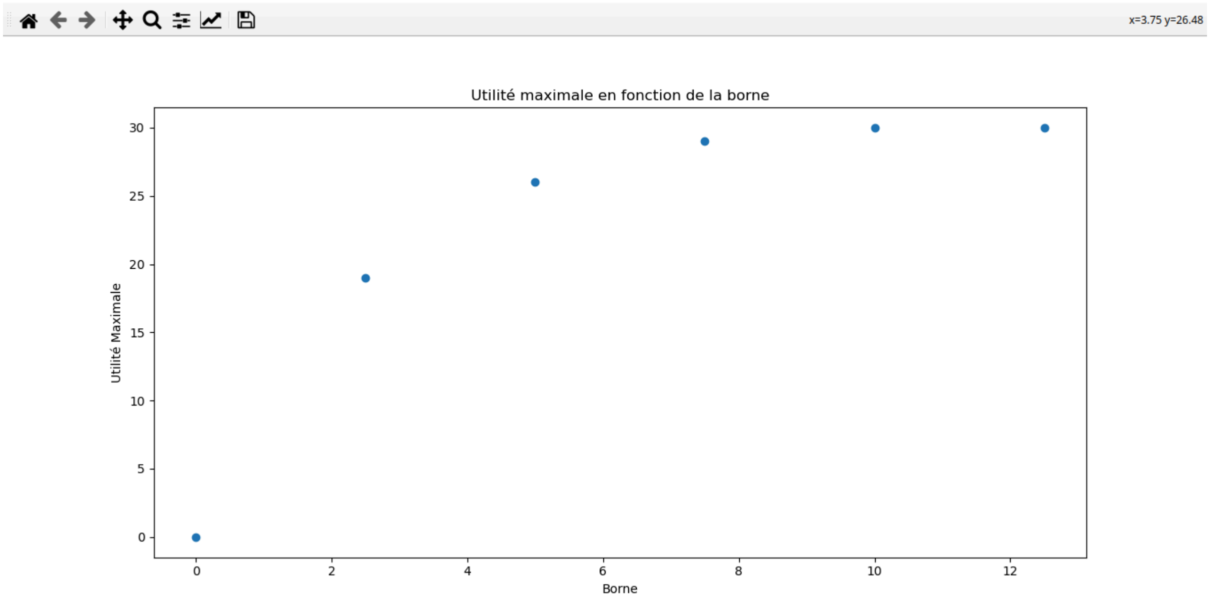
Le graphique ci-dessus présente en abscisse la valeur de la borne supérieure des sacs-à-dos du système relationnel borné et en ordonnée la distance entre ce système relationnel et la relation lexicographique relative aux valeurs d'utilité. On peut diviser la courbe en deux moitiés dont le centre est, en abscisse, la borne de valeur 6. Sur la première moitié, la courbe se rapproche de celle d'une fonction linéaire croissante tandis qu'elle se rapproche de celle d'une fonction linéaire décroissante sur la deuxième moitié. On peut en déduire qu'entre une borne de valeur 0 et une borne de valeur 6, la distance entre les deux systèmes relationnels augmente. La tendance s'inverse après la borne de valeur 6.



<u>Distance entre le système relationnel borné et le système relationnel de Pareto-dominance</u>

Le graphique ci-dessus présente en abscisse la valeur de la borne supérieure des sacs-à-dos du système relationnel borné et en ordonnée la distance entre ce système relationnel et la relation de Pareto-dominance. On peut voir que la courbe se rapproche d'une fonction linéaire croissante. On peut en déduire que plus la borne supérieure des sacs-à-dos est élevée, plus la distance au système relationnel de Pareto-dominance est élevée.

Question 16



<u>Utilité maximale d'un sac à dos en fonction de la borne maximale relative à sa capacité</u>

Le graphique ci-dessus présente en abscisse la borne supérieure du coût GES d'un sac-à-dos et en ordonnée l'utilité maximale d'un sac à dos respectant cette borne. La courbe se rapproche de celle d'une fonction logarithme. On peut en déduire que le gain en utilité d'un sac-à-dos ralentit à mesure qu'on lui ajoute des éléments.

Question 17

Le programme linéaire fonctionne comme suit :

17) Le programme linéaire est constitué comme suit :

- $\mathcal{U} = \{u_c, \forall c \in \mathcal{C}\}$ l'ensemble des valeurs d'utilité représentant l'ensemble des variables.

- $\forall (k_1 ; k_2) \in \mathcal{P}, \sum_{c \in k_1} u_c > \sum_{c \in k_2} u_c$,

l'ensemble des contraintes vérifiant la supériorité de la somme d'utilité d'un sac k_1 à celle d'un sac k_2 avec $(k_1 ; k_2) \in \mathcal{P}$

- Nous n'avons de fonction objectif

Afin de déterminer si un sac k_1 est préféré à un sac k_2, il suffit de s'assurer que les éléments composant k_1 respectent les inégalités ci-dessus en comparaison aux éléments composant k_2.