

Słonie

W Bajtockim Zoo ma się za chwilę odbyć parada, w której uczestniczyć będą wszystkie znajdujące się w nim słonie. Pracownicy zoo zachęcili już zwierzęta do ustawienia się w jednym rzędzie, gdyż zgodnie z zarządzeniem dyrektora zoo taka powinna być początkowa figura parady.

Niestety, na miejsce przybył sam dyrektor i zupełnie nie spodobała mu się wybrana przez pracowników kolejność słoni. Dyrektor zaproponował kolejność, w której według niego zwierzęta będą się najlepiej prezentować, i wydał pracownikom polecenie poprzestawiania słoni zgodnie z tą propozycją.

Aby uniknąć nadmiernego chaosu tuż przed paradą, pracownicy postanowili przestawiać słonie, zamieniając miejscami kolejno pewne pary słoni. Przestawiane zwierzęta nie muszą sąsiadować ze sobą w rzędzie. Wysiłek potrzebny do naklonienia słonia do ruszenia się z miejsca jest wprost proporcjonalny do jego masy, a zatem wysiłek związany z zamianą miejscami dwóch słoni o masach m_1 oraz m_2 można oszacować przez $m_1 + m_2$. Jakim minimalnym wysiłkiem pracownicy mogą poprzestawiać słonie tak, aby usatysfakcjonować dyrektora?

Napisz program, który:

- wczyta ze standardowego wejścia masy wszystkich słoni z zoo oraz aktualną i docelową kolejność słoni w rzędzie,
- wyznaczy taki sposób poprzestawiania słoni, który prowadzi od kolejności początkowej do docelowej i minimalizuje sumę wysiłków związanych ze wszystkimi wykonanymi zamianami pozycji słoni,
- wypisze sumę wartości tych wysiłków na standardowe wyjście.

Wejście

Pierwszy wiersz wejścia zawiera jedną liczbę całkowitą n ($2 \leq n \leq 1\,000\,000$), oznaczającą liczbę słoni w Bajtockim Zoo. Dla uproszczenia zakładamy, że słonie są ponumerowane od 1 do n . Drugi wiersz zawiera n liczb całkowitych m_i ($100 \leq m_i \leq 6\,500$ dla $1 \leq i \leq n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających masy poszczególnych słoni (wyrażone w kilogramach).

Trzeci wiersz wejścia zawiera n różnych liczb całkowitych a_i ($1 \leq a_i \leq n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających numery kolejnych słoni w aktualnym ustawieniu. Czwarty wiersz zawiera n różnych liczb całkowitych b_i ($1 \leq b_i \leq n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających numery kolejnych słoni w ustawieniu proponowanym przez dyrektora zoo. Możesz założyć, że ustawienia reprezentowane przez ciągi (a_i) oraz (b_i) są różne.

72 Słonie

Wyjście

Pierwszy i jedyny wiersz wyjścia powinien zawierać jedną liczbę całkowitą, oznaczającą minimalny łączny wysiłek związany z poprzestawianiem słoni, w wyniku którego z ustawienia reprezentowanego przez (a_i) uzyskuje się ustawienie (b_i) .

Przykład

Dla danych wejściowych:

```
6
2400 2000 1200 2400 1600 4000
1 4 5 3 6 2
5 3 2 4 6 1
```

poprawnym wynikiem jest:

```
11200
```

Jeden z najlepszych sposobów poprzestawiania słoni uzyskujemy, zamieniając miejscami kolejno pary słoni:

- 2 i 5 — wysiłek związany z zamianą to $2\,000 + 1\,600 = 3\,600$, a uzyskane ustawienie to 1 4 2 3 6 5,
- 3 i 4 — wysiłek to $1\,200 + 2\,400 = 3\,600$, a uzyskane ustawienie to 1 3 2 4 6 5,
- 1 i 5 — wysiłek to $2\,400 + 1\,600 = 4\,000$, a uzyskane ustawienie to 5 3 2 4 6 1, czyli ustawienie docelowe.

Rozwiązanie

Wstęp

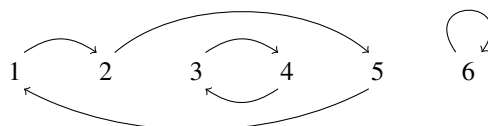
Aby łatwiej wyobrazić sobie zadanie, jakie przed pracownikami zoo postawił dyrektor, spróbujemy przedstawić je graficznie. W tym celu zdefiniujemy funkcję $p: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ w następujący sposób:

$$p(b_1) = a_1, \quad p(b_2) = a_2, \quad \dots, \quad p(b_n) = a_n.$$

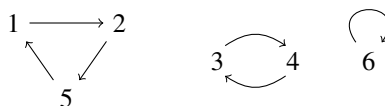
Zauważmy, że wówczas $p(x) = y$ będzie oznaczało, że słoń o numerze x powinien znaleźć się w końcowym ustawieniu w miejscu, które jest aktualnie zajmowane przez słonia o numerze y . Wszystkie liczby b_i są różne, zatem p jest poprawnie zdefiniowaną funkcją, a ponieważ wszystkie liczby a_i są różne, p jest permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Sytuację z zadania możemy zatem przedstawić w postaci grafu skierowanego, w którym wierzchołkami są numery $1, 2, \dots, n$ słoni, krawędziami natomiast wartości funkcji p (patrz rys. 1).

Dalej, jak każdą permutację, funkcję p można rozłożyć na tak zwane *cykle proste* C_1, C_2, \dots, C_c . W tym celu należy wystartować z dowolnego wierzchołka grafu i podążać po krawędziach, aż dojdzie się z powrotem do tego wierzchołka (dlaczego zawsze trafia

się w końcu w wierzchołek początkowy trasy?), po czym usunąć znaleziony cykl z grafu i kontynuować proces aż do wyczerpania wszystkich wierzchołków — patrz rys. 2.

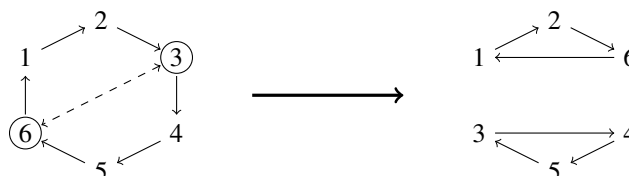


Rys. 1: Graf wyznaczony przez funkcję p dla przykładu z treści zadania. Wierzchołki grafu reprezentują numery słoni, natomiast strzałka z x do y obrazuje relację „słoń x powinien zająć miejsce słonia y ”.



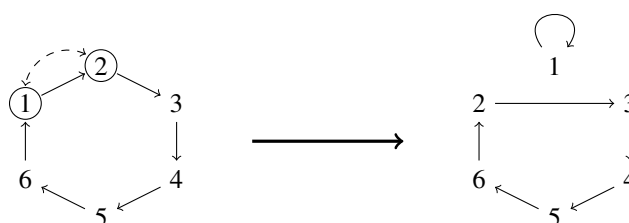
Rys. 2: Rozkład grafu z rys. 1 na cykle proste: trójelementowy, dwuelementowy i jednoelementowy.

Zastanówmy się teraz, jak na tle opisanego rozkładu na cykle proste wygląda operacja zamiany miejscami słoni o numerach e oraz f . Koszt takiej zamiany to $m_e + m_f$. Jeżeli słonie e oraz f znajdują się w tym samym cyklu, to następuje wówczas podział tego cyklu na dwa rozłączne, z których jeden zawiera jednego z tych słoni, a drugi drugiego — patrz rys. 3.



Rys. 3: Zamiana miejscami trzeciego i szóstego słonia w cyklu prowadzi do powstania dwóch cykli trójelementowych.

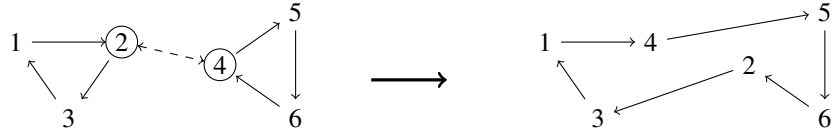
W szczególności, w wyniku zamiany miejscami dwóch słoni, które sąsiadują na cyklu, jeden z powstałych cykli jest jednoelementowy, co oznacza dokładnie tyle, że po tej zamianie jeden ze słoni znajduje się na swojej pozycji docelowej (rys. 4).



Rys. 4: Zamiana miejscami pierwszego i drugiego słonia w cyklu powoduje, że pierwszy słoń trafia na właściwą pozycję.

74 Słonie

Z kolei jeżeli słonie e oraz f należą do różnych cykli, to zamiana ich miejscami powoduje sklejenie tych cykli w jeden (rys. 5).



Rys. 5: Zamiana miejscami słoni należących do różnych cykli.

Rozwiązanie wzorcowe¹

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $|C|$ — długość cyklu C , czyli liczba wierzchołków grafu w nim zawartych
- $\text{suma}(C)$ — suma mas słoni należących do cyklu C
- $\min(C)$ — masa najlżejszego słonia na cyklu C
- \min — masa najlżejszego słonia w ogóle.

Naszym celem jest sprowadzenie układu cykli reprezentowanego przez permutację p do takiego, który będzie złożony wyłącznie z cykli jednoelementowych. W rozwiązaniu wzorcowym każdy cykl C rozpatrujemy osobno, a wspomniane przekształcenie realizujemy, stosując do C jedną z następujących metod przestawiania słoni.

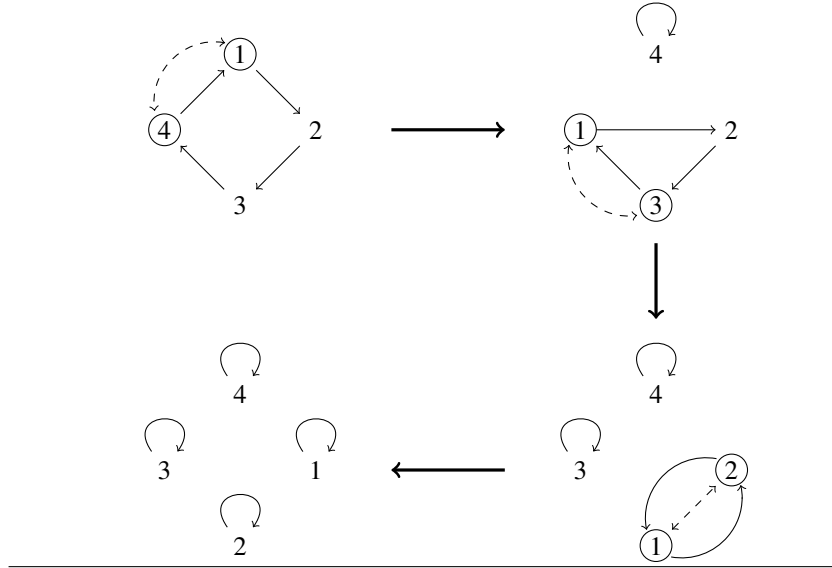
Metoda 1. Porządkujemy cały cykl pojedynczymi zamianami sąsiednich słoni (jak na rys. 4). Za każdym razem zamieniamy najlżejszego słonia z całego cyklu ($\min(C)$) z jego poprzednikiem na cyklu, w wyniku czego poprzednik ten trafia na właściwe miejsce (patrz rys. 6). W ten sposób najlżejszego słonia przemieszczamy łącznie $|C| - 1$ razy, natomiast każdego z pozostałych słoni z cyklu — dokładnie raz. Łączny koszt porządkowania cyklu tą metodą wynosi zatem:

$$\text{metoda}_1(C) = \text{suma}(C) + (|C| - 2) \cdot \min(C). \quad (1)$$

Metoda 2. Tym razem postępujemy bardzo podobnie, jednakże do obsłużenia całego cyklu wykorzystujemy globalnie najlżejszego słonia (\min). W tym celu zamieniamy go z najlżejszym słoniem cyklu ($\min(C)$), a następnie za jego pomocą przestawiamy kolejno wszystkie słonie z cyklu C (poza $\min(C)$) jak poprzednio, po czym z powrotem zamieniamy \min z $\min(C)$. Na ten ciąg zamian można też spojrzeć jak na sklejenie C z cyklem zawierającym \min , po którym następuje ustawienie wszystkich słoni z C na właściwych miejscach za pomocą pojedynczych zamian ze słoniem \min . W ten sposób najlżejszy słoń w całym zoo zostaje przemieszczony $|C| + 1$ razy, najlżejszy w cyklu — 2 razy, a każdy z pozostałych słoni tego cyklu — dokładnie raz. Łączny koszt wszystkich przestawień to wówczas:

$$\text{metoda}_2(C) = \text{suma}(C) + \min(C) + (|C| + 1) \cdot \min. \quad (2)$$

¹Duża część opisu rozwiązania wzorcowego została zaczerpnięta z pracy [37].



Rys. 6: Porządkowanie czteroelementowego cyklu za pomocą pierwszej metody. Zakładamy, że najbliższy słoń ma numer 1.

Okazuje się, że w całym rozwiązaniu wystarczy wziąć pod uwagę jedynie dwie opisane metody i dla każdego cyklu w rozkładzie do uporządkowania użyć korzystniejszej z nich². Ostatecznie otrzymujemy następujący minimalny koszt poprzeszawiania słoń:

$$\sum_{i=1}^c \min(\text{metoda}_1(C_i), \text{metoda}_2(C_i)). \quad (3)$$

Implementacja

Jako podsumowanie słownego opisu rozwiązania wzorcowego umieszczamy poniższy jego pseudokod. Łatwo sprawdzić, że cały algorytm ma złożoność czasową $O(n)$. Konkretnie implementacje tego algorytmu można znaleźć w plikach `slo.cpp`, `slo1.java` oraz `slo2.pas`.

```

1: { Konstrukcja permutacji  $p$ . }
2: for  $i := 1$  to  $n$  do  $p[b_i] := a_i$ ;
3:
4: { Rozkład  $p$  na cykle proste. }
5:  $odw : \text{array}[1..n] := (\text{false}, \text{false}, \dots, \text{false})$ ;
6:  $c := 0$ ;
7: for  $i := 1$  to  $n$  do
8:   if not  $odw[i]$  then begin
9:      $c := c + 1$ ;  $x := i$ ;

```

²Dodajmy tylko, że dla niektórych cykli zachodzi $\min(C) = \min$, i wówczas druga metoda traci sens, jednakże nie trzeba się tym faktem przejmować, gdyż wówczas i tak $\text{metoda}_2(C) > \text{metoda}_1(C)$.

```

10:   while not odw[x] do begin
11:       odw[x] := true;
12:        $C_c := C_c \cup \{x\}$ ;
13:        $x := p[x]$ ;
14:   end
15: end
16:
17: { Wyznaczenie parametrów cykli. }
18:  $min := \infty$ ;
19: for  $i := 1$  to  $c$  do begin
20:      $suma(C_i) := 0$ ;  $min(C_i) := \infty$ ;
21:     forall  $e \in C_i$  do begin
22:          $suma(C_i) := suma(C_i) + m_e$ ;
23:          $min(C_i) := \min(min(C_i), m_e)$ ;
24:     end
25:      $min := \min(min, min(C_i))$ ;
26: end
27:
28: { Obliczenie wyniku. }
29:  $w := 0$ ;
30: for  $i := 1$  to  $c$  do begin
31:      $metoda_1(C_i) := suma(C_i) + (|C_i| - 2) \cdot min(C_i)$ ;
32:      $metoda_2(C_i) := suma(C_i) + min(C_i) + (|C_i| + 1) \cdot min$ ;
33:      $w := w + \min(metoda_1(C_i), metoda_2(C_i))$ ;
34: end
35: return  $w$ ;

```

Uzasadnienie poprawności

Na sam koniec opisu rozwiązania wzorcowego pozostawiliśmy jego dowód poprawności. Jest on, niestety, trochę skomplikowany, jednakże jest to jedyna niezawodna metoda sprawdzenia tego, czy w rozwiązaniu nie zapomnieliśmy o żadnym z przypadków.

Jeżeli C jest cyklem, to przez

$$\text{koszt}(C) = \min(\text{metoda}_1(C), \text{metoda}_2(C))$$

oznaczymy koszt uporządkowania tego cyklu w rozwiązaniu wzorcowym. Niech dalej $OPT(p)$ oznacza najmniejszy możliwy koszt poprzestawiania wszystkich słoni zgodnie z zarządzeniem dyrektora. Aby wykazać poprawność rozwiązania wzorcowego, wystarczy udowodnić, że

$$OPT(p) \geq \sum_{i=1}^c \text{koszt}(C_i). \quad (4)$$

Nierówność (4) udowodnimy przez indukcję względem liczby zamian wykonywanych w rozwiązaniu optymalnym. Przypadek zerowej liczby zamian jest trywialny. Załóżmy

więc, że (4) zachodzi dla wszystkich permutacji, dla których algorytm optymalny wykonuje $k - 1$ zamian, i niech p będzie dowolną permutacją, do której uporządkowania algorytm ten potrzebuje k zamian. Musimy udowodnić, że (4) zachodzi także dla p .

Przyjrzyjmy się pierwszemu krokowi rozwiązania optymalnego „OPT” uruchomionego dla p . Załóżmy, że są w nim zamieniane słonie e oraz f . Permutację po ich zamianie oznaczmy przez p' — uporządkowanie jej przez algorytm optymalny wymaga $k - 1$ zamian, więc wiadomo, że nierówność (4) zachodzi dla p' . W zależności od wzajemnego położenia e oraz f wyróżniamy teraz kilka przypadków.

Przypadek 1: e i f należą do tego samego cyklu w p . Dla ustalenia uwagi niech $e, f \in C_1$. Po zamianie słoni cykl C_1 rozpada się na dwa mniejsze cykle (patrz rys. 3). Oznaczmy te cykle przez A i B oraz niech $e \in A$ i $f \in B$. Wówczas rozkład p' na cykle proste wygląda tak: $\{A, B, C_2, C_3, \dots, C_c\}$, a stąd i z (4) dla p' mamy:

$$OPT(p) = OPT(p') + m_e + m_f \geq \text{koszt}(A) + \text{koszt}(B) + \sum_{i=2}^c \text{koszt}(C_i) + m_e + m_f.$$

Aby pokazać (4) dla p , wystarczy zatem udowodnić, że:

$$\text{koszt}(A) + \text{koszt}(B) + m_e + m_f \geq \text{koszt}(C_1). \quad (5)$$

Dalsze uzasadnienie możemy podzielić na trzy przypadki:

Przypadek 1.1: $\text{koszt}(A) = \text{metoda}_1(A)$ i $\text{koszt}(B) = \text{metoda}_1(B)$. Korzystając z faktu, że zbiór słoni zawartych w cyklu C_1 jest sumą zbiorów słoni odpowiadających A oraz B , oraz z tego, że każda z wartości $\min(A)$, $\min(B)$, m_e , m_f jest nie mniejsza niż $\min(C_1)$, mamy:

$$\begin{aligned} \text{metoda}_1(A) + \text{metoda}_1(B) + m_e + m_f &= \\ &= \text{suma}(A) + (|A| - 2) \cdot \min(A) + \text{suma}(B) + (|B| - 2) \cdot \min(B) + m_e + m_f \geq \\ &\geq \text{suma}(C_1) + (|C_1| - 2) \cdot \min(C_1) = \text{metoda}_1(C_1) \geq \text{koszt}(C_1). \end{aligned}$$

Intuicyjnie, pokazaliśmy, że zamiast rozbijać cykl C_1 na cykle A i B (za pomocą zamiany e z f) i każdy z nich porządkować za pomocą pierwszej metody, można równie dobrze od razu uporządkować cały cykl C_1 za pomocą tej metody.

Przypadek 1.2: $\text{koszt}(A) = \text{metoda}_1(A)$ i $\text{koszt}(B) = \text{metoda}_2(B)$ (lub odwrotnie). Podobnie jak poprzednio, w poniższej nierówności liczba składników nie zmienia się, a jedynie zastępujemy cięższe słonie przez $\min(C_1)$ lub \min :

$$\begin{aligned} \text{metoda}_1(A) + \text{metoda}_2(B) + m_e + m_f &= \\ &= \text{suma}(A) + (|A| - 2) \cdot \min(A) + \text{suma}(B) + \min(B) + (|B| + 1) \cdot \min + m_e + m_f \geq \\ &\geq \text{suma}(C_1) + \min(C_1) + (|C_1| + 1) \cdot \min = \text{metoda}_2(C_1) \geq \text{koszt}(C_1). \end{aligned}$$

Tym razem intuicja stojąca za powyższym ciągiem przekształceń jest taka, że zamiast wprowadzać najlżejszego słonia tylko do cyklu B , można go wprowadzić od razu do całego C_1 , co nie przynosi żadnej straty, a może się dodatkowo opłacić przy porządkowaniu fragmentu C_1 odpowiadającego cyklowi A .