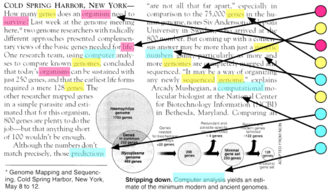
Тематическое моделирование

Виктор Китов

victorkitov.github.io

Курс поддержан фондом 'Интеллект'



Победитель конкурса VK среди курсов по IT

Содержание

Тематическое моделирование

- Предположим, мы наблюдаем D документов=последовательность слов.
- $D = \#$[документов], $N = \#$[слов во всех документах], $W = \#$[уникальных слов языка].
- (d_n, w_n) - (индекс документа, индекс слова) на словопозиции $n = \overline{1, N}$.
- Текстовая коллекция: цепочка пар $\{(d_n, w_n)\}_{n=\overline{1,N}}$.
- Предположим:
    - каждое слово порождено какой-то ненаблюдаемой «темой» $z_n \in \{1, 2, ...Z\}$.
        - слово генерируется темой <u>независимо от документа</u>
    - объекты $\{(d_n, z_n, w_n)\}_{n=\overline{1,N}}$ независимы

Процесс порождения данных (модель pLSA)

- Для каждой словопозиции итеративный процесс генерации данных (d->z->w):
    - генерируется номер документа: $d \sim p(d)$
    - генерируется тема: $z \sim p(z|d)$
    - генерируется слово: $w \sim p(w|z)$
- Комментарии:
    - Каждый документ определяет распределение тем: $z \sim p(z|d)$
    - Каждая тема определяет распределение слов: $w \sim p(w|z)$
    - Только тема определяет распределение слов: $p(w|z,d) = p(w|z)$

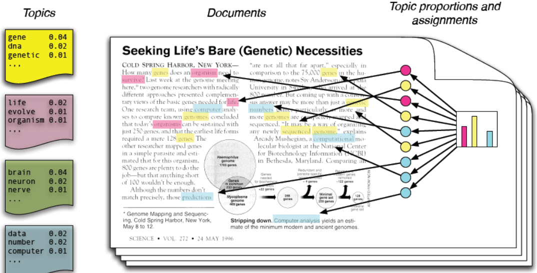
Применения

- Исходное представление документа
  $d \to [p(w=1|d), ...p(w=W|d)] \in \mathbb{R}^W$.
- Новое представление документа
  $d \to [p(z=1|d), ...p(z=Z|d)] \in \mathbb{R}^Z$
  - высокоуровневое семантическое представление: $Z << W$.
- Получаем темы,определяющие коллекцию документов:
  - тема=распределения на словах
    $z \to [p(w=1|z), ...p(w=W|z)] \in \mathbb{R}^W, \quad z = \overline{1, Z}$.
  - интерпретация темы: самые частотные в ней слова.
  - #тем необходимо задавать заранее.

Сегментация текста

Обозначим каждую словопозицию (d, w) самой вероятной темой:

$$
\begin{aligned}
(d, w) \to \arg\max_z p(z|d, w) &= \arg\max_z \frac{p(z, d, w)}{p(d, w)} = \\
&= \arg\max_z p(d)p(z|d)p(w|z) \\
&= \arg\max_z p(z|d)p(w|z)
\end{aligned}
$$



Применения

- Применения тематического моделирования:
  - снижение размерности
  - извлечение высокоуровневых семантических признаков
  - кластеризация документов
  - суммаризация документов
  - сегментация тем внутри документов
  - кластеризация слов (по темам, в которых они совстречаются)

Др. области

- Тематическое моделирование может быть применено к любым объектам=последовательностям сущностей.
    - ДНК=последовательности генов
    - видеозапись=последовательность событий
    - химические вещества=последовательности молекул
    - финансовые расчеты=последовательность транзакций

pLSA как матричное разложение

- Тематическая модель: $p(w|d) = \sum_z p(z|d)p(w|z)$
- В матричной форме:

$$X = BC, \quad X = \{p(w|d)\} \in \mathbb{R}^{DxW},$$
$$B = \{p(z|d)\} \in \mathbb{R}^{DxZ},\ C = \{p(w|z)\} \in \mathbb{R}^{ZxW}$$

- B, C - неотрицательные матрицы распределений.
    - удовлетворяют $sum(A[d,:]) = 1,\ sum(C[z,:]) = 1\ \forall d, z.$

pLSA как матричное разложение

- Тематическая модель: $p(w|d) = \sum_z p(z|d)p(w|z)$
- В матричной форме:

$$X = BC, \quad X = \{p(w|d)\} \in \mathbb{R}^{DxW},$$
$$B = \{p(z|d)\} \in \mathbb{R}^{DxZ},\ C = \{p(w|z)\} \in \mathbb{R}^{ZxW}$$

- B, C - неотрицательные матрицы распределений.
    - удовлетворяют $sum(A[d,:]) = 1,\ sum(C[z,:]) = 1\ \forall d, z.$
- Тематическая модель: $p(d, w) = \sum_z p(d)p(z|d)p(w|z)$
- В матричной форме:

$$X = ABC,$$
$$A = \mathrm{diag}\{p(d)\} \in \mathbb{R}^{DxD}$$

Содержание

E-шаг для независимых (x_n, z_n)

- Рассмотрим частный случай независимых наблюдений $\{(x_n, z_n)\}_{n=1}^N$, x_n - наблюдаемые, z_n - латентные
  - пример: смесь Гауссиан, z_n-#компоненты, x_n-реализация.
- E-шаг становится:

$$q(Z) = p(Z|X,\theta) = p(z_1|x_1,\theta)...p(z_N|x_N,\theta) = q_1(z_1)...q_N(z_N)$$

$$q_n(z_n) = p(z_n|x_n,\theta)$$

М-шаг для независимых (x_n, z_n)

Для независимых объектов (x_n, z_n):

$$\sum_Z q(Z) \ln p(X, Z|\theta)\} = \sum_{z_1,\ldots z_N} q_1(z_1)\ldots q_N(z_N) \ln \prod_{n=1}^N p(x_n, z_n|\theta)$$

$$= \sum_{z_1,\ldots z_N} q_1(z_1)\ldots q_N(z_N) \ln p(x_n, z_n|\theta) =$$

$$= \sum_{n=1}^N q_n(z_n) \ln p(x_n, z_n|\theta) \prod_{k\neq n} \left(\underbrace{\sum_{z_k} q_k(z_k)}_{=1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^N q_n(z_n) \ln p(x_n, z_n|\theta) \to \max_\theta$$

Содержание

EM алгоритм для pLSA

- $\theta = \left(\{p(d)\}_{d=\overline{1,D}}; \{p(z|d)\}_{z=\overline{1,Z}}^{d=\overline{1,D}}; \{p(w|z)\}_{w=\overline{1,W}}^{z=\overline{1,Z}} \right)$
- E-шаг:

$$p(z|d,w) = \frac{p(z,d,w)}{p(d,w)} = \frac{p(d)p(z,w|d)}{p(d)p(w|d)} = \frac{p(z|d)p(w|z)}{p(w|d)}$$

- M-шаг:

$$\mathbb{E}_{q(z)} \ln p\left(\{d_n, z_n, w_n\}_{n=\overline{1,N}} \right) \to \max_{p(d), p(z|d), p(w|z)}$$

M-шаг

$$\mathbb{E}_{q(z)} \ln p\left(\{d_n, z_n, w_n\}_{n=\overline{1,N}}\right) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{z_n=1}^{Z} p\left(z_n | d_n, w_n\right) \ln p\left(d_n, z_n, w_n\right)$$

$$= \sum_{d=1}^{D} \sum_{w=1}^{W} N_{dw} \sum_{z=1}^{Z} p\left(z | d, w\right) \ln p\left(d, z, w\right)$$

$$= \sum_{d=1}^{D} \sum_{w=1}^{W} N_{dw} \sum_{z=1}^{Z} p\left(z | d, w\right) \ln \left[p(d) p(z|d) p(w|z)\right]$$

$$\to \max_{p(d), p(z|d), p(w|z)}$$

$$\sum_{d} p(d) = 1, \quad \sum_{z} p(z|d) = 1, \quad \sum_{w} p(w|z) = 1 \quad \forall d, z, w.$$

M-шаг

$$\mathcal{L} = \sum_{d=1}^{D}\sum_{w=1}^{W} N_{dw} \sum_{z=1}^{Z} p\left(z|d,w\right)\ln p(d)$$
$$+\sum_{d=1}^{D}\sum_{w=1}^{W} N_{dw} \sum_{z=1}^{Z} p\left(z|d,w\right)\ln p(z|d)+$$
$$+\sum_{d=1}^{D}\sum_{w=1}^{W} N_{dw} \sum_{z=1}^{Z} p\left(z|d,w\right)\ln p(w|z)+$$
$$+\alpha\left(1-\sum_{d} p(d)\right)+\sum_{d}\beta_d\left(1-\sum_{z} p(z|d)\right)$$
$$+\sum_{z}\gamma_z\left(1-\sum_{w} p(w|z)\right)\to \text{extr}_{p(d),p(z|d),p(w|z)}$$

М-шаг: p(d)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p(d)} = \sum_w N_{dw} \sum_z p(z|d,w) \frac{1}{p(d)} - \alpha = 0$$

$$p(d) = \frac{1}{\alpha} \sum_w N_{dw} \sum_z p(z|d,w) = \frac{1}{\alpha} \sum_w N_{dw} = N_d$$

$$1 = \sum_d p(d) = \frac{1}{\alpha} \sum_d N_d = \frac{N}{\alpha} \implies \alpha = N$$

$$p(d) = \frac{N_d}{N} \quad \text{(constant)}$$

М-шаг: p(z|d)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p(z|d)} = \sum_w N_{dw} p(z|d,w) \frac{1}{p(z|d)} - \beta_d = 0$$

$$p(z|d) = \frac{1}{\beta_d} \sum_w N_{dw} p(z|d,w) = \frac{N_{dz}}{\beta_d}$$

$$1 = \sum_z p(z|d) = \frac{1}{\beta_d} \sum_w N_{dw} \sum_z p(z|d,w) = \frac{1}{\beta_d} \sum_w N_{dw} = \frac{N_d}{\beta_d}$$

$$\beta_d = N_d \implies p(z|d) = \frac{N_{dz}}{N_d}$$

М-шаг: p(w|z)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p(w|z)} = \sum_d N_{dw} p(z|d,w) \frac{1}{p(w|z)} - \gamma_z = 0$$

$$p(w|z) = \frac{1}{\gamma_z} \sum_d N_{dw} p(z|d,w) = \frac{N_{wz}}{\gamma_z}$$

$$1 = \sum_w p(w|z) = \frac{1}{\gamma_z} \sum_d \sum_w N_{dw} p(z|d,w)$$

$$\gamma_z = \sum_d \sum_w N_{dw} p(z|d,w) = N_z$$

$$p(w|z) = \frac{N_{wz}}{N_z}$$

ЕМ алгоритм - реализация

- Инициализируем $N_{wd}, N_d, p(w|d)=\frac{N_{wd}}{N_d}$, инициализируем случайно $p(z|d)$ и $p(w|z)$, так что $\sum_z p(z|d)=1, \sum_w p(w|z)=1$.
- Повторять до сходимости:
  - $p(z|d,w):=\frac{p(z|d)p(w|z)}{p(w|d)} \quad \forall d,z,w.$
  - $N_{dz}:=0; \quad N_{wz}:=0; \quad N_z:=0 \quad \forall d,z,w.$
  - для $d=\overline{1,D}$:
    - для $w=\overline{1,W}$:
      $N_{dwz}:=N_{dw}p(z|d,w)$
      $N_{dz}:=N_{dz}+N_{dwz}, \; N_{wz}:=N_{wz}+N_{dwz}$
    - $N_z:=N_z+N_{dz}$

$$p(z|d):=\frac{N_{dz}}{N_d}; \quad p(w|z):=\frac{N_{wz}}{N_z}$$

Содержание

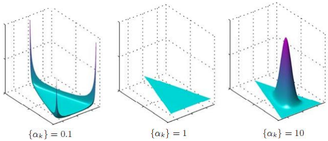
Метод Latent Dirichlet Allocation (LDA)

- Байесовское расширение pLSA
- Распределения $p(z|d)$ и $p(w|z)$ - сл. величины с априорными распределениями:

$$p(z|d) \sim Dir(\alpha), \quad p(w|z) \sim Dir(\beta)$$

- Распределение Дирихле $x \sim Dir(\alpha)$ определено для $x \in \mathbb{R}^K: \ x_n \in (0,1), \ \sum_{n=1}^{K} x_n = 1$: $p(x) \propto x_1^{\alpha-1} x_2^{\alpha-1} ... x_K^{\alpha-1}$.

Dirichlet$(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_K)$ для $\alpha_1 = ... = \alpha_K = \alpha$.



Переменные в LDA

Параметры:

- u-параметр априорного распределения тем $p(z|d)$
- v-параметр априорного распределения слов $p(w|z)$

Оцениваемые переменные:

- $\varphi_z = p(w|z)$, $w = \overline{1, W}$, $z = \overline{1, Z}$
- $\theta_d = p(z|d)$, $z = \overline{1, Z}$, $d = \overline{1, D}$

Латентные переменные:

- темы для каждой словопозиции:

$$z_i^d, \quad d = \overline{1, D},\ i = \overline{1, n_d}$$

Наблюдаемые величины:

- слова и документы на каждой словопозиции:

$$w_i^d, \quad d = \overline{1, D},\ i = \overline{1, n_d}$$

Процесс порождения данных в LDA[1]

- Инициализация:
    - сгенерировать $p(z|d) \sim Dir(u), \quad d = \overline{1, D}$
    - сгенерировать $p(w|z) \sim Dir(v), \quad z = \overline{1, Z}$
- Для каждой словопозиции:
    - сгенерировать номер документа: $d \sim p(d)$
    - сгенерировать тему: $z \sim p(z|d)$
    - сгенерировать слово: $w \sim p(w|z)$

[1] Выведите MAP-оценки для LDA при $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$.

Расширения тематических моделей

- Автоматический выбор числа тем (например HDP)
    - но нужно задавать «склонность создавать новую тему»
- Иерархическая система тем
    - жадная послойная настройка
    - одновременная настройка всей иерархии
- Помимо слов в документе могут моделироваться др. сущности:
    - дискретные: заголовок, автор, ключевые слова, ссылки, читатели документа.
    - непрерывные: длина документа, время создания.
- Темы с требуемыми свойствами (регуляризация)
    - темы из слов общей лексики, научных терминов
    - регуляризатор разреженности тем (как LDA), непохожести тем и др.