INTERPOLACION
MANO SPLINE CUBICO

ANÁLISIS NÚMERICO

Victor leonardo Barón Castrillo
Bogotá Colombia

baronvl@javeriana.edu.co
2020

Resumen: A continuación, usted podrá encontrar dentro del cuerpo de este documento la solución que corresponde al punto 5 del taller #3 de Interpolación de la asignatura Análisis Numérico, este trabajo tiene como objetivo interpolar los datos que describen el contorno de la silueta de una mano dada con anterioridad.

1. INTRODUCCIÓN

En Analisis Numerico y otras asignaturas de modelamiento matemático, existe la necesidad de conocer el comportamiento de una serie de datos. Esto nos lleva a realizar diversos análisis que conduzcan a conocer comportamientos de datos conocidos dentro de una serie de información. Muchos métodos pueden determinar el comportamiento de esta serie de datos y logran encontrar información aproximada dentro de esta. Interpolar es conseguir nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos.

Basados en lo anterior se plantea la descripción del método utilizado en este documento. Los Splines cúbicos, son la herramienta que ayuda a interpolar una serie de datos discretos usando polinomios de grado 3.

2. MARCO TEÓRICO

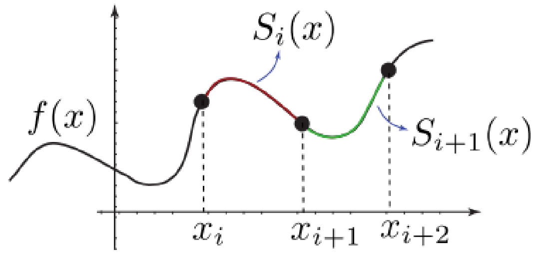

Imagen 1. Trazadores Cúbicos. Tomado de: www. arturoguillen90.wordpress.com

Un Spline, describe una curva seccionada y genera polinomios que describen la curva a trozos. Este se encuentra definido de la siguiente manera,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \quad \vdots \\ S_{n-1}(x) & \text{si} \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

Imagen 2. Definicion del polinomio. Tomada de: www. arturoguillen90.wordpress.com

Donde ***S(x)*** representa los polinomios que describen a la función ***f(x).*** Existe una serie de condiciones para crear un Spline Cúbico, donde se pueden establecer dos tipos de fronteras; ***frontera libre*** o ***natural*** y ***frontera sujeta***.

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \ \textbf{(frontera libre o natural)}$$
$$S'(x_0) = f'(x_0) \ \text{ y } \ S'(x_n) = f'(x_n) \ \textbf{(frontera sujeta)}$$

Imagen 3. Condiciones de frontera. Tomada de: www. arturoguillen90.wordpress.com

Teniendo en cuenta la teoría anterior, procedemos a realizar el planteamiento del problema.

3. PROBLEMA

La ilustración dada por Rstudio, luego de suministra los 67 puntos es la siguiente,

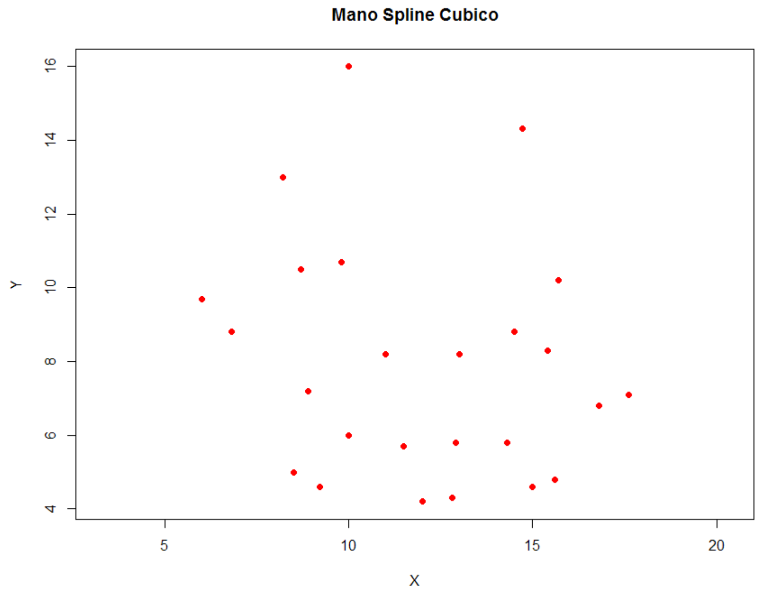

Imagen 4. Puntos suministrados, Tomado de: Rstudio

El objetivo de este problema es la construcción de un interpolador utilizando la menor cantidad de puntos ***K*** y reproducir el dibujo completo de la silueta de la mano (con gran exactitud) dada por la información suministrada.

Luego de comprender y analizar la información necesaria para llevar a cabo la solución, se realizó el siguiente análisis teniendo en cuenta que se plantea una solución de interpolación usando los Splines Cúbicos.

4. ANÁLISIS DEL PROBLEMA

A continuación, se definen una serie de pasos, que tenían como objetivo resolver el problema,

Se definieron las entradas;

ENTRADAS

Se espera recibir una serie de puntos compuestos de coordenadas ***x,y.***

- $X = [x0 , x1 , x2 ,\ldots , xn]$ y
- $Y = [y0 ,y1 ,y2 , \ldots , yn]$, tales que para cada $yi = s(xi\ )$

Se pudieron establecer las siguientes condiciones,

- $s(xi)$ es un polinomio de grado ≤ K en cada subintervalo.
- $s(xi)$ tiene derivada continua hasta de orden K-1 en = $[x0, xn]$.

Una vez definidas las entradas se procedió a definir las salidas,

SALIDAS

Como se está usando la interpolación con Spline Cúbico se tendrá un sistema lineal descrito por una ecuación vectorial de la forma, ***As = b.*** La solución del sistema de ecuaciones descrito por la ecuación vectorial proporciona los valores de los coeficientes de cada Spline Cúbico que describirá la totalidad de los puntos.

Analizando la forma de los spline cúbicos se tiene que:

- $fk = a0,k + a1,kx + a2,kx\ 2 + a3,kx\ 3$ k=1,…,n
- $fk\ (xk-1) = yk-1$
- $f'\ k\ (xk) = f'\ k+1\ (xk)$
- $f''\ k\ (xk) = f''\ k+1\ (xk)$

Donde es posible definir lo siguiente: ***h(i) = x(i+i) - x(i)***

Luego se calcula A, con lo cual se tiene que:

- cuando (i,j) i = j = 2(hi+hi+1)
- cuando (i,j-1) = hi
- cuando (i,j+1) = hi+1.

Después de esto, se procede a calcular B, con lo cual se tiene que:

- cuando (i,1) = 6((yi+2-yi+1)/ hi+1-(yi+1-yi)/ hi)

Con todos los parámetros calculados, podemos encontrar los coeficientes de ***As=B.***

SELECCIÓN DE PUNTOS

La selección de puntos se manera poco práctica, ya que se tomaron de manera cualitativa respecto al comportamiento de los Splines Cúbicos. Al observar el comportamiento del Spline al ingresar ciertos puntos, se pudo ver que para describir tramos de la mano poco suaves era optimo elegir puntos aproximadamente cercanos.

A continuación, se presenta una imagen que se obtuvo como resultado en la etapa de solución. La finalidad de esta imagen es, dar a conocer al lector la naturaleza de la elección de los puntos utilizados en la interpolación.

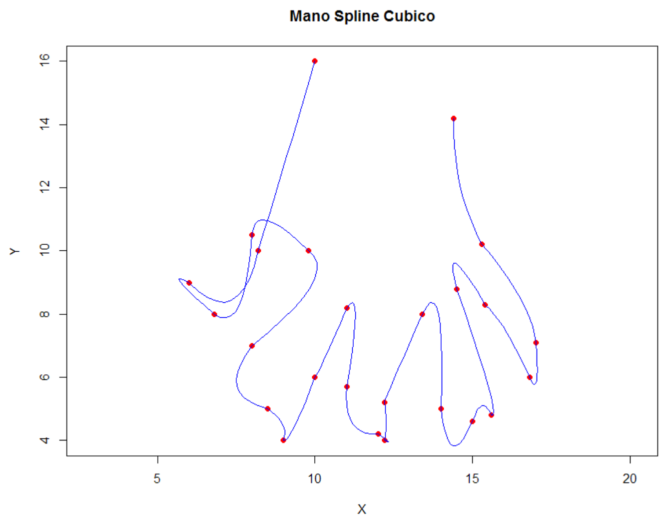

Imagen 5. Primera prueba selección de puntos, Tomada de: Rstudio

Al observar la imagen anterior, es claro ver el comportamiento de manera errónea por parte de la interpolación luego de seleccionar una serie de puntos sin ningún tipo de criterio. Se puede reconocer que la selección de datos de manera que ciertos parámetros sean considerados.

También se puede observar que una cantidad mayor de puntos no implica obtener una mayor precisión. Por esta razón, podemos decir que en el método la precisión está definida por los puntos en particular que se escojan, y no por la cantidad de estos.

5. SOLUCIÓN

Para dar solución a este problema se desarrolló un código en el IDE de Rstudio. Este código recibe los puntos y calcula el error en la interpolación, encuentra los respectivos polinomios que describen los puntos ingresados.

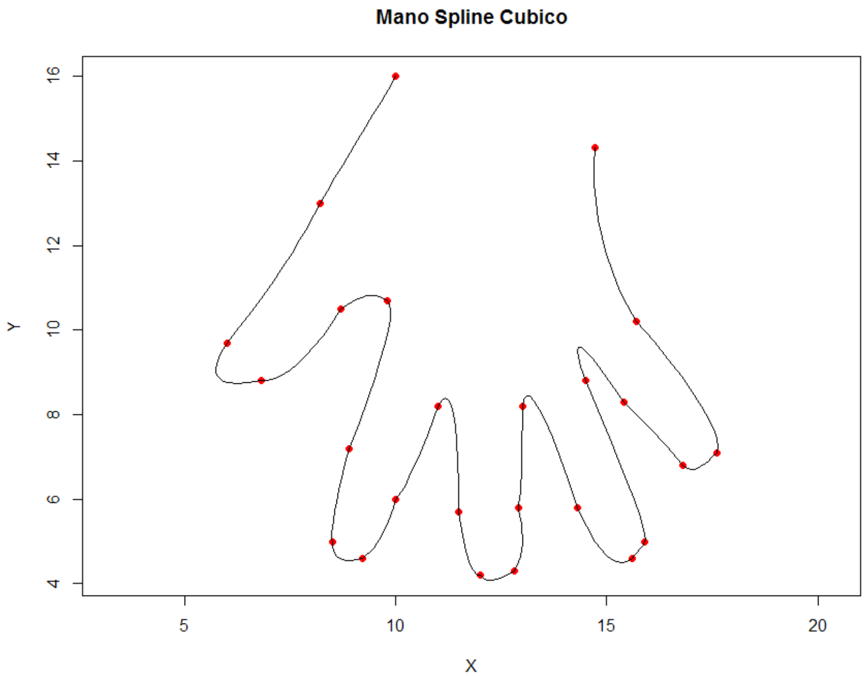

Imagen 6. Mano Final. Tomado de: Rstudio

Para la realización de esta interpolación, los puntos que se tuvieron en cuenta fueron los siguientes [tabla 1],

Numero	*X*	*Y*
1	10	16
2	8.2	13
3	6.0	9.7
4	6.8	8.8
5	8.7	10.5
6	9.8	10.7
7	8.9	7.2
8	8.5	5
9	9.2	4.6
10	10.0	6.0
11	11.0	8.2
12	11.5	5.7
13	12.0	4.2
14	12.8	4.3
15	12.9	5.8
16	13.0	8.2
17	14.3	5.8
18	15.6	4.6
19	15.9	5.0
20	14.5	8.8
21	15.4	8.3
22	16.8	6.8
23	17.6	7.1
24	15.7	10.22
25	14.71	14.33

Tabla 1. Puntos Seleccionados. Tomado de: Rstudio

6. CONCLUSIONES

- El problema de la silueta de la mano se pudo resolver gracias a la utilización de la interpolación, aunque no de la forma óptima, debido a que, si se hubiera considerado la selección de los puntos dentro del código, la solución que arrojaría seria de manera general y funcionaría para cualquier distribución de datos.

- Comprender y analizar el funcionamiento de los Splines nos ayudó mucho al momento de validar los puntos más significativos al momento de definir una serie de datos para realizar la interpolación.

7. UBICACIÓN

La solución implementada en el código .R de la silueta de la mano, la podrá encontrar en el siguiente link, https://github.com/victorlbaron/AnalisisNumerico/tree/master/Talleres/Taller_2_Interpolacion/Mano_Splines

8. REFERNCIAS

- "Revista Digital Matematica, Educación e Internet", Tecdigital.tec.ac.cr, 2019. [Online]. Available: https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ .
- "Interpolación", Es.wikipedia.org, 2019. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n.
- https://www.um.es/geograf/sigmur/sigpdf/temario_6.pdf