Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Helio Pedro Amaral Souto

Nova Friburgo, 19 de março de 2024

Graduação em Engenharia

1 Sistema Massa-Mola com Amortecimento

Em muitas aplicações práticas, como por exemplo o sistema de amortecimento de um veículo, o estudo do movimento de um sistema massa-mola com amortecimento pode ser útil na compreensão desses mecanismos. Na Figura 1, temos uma representação esquemática de um destes sistemas. Uma vez que a mola for distendida, o sistema irá oscilar (ou não) até atingir o repouso.

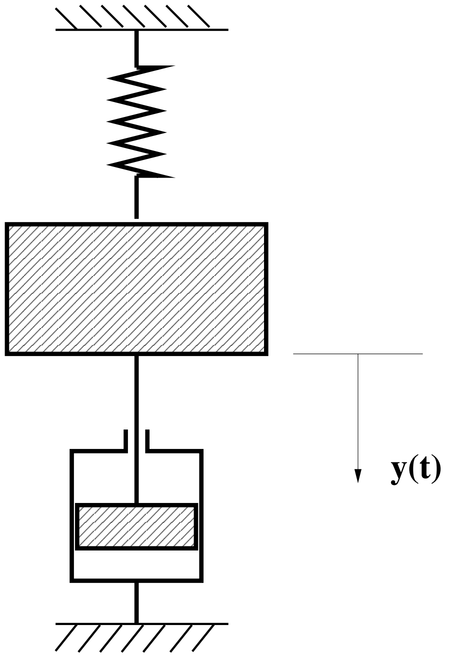

Figura 1: Sistema massa-mola com amortecimento.

A segunda Lei de Newton pode ser aplicada a esse sistema, de modo que a posição y do bloco, como uma função do tempo, será dada mediante a resolução da seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem [1]:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0, \tag{1}$$

onde m representa a massa do bloco, c o coeficiente de amortecimento, k a constante elástica da mola e desprezamos o peso do bloco.

Essa equação pode ainda ser escrita na forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A\frac{dy}{dt} + By = 0, \tag{2}$$

onde, agora, $A = c/m$ e $B = k/m$.

Da teoria das equações diferenciais ordinárias, sabemos que a Equação (2) admite uma solução do tipo [1]

$$y(t) = \exp(Pt)\left[C_1\cos(Qt) + C_2\text{sen}\,(Qt)\right], \tag{3}$$

onde

$$P = -\frac{A}{2}, \tag{4}$$

$$Q = \sqrt{B - \left(\frac{A^2}{4}\right)} \tag{5}$$

e as constantes C_1 e C_2 devem ser determinadas a partir das seguintes condições iniciais:

$$y(0) \;=\; y_0 \tag{6}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} \;=\; 0, \tag{7}$$

onde y_0 indica a posição inicial do bloco e a segunda condição impõe uma velocidade inicial nula para o bloco.
Agora, da primeira condição obtemos

$$C_1 = y_0. \tag{8}$$

Por outro lado, para a determinação da segunda devemos verificar a seguinte igualdade

$$\frac{dy}{dt} = \exp(Pt)\Big[Py_0\cos(Qt) - Qy_0\mathrm{sen}\,(Qt) + PC_2\mathrm{sen}\,(Qt) + QC_2\cos(Qt)\Big] = 0, \tag{9}$$

para $t = 0$. Portanto, dessa última condição chegamos ao valor da segunda constante

$$C_2 = -\left(\frac{P}{Q}\right)y_0 \tag{10}$$

Após substituição desses valores na forma geral da solução analítica, Equação (3), obtemos a forma final da solução teórica

$$y(t) = y_0\exp(Pt)\left[\cos(Qt) - \left(\frac{P}{Q}\right)\mathrm{sen}\,(Qt)\right] \tag{11}$$

e a expressão para a velocidade do bloco é dada por

$$\frac{dy}{dt} = -y_0\exp(Pt)\left(\frac{P^2+Q^2}{Q}\right)\mathrm{sen}\,(Qt) \tag{12}$$

Uma informação importante é a de que a solução analítica será complexa caso

$$B \;>\; \frac{A^2}{4} \tag{13}$$

ou seja,

$$k > \frac{c^2}{4m} \tag{14}$$

e, nesse caso, ela apresentará um decaimento exponencial oscilatório. Caso ela não seja complexa, a solução terá simplesmente um decaimento exponencial não-oscilatório.

Nas Figuras 2 e 3, são apresentados os gráficos das soluções analíticas correspondentes à posição do bloco e à sua velocidade, respectivamente. Na obtenção desses resultados, foram utilizados os seguintes valores: y_0=0,5, v_0=0, m=1, c=1 e k=15 e um incremento de tempo Δt=0,1.

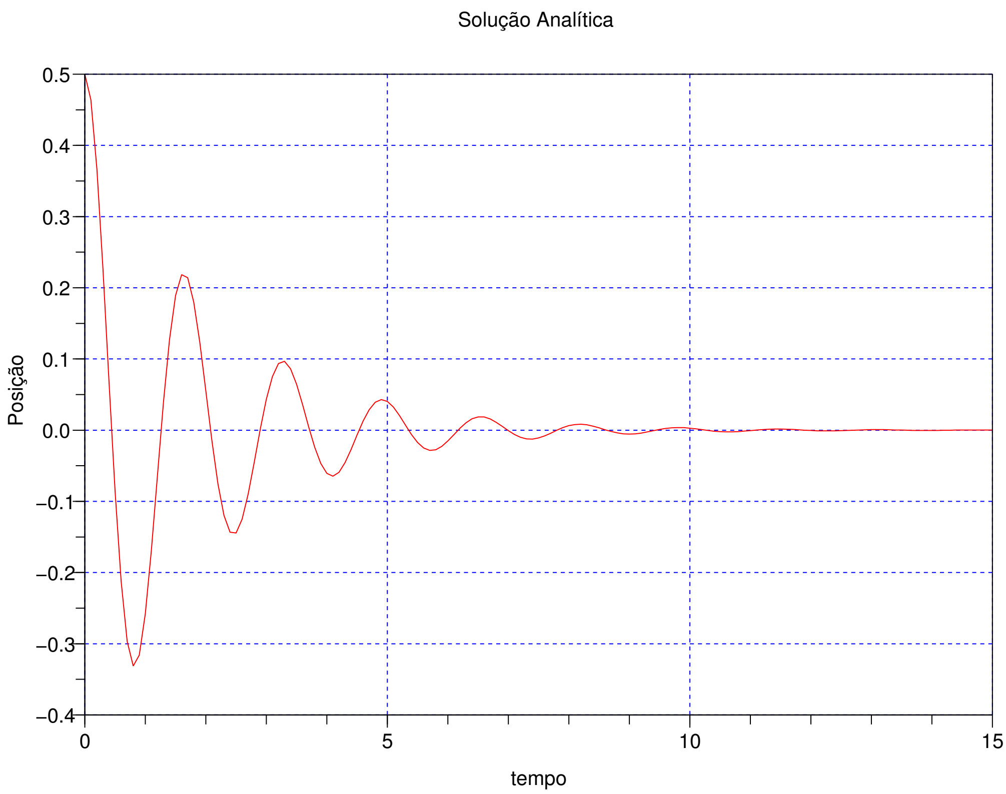

Figura 2: Posição do bloco em função do tempo transcorrido.

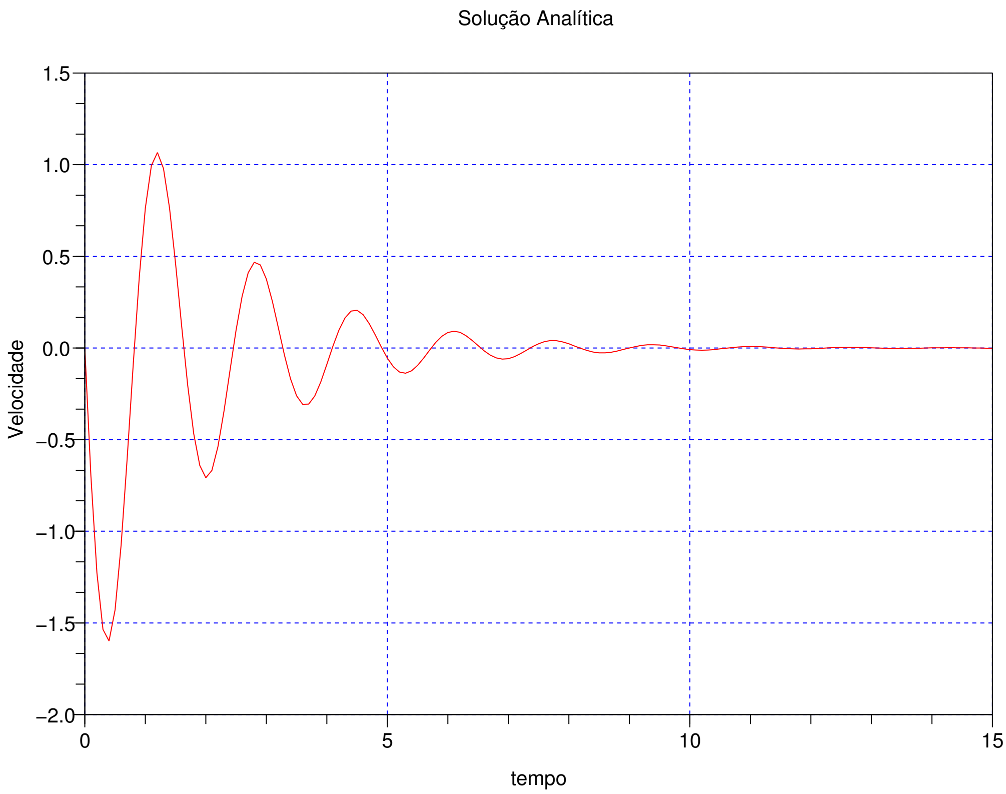

Figura 3: Velocidade do bloco em função do tempo transcorrido.

2 Solução Numérica

A resolução numérica da Equação (2) será realizada mediante a substituição dessa equação diferencial ordinária de segunda ordem, por um sistema equivalente de duas equações ordinárias de primeira ordem, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = v \tag{15}$$

$$\frac{dv}{dt} = -(Av + By) \tag{16}$$

Na resolução desse sistema, empregaremos o Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem 3/8 [2], dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right)\right]\Delta t,$$

onde

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{3}\Delta t,\ y_i + \frac{1}{3}k_1\Delta t\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{2}{3}\Delta t,\ y_i - \frac{1}{3}k_1\Delta t + k_2\Delta t\right)$$

$$k_4 = f\left(t_i + \Delta t,\ y_i + k_1\Delta t - k_2\Delta t + k_3\Delta t\right)$$

cujo algoritmo foi escrito considerando o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{17}$$

A título de exemplo, nas Figuras 4 e 5 são confrontados os resultados das soluções analíticas (11) e (12) com os seus correspondentes numéricos, obtidos mediante o emprego do método de Runge-Kutta Clássico de Quarta Ordem na resolução das equações (15) e (16).

Conforme podemos observar, os resultados numéricos aproximam de maneira satisfatória as soluções analíticas, indicando que o método numérico empregado é acurado e apropriado para a resolução desse tipo de problema.

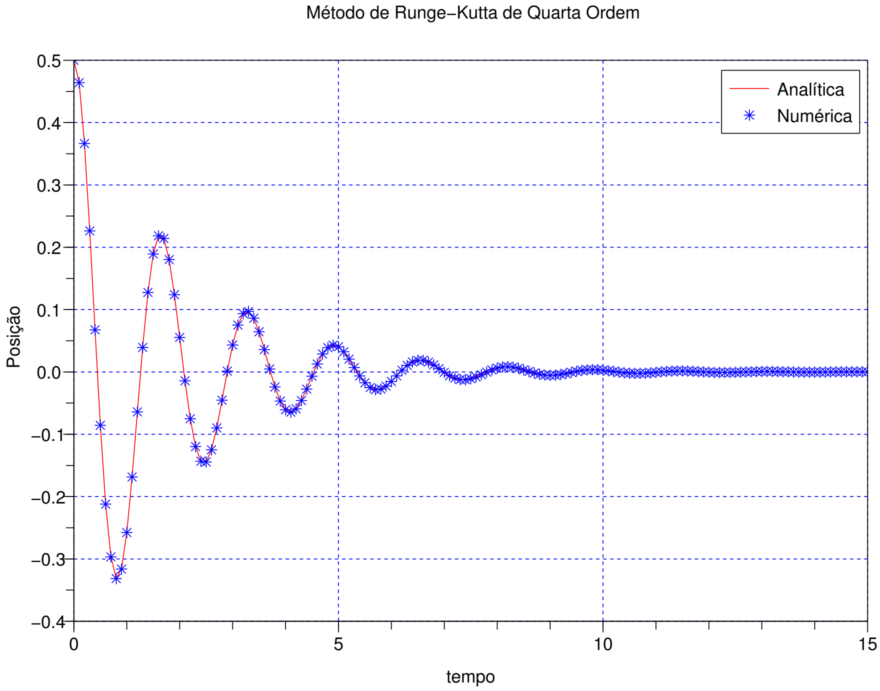

Figura 4: Posição do bloco em função do tempo transcorrido.

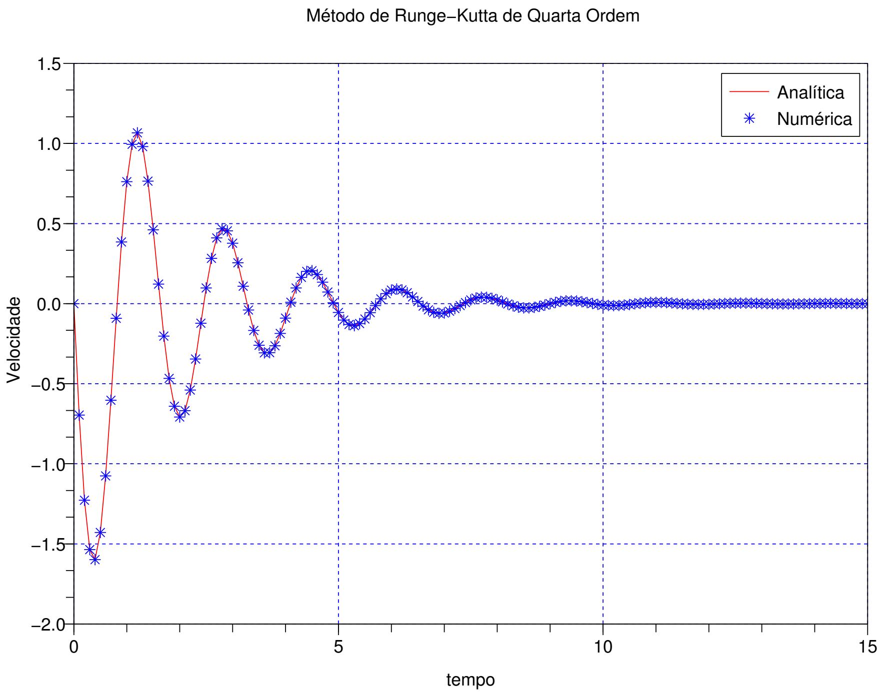

Figura 5: Velocidade do bloco em função do tempo transcorrido.

Os seguintes parâmetros físicos devem ser empregados nas simulações numéricas:

Primeiro caso

$$c = 0 \rightarrow \begin{cases} k &= 0,25 \\ k &= 0,5 \\ k &= 0,75 \\ k &= 1,0 \end{cases} \tag{18}$$

Segundo caso

$$c = 4 \rightarrow \begin{cases} k &= 1,0 \\ k &= 10,0 \\ k &= 50,0 \\ k &= 150,0 \end{cases} \tag{19}$$

sabendo que a massa do bloco é igual a 2.

Escolha um incremento de tempo e obtenha a solução numérica até um tempo t=15 para o primeiro caso e t=10 no segundo. Compare-os com aqueles correspondentes aos valores provenientes da solução analítica. Os resultados devem ser apresentados na forma de uma tabela. Como exemplo, vide a Tabela 1.

Tabela 1: Exemplo da apresentação dos resultados.

Tempo	y_{exato}	$y_{\text{numérico}}$	v_{exato}	$v_{\text{numérico}}$
00,0000	y_0	y_0	00,0000	00,0000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
XX,XXXX	XX,XXXX	XX,XXXX	XX,XXXX	XX,XXXX

O código fonte e a listagem dos resultados devem ser fornecidos em um arquivo no formato PDF, carregado na plataforma Moodle!

Referências

[1] Dennis G. Zill. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.* Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009.

[2] Metin Hatun and Fahri Vatansever. *Differential Equation Solver Simulator for Runge-Kutta Methods.* Uludağ University Journal of The Faculty of Engineering, Vol. 21, No.1, 2016.