Calcular Lagrangiano (PRIMAL)

$$L_P = \frac{1}{2}\|\beta\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [y_i(\beta_0 + x_i'\beta) - 1]$$

donde

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0$$

es el multiplicador de Lagrange

Las KKT para este problema son:

$$\frac{\partial L_P}{\partial \beta_0} = -\sum_i \alpha_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \beta} = \beta - \sum_i \alpha_i y_i x_i = 0$$

$$y_i(\beta_0 + x_i'\beta) - 1 \geq 0$$

$$\alpha_i \geq 0$$

$$\boxed{\alpha_i (y_i(\beta_0 + x_i'\beta) - 1) = 0}$$ complementariedad

Es decir:

$$\alpha_i > 0 \quad \text{si} \quad y_i(\beta_0 + x_i'\beta) = 1$$

entonces x_i es un vector de soporte

$$\alpha_i = 0 \quad \text{si} \quad y_i(\beta_0 + x_i'\beta) > 1$$ y no es vector soporte

Resolver para las KKT en β_0 y β

Tenemos que
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

$$\longrightarrow \beta^* = \sum_i \alpha_i y_i x_i$$

Sustituimos en el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2}\|\beta^*\|^2 - \sum_i \alpha_i [y_i(\beta_0^* + x_i'\beta^*) - 1]$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{*\prime}\beta^* - \cancel{\sum_i \alpha_i y_i \beta_0^*} - \sum_i \underbrace{\alpha_i y_i x_i'}\beta^* + \sum_i \alpha_i$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{*\prime}\beta^* - \beta^{*\prime}\beta^* + \sum_i \alpha_i$$

$$= \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \langle x_i', x_j \rangle, \quad \text{s.a. } \alpha_i \geq 0$$

$$= \mathcal{L}_{DUAL}$$ (Quitamos las variables primales β)

Esto nos da un problema más fácil de resolver:

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{\alpha} & \mathbf{1}'\alpha - \frac{1}{2}\alpha' M \alpha \\ \text{s.a.} & \alpha \geq 0 \\ & \alpha' y = 0 \end{array}\right\}$$

con $M_{ij} = y_i y_j (x_i' x_j)$

Si α^* es solución del problema dual:

$$\beta^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* y_i x_i$$

y por la condición de complementariedad β^* es una función lineal de los vectores de soporte:

$$\beta^* = \sum_{i \in SV} \alpha_i^* y_i x_i$$

donde $SV \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $y_i(\beta_0^* + x_i'\beta^*) = 1$ es el conjunto de vectores de soporte o de forma equivalente; indicam que

$$\underline{\alpha^* > 0}$$

Para encontrar β_0^*

$$\beta_0^* = -\frac{1}{2}\left(x_+'\beta^* + x_-'\beta^*\right)$$

para x_+ y x_- cualquier vector de soporte

Finalmente, nuestro clasificador óptimo para el caso separable es:

$$f^*(\underline{x}) = \beta_0^* + x'\beta^*$$

$$= \beta_0^* + \sum_{i \in SV} \alpha_i^* y_i (x_i' \cdot x)$$

y clasificamos con:

$$\boxed{\hat{y} = \text{signo}\left(f^*(x)\right)}$$