1 Dados de entrada

t_{max} o tempo máximo possível de execução.

n a quantidade de tarefas.

m a quantidade de máquinas.

M conjunto de máquinas, definido por $M = \{1, 2, \ldots, m\}$

J conjunto de tarefas, definido por $J = \{1, 2, \ldots, n\}$

H o horizonte de tempo possível para execução, definido por $H = \{1, 2, \ldots, t_{max}\}$

$est(i, j)$ *earliest start time*, o tempo mais cedo possível de execução da tarefa j na máquina j.

$lst(i, j)$ *latest start time*, o tempo mais tarde possível de execução da tarefa j na máquina j.

U_i^j os tempos possíveis para início da execução da tarefa j na máquina i, definido por $U_i^j = est(i, j), ..., lst(i, j)$

h_{ij} a i-ésima máquina da tarefa j

P_{ij} a duração da atividade da máquina i na tarefa j

t_{ij}^- dado um tempo t, $t_{ij}^- = t - P_{ij}$

t_{ij}^+ dado um tempo t, $t_{ij}^+ = t + P_{ij}$

2 Formulação com Espera de Máquina

Sejam as variáveis:

- $f_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se a máquina } i \text{ está em espera no tempo } t, \forall \text{ i} \in \text{M, t} \in \text{H;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

- $x_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j \text{ iniciou a execução na máquina } i \text{ no tempo } t, \forall \text{ j} \in \text{J, i} \in \text{M, t} \in \text{H;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

- $e_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j \text{ está em espera na máquina } i \text{ no tempo } t, \forall \text{ j} \in \text{J, i} \in \text{M, t} \in \text{H;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } C && && (1)\\
&\text{s.t } \sum_{j\in J} x_{ij1} + f_{i1} = 1 && \forall i \in M && (2)\\
&\sum_{j\in J} x_{i,j,t^-_{ij}} - \sum_{j\in J} x_{ijt} + f_{i,t-1} - f_{it} = 0 && \forall i \in M, t \in H \setminus \{1\} && (3)\\
&x_{h_{1j},j,1} + e_{h_{1j},j,1} = 1 && \forall j \in J && (4)\\
&x_{h_{(i-1),j},j,t^-_{h_{(i-1),j}}} + e_{h_{ij},j,t-1} - x_{h_{ij},j,t} - e_{h_{ij},j,t} = 0 && \forall i \in M, t \in H \setminus \{1\}, i = 2, \ldots, m && (5)\\
&x_{h_{(i-1),j},j,t^-_{h_{(i-1),j}}} + e_{h_{ij},j,t-1} - x_{h_{ij},j,t} = 0 && \forall j \in J, i \in M, t = lst(j,i) && (6)\\
&C - \sum_{t\in H} (t + P_{h_{mj},j}) \cdot x_{h_{mj},j,t} \geq 0 && \forall j \in J && (7)\\
&e_{ijt}, x_{ijt}, f_{it} \in \{0,1\} && \forall j \in J, i \in M, t \in H && (8)
\end{aligned}
$$

A restrição 2 indica que, no primeiro instante de tempo da máquina i, ou a máquina está em espera ou ela está iniciando a primeira atividade de uma tarefa. A restrição 4 indica que ou a tarefa j está em espera no primeiro instante de tempo para a primeira atividade ou ela está em execução. A restrição 3 é a conservação de fluxo da máquina, pois ou ela estava executando alguma tarefa ou estava em espera no instante anterior. Já a restrição 5 é a conservação de fluxo da tarefa, pois ou ela está em espera ou a máquina anterior a ela iniciou o processamento. A restrição 6 indica que no último tempo possível, se a última máquina estava em espera no tempo anterior ou se a máquina anterior a ela estava em execução, não há escolha além de iniciar a tarefa. Por fim, a restrição 7 serve para atualizar o *makespan*.

3 Formulação com restrições de empacotamento

Sejam as máquinas artificiais:

- A máquina s é a origem de todo fluxo. Só está presente no primeiro instante possível.
- A máquina f é o fim de todo fluxo. Está presente como possível destino final da última máquina de cada tarefa.

Sejam as seguintes variáveis binárias

- $x_{j,h_{ij},t,h_{(i+1),j},t^+_{h_{ij},j}} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j \text{ está em execução na } i\text{-ésima máquina no tempo } t, \\ & \forall \text{ j} \in \text{J, i} \in \{\text{s,1,...,m,f}\}, \text{ t} \in \text{H;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

- $e_{j,i,t,i,t+1} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j \text{ está em execução na } i\text{-ésima máquina no tempo } t, \\ & \forall \text{ j} \in \text{J, i} \in \text{M, t} \in \text{H;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Com isso, temos a seguinte formulação:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } C && && (9)\\
&\text{s.t } x_{j,s,1,h_{1j},1} = 1 && \forall j \in J && (10)\\
&\sum_{t \in H} x_{j,h_{mj},t,f,t^{+}_{h_{mj}}} = 1 && \forall j \in J && (11)\\
&x_{j,h_{(i-1),j},t^{-}_{h_{(i-1),j}},h_{ij},t} + e_{j,h_{ij},t-1,h_{ij},t} && && \\
&- x_{j,h_{ij},t,h_{(i+1),j},t^{+}_{h_{ij}}} - e_{j,h_{ij},t,h_{ij},t+1} = 0 && \forall j \in J, i \in M, t \in H, && (12)\\
&\sum_{\substack{j \in J, \\ t' \in \{t^{-}_{h_{ij}}+1,..,t\}}} x_{j,h_{ij},t',h^{j}_{i+1},t'^{+}_{h_{ij}}} \leq 1 && \forall i \in M, t \in H && (13)\\
&C - \sum_{t \in H} (t + P_{h_{mj},j}) \cdot x_{j,h^{j}_{m},t,f,t+P^{j}_{h^{j}_{m}}} \geq 0 && \forall j \in J && (14)\\
&x_{j,h_{ij},t,h_{(i+1),j},t^{+}_{h_{ij}}}, e_{j,i,t,i,t+1} \in \{0,1\} && \forall j \in J, t \in H, i \in M && (15)
\end{aligned}
$$

A restrição 10 inidica o começo do fluxo para cada tarefa j, enquanto a restrição 11 indica o fim do fluxo para cada uma das tarefas em todos os tempos que o fluxo pode ser terminado. A restrição 12 é a restrição de fluxo, que diz que eu só posso receber fluxo se eu comei a tarefa anterior no tempo adequado ou se eu estava esperando no tempo anterior. Da mesma forma, eu só posso ir para o processamento da próxima máquina ou esperar mais uma unidade de tempo. A restrição 13 é a restrição de *packing*, que indica que no intervalo de duração do processamento de uma tarefa j na máquina i, eu só posso ter esta tarefa executando, ou nenhuma. Por fim, a restrição 14 é a variável que atualizará o *makespan*.