ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΑΕ ΙΙΙ

Υπεύθυνη Καθηγήτρια : κα Δουλγέρη Ζωή

Νάστος Βίκτωρ
AEM : 9297
Email : viktorna@auth.gr

Ακαδημαϊκό εξάμηνο : 7ο
Thessaloniki, 2020

ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΡΟΣ Α

Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το δυναμικό μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$M\ddot{x} + Fb(\dot{x}) + kx = 0$$

με

$$Fb = \begin{cases} ((\dot{x} - b) - c)^2 + d, & \gamma\iota\alpha \;\; \dot{x} \geq b \\ -(\dot{x} - b) + c)^2 - d, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Θέτω $x1 = x$ και $x2 = \dot{x}$ και θα έχω:

$$\dot{x}1 = x2$$

$$\dot{x}2 = -\frac{Fb(x2)}{M} - \frac{k}{M}x1$$

ή

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x2 \\ -\frac{Fb(x2)}{M} - \frac{k}{M}x1 \end{bmatrix}$$

Για να βρω τα σημεία ισορροπίας του συστήματος λύνω τις εξής εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{x}1 = 0 \\ \dot{x}2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x2 = 0 \\ -\frac{Fb(0)}{M} - \frac{k}{M}x1 = 0 \end{cases}$$

Επειδή ξέρουμε λοιπόν ότι b>0 , για $Fb(0)$ μας ενδιαφέρει μόνο ο δεύτερος κλάδος της Fb .

Επομένως :

$$Fb(0) = -(\dot{x} - b) + c)^2 - d$$

Άρα $$\begin{cases} x2 = 0 \\ x1 = \frac{(-b+c)^2+d}{k} \end{cases}$$

Συνεπώς $(x1^*, x2^*) = \left(\frac{(-b+c)^2+d}{k}, 0\right)$

Έμμεση Μέθοδος Lyapunov:

Ακολουθώντας τη διαδικασία της έμμεσης μεθόδου Lyapunov , υπολογίζω αρχικά την Ιακωβιανή ορίζουσα στο Σ.Ι.:

$$f(x)_{(x1^*,x2^*)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & \frac{2x2+(-2b+2c)}{M} \end{bmatrix}_{(x1^*,x2^*)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & \frac{-2b+2c}{M} \end{bmatrix}$$

Για να μελετήσω την ευστάθεια του συστήματος, πρέπει να ελέγξω το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών. Έχω λοιπόν :

$$\det\left(\lambda I - f(x)_{(x1^*,x2^*)}\right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{M} & \lambda - \frac{-2b+2c}{M} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda\frac{2b-2c}{M} + \frac{k}{M}$$

Μέσω του κριτηρίου Routh(θέλω δηλαδή όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου να είναι ομόσημοι), καταλήγω στα εξής συμπεράσματα :

- b>c έχω δύο ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο και η κατάσταση του μη γραμμικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

- b<c τότε έχω δύο ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο και η κατάσταση ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος είναι ασταθής.

- b=c τότε έχω δύο ρίζες στον φανταστικό άξονα και δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα για την ευστάθεια.

Β)Μελετη για συγκεκριμενες τιμες

Δοσμένα από εκφώνηση , θεωρώ λοιπόν : M = 3, k = 3, c = 2, d = 3.

Θα εξετάσω το σύστημα ως προς την ευστάθεια για b = 1, b = 2 και b = 2.1:

- Για b = 1

$$(x1^*, x2^*) = \left(\frac{(-1+2)^2+3}{3}, 0\right) = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

Αφού b = 1 και c = 2 τότε b<c οπότε Σ.Ι. είναι ασταθές.

- Για b = 2

$$(x1^*, x2^*) = \left(\frac{(-2+2)^2+3}{3}, 0\right) = (1{,}0)$$

Αφού b = 1 και c = 2 τότε b=c , δεν μπορώ να συμπεράνω για την ευστάθεια του Σ.Ι.

- Για b = 2.1

$$(x1^*, x2^*) = \left(\frac{(-2.1+2)^2+3}{3}, 0\right) = (1.00334{,}0)$$

Αφού b = 2.1 και c = 2 τότε b>c συμπεραίνω ότι το Σ.Ι είναι ευσταθές.

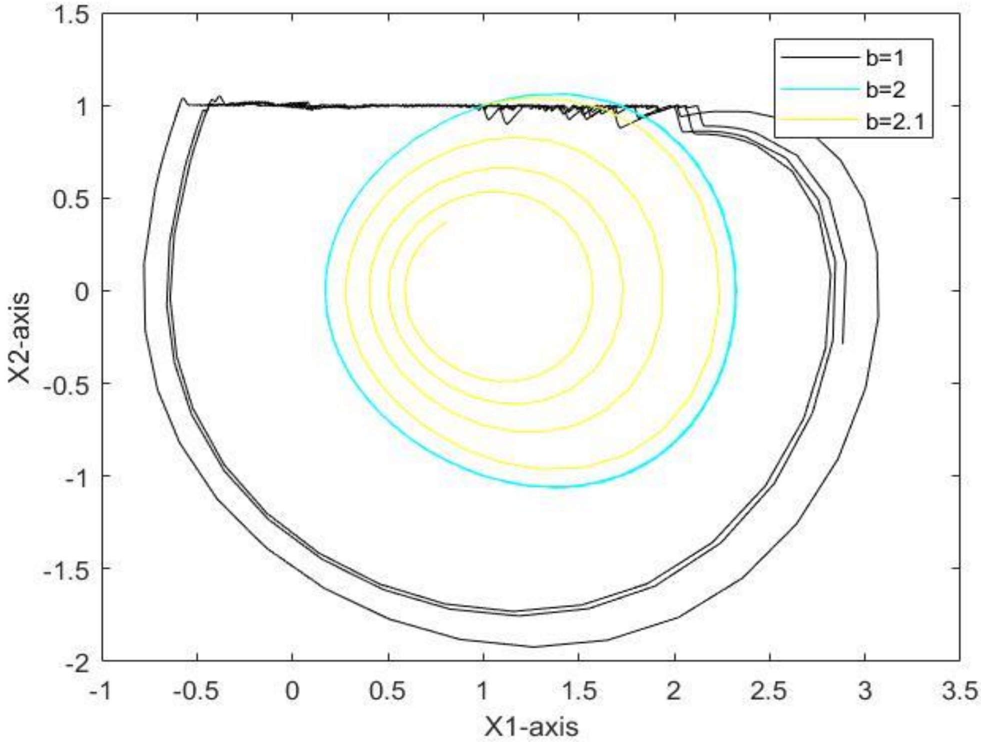
Γ)ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΩΝ ΦΑΣΙΚΩΝ ΠΟΡΤΡΑΙΤΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ ΣΤΟ MATLAB

Η μοντελοποίηση πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του προγράμματος **MATLAB**. Αυτό συνέβη με τη βοήθεια της έτοιμης διαδικασίας/συνάρτησης :

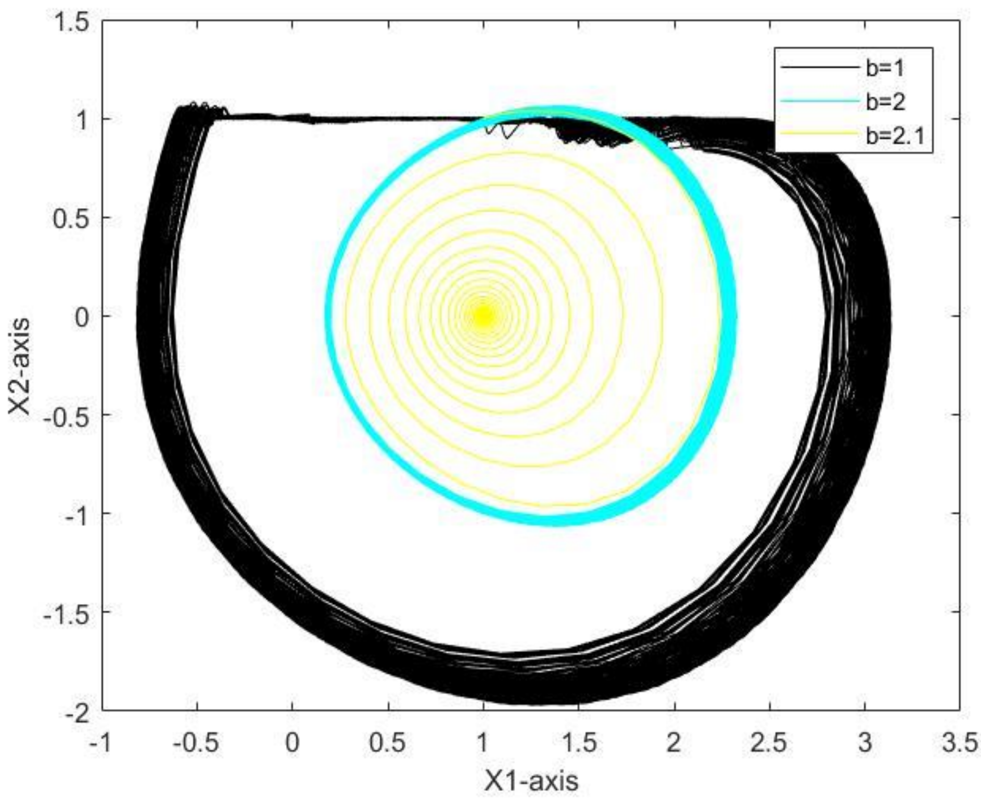
$$[t, x] = ode45(@odefun, [0\ 20], [2; 0])$$

Στο τέλος της εργασίας θα παραθέσω κομμάτι κώδικα, τόσο του πρώτου, όσο και του δεύτερου μέρους της εργασίας.

Παρακάτω φαίνονται τα φασικά πορτραίτα στο **MATLAB** . Δοκιμάζοντας διαφορετικές αρχικές τιμές, θα τρέχω την προσομοίωση μια φορά για μικρή χρονική διαφορά και μια για μεγαλύτερη, ώστε να γίνεται πιο αντιληπτό το συμπέρασμα που βγαίνει από κάθε plot **.**



Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[1 1]

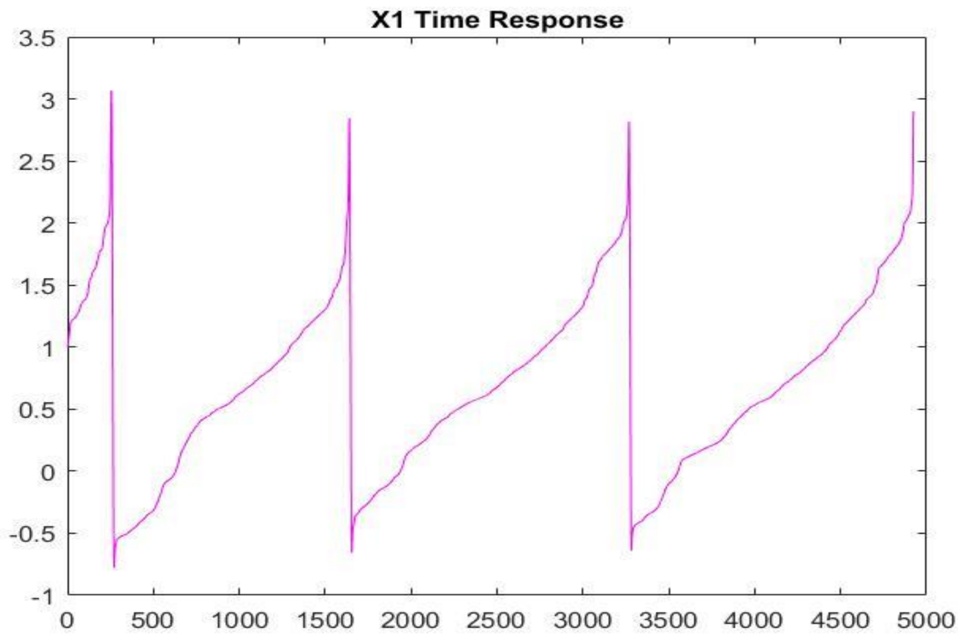


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[1 1]

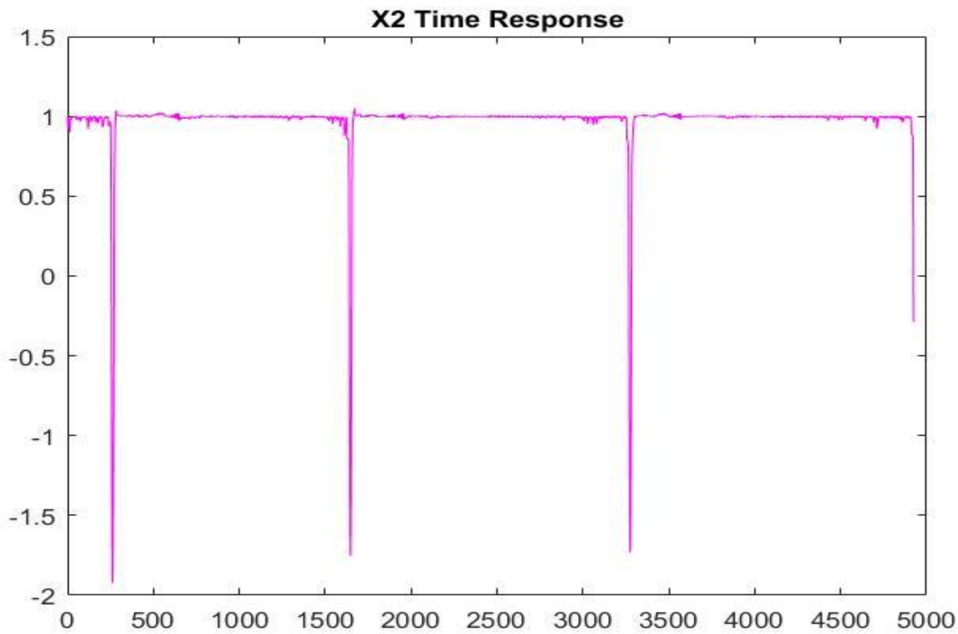
Στα παραπάνω παραδείγματα, έχοντας διαφορετικές αρχικές τιμές χρόνου, αλλά ίδιες αρχικές τιμές χ1,χ2 , βγαίνει το εξής συμπέρασμα :

- Για b = 1 έχω αστάθεια.
- Για b = 2 δεν μπορώ να συμπεράνω κάτι για την ευστάθεια.
- Για b = 2.1 έχω ασυμπτωτική ευστάθεια του Σ.Ι.

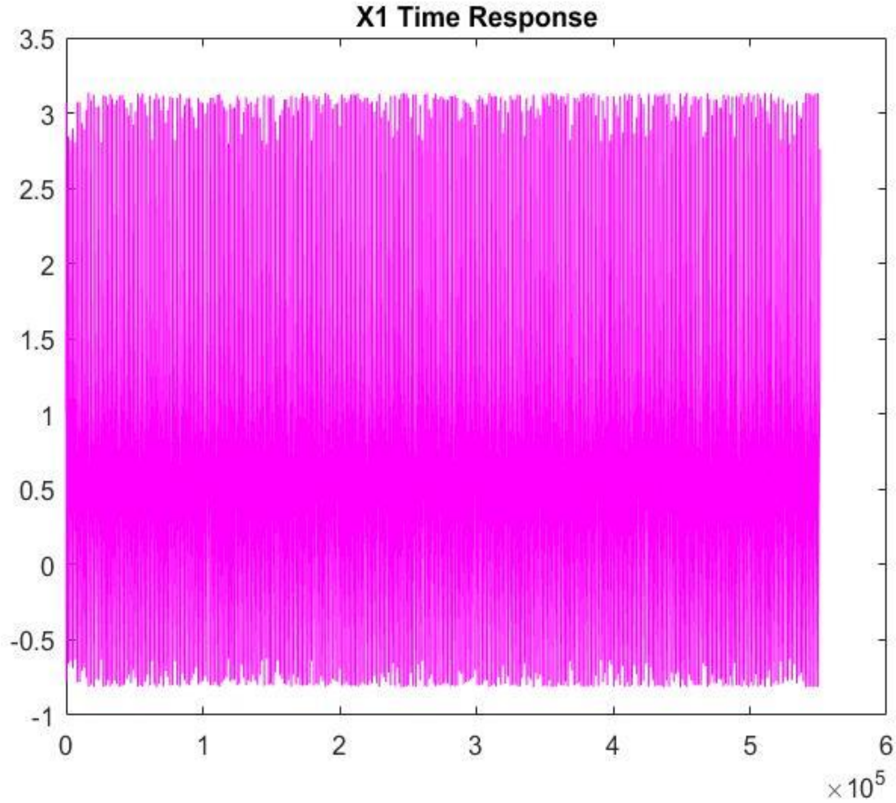
Οι αντίστοιχες χρονικές αποκρίσεις για b=1 λοιπόν είναι οι εξής :



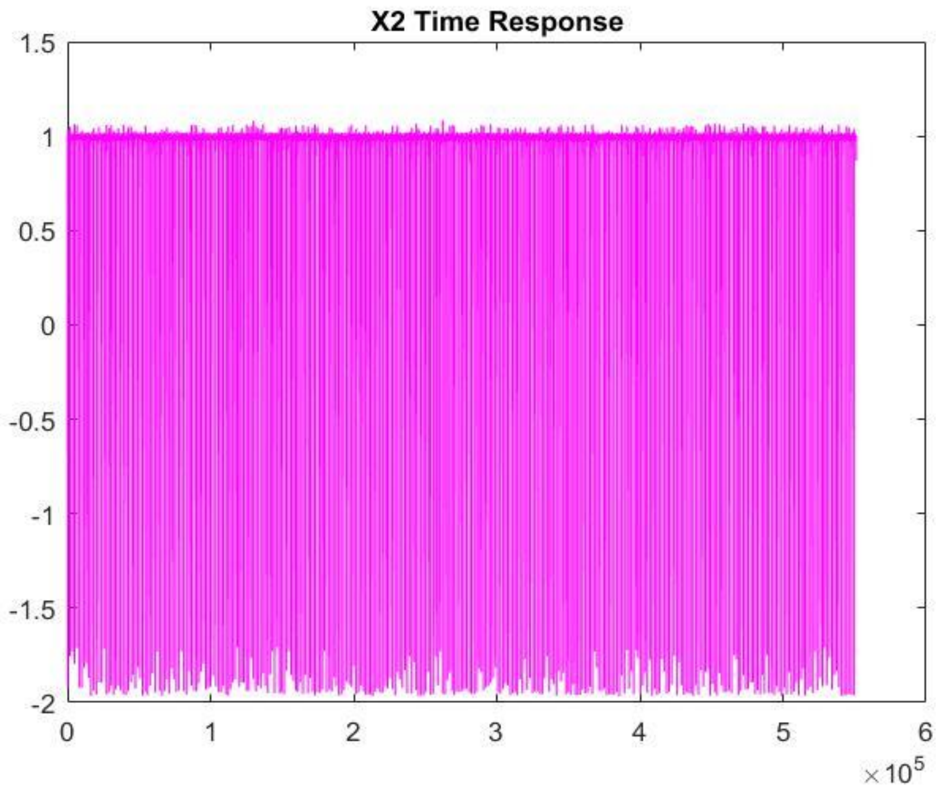
Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[1 1] και b=1



Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[1 1] και b=1

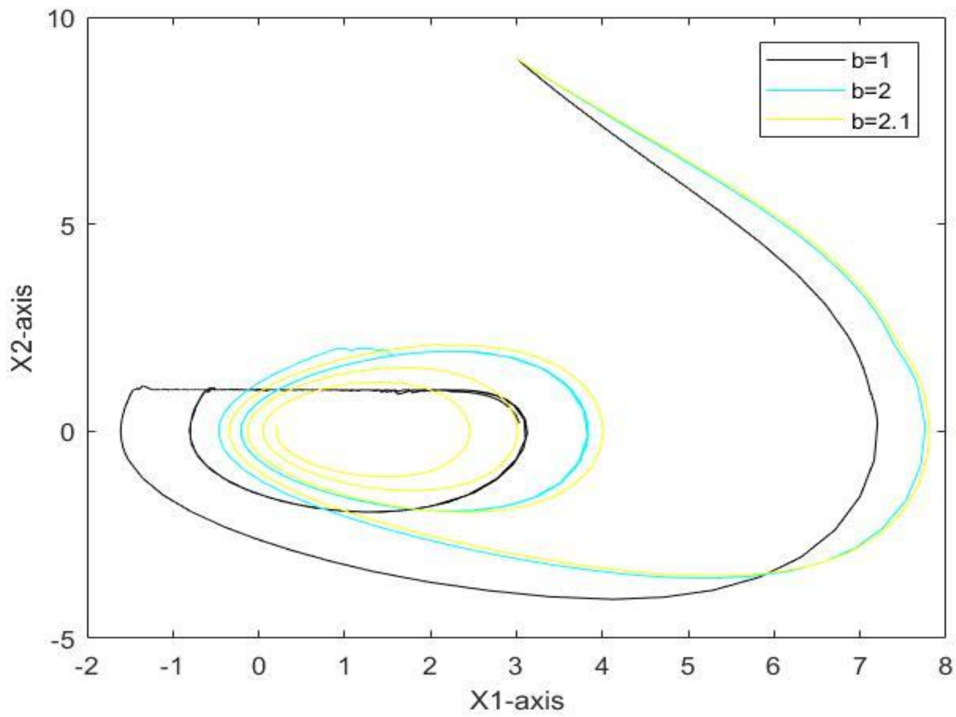


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[1 1] και b=1

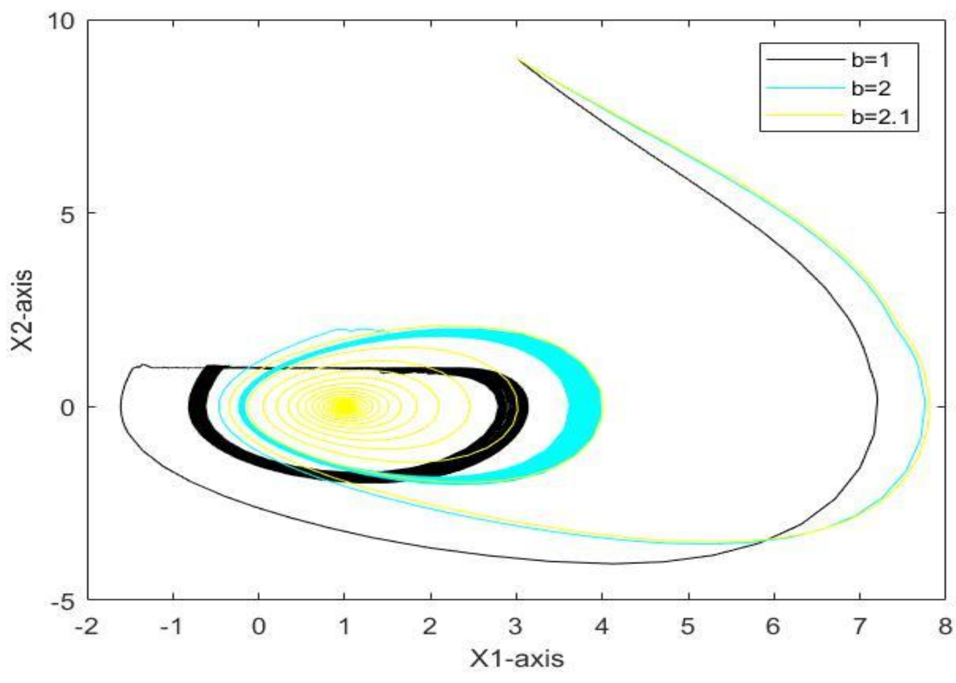


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[1 1] και b=1

Συνεχίζω λοιπόν τις προσομοιώσεις για διαφορετικές αρχικές τιμές, ώστε να ξανασχολιάσω την ευστάθεια του Σ.Ι.



Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[3 9]

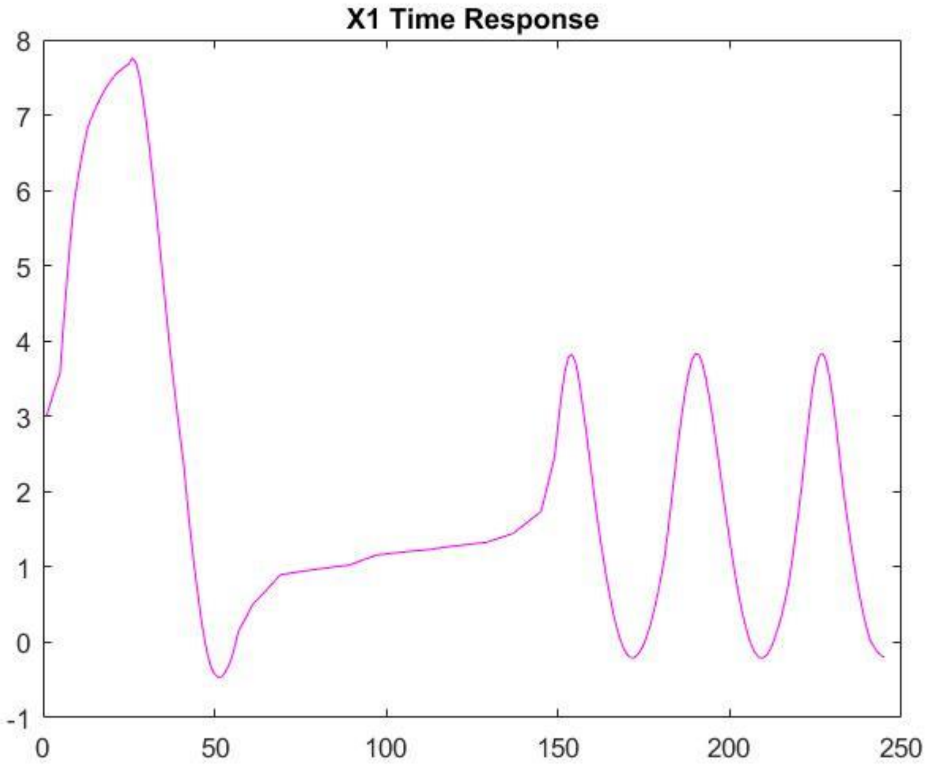


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[3 9]

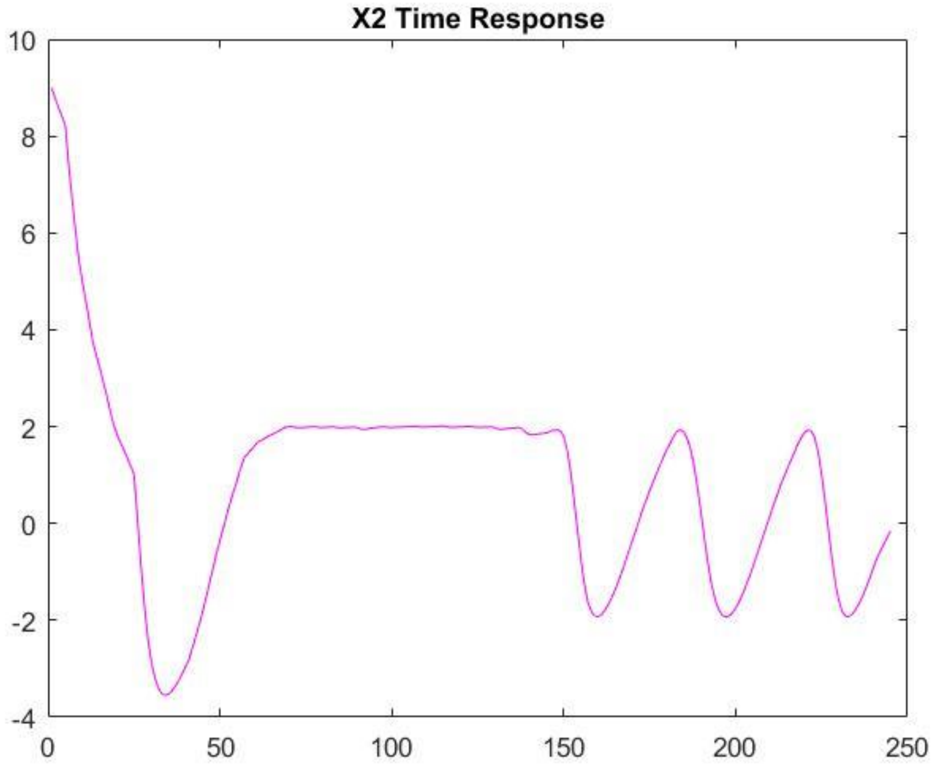
Όπως παρατηρώ πάλι, τα ίδια συμπεράσματα βγάζω για τις αρχικές τιμές [3 9]. Δηλαδή :

- Για b = 1 έχω αστάθεια.
- Για b = 2 δεν μπορώ να συμπεράνω κάτι για την ευστάθεια.
- Για b = 2.1 έχω ασυμπτωτική ευστάθεια του Σ.Ι.

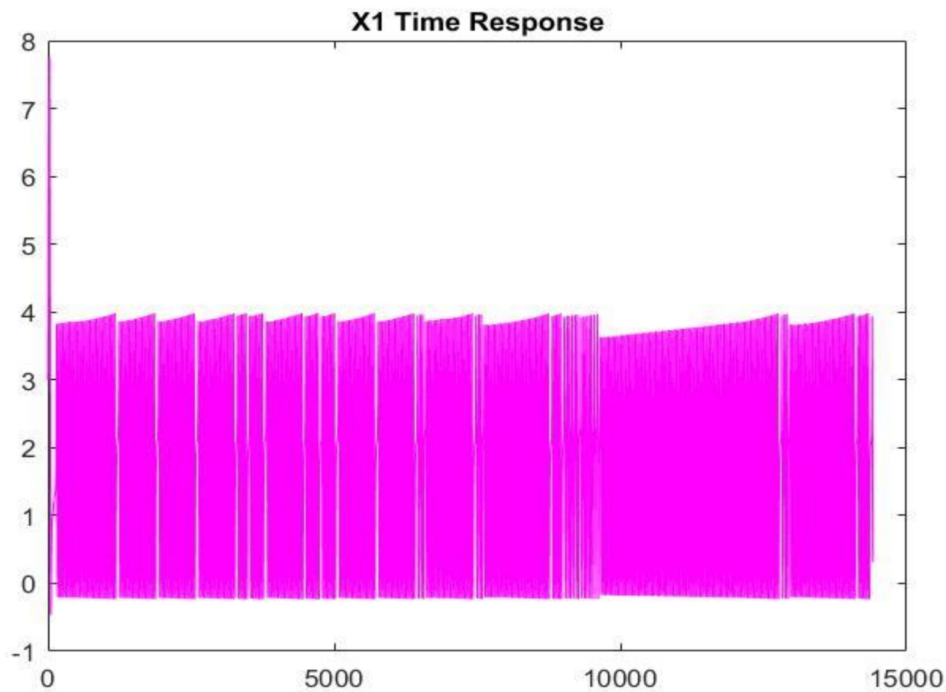
Οι αντίστοιχες χρονικές αποκρίσεις για b=2 λοιπόν είναι οι εξής :



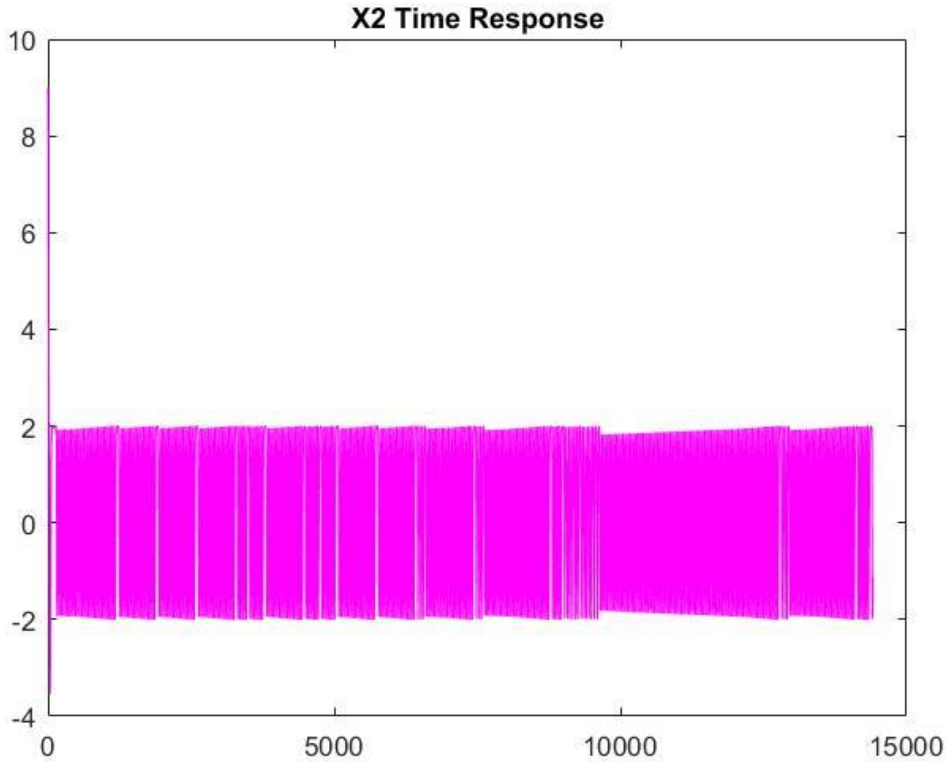
Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[3 9] , b=2



Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[3 9] , b=2

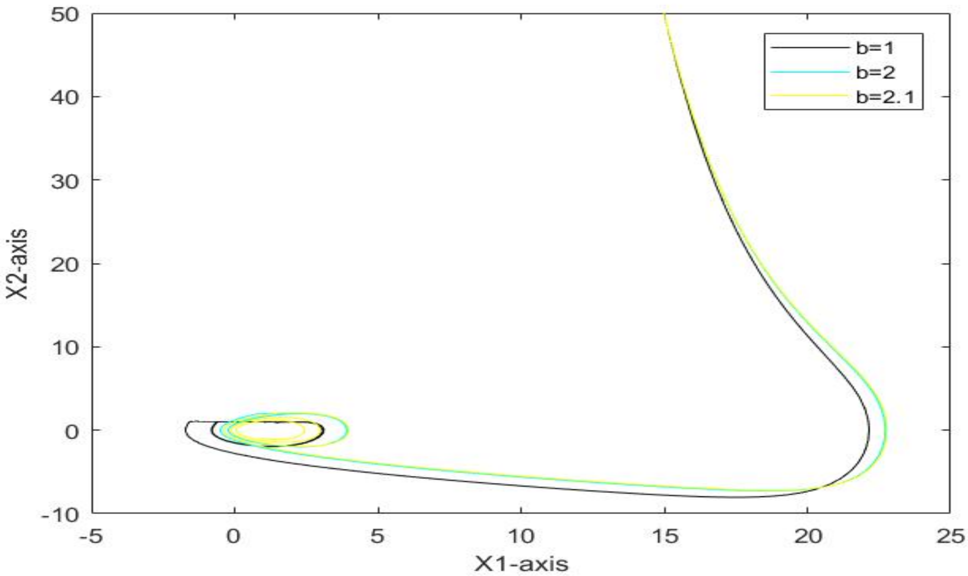


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[3 9] , b=2

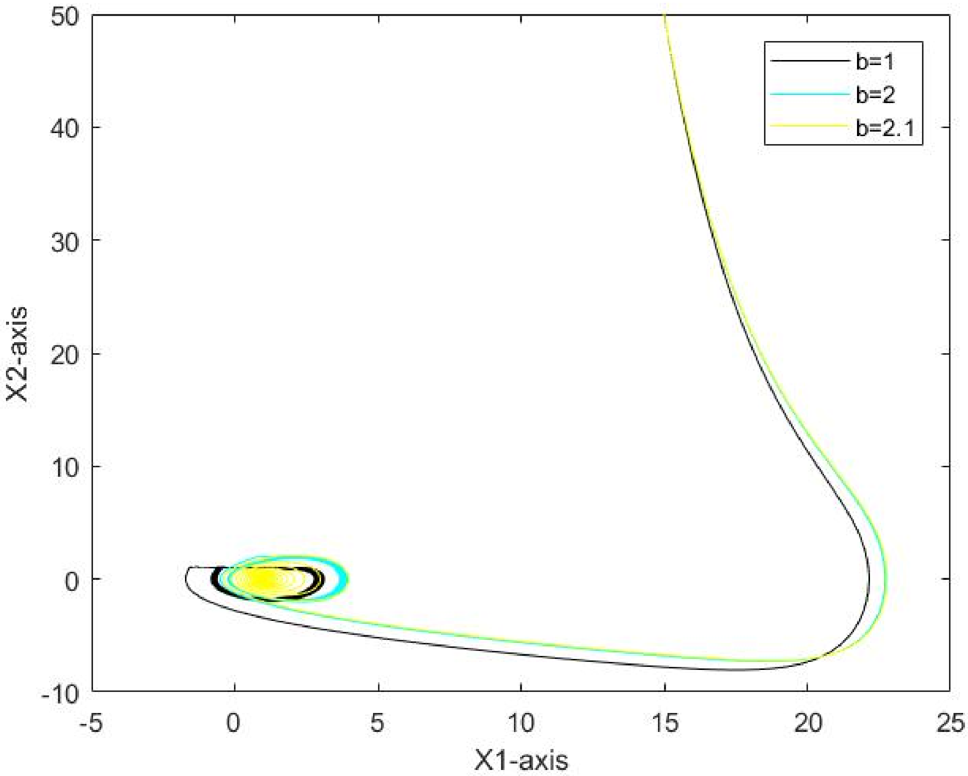


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[3 9], b=2

Κάνοντας λοιπόν και μια τρίτη προσομοίωση με διαφορετικές αρχικές τιμές για άλλη μια φορά, κατέληξα στο ίδιο συμπέρασμα όσον αφορά την ευστάθεια γύρω από το Σ.Ι. Παρακάτω παρατίθενται τα προαναφερθέντα plots.

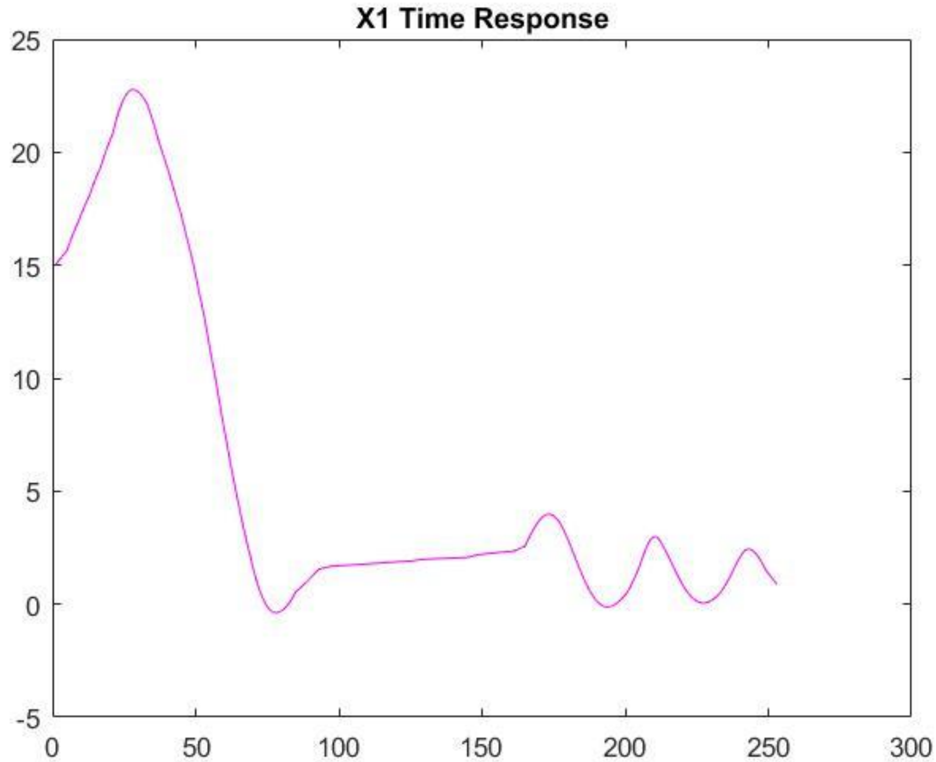


Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[15 50]

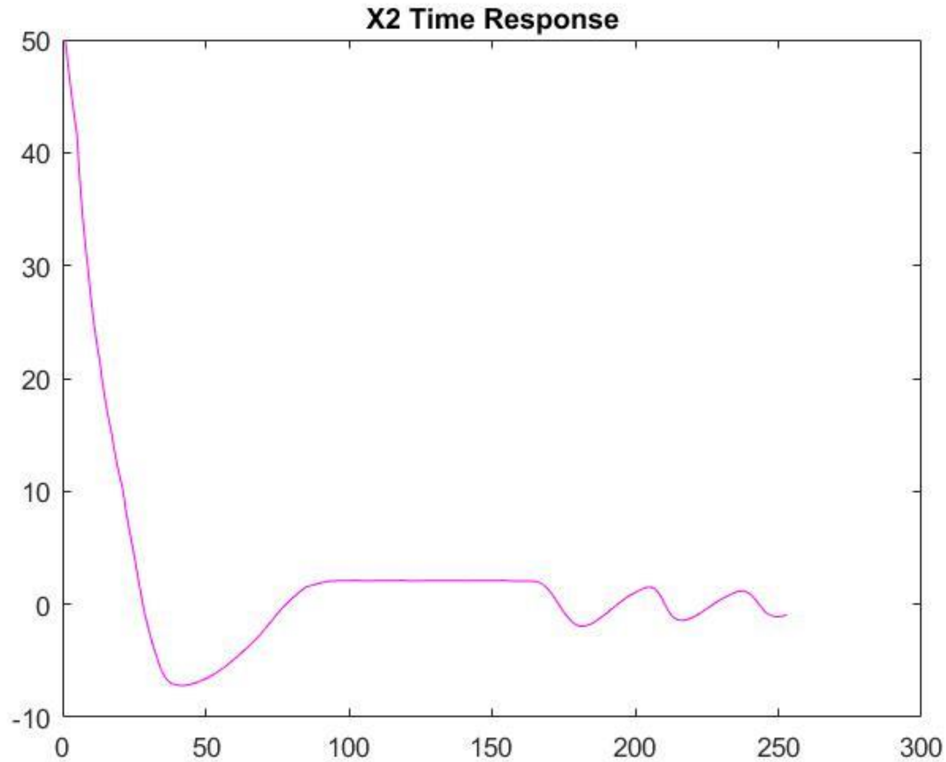


Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[15 50]

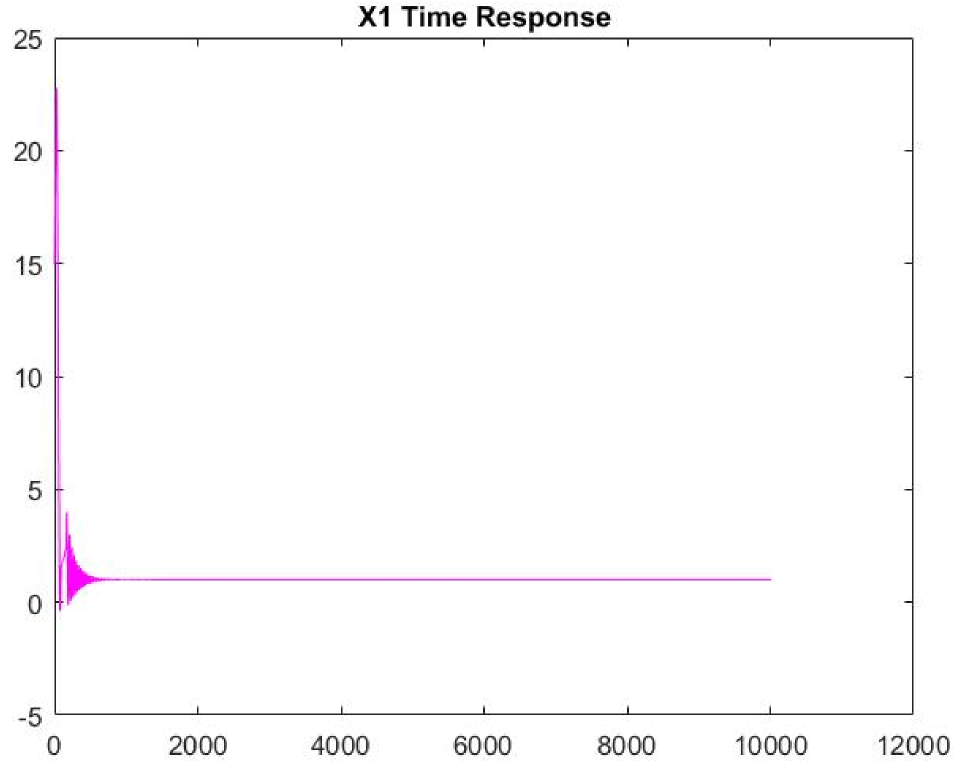
Οι αντίστοιχες χρονικές αποκρίσεις για b=2.1 λοιπόν είναι οι εξής :



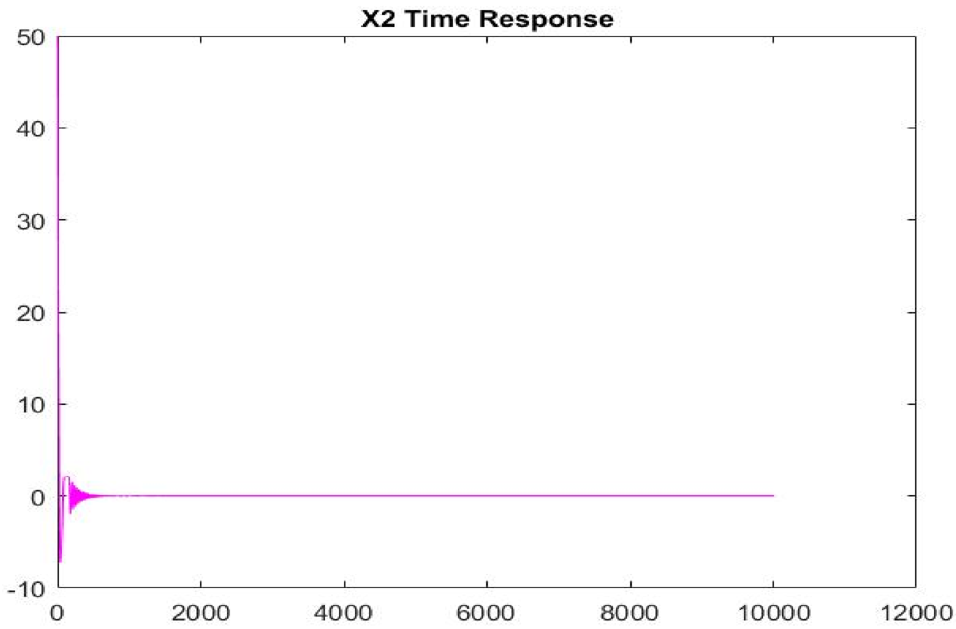
Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[15 50], b=2.1



Προσομοίωση για t=[0 25], yo=[15 50], b=2.1



Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[15 50], b=2.1



Προσομοίωση για t=[0 2500], yo=[15 50], b=2.1

ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΡΟΣ Β

Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύστημα περιγράφεται από τις εξής εξισώσεις:

$$D\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) \ = \ K(\theta - q)$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K(\theta - q) \ = \ u$$

Γνωρίζοντας από εκφώνηση ότι :

$D=I_1$,

$C=0$,

$G= m_1 g_1 r_1 \cos(q_1)$,

$K=K_1$,

$J=J_1$,

$B=\mu$,

$q=q_1$,

$\theta=\theta_1$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μετατρέπεται σε :

$$I_1\ddot{q_1} + m_1 g r_1 cos(q_1) \ = \ K_1(\theta_1 - q_1)$$

$$J_1\ddot{\theta_1} + \mu\dot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - q_1) \ = \ u$$

Για να βρω τις εξισώσεις κατάστασης θέτω

$$x1 = \ q1$$

$$x2 = \dot{q}1$$

$$x3 = \theta 1$$

$$x4 = \dot{\theta}1$$

Τότε προκύπτει το σύστημα:

$$\dot{x}1 = x2$$

$$\dot{x}2 = \frac{-m1gr1cosx1 + K1(x3 - x1)}{I1}$$

$$\dot{x}3 = x4$$

$$\dot{x}4 = \frac{u - K1(x3 - \chi1) - \mu x4}{J1}$$

Παρατηρώ ότι προκύπτει η μορφή :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u$$

Για να ελέγξω αν το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικοποιήσιμο πρέπει να ελέγξω αν ο εξής πίνακας

$$A = [g \quad a\partial fg \quad a\partial f^2 g \quad a\partial f^3 g]$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητος και αν ο

$$B = [g \quad a\partial fg \quad a\partial f^2 g]$$

είναι ενελικτικός.

$$\text{A1} = a\partial fg = -\nabla fg = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J1} \\ \frac{\mu}{J1^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{A2} = a\partial f^2 g = -\nabla f A1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K1}{J1I1} \\ \frac{-\mu}{J1^2} \\ \frac{-K1}{J1^2} + \frac{\mu^2}{J1^3} \end{bmatrix}$$

A3 = $ad f^3 g = -\nabla f A2$ = $\begin{bmatrix} \frac{-K1}{J1K1} \\ \frac{K1\mu}{I1J1^2} \\ \frac{K1}{J1^2}\frac{\mu^2}{J1^3} \\ \frac{-K1\mu}{J1^3} + \frac{\mu^3}{J1^4} - \frac{K1\mu}{J1^3} \end{bmatrix}$

Άρα ο πίνακας A που προκύπτει είναι ο εξής:

A=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-K1}{J1K1} \\ 0 & 0 & \frac{K1}{J1I1} & \frac{K1\mu}{I1J1^2} \\ 0 & \frac{-1}{J1} & \frac{-\mu}{J1^2} & \frac{K1}{J1^2}\frac{\mu^2}{J1^3} \\ \frac{1}{J1} & \frac{\mu}{J1^2} & \frac{-K1}{J1^2} + \frac{\mu^2}{J1^3} & \frac{-K1\mu}{J1^3} + \frac{\mu^3}{J1^4} - \frac{K1\mu}{J1^3} \end{bmatrix}$

Αφού ο A είναι κάτω τριγωνικός πίνακας , τότε η det(A) είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή :

$det(A)$ = $\left(\frac{1}{J1}\right) * \left(\frac{-1}{J1}\right) * \left(\frac{K1}{J1I1}\right) * \left(\frac{-K1}{J1I1}\right) = \frac{K1^2}{J1^4 I1^2}$

Έτσι για K1≠0 και I1, J1< ∞ η det(A) ≠ 0, άρα rank(A)=4.

O B είναι αναξάρτητος από τα x άρα το σύνολο είναι ενελικτικό.

B=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K1}{J1I1} \\ 0 & \frac{-1}{J1} & \frac{-\mu}{J1^2} \\ \frac{1}{J1} & \frac{\mu}{J1^2} & \frac{-K1}{J1^2} + \frac{\mu^2}{J1^3} \end{bmatrix}$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικοποιήσιμο.

Αρκεί τώρα να βρω z διάνυσμα που γραμμικοποιεί το σύστημα.

Για να βρούμε το πρώτο στοιχείο του διανύσματος z λύνουμε το σύστημα που εμπλέκει τις μερικές παραγώγους το z1.

Αρχικά θέλω να ισχύει :

$$L_g z1 = 0$$

$$L_{a\partial fg} z1 = 0$$

$$L_{a\partial f^2 g} z1 = 0$$

$$L_{a\partial f^3 g} z1 \neq 0$$

Και

$$\frac{\partial z1}{\partial x2} = 0$$

$$\frac{\partial z1}{\partial x3} = 0$$

$$\frac{\partial z1}{\partial x4} = 0$$

$$\frac{\partial z1}{\partial x1} \neq 0$$

Ακολουθώ γραμμικοποίηση εισόδου-κατάστασης. Η απλούστερη λύση στις παραπάνω εξισώσεις είναι $z1 = x1$. Οι άλλες καταστάσεις μπορούν να ληφθούν από το $z1$.

Έχουμε δηλαδή

$$z = \begin{bmatrix} z1 & L_f z1 & L_{f^2} z1 & L_{f^3} z1 \end{bmatrix}^T = [z1 \quad \nabla z1 f \quad \nabla z2 f \quad \nabla z3 \mathrm{f}]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ -\frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) + \frac{k1}{I1} * (x3 - x1) \\ \frac{m1gr1}{I1} * \sin(x1) * x2 + \frac{k1}{I1} * (x4 - x2) \end{bmatrix}$$

Όπου

$$z2 \;=\; \nabla z1 f = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] * \begin{bmatrix} x2 \\ -\frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) + \frac{k1}{I1} * (x3 - x1) \\ x4 \\ -\frac{\mu}{I1} * x4 - \frac{k1}{I1} * (x3 - x1) \end{bmatrix} = x2$$

$$z3 \;=\; \nabla z2 f = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] * \; f = -\frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) + \frac{k1}{I1} * (x3 - x1)$$

$$z4 \;=\; \nabla z3 f = \left[\frac{m1gr1}{I1} * \sin(x1) - \frac{k1}{I1} \quad 0 \quad \frac{k1}{I1} \quad 0\right]^T * \; f =$$
$$= \frac{m1gr1}{I1} * \sin(x1) * x2 + \frac{k1}{I1} * (x4 - x2)$$

Άρα $\dot{z}1 = z2$

$\dot{z}2 = z3$

$\dot{z}3 = z4$

$\dot{z}4 = \frac{dz4}{dx} * \frac{dx}{dt} = \frac{dz4}{dx} * (f \; + \; g \; * \; u) = \; \nabla z4 f \; = \; \nabla z4 g u$

$$u \;=\; {}^{(v \;-\; \nabla z4 f)}\!/_{\nabla z4 g}$$

$$\underline{\boldsymbol{\dot{z}4 = v}}$$

$$\nabla z4 f = \begin{bmatrix} \frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) * x2 \\ \frac{m1gr1}{I1} * \sin(x1) - \frac{k1}{I1} \\ 0 \\ \frac{k1}{I1} \end{bmatrix} * f =$$

$$= \frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) * x2^2 + \left(\frac{m1gr1}{I1} * \sin(x1) - \frac{k1}{I1}\right) * \left(-\frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) + \frac{k1}{I1} * (x3 - x1)\right) + \frac{k1}{I1} * \left(-\frac{\mu}{I1} * x4 - \frac{k1}{I1} * (x3 - x1)\right) =$$

$$= \frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) * \left(x2^2 - \frac{m1g}{I1} * \sin(x1) + \frac{k1}{I1}\right) + \frac{k1*(x3-x1)}{I1^2} * (m1gr1\sin(x1) - k1) - \frac{k1}{I1*J1} * (k1*(x3-x1) + \mu x4) \;=\; a(x)$$

$$\nabla z4g = \begin{bmatrix} \frac{m1gr1}{I1} * \cos(x1) * x2 & \frac{m1gr1}{I1} * \sin(x1) - \frac{k1}{I1} & 0 & \frac{k1}{I1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J1} \end{bmatrix} = \frac{k1}{I1 * J1}$$

Η $z(v)$ είναι γενικός διαφομορφισμός ,δηλαδή η Ιακωβιανή ∇z.

$$\nabla z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m1gr1 * sin(x1) - k1}{I1} & \frac{k1}{I1} & 1 & 0 \\ -\frac{m1gr1}{I1} * cos(x1) * x2 & \frac{m1gr1 * sin(x1) - k1}{I1} & 0 & \frac{k1}{I1} \end{bmatrix}$$

Αφού

$$\det(\nabla z) \neq 0 \;,$$

μπορώ να γυρίσω στης αρχικές τιμές.

Στην συνέχεια πρέπει να βρω την είσοδο μέσω παρακολούθησης τροχιάς.

$$qd1 = 0.1 + 0.5sin(t)$$

$$z = \begin{bmatrix} z1 \\ \dot{z1} \\ \ddot{z1} \\ \dddot{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \\ z4 \end{bmatrix}$$

$$V = xd^{(4)} - ko * e - k1 * \dot{e} - k2 * \ddot{e} - k3\dddot{e}$$

Όπου

$$V = xd^{(4)} - ko * (z1 - xd) - k1 * (z2 - \dot{xd}) - k2 * (z3 - \ddot{xd}) - k3(z4 - \dddot{xd})$$

Βάζω είσοδο στο $\dot{z}4$ και προκύπτει πίνακας A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k0 & -k1 & -k2 & -k3 \end{bmatrix}$

Θέλουμε οι πόλοι να είναι στο $(s + 10)^4$ και η ορίζουσα που προκύπτει είναι:

$$s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10^4$$

$$s^4 + k3s^3 + k2s^2 + k1s + k0$$

Εξισώνω τούς συντελεστές και προκύπτει ότι: $k0 = 10^4$

$$k1 = 4000$$

$$k2 = 600$$

$$k3 = 40$$

Όσον αφορά το ερώτημα 2γ, έχω να υλοποιήσω έλεγχο ολίσθησης σφάλματος. Ορίζω επιφάνεια ολίσθησης S και σφάλμα παρακολούθησης e, όπου :

$$S(t) = (D+\lambda)n-1e \;=\; \dddot{e} + 3\ddot{e}\lambda + 3\dot{e}\lambda^2 + \lambda^3 e \quad \mu\varepsilon\; e \;=\; xd - x$$

$$X \;=\; \begin{bmatrix} x1 & \dot{x1} & \ddot{x1} & \dddot{x1} \end{bmatrix} =$$

$$\left[x1 \quad x2 \quad \frac{-m_1 g r_1}{I_1}\cos(x1) + \frac{k_1}{I_1}(x3 - x1) \quad \frac{m_1 g r_1}{I_1}\sin(x1)\,x2 + \frac{k_1}{I_1}(x4 - x2)\right]$$

$$Xd = \begin{bmatrix} xd & \dot{xd} & \ddot{xd} & \dddot{xd} \end{bmatrix} = [0.1 + 0.5\sin(t) \;\; 0.5\cos(t) \;\; -0.5\sin(t) \;\; -0.5\cos(t)]$$

Η δυναμική του καθεστώτος ολίσθησης γράφεται $s \;=\; 0$. Συνεπώς :

$$\dot{s}(t) = 0 \Rightarrow e^{(4)} + 3\dddot{e}\lambda + 3\ddot{e}\lambda^2 + \lambda^3\dot{e} \;\; \Rightarrow x1^{(4)} - xd^{(4)} + 3\dddot{e}\lambda + 3\ddot{e}\lambda^2 + \lambda^3\dot{e} = 0$$

$$x1^{(4)} = \frac{m_1 g r_1}{I_1}\cos(x1)\,x2^2 + \frac{m_1 g r_1}{I_1}\sin(x1)\left(\frac{\frac{-m_1 g r_1}{I_1}\cos(x1) + \frac{k_1}{I_1}(x3 - x1)}{I_1}\right) + \frac{k_1}{I_1}\left(\frac{-\mu x4 - k_1(x3 - x1) + u}{J_1}\right) + \frac{m_1 g r_1\cos(x1) - k_1(x3 - x1)}{I_1}$$

Λύνοντας ως προς u (θεωρώντας γνωστή δυναμική) βρίσκουμε την ισοδύναμη είσοδο ελέγχου ueq που διατηρεί το καθεστώς ολίσθησης.

$$u = \hat{u}_{eq} - \rho g(s)$$

$$\begin{aligned}
(J1 * \dot{x4}) + \mu x4 + k1(x3 - x1) &= -\left(\frac{\widehat{J1}\widehat{m}_1 g\widehat{r_1}}{\hat{k}_1}\right)\cos(x1)\,x2^2 \\
&\quad - \left(\frac{\widehat{J1}\widehat{m}_1 g\widehat{r_1}}{\hat{k}_1}\right)\sin(x1)\left(\frac{-\widehat{m}_1 g\hat{r}_1\cos(x1) + \frac{\hat{k}_1(x3 - x1)}{\hat{I}_1}}{\hat{I}_1}\right) + \hat{\mu}x4 \\
&\quad - \hat{k}_1(x3 - x1) - \frac{\hat{J}_1}{\hat{k}_1}\left(\widehat{m}_1 g\hat{r}_1\cos(x1) - \hat{k}_1(x_3 - x1)\right) + \frac{\hat{J}_1\hat{I}_1}{\hat{k}_1}{x_d}^{(4)} \\
&\quad - \frac{\hat{J}_1\hat{I}_1}{\hat{k}_1}(3\dddot{e}\lambda + 3\ddot{e}\lambda^2 + \lambda^3\dot{e})
\end{aligned}$$

Ορίζω $V = s^2$, θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov με $\dot{V} = s\dot{s}$.

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε την είσοδο ελέγχου u έτσι ώστε :

$$\frac{I1*J1}{k1} s\dot{s} \leq -c|s| \, , c > 0$$

Γνωστή και ως : ΣΥΝΘΗΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

Ορίζω τις μεταβλητές :

$$A = \frac{J_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot r_1}{k_1} - \frac{\hat{J}_1 \cdot \widehat{m}_1 \cdot g \cdot \hat{r}_1}{\widehat{k}_1}$$

$$B = \frac{J_1 \cdot m_1^2 \cdot g^2 \cdot r_1^2}{k_1 \cdot I_1} \quad \frac{\hat{J}_1 \cdot \widehat{m}_1^2 \cdot g^2 \cdot \hat{r}_1^2}{\widehat{k}_1 \cdot \hat{I}_1}$$

$$\Gamma = \frac{J_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot r_1}{I_1^2} - \frac{\hat{J}_1 \cdot \widehat{m}_1 \cdot g \cdot \hat{r}_1}{\hat{I}_1^2}$$

$$\Delta = J_1 - \hat{J}_1$$

$$E = \mu - \hat{\mu}$$

$$Z = k_1 - \widehat{k}_1$$

$$H = \frac{I_1 \cdot J_1}{k_1} - \frac{\hat{I}_1 \cdot \hat{J}_1}{\widehat{k}_1}$$

Και

$$\rho = |cos(x1)| * |x2|^2 * |A| - |sin(x1)| * |cos(x1)| * |B| + |sin(x1)| * |x3 - x1| * |\Gamma| + |cos(x1)| * |A| - |x3 - x1| * |\Delta| - |x4| * |E| + |x3 - x1| * |Z| - |xd^{(4)}| * |H| + |3\bar{e}\lambda + 3\bar{e}\lambda^2 + \lambda\ddot{e}| * |H| + c$$

Άρα,

$$\frac{I1 * J1}{k1} s\dot{s} \leq \; -c|s|$$

Γ)Προσομοιωση στο Matlab

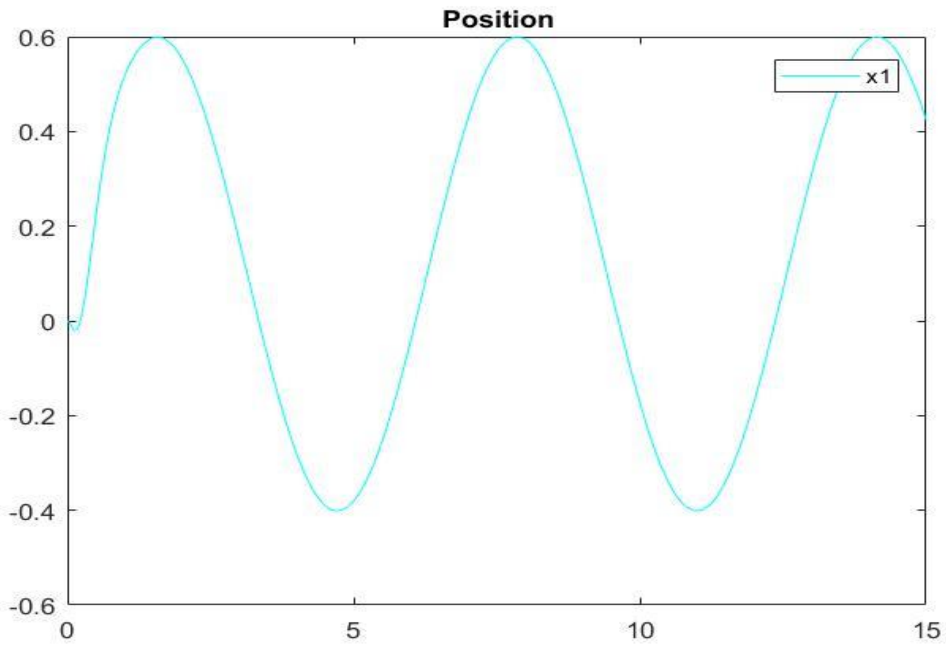
1. Στο πρώτο ερώτημα της εργασίας καλούμαι να προσομοιώσω το δοσμένο σύστημα στο MATLAB . Αυτό έγινε για μια ακόμη φορά , με τη βοήθεια της συνάρτησης :

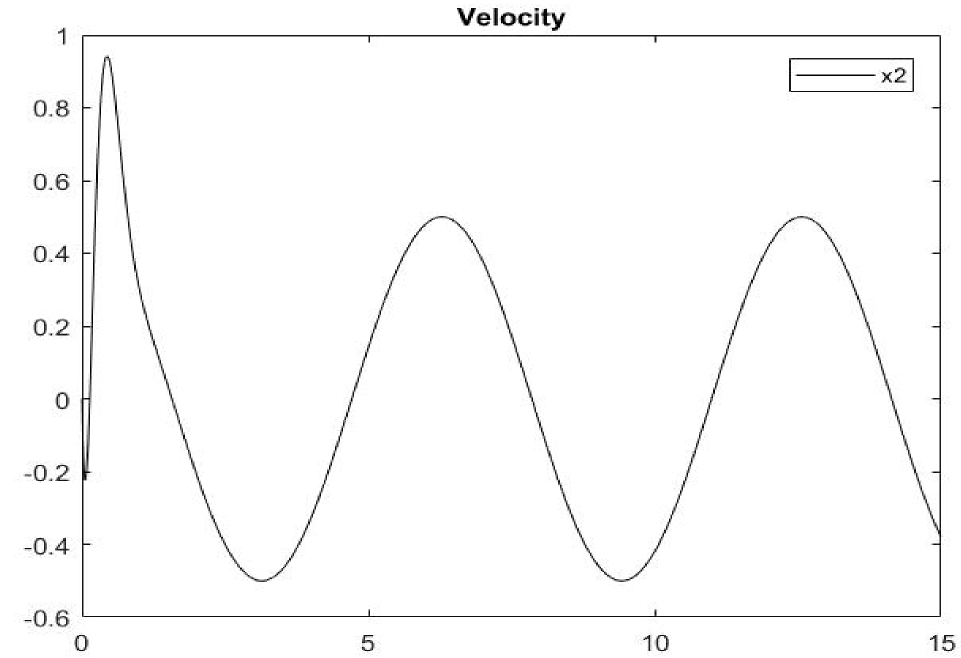
$$[t, x] = ode45(@odefun, [0\ 20], [2; 0])$$

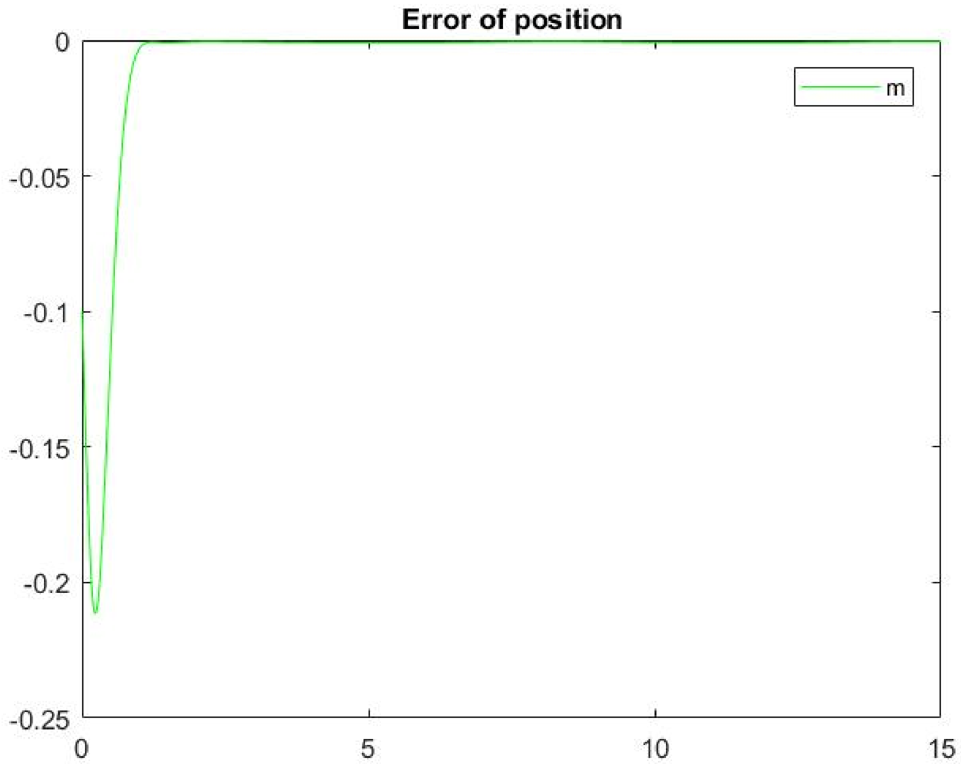
Οι τιμές των παραμέτρων που δόθηκαν στην εκφώνηση , μεταφέρθηκαν στο MATLAB και οι προσομοιώσεις έχουν την εξής μορφή.

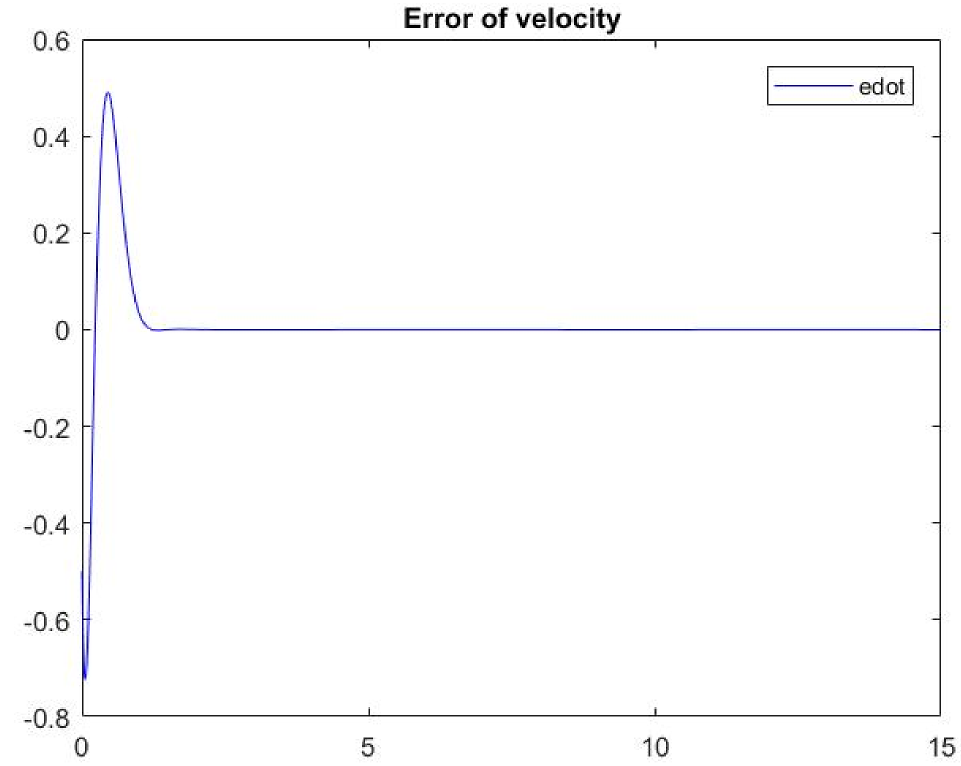
ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ :

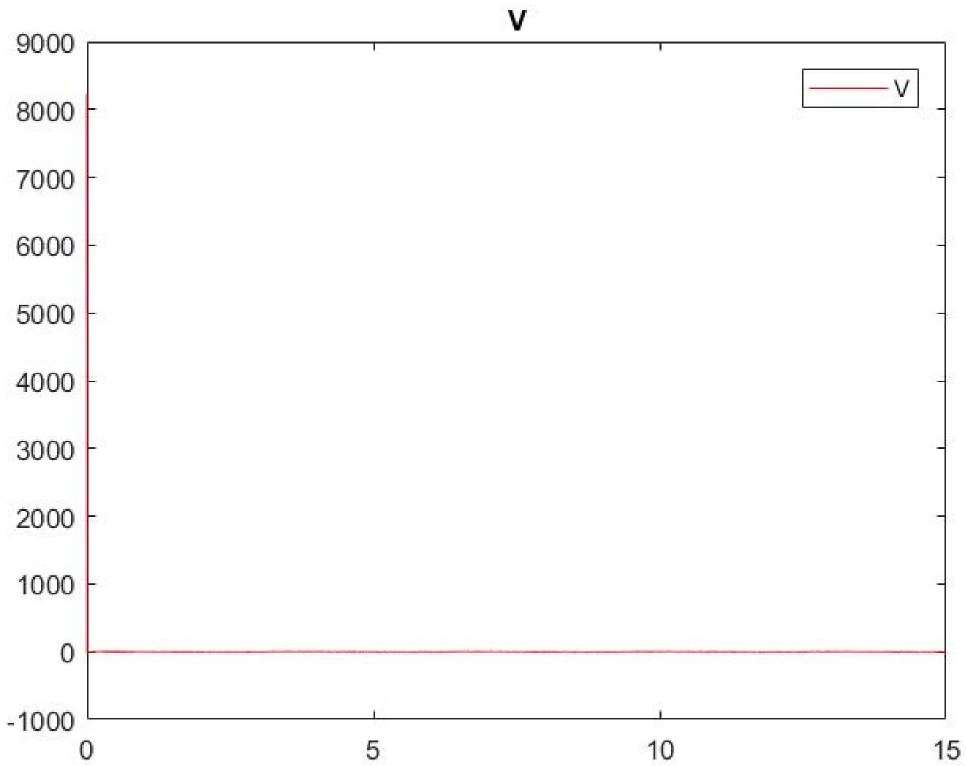
$$time = [0\ 15]$$
$$initial\ Conditions = [0\ 0\ 0\ 0]$$




Velocity
x2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
5
10
15


Error of position
m
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
5
10
15


Error of velocity
edot
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
5
10
15


V
V
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
0
5
10
15

Βλέπω ότι στα διαγράμματα Position & Velocity , η τροχιά που ακολουθήθηκε είναι η δοσμένη

$$qd1 = 0.1 + 0.5sin(t)$$

Αυτό το καταλαβαίνω καθώς ακολουθεί την ημιτονοειδή μορφή με το ανάλογο πλάτος. Τέλος παρατηρώ ότι το σφάλμα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα σταθεροποιείται σε έναν αριθμό , ο οποίος είναι της τάξης 10^{-4}. Είναι ένα αρκετά ικανοποιητικό σφάλμα, καθώς όπως θα δούμε στη συνέχεια της εργασίας, με αλλαγή των δοθέντων παραμέτρων υπάρχει σημαντική αύξηση στο σφάλμα.

2. Σε αυτό το ερώτημα ζητήθηκε να χρησιμοποιηθούν οι εκτιμήσεις παραμέτρων , και όχι οι ακριβείς τιμές τους. Για αυτό τον λόγο , προσομοίωσα το σύστημα για τρεις διαφορετικούς συνδυασμούς :

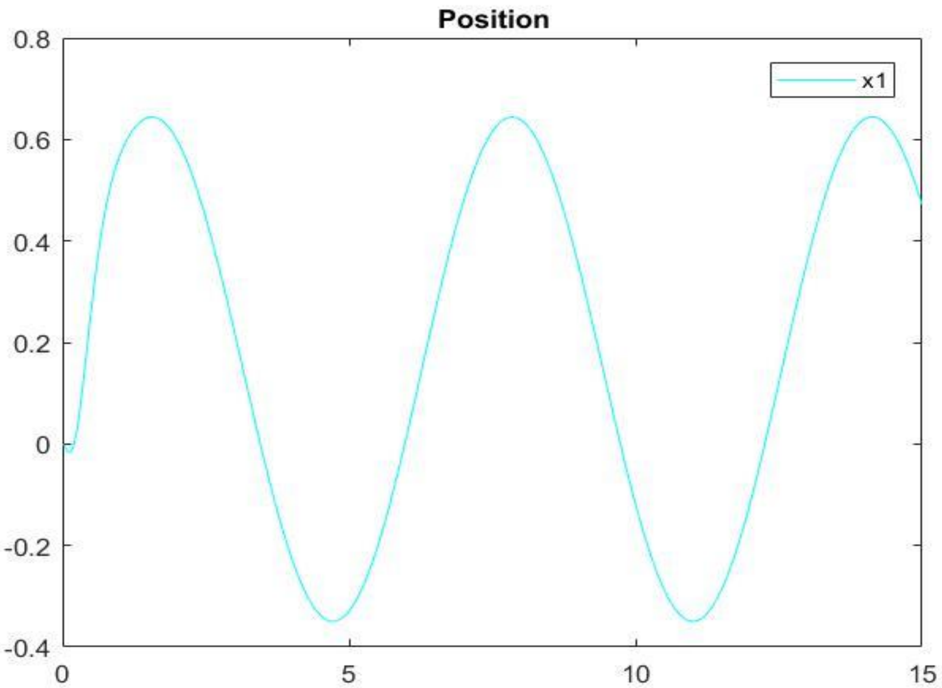
- Τιμές οι οποίες βρίσκονται πιο κοντά στο κάτω όριο των εκτιμήσεων.
- Τιμές οι οποίες βρίσκονται πιο κοντά στο άνω όριο των εκτιμήσεων.

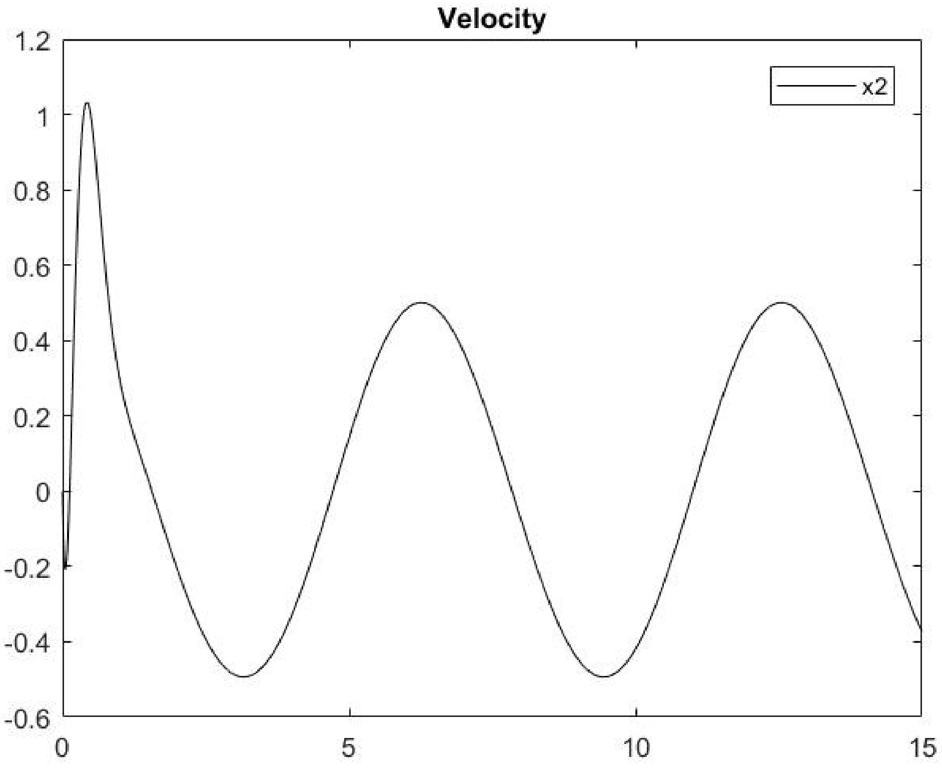
Πρώτη προσομοίωση

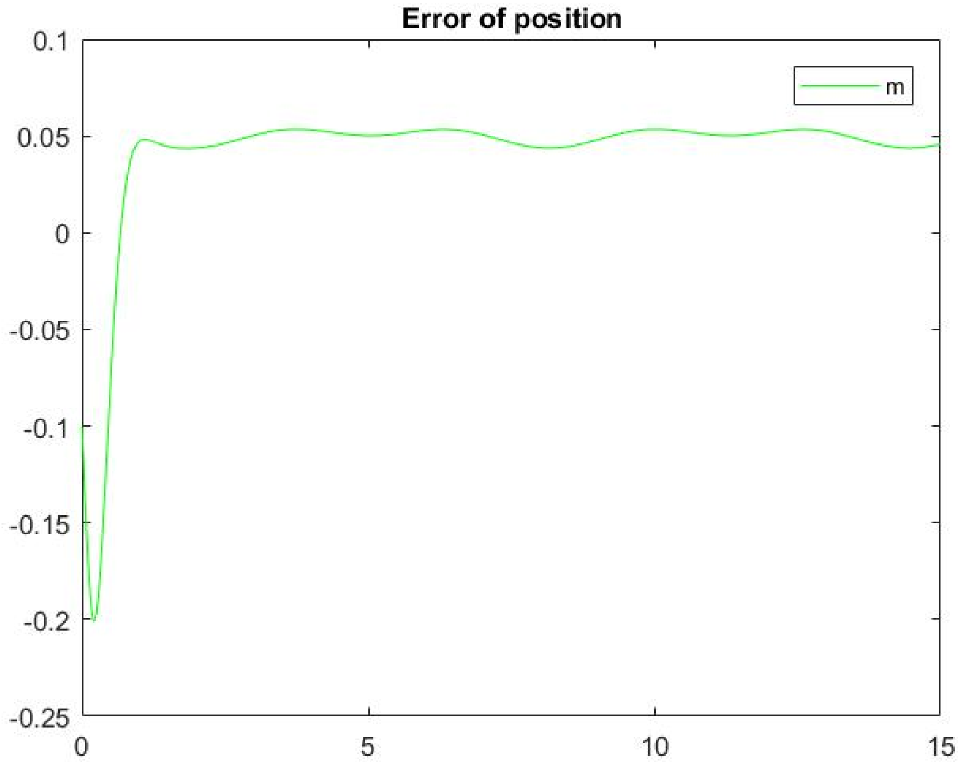
Επιλέγω τις παρακάτω τιμές :

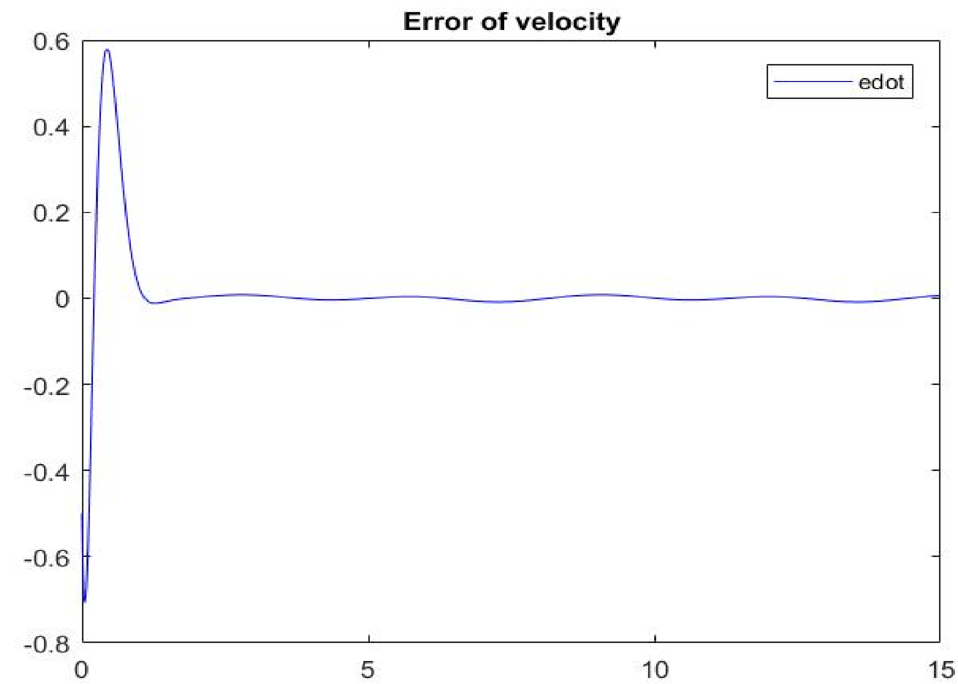
```
I = 4.5;
m = 19.5;
r = 0.23;
k = 1700;
mi = 0.7;
J = 6;
```

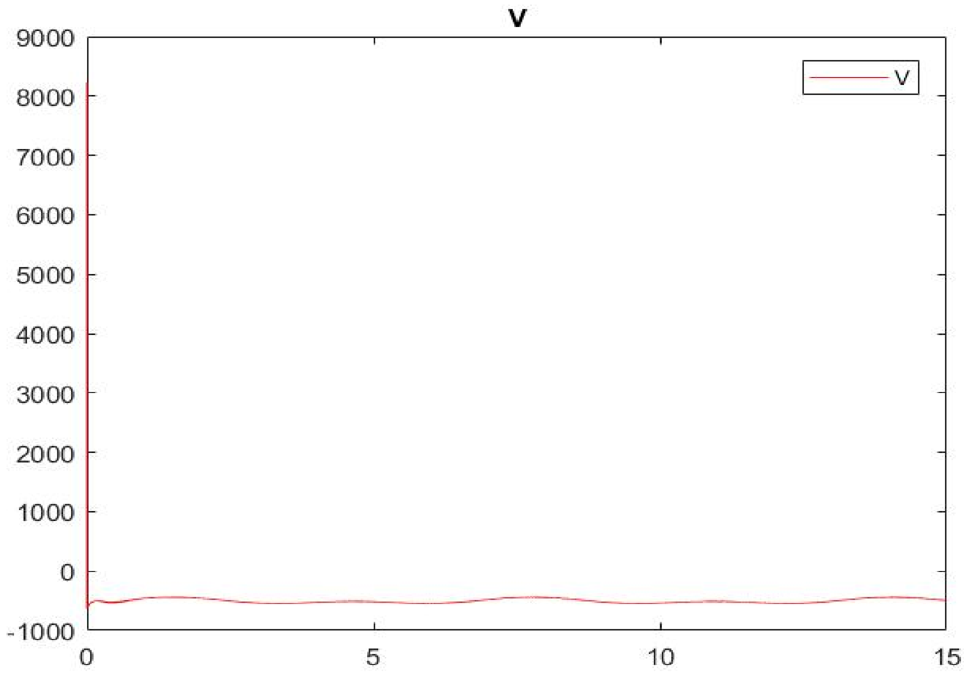
Τα αποτελέσματα είναι τα εξής :


Position
x1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
5
10
15


Velocity
x2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
5
10
15


Error of position
m
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
5
10
15


Error of velocity
edot
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
5
10
15



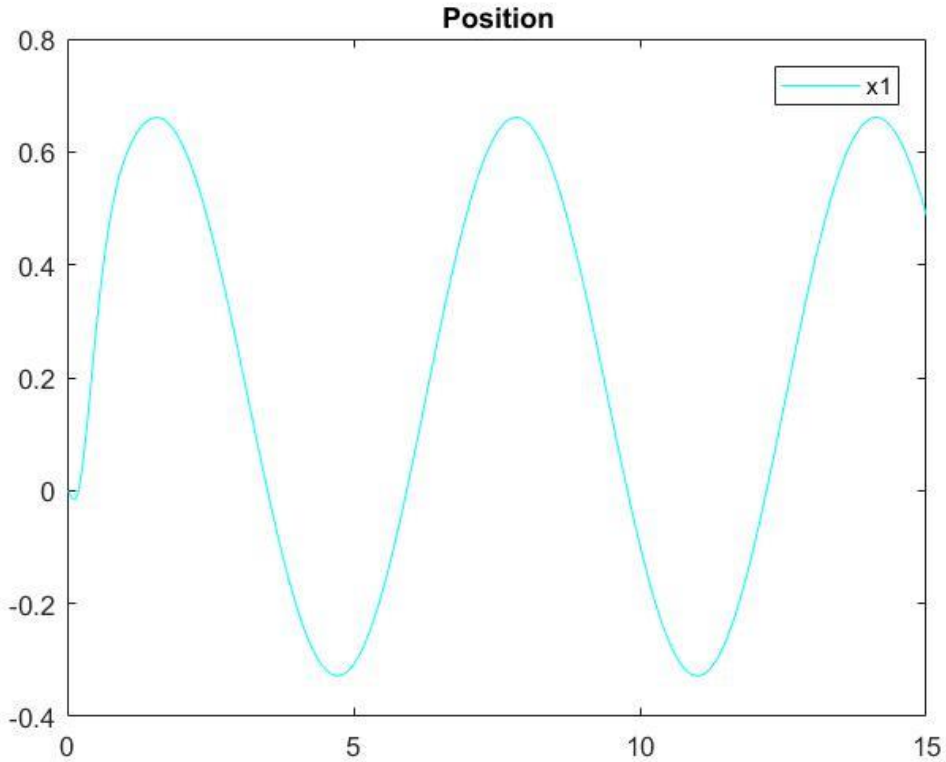
$$error =$$

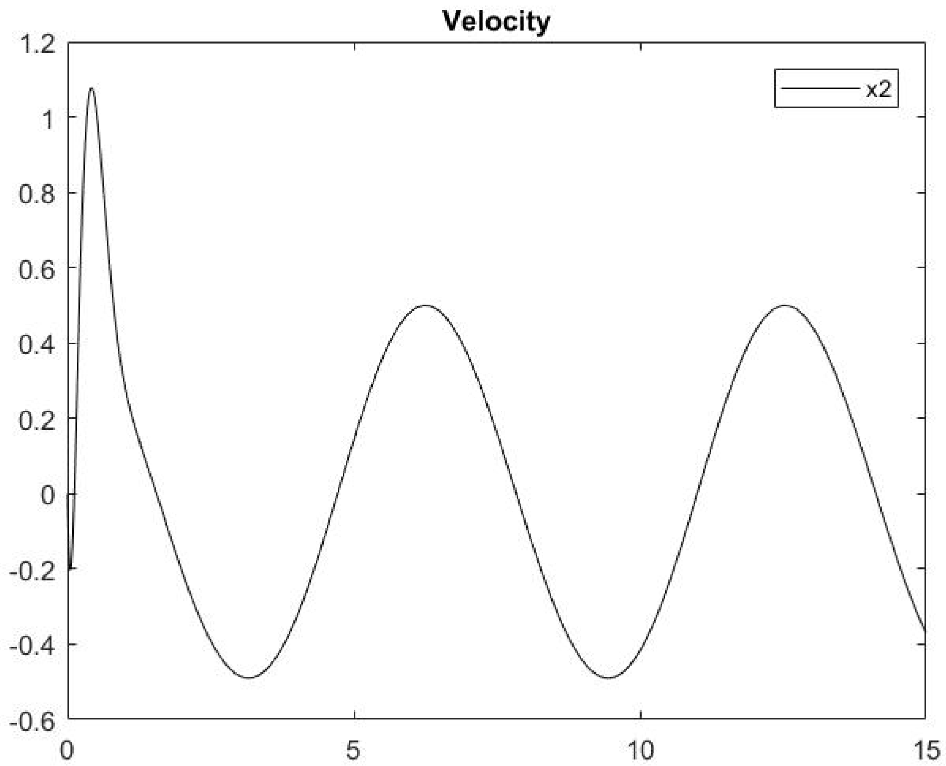
$$0.0534$$

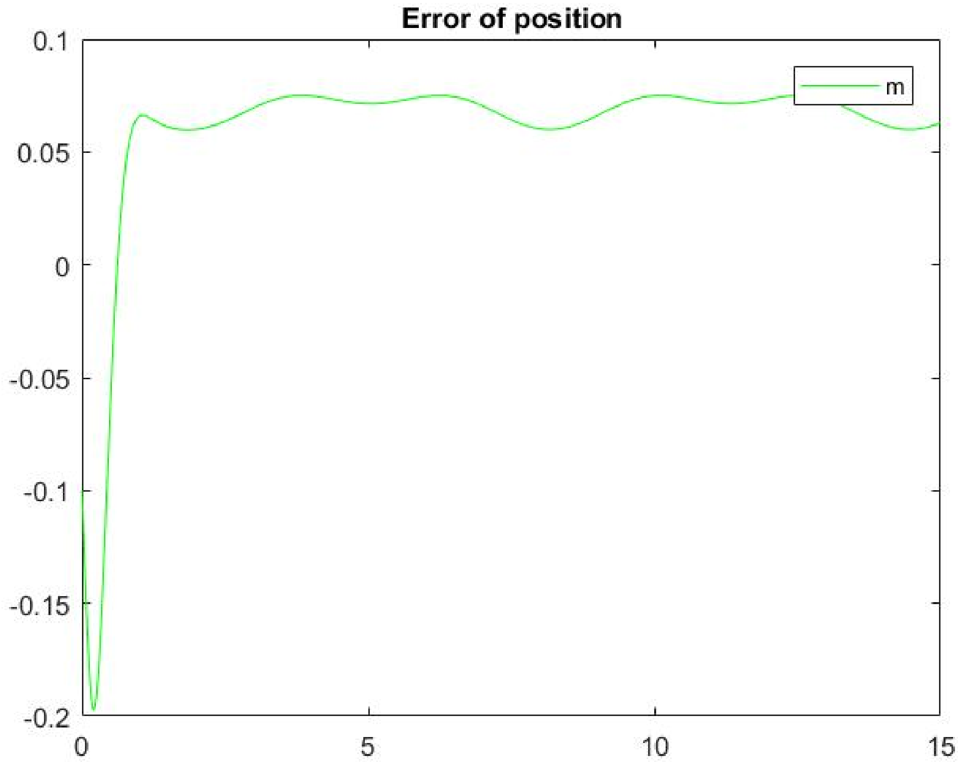
Δεύτερη προσομοίωση

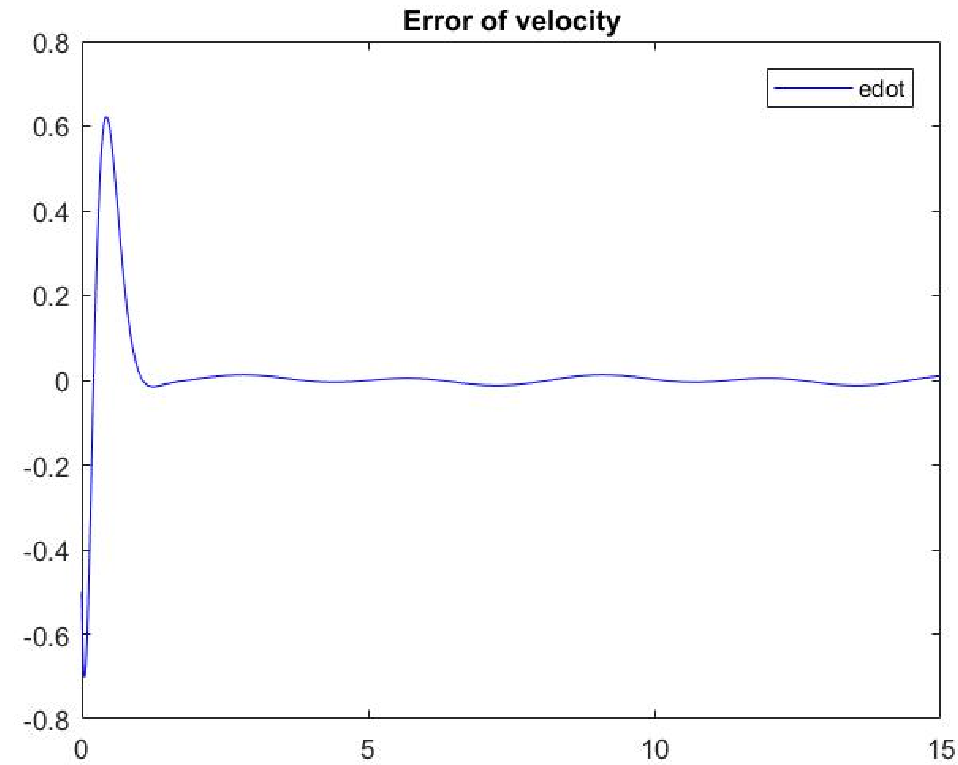
Επιλέγω τις παρακάτω τιμές :

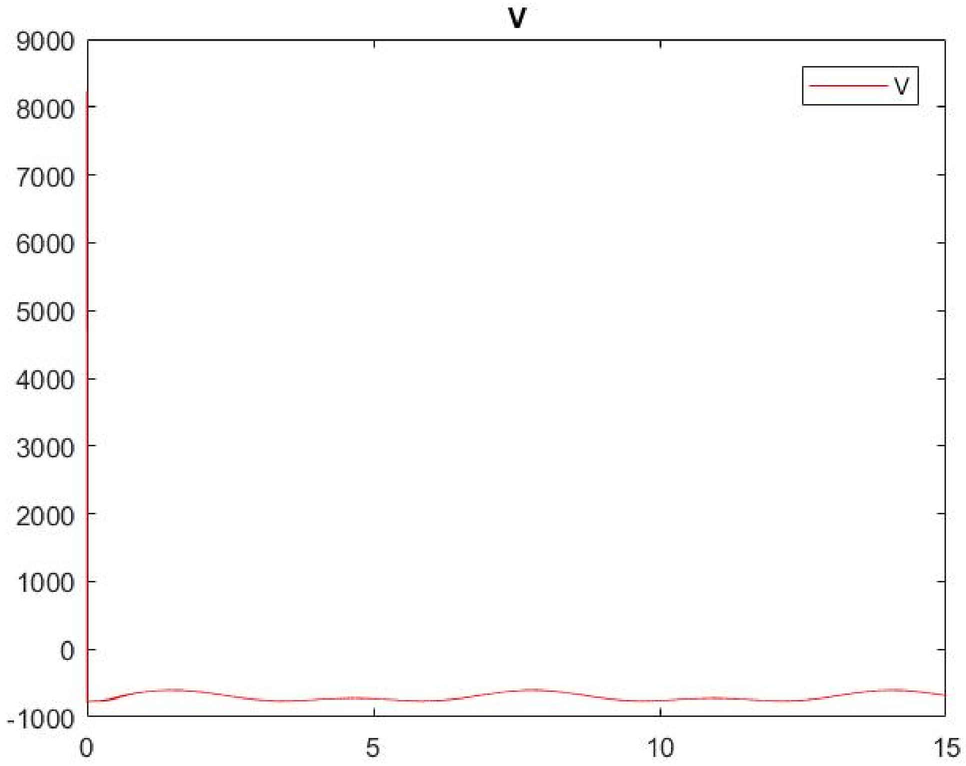
```
I = 9;
m = 23;
r = 0.4;
k = 2400;
mi = 2.5;
J = 9;
```


Position
x1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
5
10
15


Velocity
x2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
5
10
15


Error of position
m
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
5
10
15


Error of velocity
edot
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
5
10
15



$$error =$$

$$0.0750$$

Συμπεραίνω λοιπόν , ότι μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων στο δοσμένο εύρος, παρατηρώ ότι όσο απομακρύνομαι από την ακριβή τιμή αυτών, τόσο έχω αύξηση και στο σφάλμα.

3. Προσομοίωση του ελέχου ολίσθησης με τη βοήθεια του MATLAB.

   Αυτό επιτεύχθηκε μέσω της συνάρτησης :

$$[t, y] = ode23s(odefun, tspan, y0, options)$$

   η οποία με βοήθησε να χειριστώ την προσομοίωση με την ύπαρξη συνάρτησης προσήμου.

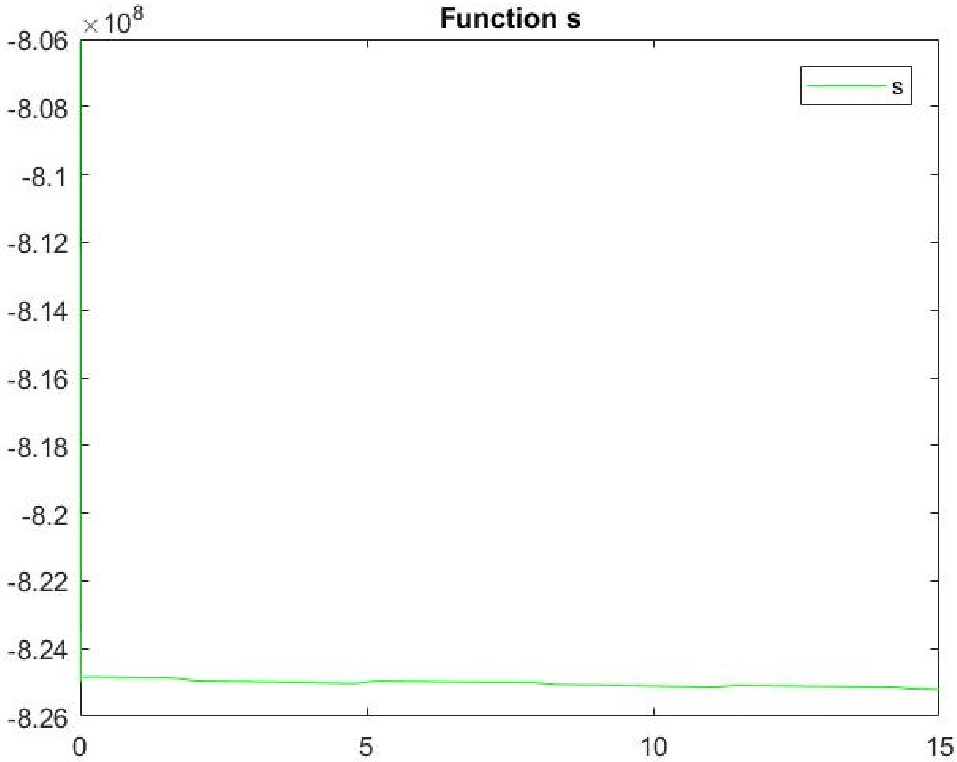
$$\boldsymbol{tspan} = [\mathbf{0}\ \mathbf{15}]$$

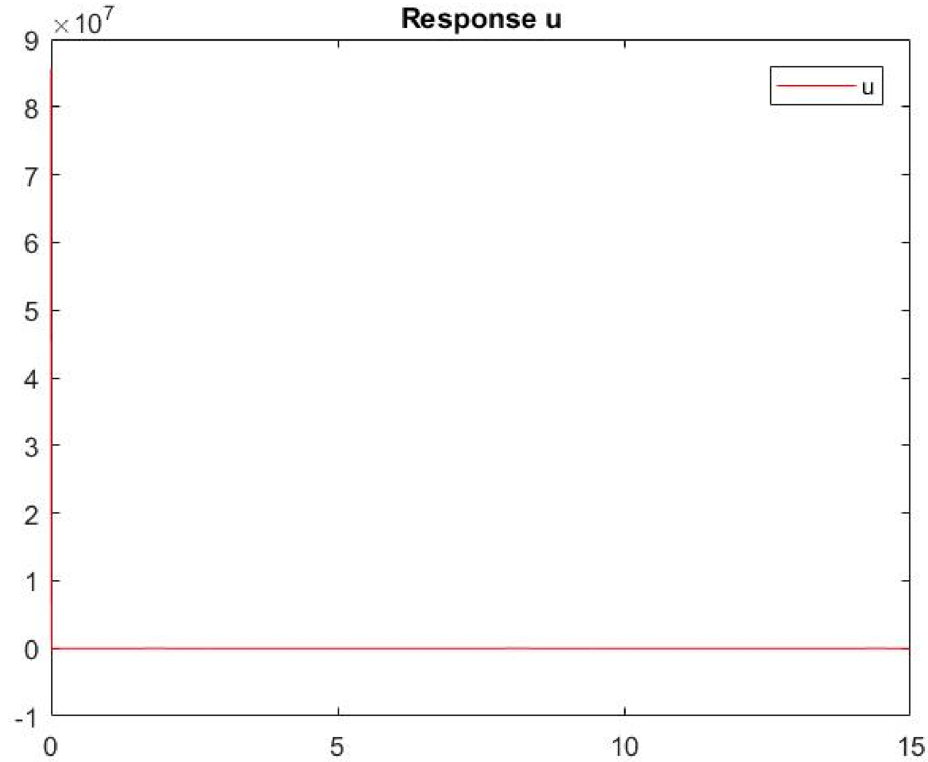
$$\boldsymbol{yo} = [\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}]$$

$$options = odeset('Reltol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-3);$$

Οι εκτιμήσεις είναι οι εξής :

```
I = 4;
m = 21;
r = 0.32;
k = 2000;
mi = 0.9;
J = 7;
```





$$error =$$

$$0.1031$$

Παρατηρώ ότι όσο έχω αύξηση του e, βλέπω ότι καθυστερεί και η εναλλαγή προσήμου. Ακόμα συμπεραίνω, ότι με αύξηση του λ , έχω καλύτερο δυνατό σφάλμα.

Ωστόσο από το αποτέλεσμα που έλαβα, είδα ότι η υλοποίηση δεν είναι ικανοποιητική , καθώς το σφάλμα είναι της τάξης των 10^{-1}.