CHAPTER 4

Continuidad

El concepto de función y parte de la terminología, relacionada con ella, se introdujeron en las Definiciones 2.1.1 y 2.1.2. Aunque (en capítulos posteriores) prestaremos especial interés a las funciones reales y complejas (esto es, funciones cuyos valores son números reales o complejos) también trataremos sobre funciones vectoriales (esto es, con valores en $\mathbb{R}^k$) y con valores en un espacio métrico arbitrario. Los teoremas que trataremos de este modo general no resultan más sencillos si los limitamos, por ejemplo, a las funciones reales; y realmente simplifica y aclara el panorama el descartar las hipótesis innecesarias, y plantear y demostrar los teoremas en un sentido convenientemente general.

Los dominios de definición de nuestras funciones serán, pues, espacios métricos, convenientemente especificados en varios casos.

4.1. Límites de funciones

Definición 4.1.1 *Sean X y Y espacios métricos; supongamos que $E \subset X, f$ mapea (o aplica) E en Y y p es un punto límite de E. Escribiremos $f(x) \to q$ cuando $x \to p$ o*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4.1.1}$$

si existe un punto $q \in Y$ con la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \tag{4.1.2}$$

para todos los puntos $x \in E$, para los cuales

$$0 < d_X(x, p) < \delta \tag{4.1.3}$$

Los símbolos d_X y d_Y se refieren a las distancias en X e Y, respectivamente.

Si X y/o Y se sustituyen por la recta real, el plano complejo, o algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^k$, las distancias d_X, d_Y se sustituyen por los valores absolutos, o por las normas apropiadas (ver Sec. **??**).

Debe observarse que $p \in X$, pero p no necesita ser punto de E en la definición anterior. Además, aun si $p \in E$, podemos tener $f(p) \neq \lim f(x)$.

Podemos enunciar de nuevo esta definición, en lenguaje de límites de sucesiones:

Teorema 4.1.1 *Sean X, Y, E, f, p como en la Definición 4.1.1. Será:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4.1.4}$$

si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \tag{4.1.5}$$

para toda sucesión $\{p_n\}$ en E, tal que

$$p_n \neq p, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p. \tag{4.1.6}$$

Dem: *Supongamos que se cumple (4.1.4). Elijamos $\{p_n\}$ en E, de modo que satisfaga a (4.1.6). Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe $\delta > 0$, tal que $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ si $x \in E$ y $0 < d_X(x, p) < \delta$. Existe, además, un N, tal que $n > N$ implica $0 < d_X(p_n, p) < \delta$. Así, pues, para $n > N$, tenemos $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$, lo que demuestra que se cumple (4.1.5).*

Inversamente, supongamos que (4.1.4) es falso. Existirá algún $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe un punto $x \in E$ (dependiente de δ), para el cual $d_Y(f(x), q) \geq \varepsilon$, pero $0 < d_X(x, p) < \delta$. Tomando $\delta_n = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, hallamos una sucesión en E que satisface a (4.1.6), para la cual (4.1.5) es falso.

Corolario 4.1.1 *Si f tiene un límite en p, este límite es único.*

Se deduce de los Teoremas 3.1.1(b) y 4.1.1.

Definición 4.1.2 *Supongamos que tenemos dos funciones complejas, f y g, definidas ambas en E. Por $f+g$ significamos la función que asigna, a cada punto x de E el número $f(x)+g(x)$. De igual modo definimos la diferencia $f-g$, el producto fg y el cociente f/g de las dos funciones, debiendo entenderse que se define el cociente solamente en los puntos x de E, para los cuales $g(x) \neq 0$. Si f asigna a cada punto x de E el mismo número c, se dice que f es una función constante, o simplemente una constante, y escribimos $f = c$. Si f y g son funciones reales y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in E$, escribiremos a veces $f \geq g$, por brevedad.*
De igual modo, si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ mapean (o aplican) E en $\mathbb{R}^k$, definimos $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ por

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{g}(x), \quad (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{f}(x)\cdot\boldsymbol{g}(x)$$

y si λ es un número real $(\lambda \boldsymbol{f})(x) = \lambda \boldsymbol{f}(x)$.

Teorema 4.1.2 *Supongamos que $E \subset X$ es un espacio métrico, p es un punto límite de E, f y g son funciones complejas de E, y*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A, \quad \lim_{x \to p} g(x) = B$$

Entonces
(a) $\lim_{x \to p}(f+g)(x) = A + B$;
(b) $\lim_{x \to p}(fg)(x) = AB$;
(c) $\lim_{x \to p}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$, *si* $B \neq 0$.

Dem: *Teniendo en cuenta el Teorema 4.1.1, estas afirmaciones se deducen inmediatamente* *de las propiedades análogas de las sucesiones (Teorema 3.1.2).*

Observación: *Si f y g mapean E en $\mathbb{R}^k$ (a) continúa siendo cierto y (b) se convierte en*

(b') $\lim_{x\to p}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(x)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

(Compárese con el Teorema 3.1.3).

4.2. Funciones continuas

Definición 4.2.1 *Supongamos que X y Y son espacios métricos, $E \subset X$, $p \in E$ y que f aplica E en Y. En estas condiciones, se dice que f es continua en p si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que*

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

para todos los puntos $x \in E$, para los cuales $d_X(x, p) < \delta$.

Si f es continua en todo punto de E, se dice que f es continua en E.

Se observará que f debe estar definida en el punto p para que sea continua en p. (Compárese con la observación que sigue a la Definición 4.1.1.)

Si p es un punto aislado de E, la definición implica que toda función f que tiene a E como dominio de definición es continua en p. Porque, si elegimos un $\varepsilon > 0$ cualquiera, podemos escoger $\delta > 0$, de modo que el único punto $x \in E$, para el cual $d_X(x, p) < \delta$ sea $x = p$; entonces

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$$

Teorema 4.2.1 *En las condiciones enunciadas en la Definición 4.2.1, si admitimos además que p es un punto límite de E, f será continuo en p si, y solo si $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Dem: *Se ve fácilmente si comparamos las Definiciones 4.1.1 y 4.2.1.*

Volvamos, ahora, a la composición de funciones. Un breve resumen del teorema siguiente es que una función continua de una función continua, es continua.

Teorema 4.2.2 *Supongamos que X, Y, Z son espacios métricos, $E \subset X$, f mapea E en Y, g*

mapea al rango de $f, f(E)$ en Z, y h es el mapeo de E en Z definida por

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in E)$$

Si f es continua en todo punto $p \in E$ y g es continua en el punto $f(p)$, h entonces es continua en p.

Esta función h se denomina la composición o función compuesta de f y g. Se escribe comúnmente

$$h = g \circ f.$$

Dem: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como g es continua en $f(p)$ existe un $\eta > 0$, tal que*

$$d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon \ si \ d_Y(y, f(p)) < \eta \quad y \quad y \in f(E).$$

Como f es continua en p, existe un $\delta > 0$, tal que

$$d_Y(f(x), f(p)) < \eta \text{ si } d_X(x,p) < \delta \quad y \quad x \in E$$

Se deduce que

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$$

si $d_X(x,p) < \delta$, y $x \in E$. Así, pues, h es continua en p.

Teorema 4.2.3 *Una aplicación (o mapeo) f de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continua en X si, y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo conjunto abierto V en Y.*

(Las imágenes inversas se definieron en la Definición 2.1.2.) Esta es una caracterización muy útil de la continuidad.

Dem: *Supongamos que* f *es continuo en* X *y que* V *es un conjunto abierto en* Y*. Tenemos que demostrar que todo punto de* $f^{-1}(V)$ *es un punto interior de* $f^{-1}(V)$*. Para ello, sea* $p \in X$ *y* $f(p) \in V$*. Como* V *es abierto, existe un* $\varepsilon > 0$*, tal que* $y \in V$ *si* $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$*, y como* f *es continua en* p*, existe* $\delta > 0$*, tal que* $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ *si* $d_X(x, p) < \delta$*. Así, pues,* $x \in f^{-1}(V)$ *en cuanto* $d_X(x, p) < \delta$*.*

Inversamente, supongamos que $f^{-1}(V)$ *es abierto en* X *para todo conjunto abierto* V *en* Y*. Fijemos* $p \in X$ *y* $\varepsilon > 0$*, y sea* V *el conjunto de todo* $y \in Y$*, tal que* $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$*.* V *será abierto; por lo que* $f^{-1}(V)$ *es abierto, y, por tanto, existe un* $\delta > 0$*, tal que* $x \in f^{-1}(V)$ *en cuanto* $d_X(p, x) < \delta$*. Pero si* $x \in f^{-1}(V)$*, se verifica que* $f(x) \in V$*, de modo que* $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$*, lo que completa la demostración.*

Corolario 4.2.1 *Una aplicación* f *de un espacio métrico* X *en un espacio métrico* Y *es continua si y solo si* $f^{-1}(C)$ *es cerrado en* X *para cada conjunto cerrado* C *en* Y*.*

Esto se deduce del teorema, ya que un conjunto es cerrado si y solo si, su complemento es abierto, y como $f^{-1}(E') = \left[f^{-1}(E)\right]'$ para cada $E \subset Y$.

Volvemos, ahora, a las funciones con valores complejos y vectoriales, y a las definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^k$.

Teorema 4.2.4 *Sean f y g funciones complejas continuas en un espacio métrico X. $f+g$, fg, y f/g son continuas en X.*

En el último caso, evidentemente, debemos suponer que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

Dem: *Respecto de los puntos de X no hay nada que demostrar. En los puntos límites, el enunciado se deduce de los Teoremas 4.1.2 y 4.2.1.*

Teorema 4.2.5

(a) *Sean* $f_1, \ldots, f_k$ *funciones reales en un espacio métrico* X, *y sea* $\boldsymbol{f}$ *la aplicación de* X *en* $\mathbb{R}^k$ *definida por*

$$\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \quad (x \in X) \tag{4.2.1}$$

$\boldsymbol{f}$ *es continua si, y solo si cada una de las funciones* $f_1, \ldots, f_k$ *es continua.*

(b) *Si* $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{g}$ *son aplicaciones continuas de* X *en* $\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ *y* $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ *son continuas en* X.

Las funciones $f_1, \ldots, f_k$ se llaman componentes de $\boldsymbol{f}$. Obsérvese que $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ es una aplicación en $\mathbb{R}^k$, mientras que $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ es una función real en X.

Dem: *El apartado (a) se deduce de las desigualdades*

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(y)| = \left\{ \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

para $j = 1, \ldots, k$. *El (b) se deduce de (a) y del Teorema 4.2.4.*

Ejemplo 4.2.1 *Si* $x_1, \ldots, x_k$ *son las coordenadas del punto* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$, *las funciones* ϕ_i *definidas por*

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = x_i \quad \left(x \in \mathbb{R}^k\right) \tag{4.2.2}$$

son continuas en $\mathbb{R}^k$, *pues, la desigualdad*

$$|\phi_i(\boldsymbol{x}) - \phi_i(\boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$$

demuestra que podemos tomar $\delta = \varepsilon$ *en la Definición 4.2.1. A las funciones* ϕ_i *se les llama a veces funciones coordenadas.*

Repitiendo la aplicación del Teorema 4.2.4, se ve que todo monomio

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \tag{4.2.3}$$

en el que $n_1, \ldots, n_k$ *son enteros no negativos, es continuo en* $\mathbb{R}^k$. *Esto mismo es cierto para los productos de* (4.2.3) *por una constante, pues las constantes son, evidentemente, continuas. Se deduce que todo polinomio* P, *dado por*

$$P(\boldsymbol{x}) = \Sigma c_{n_1 \cdots n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \quad \left(x \in \mathbb{R}^k\right) \tag{4.2.4}$$

es continuo en $\mathbb{R}^k$. *En él, los coeficientes* $c_{n_1 \cdots n_k}$ *son números complejos,* $n_1, \ldots, n_k$ *son enteros no negativos, y la suma en* (4.2.4) *tiene un número finito de términos.*

Además, toda función racional en $x_1, \ldots, x_k$, *esto es, todo cociente de dos polonomios de la forma* (4.2.4), *es continua en* $\mathbb{R}^k$ *cuando el denominador es diferente de cero.*

De la desigualdad del triángulo se ve fácilmente que

$$||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \quad \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\right). \tag{4.2.5}$$

Por tanto, la aplicación $\boldsymbol{x} \to |\boldsymbol{x}|$ *es una función real continua en* $\mathbb{R}^k$.

Si, ahora, $\boldsymbol{f}$ *es una aplicación continua de un espacio métrico* X *en* $\mathbb{R}^k$, *y* ϕ *está definida en* X *por* $\phi(p) = |\boldsymbol{f}(p)|$, *se deduce por el Teorema 4.2.2, que* ϕ *es una función real continua en* $\mathbb{R}^k$.

Observación: *Hemos definido la noción de continuidad para funciones definidas en un subconjunto* E *de un espacio métrico* X. *Sin embargo, el complemento de* E *en* X *no juega ningún papel en esta definición (obsérvese que la situación era algo diferente para los límites de funciones). En consecuencia, podemos descartar el complemento del dominio de definición de* f, *lo que significa que podemos hablar solamente de aplicaciones continuas de un espacio métrico en otro, en lugar de hacerlo de aplicaciones de subconjuntos, con lo cual se simplifican el enunciado y la demostración de algunos teoremas. Ya hemos hecho uso de esto en los Teoremas 4.2.3 a 4.2.5, y continuaremos haciéndolo en las secciones de compacticidad y conexión.*

4.3. Continuidad y compacticidad

Definición 4.3.1 *Se dice que una aplicación* $\boldsymbol{f}$ *de un conjunto* E *en* $\mathbb{R}^k$ *es acotada si existe un número real* M*, tal que* $|\boldsymbol{f}(x)| \leq M$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in E$*.*

Teorema 4.3.1 *Supongamos que* f *es una aplicación continua de un espacio métrico compacto* X *en un espacio métrico* Y*.* $f(X)$ *será compacto.*

Dem: *Sea* $\{V_\alpha\}$ *una cubierta abierta de* $f(X)$*. Como* f *es continua, el Teorema 4.2.3 demuestra que todos los conjuntos* $f^{-1}(V_\alpha)$ *son abiertos. Como* X *es compacto, hay un número finito de índices,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*, tales que*

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{4.3.1}$$

Como $f\left(f^{-1}(E)\right) \subset E$, *para todo* $E \subset Y$, (4.3.1) *implica que*

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \tag{4.3.2}$$

lo que complementa la demostración.

Nota: Hemos utilizado la expresión $f\left(f^{-1}(E)\right) \subset E$, válida para $E \subset Y$. Si $E \subset X$, solo podemos afirmar que $f^{-1}(f(E)) \supset E$ sin que, necesariamente, se cumpla la igualdad.

Ahora. deduciremos algunas consecuencias del Teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.2 *Si* $\boldsymbol{f}$ *es una aplicación continua de un espacio métrico compacto* X *en* $\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{f}(X)$ *es cerrado y acotado. Así,* $\boldsymbol{f}$ *es acotada.*

Se deduce del Teorema 2.3.9. El resultado es particularmente importante cuando f es real:

Teorema 4.3.3 *Supongamos que f es una función real continua en un espacio métrico compacto X, y*

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \quad m = \inf_{p \in X} f(p) \tag{4.3.3}$$

Existen puntos $p, q \in X$, tales que $f(p) = M$ y $f(q) = m$.

La notación utilizada en (4.3.3) significa que M es la mínima cota superior del conjunto de todos los números $f(p)$, cuando p tiene por rango a X, y m es la máxima cota inferior de este conjunto de números.

También puede enunciarse la conclusión como sigue: Existen puntos p y q en X tales que $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in X$; esto es, f alcanza su máximo (en p) y su mínimo (en q).

Dem: *Por Teorema 4.3.2, $f(X)$ es un conjunto cerrado y acotado de números reales; por tanto, contiene a su extremo superior M y al inferior m (Teorema 2.2.7).*

Teorema 4.3.4 *Supongamos que f es una aplicación continua 1-1 de un espacio métrico compacto X sobre un espacio métrico Y. La aplicación inversa f^{-1} definida en Y por*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X)$$

es una aplicación continua de Y sobre X.

Dem: *Aplicando el Teorema 4.2.3 a f^{-1} en lugar de f, vemos que basta demostrar que $f(V)$ es un conjunto abierto en Y para todo conjunto abierto V en X. Fijemos un tal conjunto, V.*

El complementario V^c de V es cerrado en X y, por tanto, compacto (Teorema 2.3.3), por lo cual $f(V^c)$ es un subconjunto compacto de Y (Teorema 4.3.1) y es cerrado en Y (Teorema 2.3.2). Como f es una aplicación 1-1 y sobre, $f(V)$ es el complemento de $f(V^c)$. Por tanto, $f(V)$ es abierto.

Definición 4.3.2 *Sea f una aplicación de un espacio métrico X en un espacio métrico Y. Decimos que f es uniformemente continua en X si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \tag{4.3.4}$$

para todos los valores de p y q en X para los que $d_X(p, q) < \delta$.

Consideremos las diferencias entre los conceptos de continuidad y continuidad uniforme. Primeramente, la continuidad uniforme es una propiedad de una función en un conjunto, mientras que la continuidad se puede definir en un solo punto; y no tiene sentido la pregunta de si una función es uniformemente continua en un cierto punto. Segundo, si f es continua en X, es posible hallar para cada $\varepsilon > 0$ y cada punto p de X, un número $\delta > 0$ que posee la propiedad enunciada en la Definición 4.2.1. Este δ depende de ε y de p. Pero si f es uniformemente continua en X, es posible hallar, para cada $\varepsilon > 0$, un número $\delta > 0$ que la cumpla para todos los puntos p de X.

Es evidente que toda función uniformemente continua es continua. Del teorema siguiente se deduce que los dos conceptos son equivalentes en los conjuntos compactos.

Teorema 4.3.5 *Sea f una aplicación continua de un espacio métrico compacto X en un espacio métrico Y. f es uniformemente continua en X.*

Dem: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es continua, podemos asociar a cada punto $p \in X$ un número positivo $\phi(p)$ tal que*

$$q \in X, d_X(p, q) < \phi(p) \text{ implies } \quad d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3.5}$$

Sea $J(p)$ el conjunto constituido por todo $q \in X$ para el cual

$$d_X(p, q) < \frac{1}{2}\phi(p) \tag{4.3.6}$$

Como $p \in J(p)$, la colección de todos los conjuntos $J(p)$ es un recubrimiento abierto de X; y *como X es compacto, hay un conjunto finito de puntos $p_1, \ldots, p_n$ en X tal que*

$$X \subset J\left(p_1\right) \cup \cdots \cup J\left(p_n\right). \tag{4.3.7}$$

Hacemos

$$\delta = \frac{1}{2} \min\left[\phi\left(p_1\right), \ldots, \phi\left(p_n\right)\right] \tag{4.3.8}$$

Será: $\delta > 0$. (Este es un punto en que el carácter de finito del recubrimiento, inherente a la definición de compacticidad, es esencial.

El mínimo de un conjunto finito de números positivos es positivo, mientras que el inf de un conjunto infinito de números positivos puede muy bien ser 0 .)

Sean, ahora, p y q puntos de X tales que $d_X(p, q) < \delta$. Por (4.3.7) hay un entero $m, 1 \leq m \leq n$, tal que $p \in J\left(p_m\right)$; por tanto,

$$d_X\left(p, p_m\right) < \frac{1}{2}\phi\left(p_m\right) \tag{4.3.9}$$

y tenemos también que

$$d_X\left(q, p_m\right) \leq d_X(p, q)+d_X\left(p, p_m\right)<\delta+\frac{1}{2} \phi\left(p_m\right) \leq \phi\left(p_m\right)$$

Finalmente, (4.3.5) *demuestra que, por consiguiente,*

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y\left(f(p), f\left(p_m\right)\right)+d_Y\left(f(q), f\left(p_m\right)\right)<\varepsilon$$

Lo que completa la demostración.

En el Ejercicio 10 se da otra demostración.

Procederemos, ahora, a demostrar que la compacticidad es esencial en las hipótesis de los Teoremas 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.5.

Teorema 4.3.6 *Sea E un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^1$. Luego*
(a) existe una función continua en E que no está acotada;
(b) existe una función continua y acotada en E que no tiene máximo. Si, además, E es acotado,
(c) existe una función continua en E que es no uniformemente continua.

Dem: *Supongamos primeramente que E es acotado, de modo que existe un punto límite x_0 de E, que no es punto de E. Consideremos*

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0} \quad (x \in E) \tag{4.3.10}$$

Es continua en E (Teorema 4.2.4) pero, evidentemente, no es acotada. Para ver que (4.3.10) no es uniformemente continua, sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ arbitrarios, y elijamos un punto $x \in E$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Tomando t suficientemente próximo a x_0, podemos hacer la diferencia $|f(t) - f(x)|$ mayor que ε, aunque $|t - x| < \delta$. Como esto es cierto para todo $\delta > 0, f$ no es *uniformemente continua en E.*

La función g dada por

$$g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2} \quad (x \in E) \tag{4.3.11}$$

es continua en E, y acotada, pues $0 < g(x) < 1$. Es claro que

$$\sup_{x \in E} g(x) = 1$$

mientras que $g(x) < 1$ para todo $x \in E$. Así pues, g no tiene máximo en E.

Habiendo demostrado el teorema para conjuntos acotados E, supongamos que E no es acotado. Entonces $f(x) = x$ demuestra (a) mientras que

$$h(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad (x \in E) \tag{4.3.12}$$

establece (b), pues

$$\sup_{x \in E} h(x) = 1$$

y $h(x) < 1$ *para todo* $x \in E$.

La afirmación (c) sería falsa si se suprimiera la acotabilidad de la hipótesis. Porque, si E *es el conjunto de todos los enteros, toda función definida en él es uniformemente continua en* E. *Para verlo, basta tomar* $\delta < 1$ *en la Definición 4.3.2.*

Concluimos esta sección demostrando que la compacticidad es también esencial en el Teorema 4.3.4.

Ejemplo 4.3.1 *Sea* X *el intervalo semi-abierto* $[0, 2\pi)$ *en la recta real, y* f *la aplicación de* X *sobre el círculo* Y *constituido por todos los puntos cuya distancia al origen es 1 , dados por*

$$\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad (0 \leq t < 2\pi) \tag{4.3.13}$$

La continuidad de las funciones trigonométricas coseno y seno, tanto como sus propiedades de periodicidad, se demostrarán en el capítulo **??**. *Admitiéndolas, es fácil ver que* f *es una aplicación continua 1-1 de* X *sobre* Y.

Sin embargo, la aplicación inversa (que existe, pues $\boldsymbol{f}$ *es 1-1 y sobre) deja de ser continua en el punto* $(1,0) = \boldsymbol{f}(0)$*. Ciertamente,* X *no es compacto en este ejemplo. (Puede ser interesante observar que* $\boldsymbol{f}^{-1}$ *deja de ser continua ¡a pesar del hecho de ser* Y *compacto!)*

4.4. Continuidad y conexibilidad

Teorema 4.4.1 *Si f es una aplicación continua de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, y si E es un subconjunto conexo de X, entonces $f(E)$ es conexo.*

Dem: *Supóngase por el contrario, que $f(E) = A \cup B$, en donde A y B son subconjuntos separados no vacíos de Y.*

Si se hace $G = E \cap f^{-1}(A)$, $H = E \cap f^{-1}(B)$.

Entonces $E = G \cup H$, y ni G ni H son vacíos.

Debido a que $A \subset \bar{A}$ (la cerradura de A), se tiene que $G \subset f^{-1}(\bar{A})$; el último conjunto es cerrado, porque f es continua; de aquí que $\bar{G} \subset f^{-1}(\bar{A})$. Y se obtiene $f(\bar{G}) \subset \bar{A}$. Como $f(H) = B$ y $\bar{A} \cap B$ es vacío, se puede concluir que $\bar{G} \cap H$ es vacío.

El mismo argumento muestra que $G \cap \bar{H}$ es vacío. Por lo tanto G y H son separados. Esto es imposible si E es conexo.

Teorema 4.4.2 *Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < f(b)$ y c es un número tal que $f(a) < c < f(b)$, existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.*

Evidentemente, se mantiene un resultado similar si $f(a) > f(b)$. Hablando vulgarmente, el teorema expresa que una función real continua adopta en un intervalo todos los valores intermedios.

Dem: *Por el Teorema 2.5.1, $[a, b]$ es conexo; por tanto, el Teorema 4.4.1 demuestra que $f([a, b])$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^1$, y la afirmación queda demostrada si consideramos nuevamente el Teorema 2.5.1.*

Observación: *A primera vista, puede parecer que el Teorema 4.4.2 tiene un recíproco. Esto es, puede pensarse que si para cada par de puntos* $x_1 < x_2$ *y para todo número c comprendido entre* $f(x_1)$ *y* $f(x_2)$*, hay un punto* x *en* (x_1, x_2) *tal que* $f(x) = c$, f *debe ser continua.*

Que esto no es así, puede deducirse del Ejemplo 4.5.1(d).

4.5. Discontinuidades

Si x es un punto en el dominio de definición de la función f, en el cual ésta no es continua, decimos que f es discontinua en x, o que f tiene una discontinuidad en x. Si x está definida en un intervalo o en un segmento, se suelen distinguir dos tipos de discontinuidades. Antes de dar esta clasificación, tenemos que definir los límites por la derecha y por la izquierda de f en x, que representaremos por $f(x+)$ y $f(x-)$, respectivamente.

Definición 4.5.1 *Supongamos f definida en (a, b). Consideremos todo punto x tal que $a \leq x < b$. Escribiremos*

$$f(x+) = q$$

si $f(t_n) \to q$ cuando $n \to \infty$, para todas las sucesiones $\{t_n\}$ en (x, b) tales que $t_n \to x$. Para obtener la definición de $f(x-)$, para $a < x \leq b$, nos limitamos a las sucesiones $\{t_n\}$ en (a, x).

Es claro que en cada punto x *de* (a,b)*, existe* $\lim_{t\to x} f(t)$ *si, y solo si*

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t\to x} f(t).$$

Definición 4.5.2 *Supongamos* f *definida en* (a,b)*. Si* f *es discontinua en el punto* x *y existe* $f(x+)$ *y* $f(x-)$ *se dice que* f *tiene una discontinuidad de primera clase o una discontinuidad simple, en* x*. De otro modo, se dice que la discontinuidad es de segunda clase.*

Hay dos formas en que la función puede tener una discontinuidad simple: o $f(x+) \neq f(x-)$ [en cuyo caso el valor de $f(x)$ carece de interés] o $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

Ejemplo 4.5.1 *(a) Definamos*

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \text{ racional })\\ 0 & (x \text{ irracional }).\end{cases}$$

En estas condiciones, f tiene una discontinuidad de segunda clase en cada punto x, pues no existen $f(x+)$, ni $f(x-)$.

(b) Definamos

$$f(x)=\begin{cases}x & (x \text{ racional })\\ 0 & (x \text{ irracional }).\end{cases}$$

f es continua en $x=0$ y tiene una discontinuidad de segunda clase en todos los demás puntos.

(c) Definamos

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (-3<x<-2)\\ -x-2 & (-2\leq x<0)\\ x+2 & (0\leq x<1)\end{cases}$$

f tiene una discontinuidad simple en $x = 0$ y es continua en todo otro punto de $(-3, 1)$.

(d) Definamos

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Como no existe $f(0+)$ ni $f(0-)$, f tiene una discontinuidad de segunda clase en $x = 0$. Todavía no hemos demostrado que sen x es una función continua. Si lo suponemos de momento, el Teorema 4.2.2 implica que f es continua en todo punto $x \neq 0$.

4.6. Funciones monótonas

Estudiaremos, ahora, las funciones que no decrecen nunca (o no crecen) en un segmento dado.

Definición 4.6.1 *Sea f una función real en (a, b). Se dice que f es monótona creciente en (a, b) si $a < x < y < b$ implica $f(x) \leq f(y)$. Si se invierte la última desigualdad, obtenemos la definición de función monótona decreciente. La clase de las funciones monótonas está constituida por las crecientes y las decrecientes.*

Teorema 4.6.1 *Sea f monotona creciente en (a, b). Existen $f(x+)$ y $f(x-)$ en todo punto x de (a, b). Más preciso:*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) \tag{4.6.1}$$

Además, si $a < x < y < b$, será

$$f(x+) \leq f(y-). \tag{4.6.2}$$

Evidentemente, resultados análogos se cumplen para las funciones monótonas decrecientes.

Dem: *Por hipótesis, el conjunto de números $f(t)$, donde $a < t < x$ está acotado superiormente por el número $f(x)$, y por tanto tiene una mínima cota superior que llamaremos A. Evidentemente $A \leq f(x)$. Tenemos que demostrar que $A = f(x-)$.*

Sea $\varepsilon > 0$ prefijado. De la definición de A como mínima cota superior se deduce que existe $\delta > 0$ tal que $a < x - \delta < x$, y

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A. \tag{4.6.3}$$

Como f es monótono, tenemos

$$f(x - \delta) \leq f(t) \leq A \quad (x - \delta < t < x) \tag{4.6.4}$$

Combinando (4.6.3) y (4.6.4), vemos que

$$|f(t) - A| < \varepsilon \quad (x - \delta < t < x).$$

Por tanto, $f(x-) = A$.

La segunda mitad de (4.6.1) se demuestra de igual modo.

Continuando, si $a < x < y < b$, de (4.6.1) vemos que

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t). \tag{4.6.5}$$

La última igualdad se obtiene aplicando (4.6.1) a (a, y) en lugar de (a, b). De igual modo,

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t). \tag{4.6.6}$$

La comparación de (4.6.5) y (4.6.6) da (4.6.2).

Corolario 4.6.1 *Las funciones monótonas no tienen discontinuidad de segunda clase.*

Este corolario implica que toda función monótona es discontinua a lo más en un conjunto numerable de puntos. En lugar de recurrir al teorema general, cuya demostración se expone en el Ejercicio 17, damos aquí una demostración sencilla, aplicable a las funciones monótonas.

Teorema 4.6.2 *Sea f monótona en (a, b). El conjunto de puntos de (a, b) en los que f es discontinua es a lo sumo numerable.*

Dem: *Supongamos, para concretar, que f es creciente y sea E el conjunto de puntos en los que f es discontinua.*

Con cada punto x de E, asociamos un número racional $r(x)$ tal que

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

Como $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1+) \leq f(x_2-)$, *vemos que* $r(x_1) \neq r(x_2)$ *si* $x_1 \neq x_2$.

Hemos establecido, así una correspondencia 1-1 entre el conjunto E *y un subconjunto del conjunto de números racionales. Este último, como sabemos, es numerable.*

Observación: *Se habrá notado que las discontinuidades de una función monótona no son necesariamente aisladas. De hecho, dado un subconjunto numerable cualquiera* E *de* (a,b) *que puede incluso ser denso, podemos construir una función* f, *monótona en* (a,b) *discontinua en todo punto de* E, *y en ningún otro punto de* (a,b).

Para demostrarlo, supongamos los puntos de E *ordenados en una sucesión* $\{x_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *Sea* $\{c_n\}$ *una sucesión de números positivos tal que* Σc_n *converge. Definamos*

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \quad (a < x < b). \tag{4.6.7}$$

debiendo entenderse la suma como sigue: se suman los términos con índices n *para los cuales* $x_n < x$. *Si no hay puntos* x_n *a la izquierda de* x, *la suma es vacía, y siguiendo el convenio* *usual, diremos que es cero. Como (4.6.7) converge absolutamente, carece de importancia el orden en que están colocados los términos.*

Dejamos al lector la comprobación de las siguientes propiedades de f:

(a) f es monótona creciente en (a, b);

(b) f es discontinua en todo punto de E; en realidad,

$$f(x_n+) - f(x_n-) = c_n.$$

(c) f es continua en cualquier otro punto de (a, b).

Además, no es difícil ver que $f(x-) = f(x)$ en todos los puntos de (a, b). Si una función satisface esta condición, decimos que f es continua por la izquierda. Si se hubiera tomado la suma en (4.6.7) para todos los índices n para los que $x_n \leq x$, hubiéramos tenido $f(x+) = f(x)$ en todo punto de (a, b), esto es, f hubiera sido continua por la derecha.

Pueden definirse también funciones de este tipo por otro método; como ejemplo, nos referimos al Teorema **??**.

4.7. Límites infinitos y límites en el infinito

Para poder operar en el sistema ampliado de los números reales, ampliaremos el alcance de la Definición 4.1.1, volviéndola a enunciar en términos de vecindades.

Para todo número real x, hemos definido ya una vecindad de x como un segmento $(x-\delta, x+\delta)$.

Definición 4.7.1 *Para todo número real c, el conjunto de los números reales x tales que $x > c$, se dice que es una vecindad de $+\infty$ y se escribe $(x, +\infty)$. Del mismo modo, el conjunto $(-\infty, c)$ es una vecindad de $-\infty$.*

Definición 4.7.2 *Supongamos f una función real definida en E. Decimos que*

$$f(t) \to A \text{ si } t \to x,$$

donde A y x pertenecen al sistema ampliado de números reales, si por cada vecindad U

de A existe una vecindad V de x tal que $V \cap E$ es no vacío, y que $f(t) \in U$ para todo $t \in V \cap E, t \neq x$.

Fácilmente se ve que esto coincide con la Definición 4.1.1 cuando A y x son reales.

También es cierto el análogo al Teorema 4.1.2, y la demostración no contiene nada nuevo. Lo enunciamos para constancia.

Teorema 4.7.1 *Supongamos f y g definidas en E. Supongamos*

$$f(t) \to A, \quad g(t) \to B \quad \text{si } t \to x.$$

Será:
(a) $f(t) \to A'$ implica $A' = A$.
(b) $(f+g)(t) \to A + B$
(c) $(fg)(t) \to AB$

(d) $(f/g)(t) \to A/B$
siempre que estén definidos los segundos miembros de (b);(c) y (d).

Obsérvese que no están definidos $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; ∞/∞ y $A/0$ (ver la Definición 1.5.1).

4.8. Ejercicios

1. Supóngase que f es una función real definida sobre $\mathbb{R}^1$ que además satisface la condición

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x-h)]=0$$

para cada $x\in\mathbb{R}^1$. ¿Lo anterior implica que f es continua?

2. Si f es un mapeo continuo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, demostrar que

$$f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$$

para cada conjunto $E\subset X$. ($\bar{E}$ denota la cerradura de E.) Por medio de un ejemplo, mostrar que $f(\bar{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

3. Sea f una función real continua sobre un espacio métrico X. Sea $Z(f)$ (el conjunto cero de f) el conjunto de todos los $p\in X$ en los que $f(p)=0$. Demostrar que $Z(f)$ es cerrado.

4. Sean f y g aplicaciones continuas de un espacio métrico X en otro espacio métrico Y, y E un subconjunto denso de X. Demostrar que $f(E)$ es denso en $f(X)$. Si además $g(p) = f(p)$ para todo $p \in E$, demuéstrese que $g(p) = f(p)$ para todo $p \in X$. (Dicho de otro modo, una aplicación continua se determina por medio de sus valores sobre un subconjunto denso de su dominio.)

5. Si f es una función real continua definida en un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{R}^1$, demostrar que existen funciones reales continuas g en $\mathbb{R}^1$ tales que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. (A tales funciones se les llama extensiones continuas de f, de E a $\mathbb{R}^1$.) Demostrar que el resultado es falso si se omite la palabra «cerrado». Ampliar el resultado a las funciones con valores vectoriales. Sugerencia: Suponer que la gráfica de g es una recta en cada segmento de los que constituyen el complemento de E (comparar con el Ejer. 29, Cap. 2). El resultado permanece cierto si se sustituye $\mathbb{R}^1$ por un espacio métrico, pero la demostración no es tan sencilla.

6. Si f está definida en E, su gráfica es el conjunto de los puntos $(x, f(x))$, para $x \in E$. En particular, si E es el conjunto de los números reales y f tiene valores reales, la gráfica de

f es un subconjunto del plano.

Suponiendo que E es compacto, demostrar que f es continua en E si, y solo si su gráfica es compacta.

7. Si $E \subset X$ y f es una función definida en X, la restricción de f a E es la función g cuyo dominio de definición es E, tal que $g(p) = f(p)$ para $p \in E$. Definir f y g en $\mathbb{R}^2$ por: $f(0,0) = g(0,0) = 0$, $f(x,y) = xy^2/\left(x^2+y^4\right)$, $g(x,y) = xy^2/\left(x^2+y^6\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Demostrar que f es acotada en $\mathbb{R}^2$, que g es no acotada en cualquier vecindad de $(0,0)$ y que f no es continua en $(0,0)$; y sin embargo las restricciones de f y de g a cada recta en $\mathbb{R}^2$ son continuas.

8. Sea f una función real uniformemente continua en el conjunto acotado E en $\mathbb{R}^1$. Demostrar que f es acotada en E.

   Demostrar que la conclusión es falsa si se omite de la hipótesis el carácter de acotado de E.

9. Mostrar que en términos de diámetros de conjuntos, el requisito de la definición de la

continuidad uniforme puede volverse a enunciar de la manera siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que diám $f(E) < \varepsilon$ para todo $E \subset X$ con diám $E < \delta$.

10. Completar los detalles de la siguiente demostración alternativa del Teorema 4.3.5: si f no es uniformemente continua, entonces para alguna $\varepsilon > 0$ hay sucesiones $\{p_n\}, \{q_n\}$ en X tales que $d_X(p_n, q_n) \to 0$, pero $d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$. Usar el Teorema 2.3.5 para llegar a una contradicción.

11. Supóngase que f es un mapeo uniformemente continuo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y y demuéstrese que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y para cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en X. Usar este resultado para dar una demostración alternativa del teorema establecido en el Ejercicio 13.

12. Una función uniformemente continua de una función uniformemente continua es uniformemente continua.

    Establecer lo anterior con más precisión y demostrarlo.

13. Sea E un subconjunto denso de un espacio métrico X, y sea f una función real uniforme-

mente continua definida sobre E. Demostrar que f tiene una extensión continua de E a X (para terminología véase el Ejercicio 5). (La unicidad se deduce del Ejercicio 4.)

Sugerencia: para cada $p \in X$ y cada entero positivo n, sea $V_n(p)$ el conjunto de todos los $q \in E$ con $d(p,q) < 1/n$. Usar el Ejercicio 9 para mostrar que la intersección de las cerraduras de los conjuntos $f(V_1(p)), f(V_2(p))$, consiste de un solo punto, por ejemplo $g(p)$, de $\mathbb{R}^1$. Demostrar que la función g así definida sobre X es la extensión de f deseada.

¿Puede reemplazarse el espacio rango $\mathbb{R}^1$ por $\mathbb{R}^k$? ¿Por cualquier espacio métrico compacto? ¿Por cualquier espacio métrico completo? ¿Por cualquier espacio métrico?.

14. Sea $I = [0,1]$ el intervalo cerrado unitario. Supóngase que f es un mapeo continuo de I en I. Demostrar que $f(x) = x$ para al menos un $x \in I$.

15. Un mapeo de X en Y se dice que es abierto si $f(V)$ es un conjunto abierto en Y siempre que V es un conjunto abierto en X.

    Demostrar que cada mapeo abierto continuo de $\mathbb{R}^1$ en $\mathbb{R}^1$ es monótono.

16. Representemos por $[x]$ el mayor entero contenido en x, esto es, $[x]$ es el entero tal que $x -$

$1 < [x] \leq x$, y llamemos $(x) = x - [x]$ a la parte fraccionaria de x. ¿Qué discontinuidades tendrán las funciones $[x]$ y (x) ?

17. Sea f una función real definida en (a, b). Demostrar que el conjunto de puntos en el que f tiene una discontinuidad simple es a lo sumo numerable.

    Sugerencia: Sea E el conjunto en el cual $f(x-) < f(x+)$. Con cada punto x de E se asocia una terna (p, q, r) de números racionales tales que

    (a) $f(x-) < p < f(x+)$,

    (b) $a < q < t < x$ implica $f(t) < p$,

    (c) $x < t < r < b$ implica $f(t) > p$.

    El conjunto formado por tales ternas es numerable. Demostrar que cada terna está asociada con, a lo sumo, un punto de E. Operar en igual forma con los otros tipos posibles de discontinuidades simples.

18. Todo número racional x puede estar escrito en la forma $x = m/n$, de donde, $n > 0$, y m y n son enteros sin ningún divisor común. Cuando $x = 0$, tomamos $n = 1$. Considerar la

función f definida en $\mathbb{R}^1$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ irracional }) \\ \frac{1}{n} & \left(x = \frac{m}{n}\right) \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en todo punto irracional, y tiene una discontinuidad simple en todo punto racional.

19. Supóngase que f es una función real con dominio $\mathbb{R}^1$, y que tiene la propiedad del valor intermedio: Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b.

    Supóngase también que, para cada racional r, el conjunto de todos los x con $f(x) = r$ es cerrado.

    Demostrar que f es continua.

    Sugerencia: Si $x_n \to x_0$, pero $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n, entonces $f(t_n) = r$ para algún t_n entre x_0 y x_n; de aquí $t_n \to x_0$. Encontrar una contradicción. (N.J. Fine, Amer. Math. Monthly, vol. 73, 1966, p. 782.)

20. Si E es un subconjunto que no es vacio de un espacio métrico X, se define la distancia de $x \in X$ a E por medio de

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$$

(a) Demostrar que $\rho_E(x) = 0$ si y solo si $x \in \bar{E}$.

(b) Demostrar que ρ_E es una función uniformemente continua en X, mostrando primero que

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$$

para todo $x \in X, y \in X$.

Sugerencia: $\rho_E(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, de modo que

$$\rho_E(x) \leq d(x, y) + \rho_E(y).$$

21. Suponer que K y F son conjuntos ajenos en un espacio métrico X, K es compacto y F cerrado. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) > \delta$ si $p \in K$ y $q \in F$. Sugerencia: ρ_F es una función positiva continua en K.

Demostrar que la conclusión puede ser falsa para dos conjuntos cerrados ajenos si ninguno de ellos es compacto.

22. Sean A y B conjuntos cerrados no vacíos, ajenos, en un espacio métrico X. Definir

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \quad (p \in X)$$

Demostrar que f es una función continua en X cuyo rango está en $[0, 1]$, que $f(p) = 0$ precisamente en A y $f(p) = 1$ precisamente en B. Esto establece un inverso del Ejercicio 3: todo conjunto cerrado $A \subset X$ es $Z(f)$ para alguna f real continua en X. Poniendo

$$V = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad W = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

demostrar que V y W son abiertos y ajenos y que $A \subset V$ y $B \subset W$. (Así, los pares de conjuntos cerrados ajenos en un espacio métrico, pueden ser recubiertos por pares de conjuntos abiertos ajenos. Esta propiedad de los espacios métricos se llama normalidad.)

23. Se dice que una función de valores reales f definida en (a, b) es convexa si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

siempre $a < x < b, a < y < b, 0 < \lambda < 1$. Demostrar que cada función convexa es continua. Demostrar después que cada función convexa creciente de una función convexa es convexa. (Por ejemplo, si f es convexa, también lo es e^f.)

Si f es convexa en (a, b) y si $a < s < t < u < b$, mostrar que

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}.$$

24. Aceptar que f es una función real continua definida en (a, b) y tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

para todo $x, y \in (a, b)$. Demostrar entonces que f es convexa.

25. Si $A \subset \mathbb{R}^k$ y $B \subset \mathbb{R}^k$, se define $A + B$ como el conjunto de todas las sumas $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{x} \in A$, $\boldsymbol{y} \in B$.

(a) Si K es compacto y C es cerrado en $\mathbb{R}^k$, demostrar que $K + C$ es cerrado.

Sugerencia: Tomar $\boldsymbol{z} \notin K + C$, y hacer que $F = \boldsymbol{z} - C$ represente al conjunto de todos los $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{y} \in C$. Entonces K y F son ajenos. Escójase δ como en el Ejercicio 21. Mostrar finalmente que la bola abierta con centro en $\boldsymbol{z}$ y radio δ no interseca $K + C$.

(b) Sea α un número real irracional, C_1 el conjunto de todos los enteros, y sea C_2 el conjunto de todos los $n\alpha$ con $n \in C_1$. Mostrar que C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^1$ cuya suma $C_1 + C_2$ no es cerrada, mostrando primero que $C_1 + C_2$ es un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}^1$.

26. Supóngase que X, Y, Z son espacios métricos, y que Y es compacto. Sea f una función que mapea X en Y, y g un mapeo uno-a-uno continuo que aplica Y en Z, y hágase $h(x) = g(f(x))$ para $x \in X$.

Demostrar que f es uniformemente continuo si h es uniformemente continuo.

Sugerencia: g^{-1} tiene un dominio compacto $g(Y)$, y $f(x) = g^{-1}(h(x))$.

Demostrar también que f es continuo si h es continuo.

Mostrar (modificando el Ejemplo 4.3.1, o encontrando un ejemplo diferente) que la compacticidad de Y no se puede omitir de la hipótesis, inclusive cuando X y Z son compactos.