

# EDP

*Um curso de Graduação*

COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA



Valéria Iório



# Prefácio da Primeira Edição

O objetivo deste livro é servir de texto para uma primeira disciplina de graduação em Equações Diferenciais Parciais (EDPs). O aluno deve ter completado a sequência de Cálculo Diferencial e Integral, incluindo funções de várias variáveis e noções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Suponho, também, o conhecimento de, pelo menos, o enunciado do teorema de existência e unicidade para EDOs (veja, por exemplo, o teorema de Picard no primeiro capítulo de (SOTOMAYOR, 1979)).

A escolha de tópicos é padrão, com exceção da terceira seção do Capítulo 3, que não é necessária para os capítulos subsequentes. Uma disciplina de um semestre deve cobrir os dez primeiros capítulos; os dois últimos foram incluídos para tornar o texto mais completo. O livro contém, também, a solução de mais de metade dos 180 problemas propostos.

Para manter o número de páginas compatível com o espírito da Coleção Matemática Universitária, omiti alguns tópicos que pretendia incluir originalmente. Um destes é o fenômeno de Gibbs para séries de Fourier: fenômenos análogos aparecem em outros tipos de aproximação (FOSTER & RICHARDS, 1991) e o leitor interessado poderá consultar, sem dificuldade, após o Capítulo 7, o artigo (bem curto!) de David Sheldupsky (1980); veja, também, a Seção 3.13 de (FULKS, 1961). Outro tópico que sequer é mencionado (a não ser aqui) é Funções de Green: para ter uma ideia do que são e para que servem, sugiro a leitura, depois do Capítulo 11, das Seções 4 e 5 (até a Equação (5.4)) do Capítulo VII de (IORIO & IORIO, 1988); um tratamento completo (e avançado!) pode ser encontrado em (STAKGOLD, 1979).

Um estudo mais profundo da transformada de Fourier e de funções de Green necessita de uma ferramenta adicional, a teoria das distribuições, que, normalmente, não é discutida a nível de graduação. É possível, no entanto, introduzir as ideias básicas em um nível compatível com este livro. Não o fiz por questões de espaço, mas o leitor curioso poderá consultar o livro de Lighthill (1958), onde as distribuições temperadas (“funções generalizadas”) são discutidas de forma bem simples, ou as quatro primeiras seções do Capítulo IV de (IORIO & IORIO, 1988), onde as distribuições periódicas e suas séries de Fourier são introduzidas em uma linguagem acessível.

Aproveito a oportunidade para agradecer aos Professores Elon Lages Lima e Jonas de Miranda Gomes pelo apoio recebido e à Sra. Maria Celano Maia pelo excelente trabalho de processamento do manuscrito pelo sistema **TEX**.

Rio de Janeiro, maio de 1991.

Valéria Iorio

## Prefácio da Segunda Edição

Nesta segunda impressão foram corrigidos alguns erros, mas o texto não foi modificado pois, por se tratar de assunto clássico, continua adequado. No entanto, o professor que tiver condições de utilizar computadores em suas aulas poderia complementá-lo através de exercícios usando um programa como o *Maple* ou o *Mathematica*. Seria interessante utilizar o computador para visualizar algumas das soluções, especialmente as ondas de choque e as soluções de equações de onda.

Rio de Janeiro, junho de 2000.

Valéria Iorio

## Prefácio da Terceira Edição

Já faz algum tempo que venho pensando em colocar alguma análise numérica no livro. Convidei, então, Frederico Luís Cabral, meu colega na Fundação Educacional Serra dos Órgãos, em Teresópolis, para escrever um apêndice. Frederico é professor universitário há mais de 12 anos e é mestre pela Universidade Federal Fluminense (UFF), onde pesquisou Métodos Numéricos para Equações Diferenciais. Atualmente é doutorando em modelagem matemática e computacional no Laboratório Nacional de Computação Científica.

Aproveito a oportunidade para agradecer a Maria Lúcia Menezes, da UFF, que me incentivou a colocar este material no livro, leu o apêndice e sugeriu algumas modificações. Agradeço também a Michel Molina, aluno de doutorado do IMPA, por suas sugestões.

A ideia inicial era colocar um pouco de análise numérica ao longo de todo o texto, junto com a introdução das diversas equações discutidas.

Entretanto, devido ao tempo curto (o livro já estava quase esgotado), foi feita a opção de se colocar todo o material em um apêndice. Talvez isto possa ser modificado em uma futura edição. Sugestões e comentários serão bem vindos e podem ser encaminhados ao setor de publicações do IMPA.

De resto, acho que Frederico é a pessoa mais adequada para complementar este prefácio, falando mais detalhadamente sobre o apêndice.

Teresópolis, julho de 2010.  
Valéria Iorio

O objetivo do apêndice sobre métodos numéricos é introduzir as principais estratégias de diferenças finitas aplicadas à resolução numérica de problemas envolvendo EDPs. A importância dos métodos numéricos se justifica pelo fato de que nem todos os problemas com EDPs podem ser facilmente resolvidos pelas técnicas algébrico-analíticas tradicionais.

Foram abordados os principais protótipos das equações parabólicas, elíticas e hiperbólicas: (1) a equação do calor; (2) as equações de Laplace e Poisson; (3) a equação de onda. Para que o conteúdo se adequasse ao espaço reduzido, não foram tratados os métodos das características para equações hiperbólicas de primeira ordem e as semi-lineares de segunda ordem. O leitor interessado pode consultar as referências citadas na bibliografia do apêndice, especialmente DuCHATEAU & ZACHMANN (1986).

Com a finalidade de enriquecer a exposição dos métodos, o texto contém programas na linguagem de programação nativa do software Maple <sup>TM</sup>, que podem ser obtidos por download no site  
[www.professorglobal.cbpf.br](http://www.professorglobal.cbpf.br).

Aproveito para agradecer à professora Valéria Iorio pela oportunidade, aos professores José Helaÿel, Renato Doria e Mauricio Kishinevsky pelo conhecimento transmitido e à professora Giovana Maria C. da Costa pela revisão gramatical e ortográfica.

Gostaria de dedicar este meu trabalho àquele que me ensinou o valor do conhecimento, meu pai, Marcos Penna Cabral.

Petrópolis, julho de 2010.  
Frederico Luís Cabral

<b>Conteúdo</b>	
<b>1 Definições Básicas</b>	<b>1</b>
1 Introdução . . . . .	1
2 Linearidade e Superposição . . . . .	6
3 Condições de Contorno e Iniciais . . . . .	11
4 Exercícios . . . . .	18
<b>2 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear</b>	<b>21</b>
1 Alguns Exemplos . . . . .	21
2 O Problema de Cauchy . . . . .	26
3 Solução Geral . . . . .	35
4 Exercícios . . . . .	41
<b>3 Equações de Primeira Ordem: Nem Tudo São Flores</b>	<b>48</b>
1 De Volta ao Problema de Cauchy . . . . .	48
2 Propagação de Singularidades . . . . .	56
3 Ondas de Choque . . . . .	61
4 Exercícios . . . . .	68
<b>4 Equações Semilineares de Segunda Ordem</b>	<b>73</b>
1 Classificação . . . . .	73
2 Formas Canônicas e Curvas Características . . . . .	78
3 Exercícios . . . . .	82
<b>5 A Equação de Onda</b>	<b>84</b>
1 Solução Geral . . . . .	84
2 A Corda Infinita . . . . .	88
3 Funções Pares, Ímpares e Periódicas . . . . .	93
4 A Corda Finita . . . . .	104

5	Exercícios . . . . .	107
6	<b>Separação de Variáveis e Séries de Fourier</b>	<b>115</b>
1	O Método de Separação de Variáveis . . . . .	115
2	Os Coeficientes de Fourier . . . . .	122
3	Interpretação Geométrica . . . . .	130
4	Exercícios . . . . .	139
7	<b>Convergência das Séries de Fourier</b>	<b>143</b>
1	Sequências e Séries de Funções . . . . .	143
2	Convergência Pontual . . . . .	148
3	Convergência Uniforme . . . . .	154
4	Convolução . . . . .	158
5	Exercícios . . . . .	167
8	<b>A Equação de Laplace</b>	<b>173</b>
1	O Problema de Dirichlet em um Retângulo . . . . .	173
2	O Problema de Dirichlet no Disco Unitário . . . . .	183
3	Exercícios . . . . .	192
9	<b>A Equação de Calor</b>	<b>196</b>
1	De Volta ao Problema de Transmissão de Calor . . . . .	196
2	O Problema da Barra Infinita . . . . .	202
3	Exercícios . . . . .	214
10	<b>A Transformada de Fourier</b>	<b>219</b>
1	A Transformada em $\mathcal{L}^1$ . . . . .	219
2	O Espaço de Schwartz . . . . .	224
3	A Operação de Convolução . . . . .	230
4	Aplicações . . . . .	236
5	Exercícios . . . . .	243
11	<b>As Identidades de Green</b>	<b>249</b>
1	Preliminares . . . . .	249
2	As Identidades de Green . . . . .	254
3	Exercícios . . . . .	263

## CONTEÚDO

<b>12 Princípios do Máximo e Teoremas de Unicidade</b>	<b>265</b>
1 Princípio do Máximo para Funções Harmônicas . . . . .	265
2 Princípio do Máximo para a Equação de Calor . . . . .	269
3 Integrais de Energia . . . . .	273
4 Exercícios . . . . .	279
<b>Sugestões e Respostas</b>	<b>283</b>
1 Definições Básicas . . . . .	283
2 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear . . . . .	284
3 Equações de Primeira Ordem: Nem tudo São Flores . . .	286
4 Equações Semi-Lineares de Segunda Ordem . . . . .	288
5 A Equação de Onda . . . . .	288
6 Separação de Variáveis e Séries de Fourier . . . . .	292
7 Convergência das Séries de Fourier . . . . .	293
8 A Equação de Laplace . . . . .	296
9 O Método de Separação de Variáveis . . . . .	297
10 A Transformada de Fourier . . . . .	299
11 As Identidades de Green . . . . .	302
12 Princípios do Máximo e Teoremas de Unicidade . . . . .	302
<b>Apêndice</b>	<b>305</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>339</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>343</b>

# Capítulo 1

## Definições Básicas

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos e daremos uma série de exemplos de problemas envolvendo equações a derivadas parciais que resolveremos ao longo do livro.

### 1 Introdução

Vamos começar introduzindo alguma notação e terminologia. Denotaremos o espaço euclidiano de dimensão  $n$ , onde  $n$  é um inteiro maior ou igual a 1, por  $\mathbb{R}^n$ ; como de hábito,  $\mathbb{R}^1$  será denotado simplesmente por  $\mathbb{R}$ . O conjunto dos números inteiros será denotado por  $\mathbb{Z}$  e o dos números complexos por  $\mathbb{C}$ . Somos da opinião de que zero não é um número natural, de modo que consideraremos o conjunto dos números naturais como sendo  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$ . Usaremos também a notação  $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ .

Dados dois pontos (ou vetores)  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , a *distância* entre  $x$  e  $y$  é

$$|x - y| = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

O conjunto de todos os pontos a uma distância menor do que  $r > 0$  de um ponto fixo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é chamado de *bola aberta centrada em  $x_0$  de raio  $r$*  e denotado por  $B(x_0; r)$ , ou seja,

$$B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

## 2 Definições Básicas

Um subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  é *aberto* se, dado qualquer  $x_0 \in \Omega$ , existe uma bola aberta centrada em  $x_0$  inteiramente contida em  $\Omega$ . Um subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  é *fechado* se seu complementar

$$\mathbb{R}^n - F = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin F\}$$

é aberto. Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , o *fecho* de  $A$ , denotado por  $\bar{A}$ , é o menor conjunto fechado que o contém; o *interior* de  $A$ , denotado por  $\mathring{A}$ , é o maior conjunto aberto contido em  $A$  e o *bordo* ou *fronteira* de  $A$ , denotado por  $\partial A$ , é

$$\partial A = \{x \in \bar{A} : x \notin \mathring{A}\}.$$

Supomos que o leitor está familiarizado com as propriedades elementares de funções  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , em particular, com os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e derivadas parciais. Se  $u = u(x, y, z, t, \dots)$  é uma função de várias variáveis, usaremos várias notações diferentes para as derivadas parciais de  $u$ . Por exemplo, a derivada parcial de  $u$  em relação à variável  $x$ , que é a primeira variável, poderá ser denotada por

$$\frac{\partial u}{\partial x}, u_x, \partial_x u \text{ ou } D_1 u.$$

De maneira análoga, as derivadas de segunda ordem poderão ser denotadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xx}, \partial_x^2 u \text{ ou } D_1^2 u.$$

no caso de derivação em relação à mesma variável  $x$  e, no caso de variáveis diferentes, derivando primeiro em relação a  $x$  e depois a  $y$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, u_{xy}, \partial_y \partial_x u \text{ ou } D_2 D_1 u.$$

Uma *equação a derivadas parciais* ou *equação diferencial parcial* (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \dots$  e derivadas parciais de uma função (variável dependente)  $u = u(x, y, z, t, \dots)$ . De maneira mais precisa, uma EDP em  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  é uma equação da forma

$$F \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = 0 \quad (1.1)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função que queremos determinar. É claro que, com uma definição tão geral, existem EDPs absurdas, como por exemplo  $\exp(u_x + u_y) = 0$ .

A classificação de EDPs segundo ordem e linearidade é semelhante à classificação das equações diferenciais ordinárias (EDOs). A *ordem* de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação; por exemplo, a ordem da equação (1.1) é  $k$  se  $F$ , como função de alguma das derivadas de ordem  $k$ , é não constante. Uma EDP é dita *linear* se é de primeiro grau em  $u$  e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário a EDP é dita *não linear*. A forma mais geral de uma EDP linear de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x) u + c(x) = 0, \quad (1.2)$$

onde algum dos coeficientes  $a_j$  não é identicamente nulo. Para equações de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP linear é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0, \quad (1.3)$$

onde algum dos coeficientes  $a_{ij}$  não é identicamente nulo. No caso de duas variáveis independentes, as equações (1.2) e (1.3) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u + D(x, y) = 0 \quad (1.4)$$

e

$$A(x, y) u_{xx} + 2B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} + D(x, y) u_x + E(x, y) u_y + F(x, y) u + G(x, y) = 0. \quad (1.5)$$

O leitor atento deverá ter observado que a equação (1.5) não contém termo com  $u_{yx}$ , embora a Equação (1.3) contenha tal termo; a razão é a seguinte: estaremos interessados nas chamadas *soluções clássicas* da equação (1.5), ou seja, soluções  $u$  que são duas vezes continuamente diferenciáveis na região de interesse  $\Omega$  e, para tais funções,  $u_{xy} = u_{yx}$ .

Dizemos que uma EDP linear é *homogênea* se o termo que não

contém a variável dependente é identicamente nulo. Por exemplo, a

equação (1.4) é homogênea se e somente se a função  $D(x, y)$  é identicamente nula e (1.5) é homogênea se e somente se  $G(x, y) \equiv 0$ . Observe que a função identicamente nula é sempre solução de qualquer EDP linear homogênea.

A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem determina, em muitos casos, propriedades das soluções; essa é a chamada *parte principal* da EDP. Por exemplo, as partes principais das equações (1.4) e (1.5) são, respectivamente,

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y \quad (1.6)$$

e

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy}. \quad (1.7)$$

Dentre as equações não lineares, as que têm parte principal linear são chamadas *semilineares*. Por exemplo, uma EDP de primeira ordem semilinear com três variáveis independentes  $x, y, z$  é da forma

$$A(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z, u). \quad (1.8)$$

A forma mais geral de uma EDP semilinear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_i D_j u = f(x, u, D_1 u, \dots, D_n u). \quad (1.9)$$

**Exemplo 1.1.** A equação

$$xu_x - yu_y = \operatorname{sen}(xy) \quad (1.10)$$

é uma EDP linear não homogênea de primeira ordem.

**Exemplo 1.2.** A equação

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \quad (1.11)$$

é semilinear de terceira ordem. Essa equação é conhecida como *KdV* (uma abreviação de Korteweg e de Vries).

**Exemplo 1.3.** Uma equação mais simples é a *equação de Burger* com viscosidade

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u, \quad (1.12)$$

onde  $\nu$  é constante, que é também semilinear, mas de segunda ordem.

**Exemplo 1.4.** Outro exemplo de EDP semilinear de segunda ordem é a *equação de Sine-Gordon*,

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (1.13)$$

**Exemplo 1.5.** A *equação de Poisson*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y), \quad (1.14)$$

é uma equação linear de segunda ordem não homogênea se a função  $h$  não for identicamente nula. No caso em que  $h \equiv 0$ , a equação é homogênea e chamada de *equação de Laplace*. A equação de Poisson está associada a fenômenos físicos estacionários, ou seja, independentes do tempo, como, por exemplo, potenciais eletrostáticos gerados por distribuições fixas de carga (veja PURCELL (1965)).

**Exemplo 1.6.** Outra equação importante é a *equação de calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.15)$$

onde  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  e  $\alpha^2$  é uma constante. Em dimensões maiores, a equação de calor fica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u, \quad (1.16)$$

onde  $u = u(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$  (nas variáveis espaciais  $x_1, \dots, x_n$ ). A equação (1.16) é de segunda ordem, linear e homogênea.

**Exemplo 1.7.** A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.17)$$

é também linear, homogênea e de segunda ordem. A variável  $t > 0$  representa o tempo,  $x \in \mathbb{R}$  é a variável espacial e  $c > 0$  é uma constante (velocidade de propagação da onda). A equação de onda em dimensões maiores fica

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad (1.18)$$

onde

$$u = u(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ . A equação de onda, como o próprio nome diz, está associada a fenômenos ondulatórios; o leitor interessado na física de tais problemas pode consultar, por exemplo, MAIN (1984), onde é feito um tratamento elementar de vários problemas físicos associados à equação (1.17).

As equações de Poisson, do calor e da onda, além do interesse do ponto de vista físico, são protótipos dos tipos elíptico, parabólico e hiperbólico, respectivamente (que descreveremos no Capítulo 4) e o conhecimento de suas propriedades permite estudar equações bem mais gerais do mesmo tipo. A maior parte deste livro trata de problemas relacionados a essas equações em duas variáveis independentes.

**2 Linearidade e Superposição**

As considerações que faremos a seguir são válidas para EDPs lineares de qualquer ordem, mas, para fixar as ideias, vamos considerar uma EDP de primeira ou segunda ordem com  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$ . Usaremos a notação vetorial  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Estamos considerando então uma equação do tipo

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0. \quad (2.1)$$

Denotaremos por  $k$  a ordem da equação,  $k = 1$  ou  $k = 2$ . Note que, se  $k = 1$ , então  $a_{ij} \equiv 0$  quaisquer que sejam  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  e existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tal que  $b_j \neq 0$ .

Podemos reescrever a equação (2.1) na forma

$$Lu = f, \quad (2.2)$$

onde  $f(x) = -d(x)$  e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_j u(x) + c(x)u(x). \quad (2.3)$$

A cada função  $u$  (suficientemente diferenciável) corresponde uma única função  $Lu$ ; dessa maneira definimos um *operador* ou *transformação*  $L$ . De forma mais precisa, seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e suponha que as funções  $a_{ij}$ ,  $b_j$  e  $c$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , são contínuas em  $\Omega$  e tomam valores reais; podemos então definir

$$\begin{aligned} L: C^k(\Omega) &\longrightarrow C(\Omega) \\ u &\longmapsto Lu \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $Lu$  é dado pela fórmula (2.3) e  $C^k(\Omega)$  (respectivamente,  $C(\Omega)$ ) é o conjunto das funções  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente, contínuas).

**Observação.** Neste texto estaremos basicamente interessados em soluções reais para as EDPs, embora a teoria para funções complexas seja inteiramente análoga. Apesar disso, em muitas situações usaremos funções complexas auxiliares, notadamente no estudo das séries e integrais de Fourier. Aproveitamos a oportunidade para lembrar que, se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , então existem funções reais unicamente determinadas  $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = u(x) + i v(x), \quad \forall x \in \Omega;$$

$u = \operatorname{Re} f$  é a *parte real* de  $f$  e  $v = \operatorname{Im} f$  é a *parte imaginária* de  $f$ . A função  $f$  é contínua (respectivamente diferenciável) em  $x$  se e somente se  $u$  e  $v$  são contínuas (respectivamente diferenciáveis) em  $x$ . Além disso, a função  $f$  pode ser integrada em relação a uma das variáveis (por exemplo,  $x_1$ ) no intervalo  $[a, b]$  se e somente se  $u$  e  $v$  podem; nesse caso

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 &= \int_a^b u(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \\ &\quad + i \int_a^b v(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $C_C^k(\Omega)$  (respectivamente,  $C_C(\Omega)$ ) o conjunto das funções  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  que são  $k$  vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente, contínuas).

A terminologia operador (ou transformação) é usada para enfatizar que a função  $L$  está definida entre espaços de funções, ou seja,  $L$  leva uma função  $u$  (com determinadas propriedades) em outra função  $Lu$ . O operador  $L$  é um exemplo de um *operador diferencial parcial*.

O fato de que a Equação (2.1) é linear implica que o operador  $L$  definido por (2.3) é um operador *linear*, ou seja,  $L$  leva a função identicamente nula nela mesma e

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv \quad (2.5)$$

quaisquer que sejam  $u, v$  no domínio de  $L$  e qualquer que seja o escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A propriedade (2.5) pode ser deduzida facilmente da expressão (2.3).

Como no caso de EDOs, podemos associar à EDP não homogênea (2.2) a EDP linear homogênea

$$Lu = 0, \quad (2.6)$$

que é chamada a *equação homogênea associada* à equação (2.2). Usando a linearidade do operador  $L$  e indução, é fácil ver que qualquer combinação linear de soluções da equação (2.6) é também solução, ou seja, se  $u_1, \dots, u_m$  satisfazem (2.6) e se  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  são escalares, então

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j \quad (2.7)$$

é também solução de (2.6). Em linguagem de álgebra linear,  $L$  é um operador linear definido em um espaço vetorial  $V$  de funções ( $V = C^k(\Omega)$ ) e as soluções  $u \in V$  da equação (2.6) formam um subespaço de  $V$ . Esse resultado é conhecido como o *princípio da superposição* (na sua forma finita).

Ao contrário do que acontece com EDOs lineares homogêneos, o espaço de soluções da equação (2.6) pode ter dimensão infinita. Além disso existem EDPs lineares de primeira ordem que não têm solução! (O H. Lewy em 1957: ele provou que existe uma função  $f$  tal que a equação

$$u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f$$

não tem solução, veja FOLLAND (1976) ou SMOLLER (1983).)

**Exemplo 2.1.** Vamos procurar soluções clássicas da equação linear homogênea

$$u_{xy} = 0 \quad (2.8)$$

para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Neste caso o operador  $L$  é dado por

$$\begin{aligned} L: C^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow C(\mathbb{R}^2) \\ (Lu)(x, y) &= u_{xy}(x, y), \quad u \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vamos resolver (2.8) por integração: fixando a variável  $x$  e integrando em relação a  $y$ , obtemos

$$u_x = F(x) \quad (2.10)$$

onde  $F$  é uma função em  $C^1(\mathbb{R})$  arbitrária; fixando agora a variável  $y$  e integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \quad (2.11)$$

onde  $f$  é uma primitiva de  $F$  em  $C^2(\mathbb{R})$  e  $g$  é uma função arbitrária em  $C^2(\mathbb{R})$ ; como  $F$  é arbitrária, segue que  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias em  $C^2(\mathbb{R})$  (lembrem que estamos procurando soluções  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)!$ ). Como é evidente que todas as funções da forma (2.11) com  $f, g \in C^2(\mathbb{R})$  são soluções da equação (2.8), concluimos que o espaço das soluções clássicas de (2.8) é precisamente o conjunto

$$\{u \in C^2(\mathbb{R}^2) : u(x, y) = f(x) + g(y), (x, y) \in \mathbb{R}^2, f, g \in C^2(\mathbb{R})\}. \quad (2.12)$$

Portanto, nesse caso bem simples, o espaço de soluções tem dimensão infinita.

Fomos talvez um pouco pedantes no exemplo anterior ao explicitar tantas vezes os espaços de funções utilizados. Esse pedantismo foi proposital: queríamos enfatizar a importância do espaço de funções onde procuramos as soluções (em outras palavras, o domínio do operador  $L$ ). De fato, até agora não definimos o que entendemos por *solução* de uma EDP: a noção intuitiva de que uma solução é uma função que satisfaz a equação identicamente é muito vaga - existem muitas interpretações possíveis dessa noção intuitiva, generalizando inclusive o conceito de função. Essa discussão vai mais longe do que o presente texto e o leitor

interessado deve consultar livros mais avançados (como IORIO e IORIO (1988) ou SMOLLER (1983)).

O Exemplo 2.1 nos leva, de forma natural, a perguntar sobre a possibilidade de formarmos “combinações lineares infinitas” de soluções. Em outras palavras, será que existe uma forma infinita do princípio de superposição? A resposta é sim, sob certas condições.

**Proposição 2.2.** (Princípio da Superposição.) *Seja  $L$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $k$  cujos coeficientes estão definidos em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$  é um conjunto de funções da classe  $C^k$  em  $\Omega$  satisfazendo a EDP linear homogênea (2.6) e que  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \quad (2.13)$$

*é convergente e  $k$  vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ . Então  $u$  satisfaz (2.6).*

**Demonstração:** Enunciamos a proposição no caso geral, mas a demonstraremos no caso em  $k = 1$  ou  $k = 2$ , ou seja, quando  $L$  é definido por (2.3). Nesse caso, por hipótese, quaisquer que sejam  $x \in \Omega$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x); \\ D_i u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x); \\ D_i D_j u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x), \end{aligned}$$

e essas séries convergem. Portanto, para todo  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\
 (1.8) \quad & = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right] \\
 & = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (Lu_m)(x) = 0,
 \end{aligned}$$

o que demonstra a Proposição 2.2 no caso em que  $k = 1$  ou  $k = 2$ .  $\square$

O método de separação de variáveis, que estudaremos mais tarde, é baseado no princípio da superposição, de modo que teremos muitas oportunidades de aplicar a Proposição 2.2.

### 3 Condições de Contorno e Iniciais

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação suplementar necessária para a unicidade de solução. Por exemplo, na solução geral de uma EDO linear aparecem uma ou mais constantes arbitrárias: podemos determinar essas constantes impondo condições iniciais, ou seja, fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto; podemos também obter unicidade, no caso de intervalos finitos, impondo condições nos extremos dos intervalos, as chamadas condições de contorno (como nos problemas de Sturm-Liouville, veja Boyce e DiPrima (2015) ou Sotomayor (1979)). A situação para as EDPs é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral, quando é possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes (como vimos no Exemplo 2.1), de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução.

No caso de EDPs, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ; é natural substituir os extremos do intervalo (caso  $n = 1$ ) pelo bordo (ou fronteira)  $\partial\Omega$  da região  $\Omega$ . Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (*condições de contorno*) temos um *problema de valores de contorno* ou, simplesmente, *problema*

*de contorno.* Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (ou seja, independentes do tempo). Encontraremos muitas vezes condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (3.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas,  $f$  é uma função dada em  $\partial\Omega$  e  $\partial u/\partial n$  é a derivada de  $u$  na direção normal a  $\partial\Omega$ . No caso em que  $\beta = 0$ , a condição (3.1) é conhecida como *condição de Dirichlet*; no caso em que  $\alpha = 0$ , temos uma *condição de Neumann*.

Como generalizar o conceito de condições iniciais (no caso de EDOs) para EDPs? Como no caso de EDPs temos mais de uma variável dependente (por exemplo  $x$  e  $t$ ), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo  $t = 0$ ) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo  $u(x, 0) = f(x)$  e  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $f$  e  $g$  funções dadas). Observe que, no caso  $n = 2$ , com variáveis  $x, t$ , isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva  $t = 0$ ; analogamente, no caso  $n = 3$ , com variáveis  $x, y, t$ , fixar  $t = 0$  significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície  $t = 0$ . Podemos então generalizar o conceito de *condições iniciais* impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva (se  $n = 2$ ) ou superfície (se  $n = 3$ ) inicial; o problema correspondente é um *problema de Cauchy* ou de *valor inicial*.

Em problemas físicos dependentes do tempo, como é o caso de fenômenos de difusão e de fenômenos oscilatórios, é muitas vezes conveniente separar a variável temporal  $t$  das variáveis espaciais  $x, y, z$ . O que ocorre muitas vezes é que os valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem  $k - 1$  (supondo que a EDP é de ordem  $k$  em  $t$ ) são descritos no instante  $t = 0$  em função de  $x, y, z$  (condição inicial), ao mesmo tempo em que são impostas condições de contorno, para todo  $t \geq 0$ , em relação às variáveis espaciais: tais problemas são chamados de *problemas mistos*.

Os conceitos acima ficarão talvez mais claros com os exemplos a seguir.

### Exemplo 3.1. O problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $p, f \in C^1(\mathbb{R})$  são funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a EDP é de primeira ordem, basta impor o valor da solução na curva inicial  $y = p(x)$  no plano. Veremos no próximo capítulo que esse problema tem uma única solução clássica.

**Exemplo 3.2.** O problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) &= f(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

é também um problema de Cauchy envolvendo uma EDP linear de primeira ordem. A curva inicial é o eixo dos  $y$ . Ao contrário do exemplo anterior, o Problema (3.3) não terá solução (se  $f$  não for constante) ou terá uma infinidade de soluções (se  $f$  for constante). Veremos, no próximo capítulo, porque isso acontece e quando existe solução única para o problema de Cauchy com EDPs lineares de primeira ordem.

**Exemplo 3.3.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  um aberto limitado ( $\Omega$  é o interior de um sólido  $\bar{\Omega}$ ). Vamos denotar por  $X = (x, y, z)$  os pontos de  $\mathbb{R}^3$  e por  $\Delta$  o laplaciano em  $\mathbb{R}^3$ . Então o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 \Delta u \text{ em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(X, t) &= 0, \quad X \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(X, 0) &= f(X), \quad X \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

é um problema misto: a condição  $u(X, t) = 0$  para  $X \in \partial\Omega$  e  $t \geq 0$  é uma condição de contorno, enquanto que a condição  $u(X, 0) = f(X)$  para  $X \in \bar{\Omega}$  é uma condição inicial. A função  $f$  é dada,  $\alpha^2$  é uma constante positiva e procuramos uma solução  $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty))$ , logo  $f$  tem que estar em  $C(\bar{\Omega})$ . Observe que, para que haja solução,  $f$  tem que satisfazer uma *condição de compatibilidade*

$$f(X) = 0, \quad \forall X \in \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Em problemas mistos, a condição de contorno e a condição inicial não são inteiramente independentes e é preciso então que seja satisfeita uma condição de compatibilidade para que haja solução. O Problema (3.4) descreve fisicamente a temperatura  $u(X, t)$  no ponto  $X$  e no instante  $t$  do

sólido  $\bar{\Omega}$  feito de material homogêneo, com difusividade térmica igual a  $\alpha^2$  e colocado em um reservatório térmico mantido à temperatura constante igual a zero (condição de contorno) com uma distribuição inicial de temperatura  $f(X)$  (condição inicial). Não discutiremos o Problema (3.4), mas estudaremos em detalhe o problema análogo a uma dimensão espacial, ou seja

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \tag{3.6}$$

com condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{3.7}$$

No lugar do sólido  $\bar{\Omega}$  temos agora uma barra de secção reta uniforme (com área muito pequena em relação ao comprimento) e comprimento  $l$ . É preciso supor, neste caso, que não há troca de calor com o exterior através da superfície lateral da barra (os extremos correspondem ao bordo de  $\Omega$  e estão mantidos à temperatura zero, pela condição de contorno). O leitor interessado na dedução da equação do calor em (3.6) deve consultar Figueiredo (1977) ou o Apêndice A do Capítulo 10 de Boyce e DiPrima (2015). Se a função  $f$  satisfizer a condição de compatibilidade correspondente, tanto (3.4) quanto (3.6) terão uma única solução clássica (ou seja, contínua na região fechada e duas vezes continuamente diferenciável no interior). Como (3.4), (3.6) é um problema misto, mas pode também ser considerado como um problema de contorno na região ilimitada  $[0, l] \times [0, +\infty)$ .

**Exemplo 3.4.** O problema para a equação de onda em um intervalo finito

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \tag{3.8}$$

também pode ser considerado como misto (condições iniciais  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $x \in [0, l]$  e condições de contorno  $u(0, t) = 0 = u(l, t)$ ,  $t \geq 0$ ) ou como um problema de contorno na região ilimitada

$[0, l] \times [0, +\infty)$ . Observe que, como a equação de onda é de segunda ordem em relação à variável temporal  $t$ , precisamos de duas condições iniciais. Para que exista solução é preciso que  $f$  satisfaça a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l). \quad (3.9)$$

Veremos mais tarde que, se quisermos soluções  $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, \infty))$  com  $u_t$  contínua em  $[0, l] \times \{0\}$ , precisaremos, além da condição (3.9), que  $f \in C^2([0, l])$  com  $f''(0) = 0 = f''(l)$  e que  $g \in C^1([0, l])$  com  $g(0) = 0 = g(l)$ . Mostraremos que o Problema (3.8) tem, de fato, uma única solução neste caso. Do ponto de vista físico, o Problema (3.8) descreve uma corda elástica de comprimento  $l$ , presa nas pontas, vibrando em um plano vertical (uma corda de violino, por exemplo);  $u(x, t)$  é o deslocamento vertical da corda no ponto  $x$  no instante  $t$  e as funções  $f$  e  $g$  descrevem, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda. A equação de onda em (3.8) pode ser deduzida supondo que a corda tem densidade de massa constante, que a amplitude é pequena em relação ao comprimento da corda e que os efeitos amortecedores são negligíveis. A constante  $c^2$  é a tensão dividida pela densidade, de modo que  $c$  tem dimensão de velocidade; de fato,  $c$  é a velocidade de propagação da onda ao longo da corda. O leitor interessado na dedução da equação de onda em (3.8) pode consultar o Apêndice B do Capítulo 10 de Boyce e DiPrima (2015) ou, para uma dedução alternativa, Symon (1960); para uma discussão mais profunda, veja Antman (1980).

A equação em (3.8) corresponde a vibrações livres; no caso de vibrações forçadas, a equação fica

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t), \quad (3.10)$$

enquanto que a equação para vibrações amortecidas pode ser do tipo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - bu_t, \quad (3.11)$$

$b$  uma constante positiva ou, mais geralmente,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - f(u_t). \quad (3.12)$$

## 16 Definições Básicas

A generalização do Problema (3.8) com duas variáveis espaciais fica

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, y, t) &= 0, (x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega} \\ u_t(x, y, 0) &= g(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\Omega$  é um subconjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^2$  e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^2$ ; a condição de compatibilidade neste caso é

$$f(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega. \quad (3.14)$$

O Problema (3.13) descreve o movimento de uma membrana vibrando (como em um tambor) e também tem uma única solução quando  $f$  satisfaz a condição de compatibilidade (3.14).

**Exemplo 3.5.** Outro problema envolvendo a equação de onda é

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) &= g(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $n = 1, 2$  ou  $3$  e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ . O Problema (3.15) é um problema de Cauchy e tem uma única solução. Estudaremos o Problema (3.15) no caso  $n = 1$ .

**Exemplo 3.6.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto. Então

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= f \end{aligned} \quad (3.16)$$

é um problema de contorno e de fato um *problema de Dirichlet*. Estudaremos este problema para algumas regiões particulares (se  $\Omega$  for uma região retangular ou o interior de um círculo). O Problema (3.16) tem uma única solução.

**Exemplo 3.7.** Outro problema de contorno para a equação de Laplace é

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \text{ em } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.17}$$

que é um *problema de Neumann*. Observe que (3.17) não tem solução única: se  $u$  for uma solução de (3.17), então  $u + c$  também o será para qualquer constante  $c$ .

Dado um problema consistindo de uma EDP e condições de contorno e/ou iniciais, existem três questões fundamentais:

- (i) existência de soluções;
- (ii) unicidade de solução;
- (iii) dependência da solução nos dados iniciais e/ou de contorno.

Para discutir a existência é preciso especificar não somente a classe de funções onde procuramos solução, mas também em que sentido as condições de contorno e/ou iniciais são satisfeitas. Vamos considerar por exemplo o Problema (3.4) com  $\Omega$  o interior da esfera de raio 1 centrada na origem e  $f \in C(\bar{\Omega})$  satisfazendo a condição de compatibilidade (3.5). Se procurarmos soluções  $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty))$  mas não necessariamente contínuas em  $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ , como interpretar a condição de contorno? Poderíamos, por exemplo, procurar soluções  $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty))$  com a propriedade que, para cada  $t > 0$  e para cada  $X_0 \in \partial\Omega$  fixos,

$$\lim_{\rho \uparrow 1} u(\rho X_0, t) = 0.$$

Neste caso, estamos procurando soluções que são radialmente contínuas nas variáveis espaciais para cada  $t$  fixo, mas não são necessariamente contínuas a priori em  $\bar{\Omega}$ . Analogamente, poderíamos interpretar a condição inicial como

$$\lim_{t \downarrow 0} u(X, t) = f(X)$$

para cada  $X \in \bar{\Omega}$  fixo. É claro que, do ponto de vista físico, é natural procurar soluções em

$$C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty)).$$

## 18 Definições Básicas

Uma vez obtida a existência, o significado da unicidade é claro: desejamos saber se a solução é única dentro da classe especificada.

A discussão da dependência da solução nos dados iniciais e/ou de contorno é muito importante. Devemos lembrar que os dados de um problema físico são dados experimentais que necessariamente contêm erros de medida; é, portanto, natural perguntar se pequenas variações nos dados acarretam pequenas variações na solução: se este for o caso, diremos que a solução *depende continuamente* dos dados iniciais e/ou de contorno. É claro que o significado de “pequenas variações” depende do problema em questão.

Um problema para o qual valem existência, unicidade e dependência contínua nos dados iniciais e/ou de contorno é chamado um *problema bem posto* (no sentido de Hadamard). Caso contrário, o problema é dito *mal posto*. Dentre os exemplos que vimos nesta seção, os únicos mal postos são o segundo e o sétimo.

Neste livro, estudaremos basicamente equações lineares de primeira e de segunda ordem com duas variáveis independentes. Estaremos interessados na discussão da existência e unicidade de soluções clássicas para alguns problemas (incluindo os dos exemplos acima com duas variáveis independentes); a dependência nos dados iniciais é mais delicada e só será discutida nos exemplos mais simples.

## 4 Exercícios

### Seção 1: Introdução

1. Dê a ordem das EDPs abaixo:

- (i)  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$
- (ii)  $uD_1^2D_2u + D_1u = u^2 + 1$
- (iii)  $u_xu_t = \operatorname{sen} u$
- (iv)  $x^3\partial_xu - u^3\partial_tu + \partial_x^2u = x^5 + t^4$
- (v)  $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

2. Verifique quais das equações abaixo são lineares indicando, nesse caso, se são homogêneas ou não:

(i)  $D_1 u^2 + D_2 u = 0$

(ii)  $x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = x + y$

(iii)  $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$

(iv)  $u_{xx} - u_{tt} = \operatorname{sen} u$

(v)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} = x y u$

(vi)  $x^2 D_2^2 u + y^2 D_1^2 u = D_1 u + D_2 u + x y u$

3. Identifique a parte principal de cada uma das equações nos Exercícios 1 e 2 acima.

4. Indique quais, entre as equações dos Exercícios 1 e 2 acima, são semilineares.

## Seção 2: Linearidade e Superposição

Prove diretamente que se  $u$  e  $v$  forem soluções de uma das equações abaixo, então qualquer combinação linear de  $u$  e  $v$  será solução desta mesma equação:

1.  $\frac{\partial u}{\partial x} + x u = 0$

2.  $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

3.  $x u_y = x y u$

4.  $y u_{xx} + x u_y = x y u$

5.  $y u_{xx} + u_x + x u = 0$

## 20 Definições Básicas

## Seção 3: Condições de Contorno e Iniciais

Identifique as condições iniciais e/ou de contorno nos problemas abaixo, indicando se o problema é um problema de Cauchy, de contorno ou misto. Indique, também, se alguma das funções dadas tem que satisfazer condições de compatibilidade.

1.

$$\begin{aligned} xu_x - yu_y &= x^2 + y^2 \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ u(t^3, t^5) &= t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= 0, \quad x^2 + y^2 < 4 \\ u(2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t) &= t \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} tu_{xx} + 2xu_{xt} - tu_{tt} + x^2u_x + t^2u_t &= e^x \cos t, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} y^2u_{xx} + x^2u_{yy} + xyu &= x + y \text{ se } x^2/4 + y^2/9 < 1, \\ u(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t) &= t(2\pi - t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} t^2u_{xx} + xu_t - u &= f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) &= \beta(t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \gamma(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

# Capítulo 2

## Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear

Como o próprio nome indica, estudaremos neste capítulo equações lineares de primeira ordem. Na primeira seção, veremos alguns exemplos simples de problemas de Cauchy que nos darão uma ideia do que pode acontecer. A segunda seção é dedicada ao estudo de problemas de Cauchy para equações lineares sem dependência explícita na variável dependente. Na terceira e última seção discutiremos a solução geral de equações lineares.

### 1 Alguns Exemplos

Vamos analisar alguns exemplos simples de problemas de Cauchy para equações lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes.

Vamos considerar primeiro o Exemplo 3.1 do primeiro capítulo:

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde  $p, f \in C^1(\mathbb{R})$  são funções dadas. Como vimos anteriormente, esse é um problema de Cauchy: a função  $u$  que desejamos encontrar é conhecida ao longo da curva inicial  $y = p(x)$ .

A EDP em (1.1) é muito simples e pode ser integrada diretamente: como a derivada parcial de  $u$  em relação a  $y$  é identicamente nula, vemos que  $u$  é constante como função de  $y$ , ou seja,  $u$  depende apenas de  $x$ .

## 22 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear

Em outras palavras, a solução geral da EDP em (1.1) é

$$u(x, y) = g(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2)$$

onde  $g \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária (estamos procurando soluções clássicas, ou seja,  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ). Como (1.2) é válida para qualquer par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , fazendo  $y = p(x)$  obtemos

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ou seja, a solução do Problema (1.1) é dada por

$$u(x, y) = f(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.3)$$

Mostramos então que, se  $u$  for uma solução clássica de (1.1),  $u$  será dada por (1.3); reciprocamente, se  $u$  for dada por (1.3), então  $u$  será solução de (1.1). Portanto, o Problema (1.1) tem uma única solução clássica.

Observe que, como estamos procurando soluções  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , precisamos que  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Se quisermos soluções mais gerais podemos resolver o problema para funções  $f$  mais gerais. Por exemplo, se procurarmos soluções  $u \in C(\mathbb{R}^2)$  tal que existe a derivada parcial  $u_y$  em todos os pontos,  $f$  poderá ser qualquer função contínua. Além disso, note que a curva inicial não precisa ser diferenciável – de fato a função  $p$  não precisa ser contínua!

A dependência contínua nos dados para o Problema (1.1) é evidente, já que a solução  $u(x, y)$  é igual à condição inicial  $f(x)$ . Temos, portanto, dependência contínua nos dados e o Problema (1.1) é bem posto.

Vamos considerar agora o Exemplo 3.2 do Capítulo 1:

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \quad u \in C^1(\mathbb{R}^2), \\ u(0, y) &= f(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é dada. A única diferença entre (1.1) e (1.4) é a curva inicial: em (1.1) ela é o gráfico de uma função de  $x$ , enquanto que em (1.4) ela é o eixo dos  $y$ . Apesar disso, o Problema (1.1) é bem posto e obtemos

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u_y(0, y) &= f'(y), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.5)$$

e, portanto,

$$f'(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Logo, para que exista solução, é preciso que a função  $f$  seja constante. Se  $f$  for constante,  $f \equiv k$ , como a solução geral da EDP é dada por (1.2), a solução de (1.4) será

$$u(x, y) = g(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.7)$$

onde  $g \in C^1(\mathbb{R})$  é qualquer função satisfazendo  $g(0) = k$ . Conclusão: o Problema (1.4) não tem solução quando  $f$  não é constante e tem uma infinidade de soluções quando  $f$  é constante.

A situação será inteiramente análoga se a curva inicial for uma reta vertical: dado qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}$ , o problema

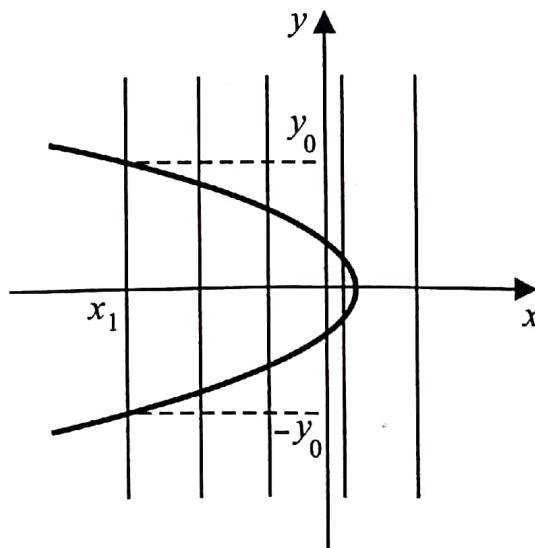
$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u(x_0, y) &= f(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

não tem solução quando  $f$  não é constante e tem uma infinidade de soluções quando  $f$  é constante.

E para curvas mais gerais, o que acontece? Para responder a esta pergunta, vamos fazer mais um exemplo, tomando como curva inicial a parábola  $x = 1 - y^2$ , ou seja, vamos considerar o problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ u(1 - y^2, y) &= f(y) \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é dada.



**Fig. 1:** A solução é constante ao longo de retas verticais (Problema (1.9)).

Como já vimos anteriormente (Equação (1.2)), a solução geral da EDP em (1.9) é uma função apenas de  $x$ ; logo, se  $u$  for solução de (1.9), dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u(x_0, y) = g(x_0)$  será constante, ou seja,  $u(x, y)$  é constante ao longo de retas verticais. Dado  $x_0 < 1$ , a reta vertical  $x = x_0$  intersecta a curva inicial em dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0, -y_0)$ ; mas então, se  $u$  for solução,

$$f(y_0) = u(x_0, -y_0) = f(-y_0).$$

Portanto, para que o Problema (1.9) tenha solução, é preciso que

$$f(y) = f(-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

ou seja, é preciso que  $f$  seja uma *função par*. Então, se  $f$  não for par, o problema não terá solução. Se  $f$  for par, esperamos que o problema tenha uma infinidade de soluções, pois  $u$  não está determinada para  $x > 1$ : dado  $x_0 > 1$ , a reta vertical  $x = x_0$  não intersecta a curva inicial. Na verdade, como estamos procurando soluções de classe  $C^1$ , mesmo quando  $f$  for par é necessário impor uma condição a mais: observe que a solução, pelo que vimos acima, deve ser dada por

$$u(x, y) = f(\sqrt{1-x}) \text{ se } x \leq 1;$$

como queremos  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , é preciso que exista a derivada

$$\frac{d}{dt}(f(\sqrt{1-x}))|_{x=1} \quad (1.11)$$

e, neste caso, as soluções do Problema (1.9) são dadas por

$$u(x, y) = \begin{cases} f(\sqrt{1-x}) & \text{se } x \leq 1, \\ g(x) & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

onde  $g \in C^1([1, +\infty))$  satisfaz

$$g(1) = f(0), \quad g'(1) = \frac{d}{dt}(f(\sqrt{1-x}))|_{x=1}. \quad (1.13)$$

O estudo deste exemplo deixa claro que o problema de Cauchy para a equação

$$u_y = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \quad (1.14)$$

tem solução única para qualquer condição inicial  $f \in C^1(\mathbb{R})$  se a curva inicial for tal que,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , a reta  $x = x_0$  intersecta a curva em exatamente um ponto; em outras palavras, se a curva inicial for o gráfico de uma função  $y = p(x)$ . Recaímos, então, no Problema (1.1).

O ponto fundamental aqui é que todas as soluções da EDP (1.14) são constantes em retas verticais e as curvas iniciais “boas” são as que não têm tangentes verticais. Veremos mais tarde que as retas verticais são *curvas características planas* para a EDP (1.14). No caso de EDPs de primeira ordem, as curvas características são curvas ao longo das quais a EDP é uma derivada total: integrando ao longo de tais curvas, resolvemos a equação. E foi exatamente isso que fizemos para achar a solução geral de (1.14): integramos em relação a  $y$ , ou seja, ao longo das retas  $x = x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

A Equação (1.14) é uma EDP linear homogênea, mas as equações não homogêneas podem ser resolvidas da mesma maneira. Para o nosso exemplo, a equação não homogênea correspondente é

$$u_y = h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.15)$$

onde  $h \in C(\mathbb{R}^2)$  é dada. Observe que as características planas são as mesmas: ao longo da reta  $x = x_0$  a equação fica

$$\frac{d}{dy} u(x_0, y) = h(x_0, y).$$

Vamos resolver o problema correspondente ao (1.1), ou seja,

$$\begin{aligned} u_y &= h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde  $h \in C(\mathbb{R}^2)$ ,  $p, f \in C^1(\mathbb{R})$  são dadas. Para achar a solução no ponto  $(x_0, y_0)$  basta integrar ao longo do segmento de reta que une  $(x_0, p(x_0))$  e  $(x_0, y_0)$  (veja a Figura 2): de fato, se  $u$  for solução de (1.16), então

$$u(x_0, y_0) = \int_{p(x_0)}^{y_0} u_y(x_0, t) dt + u(x_0, p(x_0)) = f(x_0) + \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t) dt,$$

ou seja,

$$u(x, y) = f(x) + \int_{p(x)}^y h(x, t) dt. \quad (1.17)$$

Reciprocamente, se  $u$  for dada por (1.17), então  $u$  será solução de (1.16). Portanto, o Problema (1.16) tem uma única solução, dada por (1.17).

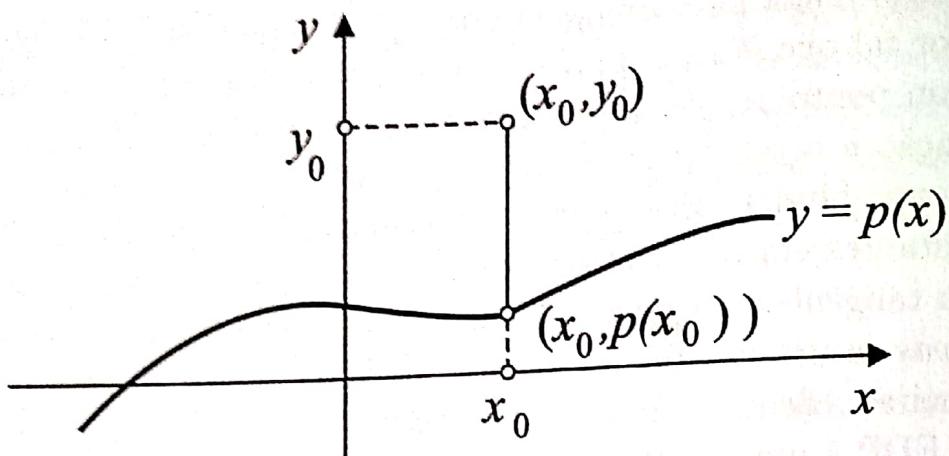


Fig. 2: A solução é obtida integrando-se ao longo das características planas (no caso, as retas verticais).

Na próxima seção, usaremos essas ideias para resolver problemas de Cauchy para equações lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes sem dependência explícita na variável dependente.

## 2 O Problema de Cauchy

Agora vamos estudar o problema de Cauchy para equações da forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y). \quad (2.1)$$

Observe que a função incógnita  $u$  aparece apenas na parte principal da equação (2.1), o que simplifica um pouco a resolução. Discutiremos equações lineares gerais na terceira seção deste capítulo.

Como vimos na seção anterior, existe uma relação entre a curva plana inicial  $\gamma$  e a região aberta  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , onde queremos não só existência, mas também unicidade da solução: a região  $\Omega$  tem que ser coberta por curvas características planas que intersectam a curva  $\gamma$  em exatamente um ponto. Parametrizando a curva  $\gamma$  por  $(\sigma(t), \rho(t))$ ,  $t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto (que pode ser finito ou infinito), podemos escrever o problema na forma

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &\oplus f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vamos fazer as seguintes hipóteses adicionais:

- (i) a curva inicial plana  $\gamma$  é uma *curva suave*, ou seja, as funções  $\sigma, \rho$  são continuamente diferenciáveis em  $I$  e  $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$  qualquer que seja  $t \in I$ ;
- (ii)  $f \in C^1(I)$ ;
- (iii)  $a, b, c \in C^1(\Omega)$  e as funções  $a$  e  $b$  não se anulam simultaneamente em  $\Omega$ , onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  é um aberto contendo  $\gamma$  (a vizinhança da curva onde resolveremos o problema está contida em  $\Omega$ ).

Para resolver o Problema (2.2) usando as ideias da primeira seção, a primeira coisa a fazer é achar as curvas características planas da equação (2.1). Como vimos anteriormente, essas são curvas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total. Se  $\mathcal{C}$  for uma curva característica plana parametrizada por  $(\alpha(s), \beta(s))$ , então a derivada total de  $u$  ao longo de  $\mathcal{C}$  será, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{ds} [u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)); \quad (2.3)$$

por outro lado, a EDP (2.1) ao longo de  $\mathcal{C}$  fica

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (2.4)$$

Portanto, se quisermos que o lado esquerdo da equação (2.4) seja igual a qualquer uma das expressões em (2.3), será preciso que, para cada  $s$ , exista um número real  $\lambda(s) \neq 0$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s); \end{aligned} \quad (2.5)$$

neste caso, a equação ficará

$$\frac{d}{ds} [u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s)c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (2.6)$$

As condições (2.5) significam, geometricamente, que o vetor tangente à curva  $\mathcal{C}$  no ponto  $(\alpha(s), \beta(s))$  é paralelo ao vetor

$$(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s))).$$

A função  $\lambda(s)$  é de fato desnecessária – basta reparametrizar a curva convenientemente. Para provar esta afirmação, observe, em primeiro lugar, que a função  $\lambda$  é contínua, pois a curva  $\mathcal{C}$  é suave (por hipótese!) e as funções  $a$  e  $b$  não se anulam simultaneamente. Escolhendo, então, qualquer primitiva  $\Lambda$  de  $\lambda$ , como  $\Lambda'(s) = \lambda(s) \neq 0$ , qualquer que seja  $s$ ,  $\Lambda'(s) > 0$  ou  $\Lambda'(s) < 0$  (por continuidade) para todo  $s$ , logo  $\Lambda$  é uma função monótona crescente ou decrescente, portanto inversível (APOS-TOL, 1967) e podemos fazer uma mudança de variável  $s = \Lambda^{-1}(t)$  ou  $t = \Lambda(s)$  para obter uma nova parametrização  $(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$  da curva  $\mathcal{C}$ , onde

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t) &= \alpha(s) = \alpha(\Lambda^{-1}(t)), \\ \tilde{\beta}(t) &= \beta(s) = \beta(\Lambda^{-1}(t))\end{aligned}\tag{2.7}$$

Mas então, de (2.7) e (2.5), obtemos

$$\tilde{\alpha}'(t) = \alpha'(s) \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \frac{1}{\Lambda'(\Lambda^{-1}(t))} = \frac{\alpha'(s)}{\lambda(s)} = a(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)),$$

e, analogamente,

$$\tilde{\beta}'(t) = \frac{\beta'(s)}{\lambda(s)} = b(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)).$$

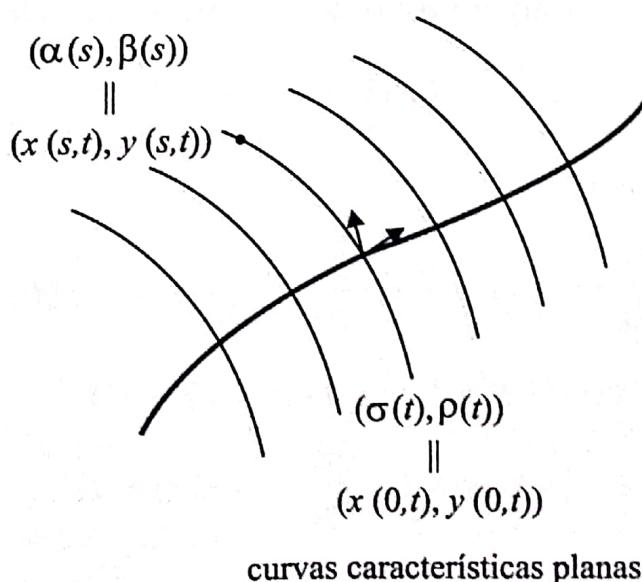
Portanto, as *curvas características planas* da Equação (2.1) são as curvas suaves  $\mathcal{C}$  que admitem parametrização  $(\alpha(s), \beta(s))$  satisfazendo

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)).\end{aligned}\tag{2.8}$$

O sistema de EDOs dado por (2.8) tem uma infinidade de soluções: para obter uma solução única é preciso dar um par de condições iniciais. Mais precisamente, lembrando os resultados sobre sistemas de EDOs (veja o teorema de Picard em Sotomayor (1979) ou o Capítulo 7 de Simmons (1972)): como  $a, b \in C^1(\Omega)$ , dado  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existe uma solução  $(\alpha(s), \beta(s))$  de (2.8) para  $s$  em uma vizinhança de  $s_0$  tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \beta(s_0) = y_0. \quad (2.9)$$

Como vimos nos exemplos da seção anterior, a existência e a unicidade de solução para o Problema (2.2) depende de como as curvas características intersectam a curva inicial. Vamos considerar primeiro o caso análogo ao Problema (1.1), ou seja, vamos supor que a curva inicial  $\gamma$  nunca é tangente às curvas características planas: em outras palavras, o vetor tangente  $(\sigma'(t), \rho'(t))$  nunca é paralelo a  $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ . Usando a terminologia de álgebra linear, os vetores  $(\sigma'(t), \rho'(t))$  e  $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$  são linearmente independentes,  $\forall t \in I$ . Com esta hipótese, para cada  $t \in I$ , existe uma única curva característica plana passando pelo ponto  $(\sigma(t), \rho(t))$ , ou seja, que é solução de (2.8) e (2.9) com  $x_0 = \sigma(t)$ ,  $y_0 = \rho(t)$  em uma vizinhança de  $s_0$  (que vamos tomar igual a zero para simplificar a notação). Além disso,  $(\sigma(t), \rho(t))$  é o único ponto de interseção de  $\gamma$  com a característica pois, se existisse outro, em algum lugar os vetores tangentes às duas curvas seriam paralelos, o que contradiz a hipótese. Podemos então cobrir uma vizinhança da curva  $\gamma$  com curvas características planas que intersectam a curva  $\gamma$  em exatamente um ponto, o que nos permite fazer uma mudança de variável de  $(x, y)$  para  $(s, t)$ : para cada  $t \in I$ , se denotarmos a curva característica plana que passa por  $(\sigma(t), \rho(t))$  por  $(x(s, t), y(s, t))$ , então o sistema (2.8) e as condições (2.9) podem ser reescritos como



**Fig. 3:** A solução é obtida integrando-se ao longo das características planas.

$$\begin{aligned} x_s(s, t) &= a(x(s, t), y(s, t)), \\ y_s(s, t) &= b(x(s, t), y(s, t)), \\ x(0, t) &= \sigma(t), \\ y(0, t) &= \rho(t); \end{aligned} \tag{2.10}$$

além disso, como os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \quad \text{e} \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$$

são linearmente independentes,

$$\det \begin{pmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

e portanto, por continuidade,

$$\det \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} \neq 0$$

em uma vizinhança de  $\gamma$ . Logo a transformação

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$$

é localmente injetora, o que nos permite fazer a mudança de variável (veja Fulks (1961) ou algum livro de Cálculo Avançado)

$$v(s, t) = u(x, y). \tag{2.11}$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= a(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \\ &\quad + b(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Substituindo a EDP (2.1) em (2.12), obtemos

$$v_s = c(x(s, t), y(s, t)).$$

A condição inicial do Problema (2.2) fica

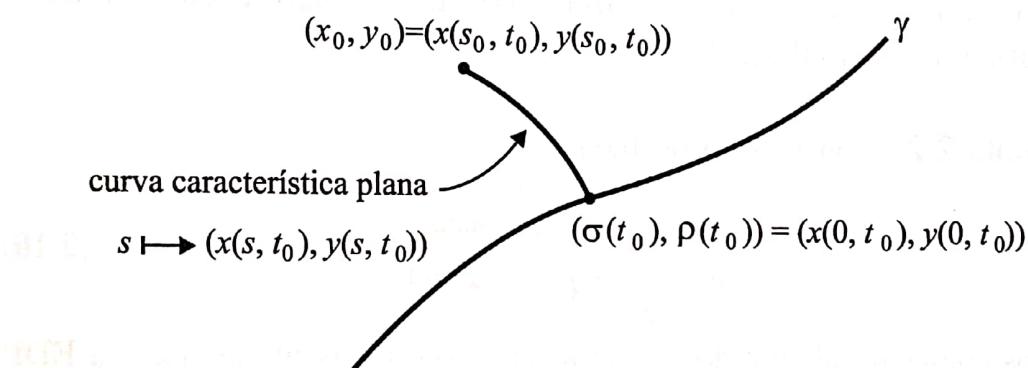
$$v(0, t) = f(t), \quad t \in I,$$

logo o problema que  $v$  satisfaz é

$$\begin{aligned} v_s &= c(x(s, t), y(s, t)), \\ v(0, t) &= f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para cada  $t \in I$  fixo, (2.13) é um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem cuja solução é obtida por integração direta de  $s = 0$  a  $s$ . Então

$$v(s, t) = \int_0^s v_s(\nu, t) d\nu + v(0, t) = \int_0^s c(x(\nu, t), y(\nu, t)) d\nu + f(t). \tag{2.14}$$



**Fig. 4:** A solução no ponto  $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$  é obtida integrando a EDP ao longo da característica plana que passa por  $(x_0, y_0)$  de  $s = 0$  até  $s = s_0$ .

Para voltar para  $u$ , dado  $(x_0, y_0)$ , seja  $t_0 = t(x_0, y_0)$  e  $s_0 = s(x_0, y_0)$ , ou seja,  $x_0 = x(s_0, t_0)$  e  $y_0 = y(s_0, t_0)$ ; substituindo (2.11) em (2.14), obtemos

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0)) ds. \tag{2.15}$$

Note que, se  $u$  for solução de (2.2), então  $u$  irá satisfazer (2.15); como (2.15) é, de fato, solução de (2.2) (pois (2.14) é solução de (2.13)), a solução do Problema (2.2) é única. Acabamos de provar então o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aberto,  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $\gamma$  uma curva suave em  $\Omega$  parametrizada por  $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ ,  $t \in I$ ,  $f \in C^1(I)$  e  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ . Suponha que  $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega$ , e que

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Então o Problema (2.2) tem uma única solução de classe  $C^1$  em uma vizinhança da curva  $\gamma$  em  $\Omega$ , dada por (2.15).

O gráfico da solução  $u$  do Problema (2.2) é uma superfície  $z = u(x, y)$  em  $\mathbb{R}^3$ , chamada *superfície solução*. Outra parametrização dessa superfície é dada pelas variáveis  $s, t$ , ou seja,  $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), v(s, t))$  é uma parametrização da superfície solução, onde  $v$  é dada por (2.14) e  $x, y$  satisfazem (2.10).

Em um problema específico, normalmente é mais fácil achar as curvas características planas diretamente e integrar ao longo dessas curvas do que utilizar a fórmula (2.15).

**Exemplo 2.2.** Considere o problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x > 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Vamos começar calculando as curvas características planas para a EDP em (2.16). Procuramos então curvas  $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= -\beta(s), \\ \beta'(s) &= \alpha(s). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\alpha(s)$ , a segunda por  $\beta(s)$  e somando, obtemos

$$\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) = 0$$

↓

$$\frac{d}{ds} [\alpha(s)^2 + \beta(s)^2] = 0$$

↓

$$\alpha(s)^2 + \beta(s)^2 = \text{constante.}$$

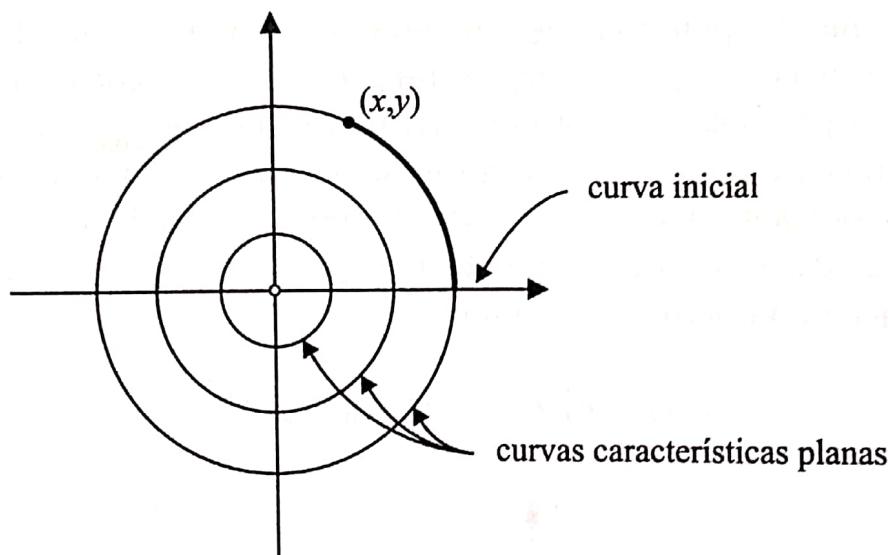
Portanto, as curvas características planas para a EDP em (2.16) são círculos centrados na origem. Como a curva inicial é o semieixo  $y = 0, x > 0$ , a curva inicial intersecta ortogonalmente cada característica plana em exatamente um ponto e todos os pontos em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  estão em algumas dessas características.

Ao longo do círculo de raio  $r$  centrado na origem, a EDP fica

$$\frac{d}{d\theta} [u(r \cos \theta, r \sin \theta)] = 4r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

Usando coordenadas polares para integrar a EDP, obtemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^{\theta(x,y)} 4r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta + u(r, 0) \\ &= 2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$



**Fig. 5:** As curvas características planas são círculos centrados na origem (Exemplo 2.2).

Portanto, a solução do Problema (2.16) é

$$u(x, y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}. \quad (2.18)$$

Observe que na origem, como  $\sqrt{x^2 + y^2}$  não é diferenciável, a diferenciabilidade de  $u$  depende de  $f$ .

**Exemplo 2.3.** Vamos resolver o problema

$$\begin{aligned} 2yu_x + u_y &= (2y^2 + x)\sin(2xy) \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ u(x, e^{-2x}) &= \cos^2(xe^{-2x}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

As características planas satisfazem

$$\begin{cases} \alpha'(s) = 2\beta(s) \\ \beta'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'(s) = 2s + 2c_1 \\ \beta(s) = s + c_1 \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} \alpha(s) = s^2 + 2sc_1 + c_2 = (s + c_1)^2 + c_2 - c_1^2 \\ \beta(s) = s + c_1. \end{cases}$$

Então as curvas características planas são parábolas da forma  $x = y^2 + c$ .

Note que, no ponto  $(x_0, y_0)$  de interseção da curva inicial  $y = e^{-2x}$  com a parábola  $x = y^2 + x_0 - y_0^2$ , as tangentes são ortogonais, pois a reta tangente à parábola no ponto  $(x_0, y_0)$  tem inclinação  $\frac{1}{2y_0}$  enquanto que a reta tangente à curva inicial no mesmo ponto tem inclinação  $-2y_0$ . Estamos, portanto, nas condições do Teorema 2.1. Dado qualquer ponto  $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , ele está na parábola  $x = y^2 + x_1 - y_1^2$ , que intersecta a curva inicial no ponto  $(x_0, y_0)$  onde

$$x_0 = y_0^2 + x_1 - y_1^2, y_0 = e^{-2x_0}.$$

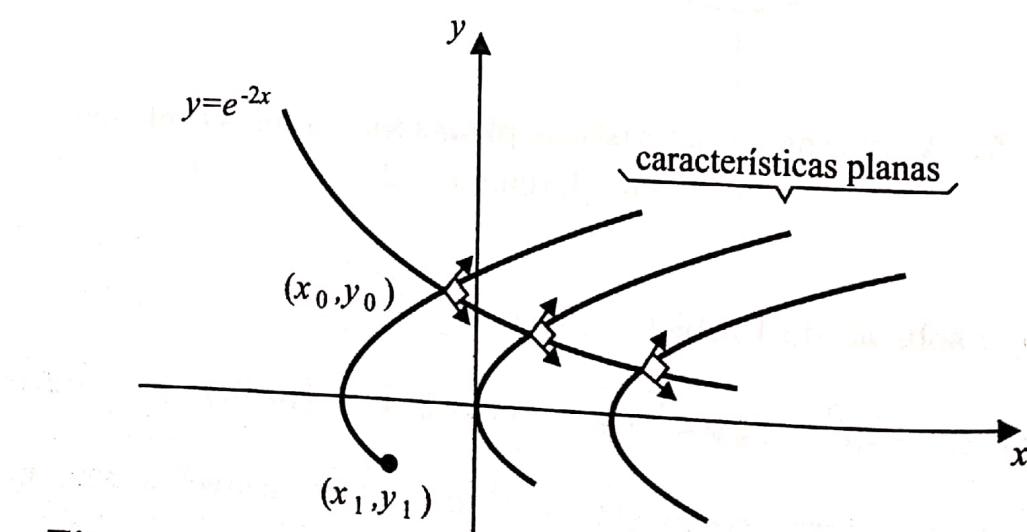


Fig. 6: As características planas são parábolas (Exemplo 2.3).

Parametrizando a parábola por  $s \mapsto (s^2 + x_1 - y_1^2, s)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 u(x_1, y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{ds} u(s^2 + x_1 - y_1^2, s) ds + u(x_0, y_0) \\
 &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) \operatorname{sen}(2s^3 + 2s(x_1 - y_1^2)) ds + \cos^2(x_0 y_0) \\
 &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) 2\operatorname{sen}(s^3 + s(x_1 - y_1^2)) \cos(s^3 + s(x_1 - y_1^2)) ds \\
 &\quad + \cos^2(x_0 y_0) \\
 &= \int_{y_0(y_1^2+x_1-y_1^2)}^{y_1(y_1^2+x_1-y_1^2)} 2 \operatorname{sen} r \cos r dr + \cos^2(x_0 y_0) \\
 &= \cos^2 r \Big|_{r=x_0 y_0}^{r=x_1 y_1} + \cos^2(x_0 y_0) = \cos^2(x_1 y_1).
 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do Problema (2.19) é

$$u(x, y) = \cos^2(xy). \quad (2.20)$$

### 3 Solução Geral

A teoria de EDPs lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes é mais semelhante à teoria de EDOs do que a de EDPs. De fato, é essa semelhança com EDOs que nos permitirá achar a solução geral de tais equações.

Vamos considerar o operador diferencial linear de primeira ordem

$$L = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y), \quad (3.1)$$

ou seja,

$$Lu = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u,$$

e vamos estudar a equação

$$Lu = d(x, y) \quad (3.2)$$

em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , supondo que  $a, b, c, d \in C(\Omega)$ .

A ideia do método que utilizaremos é bem simples: para resolver a Equação (3.2), procuraremos uma mudança de variável  $s = s(x, y)$ ,

$t = t(x, y)$  que a transforme em uma equação onde só apareça a derivada em relação a uma das variáveis (que escolheremos  $s$ ), o que nos permitirá resolver a equação como se fosse uma EDO, fixando a outra variável (que será  $t$ ).

Antes de descrever o método em geral, vamos resolver algumas equações particulares para ilustrá-lo.

**Exemplo 3.1.** Vamos procurar a solução geral da equação

$$xu_x + u = x^2 \quad (3.3)$$

no semiplano  $x > 0$ . Observe que essa equação já está na forma desejada, uma vez que não aparece a derivada em relação a  $y$  (ou seja,  $b \equiv 0$ ). Para cada  $y$  fixo, a equação (3.3) é uma EDO e pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x} (xu) = x^2;$$

integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$xu = \frac{x^3}{3} + f(y),$$

logo a solução geral de (3.3) é dada por

$$u(x, y) = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} f(y) \quad (3.4)$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária.

**Exemplo 3.2.** Vamos agora procurar a solução geral da equação

$$-2yu_x + u_y = ye^x \quad (3.5)$$

no plano inteiro. Neste exemplo, podemos usar as ideias desenvolvidas na segunda seção para achar a solução geral: com o auxílio das curvas características planas e de uma curva auxiliar que intersecta transversalmente essas características, podemos fazer uma mudança de variável  $s = s(x, y)$ ,  $t = t(x, y)$  de forma a obter uma equação mais simples. As curvas características planas para a equação (3.5) são dadas por

$$\begin{cases} x'(s) = -2y(s) \\ y'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = -s^2 - 2sc_1 + c_2 = -(s + c_1)^2 + c_1^2 + c_2 \\ y(s) = s + c_1 \end{cases}$$

Então as características planas são as parábolas  $x = -y^2 + k$ ,  $k$  constante. Escolhendo como curva auxiliar o eixo dos  $x$ , procuramos  $s$  e  $t$  tais que (veja (2.10))

$$\begin{cases} x(s, t) = -2y(s, t), x(0, t) = t \\ y_s(s, t) = 1, y(0, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s, t) = -s^2 + t, \\ y(s, t) = s. \end{cases}$$

Logo

$$s = y, \quad t = x + y^2. \quad (3.6)$$

Note que  $t$  é constante ao longo das características planas e a curva auxiliar corresponde a  $s = 0$ . Fazendo a mudança de variável (3.6) e definindo  $v(s, t) = u(x, y)$ ,  $v$  satisfaz a equação

$$v_s = se^{-s^2+t}$$

cuja solução geral é dada por

$$v(s, t) = -\frac{1}{2}e^{-s^2+t} + f(t).$$

Portanto, a solução geral de (3.5) é dada por

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}e^{x+y^2} + f(x + y^2) \quad (3.7)$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária.

**Exemplo 3.3.** Vamos agora procurar a solução geral de uma equação com coeficientes constantes:

$$av_x + bv_y + cv = d \quad (3.8)$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Como no exemplo anterior, vamos procurar uma mudança de variável que coloque a equação (3.8) em uma forma mais simples, ou seja, uma mudança  $s = s(x, y)$ ,  $t = t(x, y)$  tal que  $t$  é constante ao longo das características planas. Para a equação (3.8), as características planas satisfazem

$$\begin{cases} x'(s) = a \\ y'(s) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = as + c_1 \\ y(s) = bs + c_2 \end{cases}$$

## 38 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear

Logo, as características planas são as retas  $ay - bx = k_1$ ,  $k_1$  constante. As retas ortogonais a estas são as retas  $by + ax = k_2$ ,  $k_2$  constante. Escolhendo  $t$  constante ao longo das características planas e  $s$  constante ao longo das retas ortogonais, obtemos

$$\begin{aligned} s &= ax + by \\ t &= -bx + ay \end{aligned} \quad (3.9)$$

Com a mudança de variável (3.9), a equação (3.8) fica

$$(a^2 + b^2)w_s + cw = d. \quad (3.10)$$

Para cada  $t$  fixo, a equação (3.10) é uma EDO de primeira ordem com fator integrante

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \exp\left(\frac{cs}{a^2 + b^2}\right). \quad (3.11)$$

Multiplicando (3.10) por (3.11), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ w \exp\left(\frac{cs}{a^2 + b^2}\right) \right] = \frac{d}{a^2 + b^2} \exp\left(\frac{cs}{a^2 + b^2}\right).$$

Portanto, para  $c \neq 0$ , a solução geral de (3.10) é

$$w(s, t) = \frac{d}{c} + f(x) \exp\left(\frac{-cs}{a^2 + b^2}\right)$$

e a solução geral de (3.8) é

$$v(x, y) = \frac{d}{c} + f(-bx + ay) \exp\left(\frac{-c}{a^2 + b^2} (ax + by)\right).$$

No caso em que  $c = 0$ , a solução geral de (3.10) é

$$w(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2} s + f(t)$$

e a solução geral de (3.8) é

$$v(x, y) = \frac{d}{a^2 + b^2} (ax + by) + f(-bx + ay),$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária.

A ideia utilizada no exemplo acima pode ser aplicada mesmo que os coeficientes não sejam constantes. As curvas características planas da Equação (3.2) satisfazem o sistema

$$\begin{aligned}x'(s) &= a(x(s), y(s)) \\y'(s) &= b(x(s), y(s))\end{aligned}$$

e são soluções da EDO de primeira ordem

$$a(x, y)dy - b(x, y)dx = 0. \quad (3.12)$$

Se as soluções da EDO (3.12) forem da forma  $t(x, y) = k$ , onde  $k$  é uma constante arbitrária, será natural escolher  $t$  como uma das nossas novas variáveis. Existe uma certa liberdade na escolha da variável  $s$ : basta garantir que  $s = s(x, y)$ ,  $t = t(x, y)$  seja, de fato, uma mudança de variável de classe  $C^1$  em  $\Omega$ . Para isto, basta que o jacobiano

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix}$$

nunca se anule em  $\Omega$ . Observe que, se  $t_y$  nunca se anular em  $\Omega$  (respectivamente,  $t_x$  nunca se anular em  $\Omega$ ) poderemos escolher  $s = x$  (respectivamente,  $s = y$ ). Note também que, se  $s$  for constante ao longo das trajetórias ortogonais às características planas, como no Exemplo 3.3, o jacobiano nunca se anulará, pois as curvas de nível das funções  $s$  e  $t$  serão ortogonais, ou seja, os gradientes serão ortogonais e, portanto, linearmente independentes. É claro que as trajetórias ortogonais são soluções da EDO

$$b(x, y)dy + a(x, y)dx = 0. \quad (3.13)$$

**Exemplo 3.4.** Ache a solução geral de

$$x^2u_x - xyu_y + yu = xy^2 \quad (3.14)$$

no semiplano  $x < 0$ . Neste caso, as curvas características planas são soluções da EDO

$$x^2dy + xydx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{k}{x},$$

## 40 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear

logo podemos escolher  $t = xy$ . Como  $t_y \neq 0$ , podemos escolher  $s = x$ , obtendo a mudança de variável  $s = x$ ,  $t = xy$ . Definindo  $v(s, t) = u(x, y)$ ,  $v$  satisfaz a EDP

$$s^2 v_s + \frac{t}{s} v = \frac{t^2}{s} \quad (3.15)$$

que tem como fator integrante

$$\frac{1}{s^2} \exp\left(\int \frac{t}{s^3} ds\right) = \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{t}{2s^2}\right).$$

Multiplicando a equação (3.15) pelo fator integrante, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( v \exp\left(-\frac{t}{2s^2}\right) \right) = \frac{t^2}{s^3} \exp\left(-\frac{t}{2s^2}\right)$$

e a solução geral de (3.15) é

$$v(s, t) = t + f(t) \exp\left(\frac{t}{2s^2}\right).$$

Voltando às variáveis  $x, y$ , a solução geral de (3.14) é

$$u(x, y) = xy + f(xy) \exp\left(\frac{y}{2x}\right), \quad x < 0,$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária.

**Exemplo 3.5.** Ache a solução geral da equação

$$xu_x + (x - 1)u_y + xu = e^{x-y}. \quad (3.16)$$

As curvas características planas são soluções de

$$\begin{aligned} xdy - (x - 1)dx &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \\ \Rightarrow y &= x - \ln|x| + c \Rightarrow e^y = e^x \frac{1}{|x|} e^c \Rightarrow xe^{y-x} = k \end{aligned}$$

logo  $t(x, y) = xe^{y-x}$ . Neste caso, tanto  $t_x$  quanto  $t_y$  se anulam em algum ponto. No entanto, se escolhermos  $s = y - x$ , obteremos

$$\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ (1-x)e^{y-x} & xe^{y-x} \end{vmatrix} = -e^{y-x} \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Fazendo a mudança de variável

$$s = y - x, \quad t = xe^{y-x},$$

e definindo  $v(s, t) = u(x, y)$ ,  $v$  satisfaaz a EDP

$$v_s - te^{-s}v = -e^{-s}. \quad (3.17)$$

Multiplicando pelo fator integrante  $e^{te^{-s}}$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} (ve^{te^{-s}}) = -e^{-s} e^{te^{-s}}$$

cuja solução é dada por

$$v(s, t) = \frac{1}{t} + f(t)e^{-te^{-s}}. \quad (3.18)$$

É interessante observar que, embora os coeficientes da equação (3.17) sejam infinitamente diferenciáveis (de fato, funções analíticas), a solução (3.18) tem uma descontinuidade em  $t = 0$ . Voltando às variáveis  $x$  e  $y$ , obtemos

$$u(x, y) = \frac{e^{x-y}}{x} + f(xe^{y-x})e^{-x}, \quad x \neq 0,$$

onde  $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$  é arbitrária.

## 4 Exercícios

### Seção 1: Alguns Exemplos

1. Resolva:

(i)

$$u_y = x^2 + y^2, \quad \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, x^2) = x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii)

$$u_y = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{se } x > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = x, \quad x > 0.$$

2. Verifique se os problemas abaixo têm solução e, neste caso, encontre todas as soluções:

(i)

$$u_y = xe^y \text{ se } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(y^2, y) = e^{y^2} + y^4, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(ii)

$$u_y = xe^y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(y^2, y) = y^2 e^y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(iii)

$$u_x = 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(e^y, y) = y^2 + 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(iv)

$$u_x = 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, x^2) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(v)

$$u_x = 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, x^2) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Mostre que o problema

$$u_x = h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(p(y), y) = f(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

tem uma única solução  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e ache uma fórmula para  $u$ , supondo que  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e  $p, f \in C^1(\mathbb{R})$  são conhecidas.

## Seção 2: O Problema de Cauchy

1. Encontre as curvas características planas das equações a seguir.

(i)  $3u_x - 4u_y = x^2$

(ii)  $5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}$

(iii)  $u_x - 3u_y = \sin x + \cos y$

(iv)  $u_x - au_y = e^{mx} \cos(by)$  ( $a, b, m$  constantes)

(v)  $x^2u_x + y^2u_y = x^3$

(vi)  $u_x + xu_y = x^3 + 3xy$

(vii)  $x^2u_x - xyu_y = 2x^3 + x^2y + x^2 + \frac{x^3y}{x+1}$

(viii)  $x^2u_x + y^2u_y = axu$  ( $a$  constante)

(ix)  $u_x + a \cos x u_y = \cos x + y$  ( $a$  constante)

2. Resolva, indicando a região do plano onde a solução é válida:

(i)

$$\begin{aligned} 3u_x - 4u_y &= x^2 \\ u\left(x, \frac{3}{4}x\right) &= \frac{1}{9}x^3, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} 5u_x + 4u_y &= x^3 + 1 + 2e^{3y} \\ u(4t, -5t + 1) &= te^t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} u_x - 3u_y &= \sin x + \cos y \\ u(t, t) &= p(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (p \text{ uma função dada}). \end{aligned}$$

## 44 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear

(iv)

$$u_x - au_y = e^{mx} \cos(by) \quad (a, b, m \text{ constantes})$$

$$u(at, t) = p(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (p \text{ uma função dada}).$$

(v)

$$x^2 u_x + y^2 u_y = x^3$$

$$u(x, 1) = 1, \quad x > 0.$$

(vi)

$$u_x + xu_y = x^3 + 3xy$$

$$u(0, y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(vii)

$$x^2 u_x - xy u_y = 2x^3 + x^2 y + x^2 + \frac{x^3 y}{x+1}$$

$$u(t, t+1) = t^2 + t, \quad t > 0.$$

(viii)

$$x^2 u_x + y^2 u_y = axy \quad (a \text{ constante})$$

$$u(1, t) = a, \quad t > 0.$$

(ix)

$$u_x + a \cos x u_y = \cos x + y \quad (a \text{ constante}, a \neq 0)$$

$$u(\pi/2, y) = (\ln(\sin y))/a, \quad 0 < y < \pi.$$

3. A resolução de problemas de Cauchy para equações quase lineares é bastante semelhante ao caso linear; a diferença é que, no caso quase linear, precisamos trabalhar com curvas em  $\mathbb{R}^3$ . Definimos: uma *curva característica* para a EDP

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{*}$$

é uma curva suave que admite uma parametrização

$$C: t \in I \mapsto (\alpha(t), \beta(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

$I$  um intervalo aberto, tal que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= a(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)), \\ \beta'(t) &= b(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)), \\ \eta'(t) &= c(\alpha(t), \beta(t), \eta(t)).\end{aligned}$$

Uma curva suave  $\Gamma: t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t), \xi(t)) \in \mathbb{R}^3$  é dita *regular* para a EDP (\*) se os vetores  $(\sigma'(t), \rho'(t))$  e

$$(a(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)), b(\sigma(t), \rho(t), \xi(t)))$$

nunca são paralelos qualquer que seja  $t \in I$ . Como no caso linear, é possível mostrar que, se  $\Gamma$  for uma curva regular, existirá uma única solução clássica para o problema de Cauchy para a EDP (\*) com condição inicial  $u(\sigma(t), \rho(t)) = \xi(t)$ ,  $t \in I$  em uma região aberta do plano contendo a curva plana  $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ ,  $t \in I$ . A solução é obtida integrando-se ao longo das características (em  $\mathbb{R}^3$ ) que intersectam a curva  $\Gamma$ . Isto corresponde a resolver o sistema

$$\begin{aligned}x_s(s, t) &= a(x(s, t), y(s, t), v(s, t)), \quad x(0, t) = \sigma(t), \\ y_s(s, t) &= b(x(s, t), y(s, t), v(s, t)), \quad y(0, t) = \rho(t), \\ v_s(s, t) &= c(x(s, t), y(s, t), v(s, t)), \quad v(0, t) = \xi(t),\end{aligned}$$

e definir  $u(x, y) = v(s, t)$ . Utilize essas ideias para resolver os problemas a seguir, indicando a região onde a solução é válida.

(i)

$$\begin{aligned}xu_x - yu_y &= u^2 \\ u(x, 1) &= 1, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}uu_x + xu_y &= y \\ u(0, y) &= -y, \quad y > 0\end{aligned}$$

(iii)

$$2yu_x + u_y = 2xyu^2$$

$$u(t, 0) = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

(iv)

$$-yu_x + xu_y = u^2 + 1$$

$$u(x, 0) = -x^2, \quad x > 0$$

(v)

$$uu_x + uu_y = -x - y$$

$$u(t, -t) = 2t, \quad t > 0$$

(vi)

$$x^2u_x + y^2u_y = u^2$$

$$u(t, 2t) = 1, \quad t > 0$$

(vii)

$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = xu$$

$$u(a, a \cos t) = a \operatorname{sen} t, \quad 0 < t < \pi \quad (a \text{ constante}, a > 0)$$

### Seção 3: Solução Geral

1. Ache a solução geral de cada uma das EDPs abaixo:

$$(i) \quad u_y = x^2 + y^2$$

$$(ii) \quad u_x = \operatorname{sen}(x/y)$$

$$(iii) \quad 3u_x - 4u_y = x^2$$

$$(iv) \quad u_x - 3u_y = \operatorname{sen} x + \cos y$$

$$(v) \quad u_x - au_y = e^{mx} \cos(by) \quad (a, m, b \text{ constantes}, m^2 + a^2b^2 \neq 0)$$

$$(vi) \quad yu_x - xu_y = 0$$

(vii)  $u_x - 4u_y + u = x + y + 1$

(viii)  $u_x + xu = x^3 + 3xy$

(ix)  $x^2u_x - xyu_y + yu = y$

(x)  $5u_x + 4u_y + u = x^3 + 1 + 2e^{3y}$

(xi)  $xyu_x - x^2u_y + yu = 0$

(xii)  $(x + \alpha)u_x + (y + \beta)u_y + \gamma u = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes})$

2. Faça a mudança de variável  $\xi = \ln|x|$ ,  $\eta = \ln|y|$  para obter a solução geral de cada uma das EDPs abaixo:

(i)  $2xu_y - yu_y = 0$

(ii)  $2xu_x + 3yu_y = \ln|x|$

(iii)  $xu_x - 7yu_y = x^2y$

(iv)  $8xu_x - 5yu_y + 4u = x^2 \cos x$

(v)  $\alpha xu_x + \beta yu_y + \gamma u = x^2 + y^2 \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes})$

3. (Antes de resolver esses problemas, veja o Exercício 3 da segunda seção.) Para cada uma das EDPs abaixo, encontre as curvas características em  $\mathbb{R}^3$  e, com o auxílio de uma curva regular arbitrária, determine a solução geral.

(i)  $u_x + xu_y = u$

(ii)  $u_x + u_y = u$

(iii)  $x^2u_x + y^2u_y = xu$

(iv)  $xyu_x - yu_y = xy + x - u$

# Capítulo 3

## Equações de Primeira Ordem: Nem Tudo São Flores

O objetivo deste capítulo é mostrar alguns exemplos do que pode acontecer com problemas de Cauchy se o teorema de existência e unicidade falhar ou se a equação não for linear. O capítulo tem três seções: na primeira estudaremos, ainda no caso linear, situações onde o teorema não é válido; na segunda discutiremos a propagação de singularidades; finalmente, na última seção introduziremos as chamadas *ondas de choque*, que aparecem em certo tipo de problema não linear e têm sido objeto de muita pesquisa nas últimas décadas.

### 1 De Volta ao Problema de Cauchy

Definimos, anteriormente, as curvas características planas para a equação

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \quad (1.1)$$

como sendo as curvas  $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$  que têm tangente no ponto  $(\alpha(s), \beta(s))$  paralela ao vetor  $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$  ou, equivalentemente, que satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Quando a curva inicial  $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ ,  $t \in I$ , não é tangente às curvas características planas, vimos que o problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad t \in I, \end{aligned} \tag{1.3}$$

tem uma única solução. E o que acontecerá se a curva inicial  $\gamma$  for uma curva característica plana? Pelos exemplos da primeira seção do Capítulo 2, esperamos que o problema não tenha solução ou tenha uma infinidade de soluções. De fato, é isso o que acontece e o que diferencia um caso do outro é o conceito de curva característica espacial (por isso a nossa ênfase até agora no adjetivo “plana”!): uma *curva característica* para a equação (1.1) é uma curva suave  $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3$  que tem tangente no ponto  $(\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$  paralela ao vetor  $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)), c(\alpha(s), \beta(s)))$ ; equivalentemente,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\xi$  satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)), \\ \xi'(s) &= c(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

No caso em que a curva inicial  $\gamma$  não é tangente às curvas características planas, a superfície solução é gerada pela curva  $\Gamma$ :  $t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t), f(t))$  e pelas curvas características em  $\mathbb{R}^3$  que intersectam  $\Gamma$ . De fato, dada uma característica de (1.1) que intersecta  $\Gamma$  no ponto  $(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0))$ , podemos achar uma parametrização  $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$  dessa curva satisfazendo (1.4) com

$$(\alpha(0), \beta(0), \xi(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)), \tag{1.5}$$

logo a característica plana que passa pelo ponto  $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$  é precisamente  $(x(s, t_0), y(s, t_0)) = (\alpha(s), \beta(s))$  e, portanto, usando a equação (2.15) do segundo capítulo,

$$\begin{aligned} u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(t_0) + \int_0^s c(\alpha(\nu), \beta(\nu)) d\nu \\ &= f(t_0) + \int_0^s \xi'(\nu) d\nu \\ &= f(t_0) + \xi(s) - \xi(0) \\ &= \xi(s) \end{aligned}$$

por (1.5), o que prova que essa característica está na superfície solução. Por outro lado, a superfície solução é parametrizada por

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), v(s, t))$$

e, para cada  $t_0$  fixo, definindo

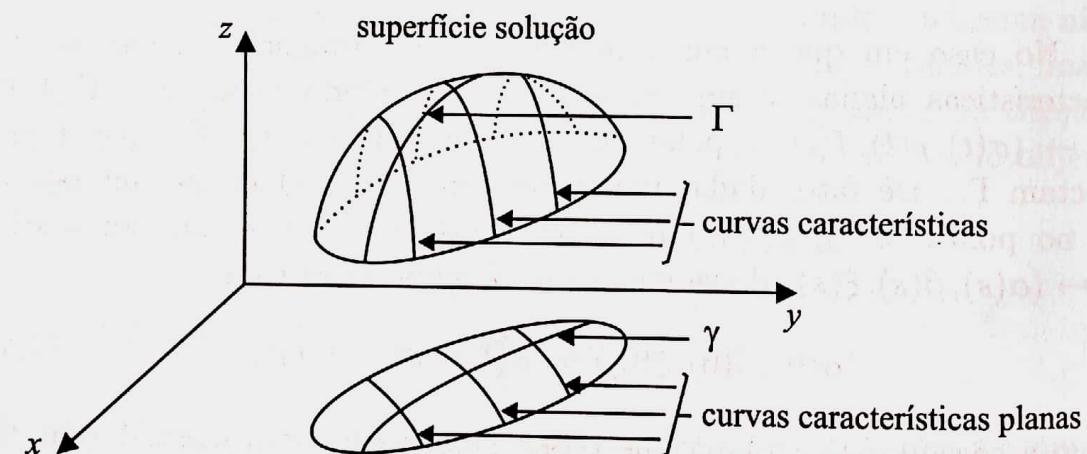
$$\alpha(s) = x(s, t_0),$$

$$\beta(s) = y(s, t_0),$$

$$\xi(s) = v(s, t_0),$$

as equações (2.10) e (2.13) do Capítulo 2 mostram que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\xi$  satisfazem (1.4) e (1.5) e então, para cada  $t_0$  fixo, a curva  $s \mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0), v(s, t_0))$  é uma característica que intersecta  $\Gamma$  em  $s = 0$ , o que prova que a superfície solução é de fato gerada por  $\Gamma$  e pelas curvas características.

Vamos discutir agora o caso em que  $\gamma$  é uma característica plana: mostraremos que se  $\Gamma$  for uma característica, o problema terá uma infinidade de soluções e, se  $\Gamma$  não for uma característica, o problema não terá solução.



**Fig. 7:** A superfície solução é gerada pela curva inicial em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma$ , e pelas curvas características em  $\mathbb{R}^3$ .

Vamos supor primeiro que  $\Gamma$  é uma curva característica para a EDP (1.1). Seja  $\delta$  uma curva plana qualquer que nunca é tangente às características planas e que intersecta  $\gamma$  no ponto  $(\sigma(s_0), \rho(s_0))$ , seja  $t \mapsto (p(t), q(t))$  uma parametrização de  $\delta$  com

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0)) \quad (1.6)$$

e seja  $r$  uma função arbitrária de classe  $C^1$  satisfazendo

$$r(0) = f(s_0). \quad (1.7)$$

Pelo que vimos anteriormente, o problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ u(p(t), q(t)) &= r(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

tem uma única solução  $u$  em uma vizinhança de  $\delta$ ; além disso, a superfície solução contém a curva  $\Delta: t \mapsto (p(t), q(t), r(t))$  e contém todas as características da EDP que intersectam  $\Delta$ ; em particular, a superfície solução contém  $\Gamma$ , pois

$$(p(0), q(0), r(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0), f(s_0)) \in \Delta \cap \Gamma$$

por (1.6) e (1.7). Logo,  $u$  é solução de (1.3). Como existe uma infinidade de escolhas possíveis para a curva  $\delta$  e a função  $r$ , o problema tem uma infinidade de soluções.

Vamos supor agora que  $\gamma$  é uma característica plana, mas  $\Gamma$  não é uma característica para (1.1). Suponha, por absurdo, que o Problema (1.3) tem solução nesse caso: se  $u$  for uma solução, então, qualquer que seja  $t \in I$ , derivando a condição inicial obtemos

$$\sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) = f'(t). \quad (1.9)$$

Por outro lado, a EDP (1.1) no ponto  $(\sigma(t), \rho(t))$  fica

$$a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) = c(\sigma(t), \rho(t)). \quad (1.10)$$

Comparando (1.9) e (1.10) e usando o fato de que os vetores  $(\sigma'(t), \rho'(t))$  e  $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$  são paralelos (pois  $\gamma$  é característica plana), obtemos que os vetores em  $\mathbb{R}^3$

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \text{ e } (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$$

também são paralelos, ou seja,  $\Gamma$  é uma característica, o que contradiz a hipótese. Portanto, o Problema (1.3) não tem solução neste caso.

**Exemplo 1.1.** Considere o problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Neste caso, as características planas são as retas horizontais, logo o problema terá solução se e somente se a curva  $\Gamma: t \mapsto (t, 0, f(t))$  for uma característica, ou seja, se os vetores  $(1, 0, 2t)$  e  $(1, 0, f'(t))$  forem paralelos, o que é equivalente a

$$f'(t) = 2t \Leftrightarrow f(t) = t^2 + c, \quad c \text{ constante.}$$

Logo o problema só terá solução se  $f(x) = x^2 + c$  para alguma constante  $c$ : neste caso, escolhendo a curva  $\delta$  como sendo o eixo dos  $y$  e  $r(y)$  de classe  $C^1$  com

$$r(0) = f(0) = c, \tag{1.12}$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \\ u(0, y) &= r(y) \end{aligned}$$

cuja solução é

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x 2t dt = r(y) + x^2.$$

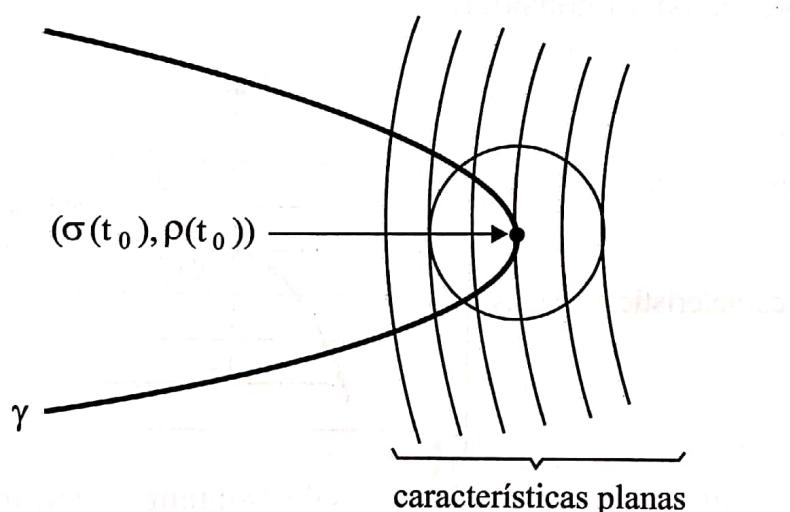
Portanto, no caso em que  $f(x) = x^2 + c$ , o problema tem como solução todas as funções da forma

$$u(x, y) = r(y) + x^2$$

onde  $r$  é de classe  $C^1$  e satisfaz (1.12).

Voltando ao Problema (1.3), o caso em que a curva inicial  $\gamma$  é uma característica plana é um caso extremo. O que acontecerá se a curva  $\gamma$  for tangente a uma característica plana em um determinado ponto? Pode ocorrer, como no Problema (1.9) do Capítulo 2, que, para qualquer vizinhança do ponto onde  $\gamma$  é tangente a uma característica plana, sempre exista uma característica plana que intersecte  $\gamma$  mais de uma vez e outra que não intersecte  $\gamma$  passando por essa vizinhança (veja a Figura 8): a existência de uma característica plana intersectando  $\gamma$  mais de uma

vez obriga o dado inicial  $f$  a satisfazer alguma condição para que exista solução, pois o valor da solução em um dos pontos da interseção determina o valor da solução ao longo de toda a curva característica plana; a existência de uma característica plana que não intersecta  $\gamma$  faz com que a solução, se existir, não seja única, pois o valor da solução ao longo de tais características não está determinado. Pode acontecer também que, mesmo com a tangência, por cada ponto de  $\gamma$  passe exatamente uma característica plana que intersecta  $\gamma$  só neste ponto: isto, de fato, permite integrar ao longo das características planas, embora possamos perder diferenciabilidade. Vamos primeiro ver um exemplo onde tudo funciona.



**Fig. 8:** Em qualquer vizinhança de  $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$  passa uma característica plana que intersecta  $\gamma$  mais de uma vez e outra que não intersecta  $\gamma$ .

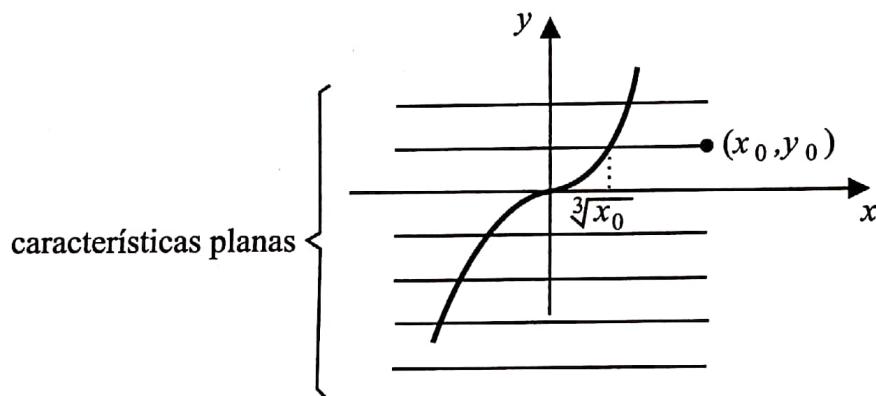
**Exemplo 1.2.** Vamos resolver o problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x^2 \\ u(x, x^3) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Neste caso, as características planas são as retas  $y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , e, embora a curva inicial  $\gamma: t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^3)$  seja tangente à reta  $y = 0$  em  $t = 0$ , cada característica plana intersecta  $\gamma$  em apenas um ponto. Podemos então integrar ao longo das curvas características planas para obter a solução:

$$u(x, y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^x t^2 \, dt + f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(x).$$

Quando desenvolvemos abstratamente o método de integração ao longo das características planas para resolver o Problema (1.3) supondo que a curva inicial  $\gamma$  não é tangente às características planas, usamos este fato para provar que o jacobiano da transformação  $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$  é diferente de zero em uma vizinhança da curva  $\gamma$ . No caso em que permitimos a tangência, o jacobiano se anula no ponto de tangência. Pode ocorrer então que, mesmo no caso em que cada característica plana intercepta  $\gamma$  em exatamente um ponto, a mudança de variável  $(s, t) \mapsto (x, y)$  não seja mais diferenciável e, portanto, a solução encontrada integrando ao longo das características pode não ser de classe  $C^1$ . Uma pequena modificação no Problema (1.13) exemplifica esta situação: basta considerar



**Fig. 9:** Embora a curva inicial  $\gamma$  seja tangente à característica plana  $y = 0$ ,  $\gamma$  intercepta cada característica plana em exatamente um ponto (Exemplo 1.2).

$$\begin{aligned} u_x &= 1 \\ u(x, x^3) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \end{aligned} \tag{1.14}$$

então as características planas são as mesmas e a solução é

$$u(x, y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^x dt + f(x) = x - \sqrt[3]{y} + f(x),$$

que não é diferenciável em  $y = 0$ .

É interessante observar que, antes mesmo de determinarmos a existência ou não de solução para o Problema (1.3), é possível determinar formalmente as derivadas da solução  $u$  (se existir!) em qualquer ponto  $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$  da curva inicial  $\gamma$  onde ela não é paralela às características

planas – não só as derivadas de primeira ordem, mas as de qualquer ordem, supondo, evidentemente, que as funções  $a, b, c, \sigma, \rho$  e  $f$  são infinitamente diferenciáveis. Para calcular as derivadas de primeira ordem, reescreva a EDP no ponto  $(\sigma(t), \rho(t))$  e derive a condição inicial em  $t$  de modo a obter

$$\begin{aligned} a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) &= c(\sigma(t), \rho(t)), \\ \sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) &= f'(t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Como

$$\det \begin{pmatrix} a(\sigma(t_0), \rho(t_0)) & b(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \\ \sigma'(t_0) & \rho'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

por continuidade o determinante é diferente de zero em uma vizinhança de  $t = t_0$  e podemos resolver algebricamente o sistema (1.15) para  $u_x(\sigma(t), \rho(t))$  e  $u_y(\sigma(t), \rho(t))$ . Para obter as derivadas de maior ordem, basta derivar a EDP,  $u_x(\sigma(t), \rho(t))$  e  $u_y(\sigma(t), \rho(t))$ . Por exemplo, para calcular  $u_{xx}$ , derive a EDP em relação a  $x$ :

$$au_{xx} + bu_{yx} = c_x - a_x u_x - b_x u_y,$$

e derive  $u_x(\sigma(t), \rho(t))$  em relação a  $t$  para obter

$$\begin{aligned} a(\sigma(t), \rho(t))u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_{xy}(\sigma(t), \rho(t)) &= F(t) \\ \sigma'(t)u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_{xy}(\sigma(t), \rho(t)) &= G(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde

$$F(t) = (c_x - a_x u_x - b_x u_y)(\sigma(t), \rho(t))$$

e

$$G(t) = \frac{d}{dt}(u_x(\sigma(t), \rho(t)))$$

são funções conhecidas; o sistema (1.16) pode ser resolvido algebricamente para  $u_{xx}(\sigma(t), \rho(t))$  e  $u_{xy}(\sigma(t), \rho(t))$  para  $t$  em uma vizinhança de  $t = t_0$ . Podemos, então, escrever formalmente a solução desenvolvendo em série de Taylor em torno do ponto  $(x_0, y_0) = (\sigma(t_0), \rho(t_0))$ ,

$$u(x, y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (1.17)$$

É natural perguntar quando a série em (1.17) converge e, nos casos de convergência, se a soma da série é solução do Problema (1.3). De fato,

a resposta a essas duas perguntas é positiva se supusermos, além das condições já enunciadas, que as funções  $a, b, c, \sigma, \rho, f$  são analíticas, ou seja,  $a, b$  e  $c$  têm uma expansão em série de Taylor em torno do ponto  $(x_0, y_0)$  e  $\sigma, \rho, f$  admitem uma expansão em série de Taylor em torno do ponto  $t_0$ ; neste caso, a série em (1.17) converge em uma vizinhança  $V$  do ponto  $(x_0, y_0)$ , é solução da EDP em (1.3) em  $V$  e satisfaz a condição inicial em (1.3) para  $t$  em uma vizinhança de  $t_0$ . Esta afirmação é uma das formas mais simples do teorema de Cauchy-Kowalewski e o leitor interessado deve consultar um livro mais avançado de Equações Diferenciais Parciais como, por exemplo, Zachmanoglou e Thoe (1976).

## 2 Propagação de Singularidades

Vamos voltar ao problema

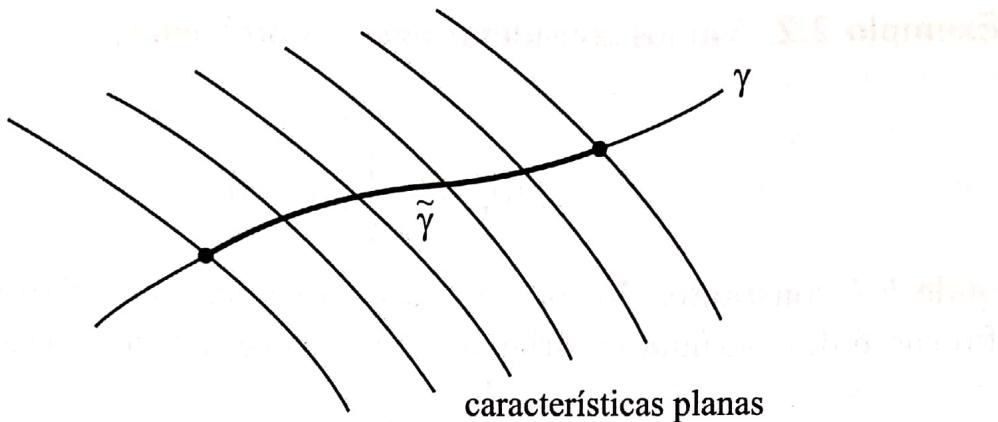
$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad t \in I, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $t \in I$  é um intervalo aberto, a curva plana  $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$  é uma curva suave, as funções  $a, b, c$  são de classe  $C^1$  em algum subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo a curva  $\gamma$  e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada.

No segundo capítulo vimos que, se  $f \in C^1(I)$  e se a curva  $\gamma$  não for tangente às características planas, então o Problema (2.1) terá uma única solução clássica em uma vizinhança da curva  $\gamma$ . A solução no ponto  $(x_0, y_0)$  é obtida integrando-se a equação ao longo da curva característica que passa por  $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$  de  $s = 0$ , que corresponde ao ponto

$$(\sigma(t_0), \rho(t_0)) = (x(0, t_0), y(0, t_0)),$$

até  $s = s_0$ . Portanto, a solução no ponto  $(x_0, y_0)$  depende apenas do dado inicial no ponto  $(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \in \gamma$ ; por esta razão, o ponto  $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$  é chamado o *domínio de dependência* de  $(x_0, y_0)$ . Por razões análogas, a *região de influência* de uma parte  $\tilde{\gamma}$  da curva  $\gamma$  é o conjunto de pontos por onde passam as características planas que intersectam  $\tilde{\gamma}$ .



**Fig. 10:** A região de influência de  $\tilde{\gamma}$  é determinada pelas características planas que intersectam  $\tilde{\gamma}$ .

Se retirarmos a hipótese  $f \in C^1(I)$  mantendo a hipótese sobre  $\gamma$ , podemos proceder da mesma forma, só que não obteremos mais uma solução clássica. Se  $f$  (ou  $f'$ ) tiver uma descontinuidade em  $t_0$ , então  $u$  (ou alguma de suas derivadas) terá descontinuidades ao longo da característica que passa por  $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ . Portanto, *as singularidades são propagadas ao longo das características planas*.

**Exemplo 2.1.** Vamos considerar o problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Como vimos no Exemplo 2.2 do Capítulo 2, as características planas são círculos centrados na origem e a solução do Problema (2.2) é dada por

$$u(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 1 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Note que  $u \in C(\mathbb{R}^2)$ , mas  $u$  não é diferenciável no círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $u$  satisfaz a equação diferencial no interior e no exterior deste círculo, que é precisamente a característica plana contendo  $(1, 0)$ .

**Exemplo 2.2.** Vamos considerar agora o problema

$$\begin{aligned} u_x + bu_y &= 0, \\ u(0, y) &= \frac{1}{y}, \quad y \neq 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $b$  é constante. Neste caso, a curva inicial é o eixo dos  $y$ , mas a função é descontínua na origem. Como as características são as retas

$$y = bx + c$$

onde  $c$  é constante, a solução de (2.3) não estará definida ao longo da reta  $y = bx$ : de fato,

$$u(x, y) = \frac{1}{y - bx}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ com } y \neq bx,$$

é solução de (2.3), no sentido que  $u$  satisfaz a EDP fora da reta  $y = bx$ .

A situação no caso não linear, tanto no que se refere à propagação de singularidades quanto ao comportamento da solução, é bastante diferente. Para ter uma ideia do que pode acontecer, vamos considerar equações não lineares da forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

onde  $f$  é uma função de classe  $C^2$  dada. Observe que a Equação (2.4) pode ser escrita na forma

$$u_t + b(u)u_x = 0, \tag{2.5}$$

onde

$$b(u) = f'(u). \tag{2.6}$$

Equações do tipo (2.4) aparecem no estudo de fenômenos ondulatórios (sem efeitos dissipativos) não lineares, como, por exemplo, em dinâmica dos gases. O que corresponde às características planas neste caso são as curvas no plano  $xt$  satisfazendo

$$\frac{dx}{dt} = b(u) \tag{2.7}$$

onde  $u = u(x(t), t)$ . Ao longo de tais curvas  $u$  é constante, pois

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + b(u)u_x = 0,$$

logo as curvas definidas por (2.7) são, de fato, retas. É claro que estas retas não podem ser determinadas *a priori*, uma vez que a Equação (2.7) envolve o valor (desconhecido) de  $u$  ao longo da curva. Podemos, no entanto, usar estas curvas para achar a solução de (2.4) satisfazendo uma determinada condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

A ideia aqui, como no caso linear, é construir a solução utilizando as “características planas” que intersectam a curva inicial plana  $t = 0$ . Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u$  é constante e igual a  $u_0(x_0)$  ao longo da reta contendo o ponto  $(x_0, 0)$  e satisfazendo (2.7), ou seja,

$$u = u_0(x_0) \quad (2.9)$$

ao longo da reta

$$x = b(u_0(x_0))t + x_0. \quad (2.10)$$

Chamaremos de *características planas* para os Problemas (2.5), (2.8) as retas (2.10). Baseados no caso linear, esperamos que as Equações (2.9) e (2.10) determinem a solução do problema. Isto ocorre, de fato, em uma faixa  $t \in (0, T)$  mas, ao contrário do caso linear, as características planas podem se intersectar.

**Exemplo 2.3.** Considere o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

A equação em (2.11) é a equação de Burger sem viscosidade (compare com a equação (1.12) do primeiro capítulo) e é da forma (2.4) com  $f(u) = u^2/2$ . Neste caso, as retas (2.10) se intersectam para  $t \geq 1$ , de modo que a solução dada por (2.9), (2.10) só é válida para  $t < 1$ . As características planas para o Problema (2.11) são dadas por

$$x = \begin{cases} t + x_0 & \text{se } x_0 < 0, \\ (1 - x_0)t + x_0 & \text{se } 0 \leq x_0 \leq 1, \\ x_0 & \text{se } x_0 > 1. \end{cases}$$

Se  $x < t < 1$ , então  $x = t + x_0$  para algum  $x_0 < 0$  e, portanto,  $u = u_0(x_0) = 1$ ; se  $t < x < 1$ ,  $x = (1 - x_0)t + x_0$  para algum  $x_0 \in [0, 1]$ , logo

$$u = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t};$$

finalmente, se  $t < 1 < x$ , então  $u = u_0(x) = 0$ . Concluímos que a solução do Problema (2.11), definida para  $0 \leq t < 1$ , é

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t < 1, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t \leq x < 1, \\ 0 & \text{se } t < 1 \leq x. \end{cases} \quad (2.12)$$

Observe que a função  $u$  definida por (2.12) não é uma solução clássica, pois  $u \notin C^1(\mathbb{R} \times (0, 1))$ : as derivadas parciais de  $u$  não estão definidas ao longo dos segmentos de reta  $\{(t, t) : 0 \leq t < 1\}$  e  $\{(1, t) : 0 \leq t < 1\}$ . Isto era de se esperar, já que essas são as características planas contendo  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , respectivamente, e a condição inicial não é diferenciável em  $x = 0$  e  $x = 1$ . Fora desses segmentos de reta, é claro que  $u$  satisfaz a EDP em (2.11); note também que  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, 1])$  e satisfaz a condição inicial em (2.11).

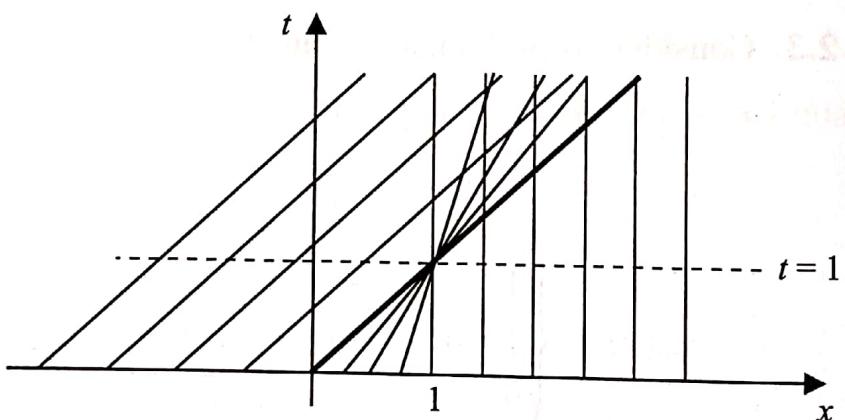


Fig. 11: Características planas para o Problema (2.11).

Em relação à propagação de singularidades, a situação no caso não linear é também muito diferente.

**Exemplo 2.4.** Vamos considerar novamente a equação de Burger, mas com uma condição inicial diferente,

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

A função

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, t \geq 0, \\ x/t & \text{se } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{se } x > t \geq 0, \end{cases}$$

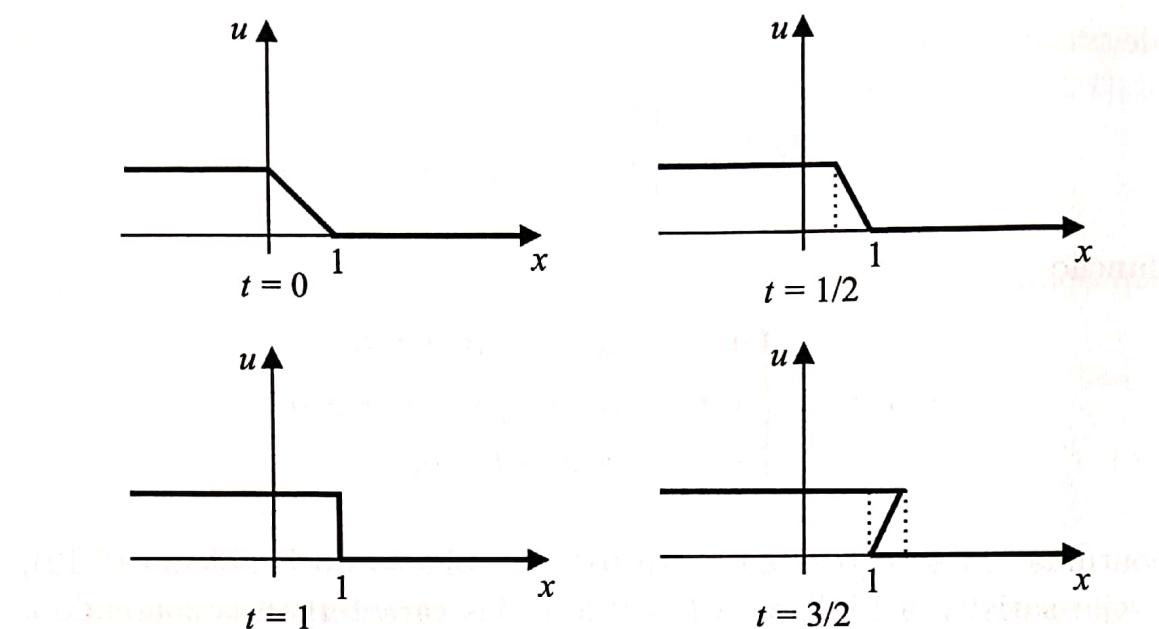
é contínua em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0, 0)\}$  e é solução do Problema (2.13), ou seja, satisfaz a EDP para  $t > 0$  fora das características contendo a origem e satisfaz a condição inicial.

Este exemplo mostra que podemos ter uma solução *contínua* para  $t > 0$  embora a condição inicial ( $t = 0$ ) seja *descontínua*: a descontinuidade da condição inicial não é “carregada” pelas características planas. No exemplo acima, apenas as derivadas são descontínuas ao longo das características planas contendo a origem. Este é, evidentemente, um fenômeno puramente não linear.

### 3 Ondas de Choque

Vamos voltar ao Exemplo 2.3: note que não é possível achar uma *solução global*, ou seja, definida para todo  $t > 0$ , que seja contínua no ponto  $(1, 1)$ , uma vez que  $u \equiv 1$  na região  $x < t < 1$  e  $u \equiv 0$  na região  $t < 1 \leq x$ ; além disso, mesmo admitindo soluções descontínuas (por exemplo, funções que são descontínuas ao longo de uma curva suave e que satisfazem a EDP fora dessa curva), não saberíamos como determinar a solução na região  $1 < x < t$ , uma vez que cada ponto nesta região está em exatamente três características planas (veja a Figura 11).

Ainda em relação ao Problema (2.11), note que as Equações (2.9) e (2.10), neste caso, determinam uma superfície (que não é o gráfico de uma função de  $x$  e  $t$ ) no espaço  $xtu$ , parametrizada por  $x_0$  e  $t$ . A Figura 12 mostra a projeção das curvas  $s \mapsto (x(s, t_0), t_0, u(s, t_0))$  no plano  $xu$  para diferentes valores de  $t_0$ . Observe como a curva “quebra” em  $t = 1$ .



**Fig. 12:** Projeção das curvas  $s \mapsto (x(s, t), t, u(s, t))$  no plano  $xu$  para diferentes valores de  $t$ .

O Exemplo 2.3 é típico do que acontece quando as características planas se intersectam. Note que, quando  $x_1 < x_2$ , as características planas contendo  $(x_1, 0)$  e  $(x_2, 0)$  são dadas, respectivamente, por (veja a Equação (2.10))

$$\begin{aligned} l_1 : x &= b(u_0(x_1))t + x_1, \\ l_2 : x &= b(u_0(x_2))t + x_2, \end{aligned}$$

logo  $l_1$  e  $l_2$  têm um ponto  $P$  em comum se e somente se

$$b(u_0(x_1)) > b(u_0(x_2)).$$

Neste caso, se  $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$ , uma solução global será necessariamente descontínua em  $P = (x_0, t_0)$ , pois, quando  $t \rightarrow t_0^-$  ao longo de  $l_1$ ,  $u \rightarrow u_0(x_1)$ , enquanto que  $u \rightarrow u_0(x_2)$  quando  $t \rightarrow t_0^-$  ao longo de  $l_2$ ; dizemos então que uma *onda de choque* é formada em  $t = t_0$ . Soluções descontínuas fazem sentido do ponto de vista físico: experiências com fluidos compressíveis mostram o aparecimento de descontinuidades na solução. Procuraremos então funções  $u$  que sejam descontínuas ao longo de uma curva  $x = g(t)$ ,  $t \geq t_0$ , e que satisfaçam a EDP fora desta curva.

Note que, se a função  $b(u_0(x))$  for uma função monótona não decrescente de  $x$ , as características nunca se encontrarão, pois, neste caso,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b(u_0(x_1)) \leq b(u_0(x_2)).$$

Do ponto de vista analítico, isto significa que  $b(u_0(x))$  tem derivada sempre maior ou igual a zero e, portanto, as Equações (2.9) e (2.10) determinam a solução para todo  $t > 0$ : de fato, a transformação

$$\begin{aligned}x &= b(u_0(x_0)s + x_0) \\t &= x\end{aligned}$$

define uma mudança de variável, uma vez que seu jacobiano nunca se anula.

Voltando ao Problema (2.11), precisamos enfraquecer o conceito de solução, aceitando soluções descontínuas, e descobrir, analisando o problema físico, como definir a solução na região  $1 < x < t$ . De fato, equações do tipo (2.4) são derivadas de leis de conservação integrais da forma

$$\frac{d}{dt} \int_G u dx = - \int_{\partial G} f \cdot n ds, \quad (3.1)$$

onde  $G$  é uma região do espaço,  $u$  mede a densidade da entidade física em discussão,  $f$  descreve o fluxo e  $n$  é a normal exterior ao bordo  $\partial G$  de  $G$ . A Equação (3.1) diz que a taxa de variação da quantidade total de entidade física contida em uma região  $G$  é igual ao fluxo atravessando o bordo de  $G$ . No caso unidimensional,  $G$  é um intervalo e a Equação (3.1) fica

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(a, t, u(a, t)) - f(b, t, u(b, t)). \quad (3.2)$$

Observe que, derivando debaixo do sinal de integral, dividindo por  $(b-a)$  e fazendo o intervalo  $[a, b]$  tender a um ponto, obtemos a equação

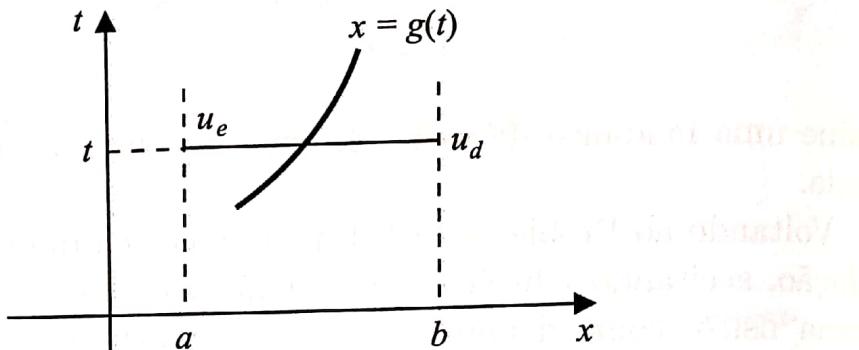
$$u_t + f_x = 0$$

que coincide com a Equação (2.4) se  $f = f(u)$ . Portanto, a solução que faz sentido do ponto de vista físico é a que satisfaz (3.2).

Voltando à Equação (2.4), vamos procurar uma solução  $u = u(x, t)$  satisfazendo (2.8) e que não está definida ao longo de uma curva suave  $x = g(t)$ ,  $t \geq t_0$ , onde  $t_0 > 0$  é o menor valor de  $t$  para o qual há intersecção de características. Vamos supor que  $u$  dá um “salto” ao longo de  $x = g(t)$ ,  $t > 0$ , que  $t_0 \leq t \leq T$  e vamos escolher  $a < b$  de modo que a porção de curva  $x = g(t)$  para  $t_0 \leq t \leq T$  esteja contida na faixa

$a < x < b$  do plano  $xt$  (veja a Figura 13). Com esta notação, vamos definir

$$I(t) = \int_a^b u(x, t) dx. \quad (3.3)$$



**Fig. 13:** Os extremos do intervalo,  $a$  e  $b$ , são escolhidos de modo que a curva  $t \in [t_0, T] \mapsto (g(t), t)$  esteja contida em  $(a, b) \times [t_0, T]$ .

Então, de (3.2),

$$\frac{dI}{dt} = f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \quad (3.4)$$

Por outro lado, se denotarmos por  $u_e$  e  $u_d$ , respectivamente, as soluções à esquerda e à direita da curva  $x = g(t)$ , então a Equação (3.3) pode ser reescrita como

$$I(t) = \int_a^{g(t)} u_e(x, t) dx + \int_{g(t)}^b u_d(x, t) dx.$$

Por hipótese,  $u_e$  e  $u_d$  têm limites laterais quando  $x \rightarrow g(t)^-$  e  $x \rightarrow g(t)^+$ , respectivamente, logo, derivando diretamente,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= g'(t)u_e(g(t), t) + \int_a^{g(t)} \partial_t u_e(x, t) dx - g'(t)u_d(g(t), t) \\ &\quad + \int_{g(t)}^b \partial_t u_d(x, t) dx \\ &= g'(t)\{u_e(g(t), t) - u_d(g(t), t)\} - \int_a^{g(t)} \partial_x(f(u_e(x, t))) dx \\ &\quad - \int_{g(t)}^b \partial_x(f(u_d(x, t))) dx \\ &= g'(t)\{u_e(g(t), t) - u_d(g(t), t)\} - f(u_e(g(t), t)) + f(u_e(a, t)) \\ &\quad - f(u_d(b, t)) + f(u_d(g(t), t)). \end{aligned}$$

Comparando com (3.4), obtemos

$$g'(t)(u_d(g(t), t) - u_e(g(t), t)) = f(u_d(g(t), t)) - f(u_e(g(t), t))$$

ou seja

$$s[u] = [f], \quad (3.5)$$

onde  $s = g'(t)$ ,

$$[u] = u_d(g(t), t) - u_e(g(t), t)$$

é o “salto” que  $u$  dá ao cruzar a curva  $x = g(t)$  e

$$[f] = f(u_d(g(t), t)) - f(u_e(g(t), t))$$

é o “salto” que  $f(u)$  dá ao cruzar a curva  $x = g(t)$ . A Equação (3.5) é chamada de *condição de salto*.

**Exemplo 3.1.** Vamos aplicar estas ideias para achar uma solução global para o Problema (2.11): como  $u \equiv 1$  para  $x < t < 1$  e  $u \equiv 0$  para  $x > \max\{1, t\}$ , é natural buscar uma solução com  $u_e \equiv 1$  e  $u_d \equiv 0$  para  $t > 1$ , logo  $[u] = -1$ ,  $[f] = -1/2$ ,  $s = 1/2$  e

$$g(t) = t/2 + c.$$

Por outro lado, a descontinuidade deve começar no ponto  $(1, 1)$ , logo a curva suave  $x = g(t)$ ,  $t \geq 1$ , deve ser a semireta  $2x = t + 1$ ,  $t \geq 1$  e a solução global desejada é

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t < 1 \text{ ou } x < \frac{1+t}{2}, t \geq 1, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t \leq x < 1, \\ 0 & \text{se } t < 1 \leq x \text{ ou } x > \frac{1+t}{2} \geq 1. \end{cases}$$

A Figura 14 mostra as descontinuidades de  $u$ :  $u$  é descontínua ao longo da semireta  $2x = t + 1$ ,  $t \geq 1$  e as derivadas de primeira ordem de  $u$  são descontínuas (além, é claro, da semireta acima) nos segmentos de reta  $x = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$  e  $x = 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

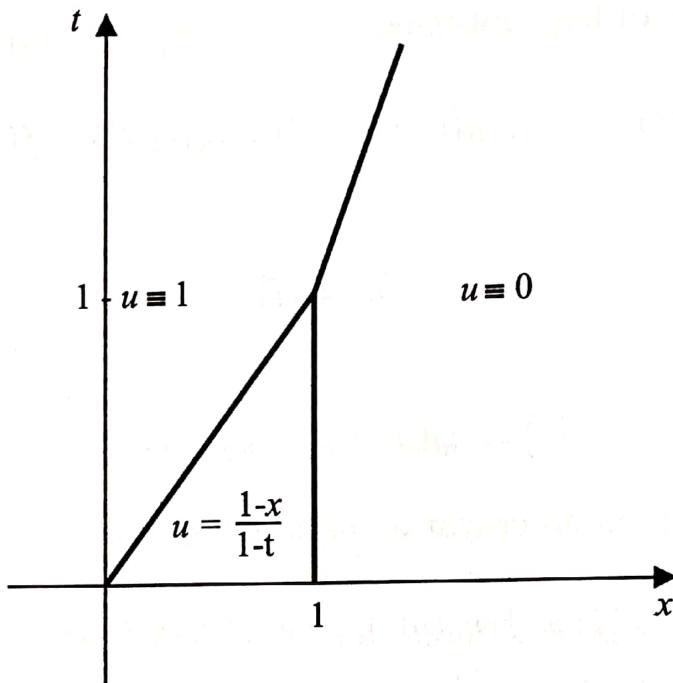


Fig. 14: Solução global do Problema (2.11).

Estendendo o conceito de solução, tornamos possível resolver problemas de valor inicial do tipo (2.4), (2.8) que não têm soluções globais clássicas. Ao mesmo tempo, existe o perigo de termos aumentado demais a classe de possíveis soluções, perdendo a unicidade. De fato, o Exemplo 2.4 mostra que isso pode acontecer: as características planas não se intersectam e existe solução clássica para  $t > 0$ , mas que não está determinada na região  $0 \leq x \leq t$  (veja a Figura 15). Procedendo como no Exemplo 3.1, vemos que a função

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < t/2 \\ 1 & \text{se } x > t/2 \end{cases}$$

satisfaz a condição de salto (3.5) e é solução de (2.13) no sentido que satisfaz a EDP para  $t > 0$  fora da reta  $x = t/2$  e, evidentemente, satisfaz a condição inicial. Por outro lado, a função

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, t \geq 0, \\ x/t & \text{se } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{se } x > t \geq 0 \end{cases}$$

é contínua em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty) - \{(0, 0)\}$  (logo, em particular, satisfaz a condição de salto (3.5) com  $[u] = [f] = 0$ ) e satisfaz a EDP para  $t > 0$

fora das características contendo a origem. Apenas uma dessas funções tem significado físico, o problema é saber qual delas.

A solução  $u_1$  no exemplo acima pode ser descartada se introduzirmos o seguinte critério:

**Hipótese 3.2.** *Dado  $(x, t)$ , com  $t > t_0$ , fora da curva de descontinuidade, existe uma característica plana contendo  $(x, t)$  que é intersectada pela curva de descontinuidade em um instante  $t_1 > t$ .*

Da Figura 15, é evidente que não existe nenhuma curva na região  $0 < x < t$  que satisfaça a Hipótese 3.2, logo a solução global que procuramos para o Problema (2.13) tem que ser contínua.

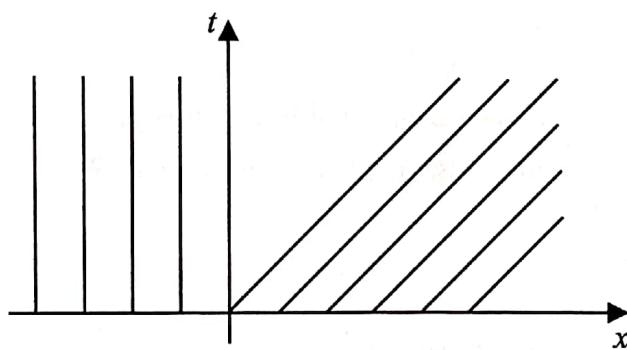


Fig. 15: Características planas para o Problema (2.13).

O significado da Hipótese 3.2 talvez fique mais claro analisando o Exemplo 3.1: comparando as Figuras 11 e 14, vemos que existem três características planas contendo um ponto  $(x_1, t_1)$  na região  $1 < x < t$ , mas apenas uma delas intersecta a curva de descontinuidade  $2x = t + 1$ ,  $t \geq 1$ , em um instante  $t > t_1$  (se  $2x_1 \neq t_1 + 1$ , é claro). Isto significa que, com a Hipótese 3.2,  $u_e$  e  $u_d$  estão determinadas pela condição inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

Observe que, se

$$b(u_e(x_1, t)) > g'(t) > b(u_d(x_2, t)) \quad (3.6)$$

sempre que  $x_1 < g(t) < x_2$ ,  $t > t_0$ , então a Hipótese 3.2 será satisfeita.

Do ponto de vista físico, a Hipótese 3.2 pode ser justificada através da teoria de entropia. Para maiores detalhes o leitor deve consultar (SMOLLER, 1983, parágrafo B do Capítulo 15); veja também o excelente artigo de Peter Lax (1972) e (WHITHAM, 1974).

## 4 Exercícios

### Seção 1: De Volta ao Problema de Cauchy

Discuta a existência e unicidade para os problemas a seguir e encontre todas as soluções (quando existirem).

1.

$$3u_x - 4u_y = x^2,$$

$$u(3t, -4t) = t^3 + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.

$$2u_x - 3u_y = \operatorname{sen} x + \cos y,$$

$$u(t, -3t + 1) = -\cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.

$$5u_x + 4u_y = 0,$$

$$u(5t, e^{4t} - 1) = 4t - e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.

$$u_x - au_y = 0, \quad (a \text{ constante})$$

$$u(x, ae^{-x}) = x + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.

$$u_x - au_y = e^{mx} \cos(by) \quad (a, b, m \text{ constantes não nulas}),$$

$$u(2t + 1, t^2 - 2at + a^2) = f(t)$$

6.

$$u_x - au_y = \cos(by) \quad (a, b \text{ constantes não nulas}),$$

$$u(2t + 1, t^2 - 2at + a^2) = \frac{1}{ab} \operatorname{sen}(2abt) \cos(b(t^2 + a^2))$$

7.

$$\begin{aligned}x^2u_x + y^2u_y &= x^3 + y^3 \\u(t, -t) &= t, \quad t > 0\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}u_x + xu_y &= x^3 + 3xy \\u(x, x^2) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}u_x + xu_y &= x^3 + 3xy \\u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}x^2u_x - xyu_y &= x^2 + y^2 \\u\left(t, \frac{1}{t}\right) &= t - \frac{1}{3t^3}, \quad t > 0\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}xu_x + yu_y &= x + y, \\u(t, -t) &= 1, \quad t < 0.\end{aligned}$$

## Seção 2: Propagação de Singularidades

1. Encontre as curvas planas ao longo das quais a solução  $u$  é descontínua, sabendo que o único ponto de descontinuidade da função  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é  $t = 1$ .

(i)

$$\begin{aligned}3u_x - 4u_y &= x^2 \\u(4t, 3t) &= p(t), \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} 5u_x + 4u_y &= x^3 + 1 + 2e^{3y} \\ u(4t, -5t + 1) &= p(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x^2u_x + y^2u_y &= x^3 \\ u(t, 1) &= p(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} u_x + xu_y &= x^3 + 3xy \\ u(0, t) &= p(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} x^2u_x - xyu_y &= 2x^3 + x^2y \\ u(t, t+1) &= p(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} u_x - yu_y \cos x &= \cos x + y \\ u(\pi/2, t/\pi) &= p(t), \quad t \in (0, 1) \end{aligned}$$

**2.** Encontre as características planas para cada um dos problemas a seguir.

(i)

$$\begin{aligned} u_t - uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= -x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1, \\ -|x| + 1 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{aligned} u_t + u^2 u_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

3. Encontre uma solução  $u = u(x, t)$  em  $C^1(\mathbb{R} \times (0, 1)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, 1))$  do problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, 1) \\ u(x, 0) &= -x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O que acontece quando  $t \rightarrow 1^-$ ?

4. Encontre uma solução  $u = u(x, t)$  em  $C^1(\mathbb{R} \times (0, 1)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, 1))$  do problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1, \\ -|x| + 1 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

O que acontece quando  $(x, t) \rightarrow (1, 1)$ ?

### Seção 3: Ondas de Choque

1. Encontre uma solução global do problema

$$\begin{aligned} u_t + u^2 u_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

satisfazendo a condição de salto (3.5) e a Hipótese 3.2.

**2.** Encontre uma solução global do problema

$$u_t - uu_x = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

satisfazendo a condição de salto (3.5) e a Hipótese 3.2.

**3.** Encontre uma solução global do problema

$$u_t + u^3 u_x = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

satisfazendo a condição de salto (3.5) e a Hipótese 3.2.

**4.** Encontre uma solução global do problema

$$u_t + u^n u_x = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

satisfazendo a condição de salto (3.5) e a Hipótese 3.2.

# Capítulo 4

## Equações Semilineares de Segunda Ordem

Neste capítulo, classificaremos as equações semilineares de segunda ordem e definiremos suas curvas características e suas formas canônicas.

### 1 Classificação

Em Geometria Analítica, o estudo das curvas definidas por equações do segundo grau em  $x$  e  $y$  é simplificado pela redução da equação à sua forma normal. Através de uma transformação afim que leva as variáveis  $x$ ,  $y$  em novas variáveis  $\xi$ ,  $\eta$ , a equação pode ser escrita na forma canônica de uma parábola, hipérbole ou elipse (ou uma forma degenerada dessas curvas) em termos das novas variáveis  $\xi$ ,  $\eta$ . O sistema  $\xi\eta$  de coordenadas é o sistema de coordenadas em relação ao qual a curva tem sua representação algébrica mais simples e natural. Nesta seção, usaremos estas ideias para classificar as EDPs semilineares de segunda ordem com duas variáveis independentes.

Como vimos no primeiro capítulo, uma EDP semilinear de segunda ordem com duas variáveis independentes é da forma

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1.1)$$

e a parte principal da equação (1.1) é o operador

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}. \quad (1.2)$$

Em analogia com o caso das cônicas, definiremos o tipo da Equação (1.1) analisando sua parte principal.

Vamos supor que as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  são contínuas em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e não se anulam simultaneamente. O *discriminante* da equação (1.1) é a função  $\delta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y). \quad (1.3)$$

**Definição 1.1.** O operador diferencial  $L$  dado por (1.2) e a EDP (1.1) são ditos

- (i) *parabólicos* no ponto  $(x, y) \in \Omega$  se  $\delta(x, y) = 0$ ;
- (ii) *hiperbólicos* no ponto  $(x, y) \in \Omega$  se  $\delta(x, y) > 0$ ;
- (iii) *elípticos* no ponto  $(x, y) \in \Omega$  se  $\delta(x, y) < 0$ .

O operador  $L$  e a EDP (1.1) são ditos *parabólicos* (respectivamente *hiperbólicos*, *elípticos*) em  $\Omega$  se forem parabólicos (respectivamente hiperbólicos, elípticos) em todos os pontos de  $\Omega$ .

Em geral, a Equação (1.1) pode mudar de tipo no domínio de definição de seus coeficientes: neste caso, diremos que a EDP (assim como o operador associado) é de *tipo misto*. É claro que isso não ocorre quando os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes.

Dentre as equações que vimos no primeiro capítulo, as equações de Burger e do calor são parabólicas, as equações de Sine-Gordon e a da onda são hiperbólicas e as equações de Poisson e Laplace são elípticas no plano inteiro. A *equação de Tricomi*,

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.4)$$

é de tipo misto: é elíptica no semiplano  $y > 0$ , parabólica no eixos dos  $x$  e hiperbólica no semiplano  $y < 0$ .

Uma propriedade fundamental é que o tipo de uma EDP é invariante sob mudanças de variáveis “bem comportadas”. Para demonstrar isso, suponha que  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  são funções com derivadas até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto  $(x_0, y_0) \in \Omega$  com jacobiano

$$J(x, y) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

e suponha que  $J(x_0, y_0) \neq 0$ . Então, por continuidade, o jacobiano não se anula em uma vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$  e, pelo teorema da função inversa (veja um livro de Cálculo Avançado, como, por exemplo, (FULKS, 1961)), podemos resolver localmente  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  em uma vizinhança do ponto  $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$  e as funções  $x$  e  $y$  são de classe  $C^2$  nesta vizinhança. Definindo então  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$  obtemos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_{\xi\xi_{xx}} + v_{\eta\eta_{xx}}, \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_{\xi\xi_{xy}} + v_{\eta\eta_{xy}}, \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_{\xi\xi_{yy}} + v_{\eta\eta_{yy}}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $u$  for uma solução clássica da Equação (1.1), então  $v$  será uma solução clássica da equação

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (1.5)$$

onde

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= a(x, y)(\xi_x)^2 + 2b(x, y)\xi_x\xi_y + c(x, y)(\xi_y)^2, \\ B(\xi, \eta) &= a(x, y)\xi_x\eta_x + b(x, y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c(x, y)\xi_y\eta_y, \\ C(\xi, \eta) &= a(x, y)(\eta_x)^2 + 2b(x, y)\eta_x\eta_y + c(x, y)(\eta_y)^2. \end{aligned}$$

Calculando o discriminante da Equação (1.5), obtemos

$$\Delta(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) = \delta(x, y)J(x, y)^2,$$

onde

$$\delta(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$$

é o discriminante da Equação (1.1). Como o jacobiano nunca se anula em uma vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$ , o sinal de  $\Delta(\xi_0, \eta_0)$  é igual ao sinal de  $\delta(x_0, y_0)$ . Em outras palavras, a Equação (1.1) será parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em  $(x_0, y_0)$  se e somente se a Equação (1.5) for parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em  $(\xi_0, \eta_0)$ .

Outra característica importante na classificação em tipos é a existência ou não de curvas características: definimos, no Capítulo 2, características planas para equações de primeira ordem; para equações de

segunda ordem, características são curvas planas ao longo das quais a EDP pode ser escrita em uma forma contendo apenas derivadas totais de  $u_x$  e  $u_y$ . Curvas características são muito importantes no estudo de equações hiperbólicas; equações elípticas não têm curvas características.

Para entender o que está acontecendo, vamos procurar curvas características para a Equação (1.1). Como estamos supondo que a equação é de segunda ordem, os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente na região de interesse; para simplificar, vamos supor que  $a$  nunca se anula na região  $\Omega$ ; o caso em que  $a$  se anula pode ser tratado de forma análoga. Em primeiro lugar, a EDP (1.1) é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} p &= u_x, \\ q &= u_y, \\ a(x, y)p_x + 2b(x, y)p_y + c(x, y)q_y &= f(x, y, u, p, q). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como  $u$  é de classe  $C^2$ , podemos eliminar  $u$  das duas primeiras equações em (1.7): derivando a primeira em relação a  $y$ , a segunda em relação a  $x$  e subtraindo, obtemos

$$p_y - q_x = 0. \tag{1.8}$$

Multiplicando a Equação (1.8) por uma função arbitrária  $\lambda = \lambda(x, y) \neq 0$  e somando à última equação do sistema (1.7) chegamos à equação

$$ap_x + 2bp_y + \lambda p_y - \lambda q_x + cq_y = 0. \tag{1.9}$$

Por outro lado, a derivada em relação a  $x$  de uma função  $\omega(x, y)$  ao longo da curva  $y = y(x)$  no plano  $xy$  é dada por

$$\frac{d}{dx}(\omega(x, y(x))) = \omega_x + \omega_y \frac{dy}{dx}. \tag{1.10}$$

Portanto, escrevendo (1.9) na forma

$$a \frac{dP}{dx} - \lambda \frac{dQ}{dx} = 0, \tag{1.11}$$

onde  $P(x) = p(x, y(x))$  e  $Q(x) = q(x, y(x))$ , obtemos

$$\begin{aligned} p_x + p_y \frac{dy}{dx} &= p_x + \frac{2b + \lambda}{a} p_y \\ q_x + q_y \frac{dy}{dx} &= q_x - \frac{c}{\lambda} q_y \end{aligned}$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b + \lambda}{a} = -\frac{c}{\lambda} \quad (1.12)$$

e  $\lambda$  tem que satisfazer a equação

$$\lambda^2 + 2b\lambda + ac = 0. \quad (1.13)$$

Então, se

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x, y), \quad (1.14)$$

comparando com (1.12) e (1.13), vemos que  $\mu$  satisfaz

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0. \quad (1.15)$$

Portanto, o sinal do discriminante  $\delta = b^2 - ac$  determina se existem duas, uma ou nenhuma solução real  $\mu = \mu(x, y)$  da Equação (1.15). Concluímos que: no caso hiperbólico ( $\delta > 0$ ) existem duas famílias de curvas reais satisfazendo (1.14) com  $\mu$  solução de (1.15); no caso parabólico ( $\delta = 0$ ) existe apenas uma família, enquanto que no caso elíptico ( $\delta < 0$ ) não existe nenhuma. As curvas definidas por (1.14) com  $\mu$  solução de (1.15), quando existem, são denominadas *curvas características* da Equação (1.1).

**Exemplo 1.2.** Vamos achar as curvas características para a equação de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (1.16)$$

onde  $c > 0$  é constante. Como observamos anteriormente, a Equação (1.16) é hiperbólica no plano inteiro, portanto tem duas famílias de curvas características. Escrevendo a equação na forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

temos  $a(t, x) = 1$ ,  $b(t, x) = 0$  e  $c(t, x) = -c^2$ , logo a Equação (1.15) fica

$$\mu^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm c.$$

Obtemos então

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x = \pm ct + k$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária. Logo as características são as famílias de retas  $x + ct = k_1$  e  $x - ct = k_2$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes.

**Exemplo 1.3.** Vamos achar as curvas características para a equação de Tricomi (1.4) no semiplano  $y < 0$ . A Equação (1.15) neste caso é

$$y\mu^2 + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{-\frac{1}{y}};$$

a Equação (1.14) então fica

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{1}{y}} \Rightarrow \sqrt{-y} dy = \pm dx \Rightarrow (-y)^{3/2} = \pm \frac{3}{2} x + c,$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. Logo as curvas características são

$$y = - \left( \pm \frac{3x}{2} + c \right)^{2/3}.$$

**Exemplo 1.4.** Vamos agora achar as curvas características para a equação do calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (1.17)$$

onde  $\alpha > 0$  é constante. Como a Equação (1.17) é parabólica no plano inteiro, existe apenas uma família de curvas características: de fato, como  $b = c = 0$ , a Equação (1.15) tem como única solução  $\mu = 0$  e, portanto, as curvas características são as retas  $y = c$ ,  $c$  uma constante arbitrária.

## 2 Formas Canônicas e Curvas Características

Como no caso de cônicas do segundo grau, se a EDP (1.1) for do mesmo tipo em um aberto em  $\mathbb{R}^2$ , poderemos achar uma mudança de variável que a coloque em uma forma particularmente simples, a chamada *forma canônica* ou *normal*. A *forma normal* de uma equação elíptica é

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta), \quad (2.1)$$

a de uma equação parabólica é

$$v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (2.2)$$

e uma equação hiperbólica tem duas formas canônicas:

$$v_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (2.3)$$

ou

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \quad (2.4)$$

O caso hiperbólico tem mais de uma forma canônica porque, embora a equação (2.3) seja normalmente mais simples de resolver, a forma (2.4) é a que generaliza para dimensões maiores.

Para encontrar tal mudança de variáveis, é preciso uma certa suavidade dos coeficientes da parte principal. Além disso, a mudança de variável é local, mesmo porque a EDP pode mudar de tipo na região  $\Omega$ . É claro que, se a EDP (1.1) for hiperbólica ou elíptica em um ponto  $(x_0, y_0)$ , como o discriminante é contínuo, a equação será hiperbólica ou elíptica, respectivamente, em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Entretanto, isto não ocorre no caso parabólico: por exemplo, a equação de Tricomi é parabólica apenas no eixo dos  $x$ . Por esta razão, precisamos supor que a equação é do mesmo tipo em um aberto.

Vamos começar discutindo o caso hiperbólico, que é mais simples. Vamos supor que os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da Equação (1.1) têm derivadas contínuas em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  onde a equação é hiperbólica e que  $a$  não se anula em  $\Omega$ . Neste caso, temos duas famílias de curvas características  $y_1$  e  $y_2$  com

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \mu_1, & \frac{dy_2}{dx} &= \mu_2, \\ \mu_1(x, y) &= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, & \mu_2(x, y) &= \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como a EDP é particularmente simples ao longo das características, é natural procurar uma mudança de variável  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  tal que  $\xi$  é constante ao longo da família de características  $y_1$  e  $\eta$  é constante ao longo da família  $y_2$ . Procuramos então  $\xi$ ,  $\eta$  satisfazendo as equações de primeira ordem

$$\xi_x + \mu_1 \xi_y = 0, \quad \xi_y \neq 0 \quad (2.6)$$

$$\eta_x + \mu_2 \eta_y = 0, \quad \eta_y \neq 0 \quad (2.7)$$

Note que, se  $a, b, c \in C^1(\Omega)$  e se  $a$  nunca se anular em  $\Omega$ , então  $\mu_1, \mu_2 \in C^1(\Omega)$  e poderemos achar soluções  $\xi$ ,  $\eta$  de (2.6) e (2.7) de classe  $C^2$ .

Além disso, como  $\mu_1 \neq \mu_2$  em todos os pontos de  $\Omega$ , a transformação  $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$  define, de fato, uma mudança de variável, pois o jacobiano

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = (\mu_2 - \mu_1) \xi_y \eta_y$$

nunca se anula em  $\Omega$ . Definindo, então,  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$  e usando as Equações (1.5) e (1.6), obtemos

$$Av_{\xi\xi} + 2Bv_{\xi\eta} + Cv_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

onde

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2 = a\mu_1^2 \xi_y^2 - 2b\mu_1 \xi_y^2 + c\xi_y^2 = 0 \\ C(\xi, \eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$v_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

Com esta mudança de variável, a Equação (1.1) fica na forma (2.3).

**Exemplo 2.1.** Vamos colocar a equação de onda (1.16) na forma (2.3). Como vimos no Exemplo 1.2, as curvas características para a Equação (1.16) são da forma  $x \pm ct = \text{constante}$ . Vamos então fazer a mudança de variável

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct, \\ \eta &= x - ct. \end{aligned}$$

Como  $c > 0$ , o jacobiano nunca se anula pois

$$J(t, x) = \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t = c + c = 2c \neq 0.$$

Definindo  $v(\xi, \eta) = u(t, x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta} \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

e, portanto, a EDP (1.16) fica  $-4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow v_{\xi\eta} = 0$ .

**Exemplo 2.2.** Vamos colocar a equação de Tricomi (1.4) na forma (2.3) no semiplano  $y < 0$ . Como vimos no Exemplo 1.3, as curvas características para a equação de Tricomi são da forma  $(-y)^{3/2} \pm 3x/2 = \text{constante}$ . Vamos fazer então a mudança de variável

$$\xi = (-y)^{3/2} + \frac{3x}{2},$$

$$\eta = (-y)^{3/2} - \frac{3x}{2}.$$

Como  $y < 0$ , as funções  $\xi$  e  $\eta$  são infinitamente diferenciáveis com jacobiano

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -9(-y)^{1/2}/2 \neq 0.$$

Definindo  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ , obtemos

$$u_{xx} = \frac{9}{4} v_{\xi\xi} - \frac{9}{2} v_{\xi\eta} + \frac{9}{4} v_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = \frac{3}{4} (-y)^{-1/2} (v_\xi + v_\eta) - \frac{9}{4} y (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta})$$

e portanto  $v$  satisfaz a equação

$$v_{\xi\eta} = -\frac{1}{12} \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right)^{-1/3} (v_\xi + v_\eta).$$

No caso parabólico existe apenas uma família de curvas características, mas podemos obter, como anteriormente,

$$\xi_x + \mu \xi_y = 0$$

onde  $\mu$  é a única raiz de (1.15). Escolhendo qualquer função  $\eta$  de classe  $C^2$  tal que

$$J(x, y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

em todos os pontos da região  $\Omega$ , obtemos uma mudança de variável que transforma a Equação (1.1) na Equação (2.2).

**Exemplo 2.3.** Vamos colocar na forma canônica a equação

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + xu_{yy} = u_x + u_y. \quad (2.8)$$

A EDP (2.8) é parabólica no plano inteiro e, como  $a = b = c = x$ , a única raiz da Equação (1.15) para  $x \neq 0$  é  $\mu = 1$ , logo as curvas características

são as retas  $y = x + k$ ,  $k$  uma constante arbitrária. Fazendo então a mudança de variável

$$\xi = y - x$$

$$\eta = y + x$$

e definindo  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ ,  $u$  será solução de (2.8) se e somente se  $v$  satisfizer

$$(\eta - \xi)v_{\eta\eta} = v_\eta.$$

Não discutiremos o caso elíptico por ser mais complicado. Observamos apenas que é possível repetir formalmente o que fizemos no caso hiperbólico com o auxílio de funções complexas.

### 3 Exercícios

#### Seção 1: Classificação

Classifique as equações abaixo e calcule as curvas características (se existirem):

$$1. \quad 4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$$

$$2. \quad u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u + 2u_y$$

$$3. \quad 2u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = xyu$$

$$4. \quad (1+x^2)^2u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} = 0$$

$$5. \quad (1+x^2)^2u_{xx} - 2(1+x^2)(1+y^2)u_{xy} + (1+y^2)^2u_{yy} = u^2x$$

$$6. \quad u_{xx} + (1+x^2)^2u_{yy} = 0$$

#### Seção 2: Formas Canônicas e Curvas Características

1. Coloque as equações abaixo na sua forma canônica:

$$(i) \quad 4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$$

$$(ii) \quad u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u + 2u_y$$

$$(iii) \quad (1+x^2)^2 u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} = 0$$

$$(iv) \quad (1+x^2)^2 u_{xx} - 2(1+x^2)(1+y^2)u_{xy} + (1+y^2)^2 u_{yy} = u^2 x$$

2. Considere a equação diferencial

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

e suponha que  $\delta = b^2 - ac < 0$  em uma região aberta  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Suponha que  $a$  nunca se anula em  $\Omega$ . Mostre que, se  $\xi = \xi(x, y)$  e  $\eta = \eta(x, y)$  satisfizerem o sistema

$$a\xi_x + b\xi_y - \sqrt{-\delta}\eta_y = 0$$

$$a\eta_x + b\eta_y + \sqrt{-\delta}\xi_y = 0$$

com  $\xi_y^2 + \eta_y^2 \neq 0$  em  $\Omega$ , então  $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$  definirá uma mudança de variável em  $\Omega$ . Além disso, se  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ , então  $v$  satisfará uma EDP da forma

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

3. Use as ideias do exercício acima para colocar na forma canônica as seguintes equações

$$(i) \quad 2u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = xyu$$

$$(ii) \quad u_{xx} + (1+x^2)^2 u_{yy} = 0$$

# Capítulo 5

## A Equação de Onda

Neste capítulo, resolveremos alguns problemas envolvendo a equação de onda. Na primeira seção, usaremos uma das formas canônicas para achar a solução geral da equação de onda em  $\mathbb{R}^2$ . Na segunda seção, discutiremos o problema da corda infinita. Nas duas últimas seções, discutiremos problemas envolvendo a equação de onda em um intervalo finito.

### 1 Solução Geral

Como já observamos anteriormente, as curvas características são muito importantes para as EDPs hiperbólicas. Vamos exemplificar isso estudando a equação de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (1.1)$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Como vimos no Exemplo 1.2 do capítulo anterior, as curvas características da Equação (1.1) são as retas  $x \pm ct = \text{constante}$ . Fazendo então a mudança de variável

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned} \quad (1.2)$$

$v(\xi, \eta) = u(x, y)$  satisfaz a EDP

$$v_{\xi\eta} = 0. \quad (1.3)$$

Mas a EDP (1.3) pode ser resolvida facilmente integrando diretamente primeiro em  $\eta$  e depois em  $\xi$  para obter

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) \quad (1.4)$$

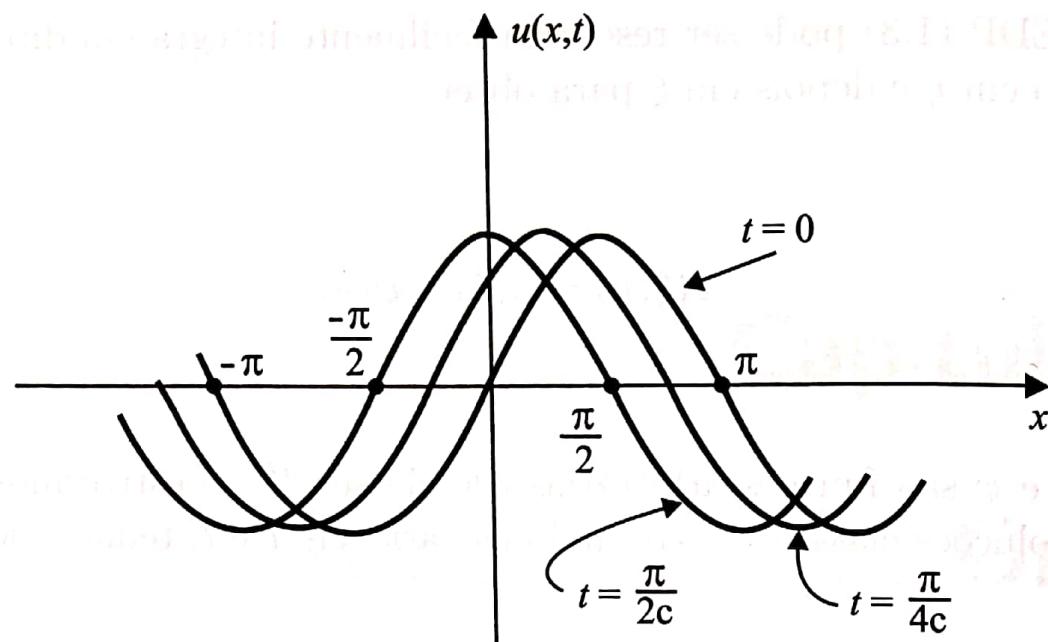
onde  $\varphi$  e  $\psi$  são funções arbitrárias (de classe  $C^2$ , se estivermos procurando soluções clássicas). Voltando às variáveis  $x$  e  $t$ , temos que

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad (1.5)$$

onde  $\varphi$  e  $\psi$  são funções arbitrárias,  $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ .

Neste exemplo simples, o uso das características nos permitiu achar a solução geral da equação. É interessante observar que a equação de onda (1.1) foi um dos problemas mais importantes do século XVIII. O primeiro a estudá-la foi d'Alembert, seguido de Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange. Foram obtidas soluções em diversas formas e a discussão sobre os méritos e as relações entre essas soluções levantou questões fundamentais (como, por exemplo, o que é uma função) que só foram resolvidas no século XIX.

Se considerarmos  $t$  como sendo o tempo, a transformação  $\xi = x + ct$  representa a translação do sistema de coordenadas para a esquerda com velocidade  $c$ . Por exemplo, a função  $u(x, t) = \sin(x + ct)$  descreve uma senóide (ou onda senoidal) movendo-se para a esquerda com velocidade constante  $c$  (veja a Figura 16). Da mesma forma, a função  $u(x, t) = \varphi(x + ct)$  descreve uma onda (com o formato do gráfico da função  $\varphi$ ) movendo-se para a esquerda com velocidade  $c$ . De maneira análoga, a função  $u(x, t) = \psi(x - ct)$  descreve uma onda movendo-se para a direita com velocidade  $c$ . Portanto a solução geral (1.5) da equação descreve a superposição de duas ondas movendo-se com velocidade  $c$ , uma para a esquerda, outra para a direita. Como as duas ondas viajam em direções opostas, a forma da função  $u(x, t)$  em geral varia com o tempo.



**Fig. 16:** A função  $u(x, t) = \sin(x + ct)$  descreve uma senóide movendo-se para a esquerda com velocidade  $c$ .

**Exemplo 1.1.** Vamos escolher  $\varphi = \psi$  com

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 4, \\ -x - 4 & \text{se } -4 \leq x < -2 \\ x & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ -x + 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

A Figura 17 mostra o gráfico da função  $u(x, t) = \varphi(x + t) + \varphi(x - t)$  para alguns valores de  $t$ .

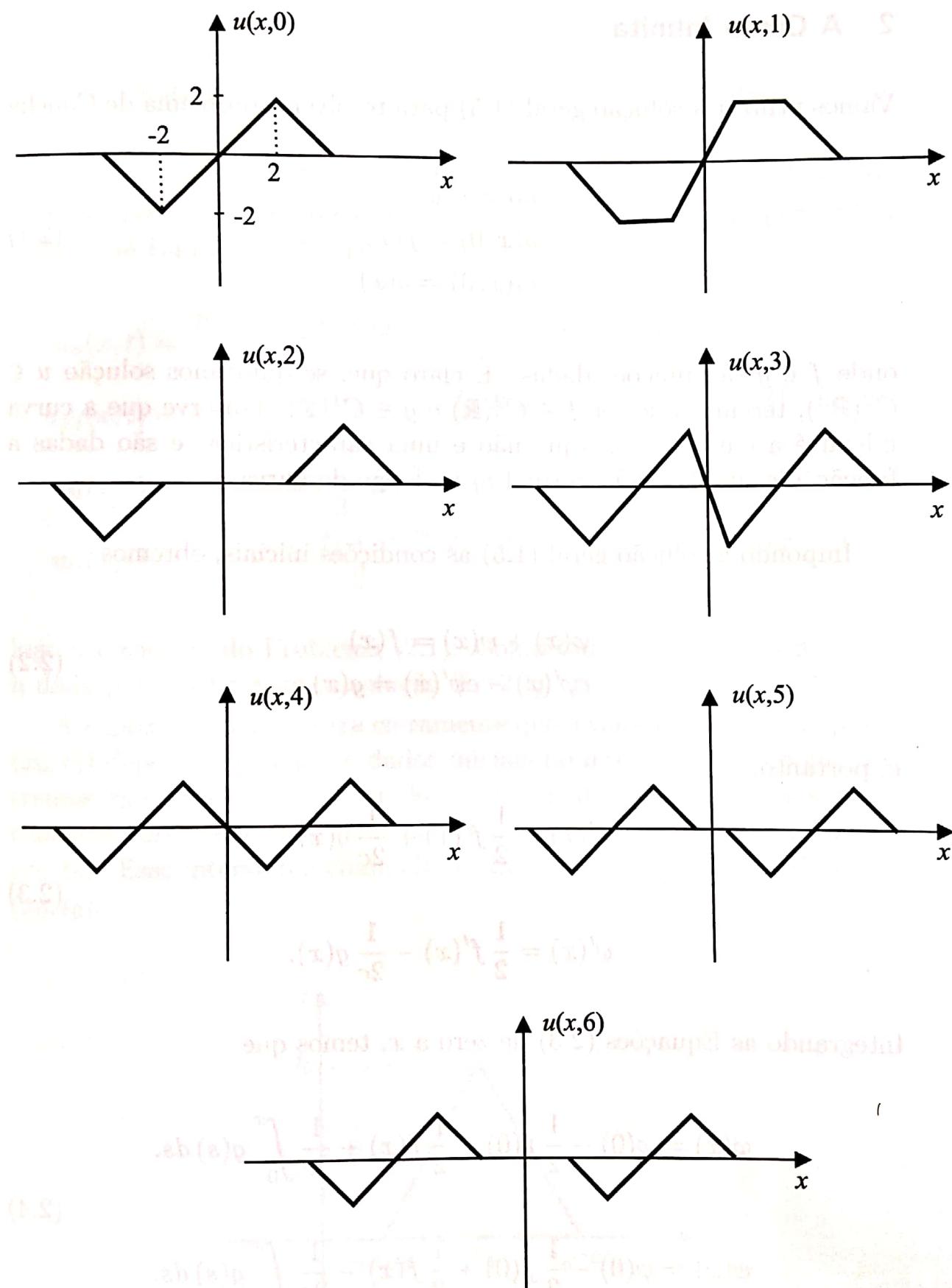


Fig. 17: O gráfico da função  $u(x, t_0)$  para alguns valores de  $t_0$  (Exemplo 1.1).

## 2 A Corda Infinita

Vamos utilizar a solução geral (1.5) para resolver o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções dadas. É claro que, se quisermos solução  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , teremos que ter  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Observe que a curva inicial é a curva  $t = 0$  (que não é uma característica) e são dadas a função  $u$  e sua derivada normal  $u_t$  ao longo da curva.

Impondo à solução geral (1.5) as condições iniciais, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) &= f(x) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) &= g(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

e, portanto,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2c} g(x) \tag{2.3}$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{2c} g(x).$$

Integrando as Equações (2.3) de zero a  $x$ , temos que

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds, \tag{2.4}$$

$$\psi(x) = \psi(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds.$$

Como, de (2.2),  $\varphi(0) + \psi(0) = f(0)$ , obtemos

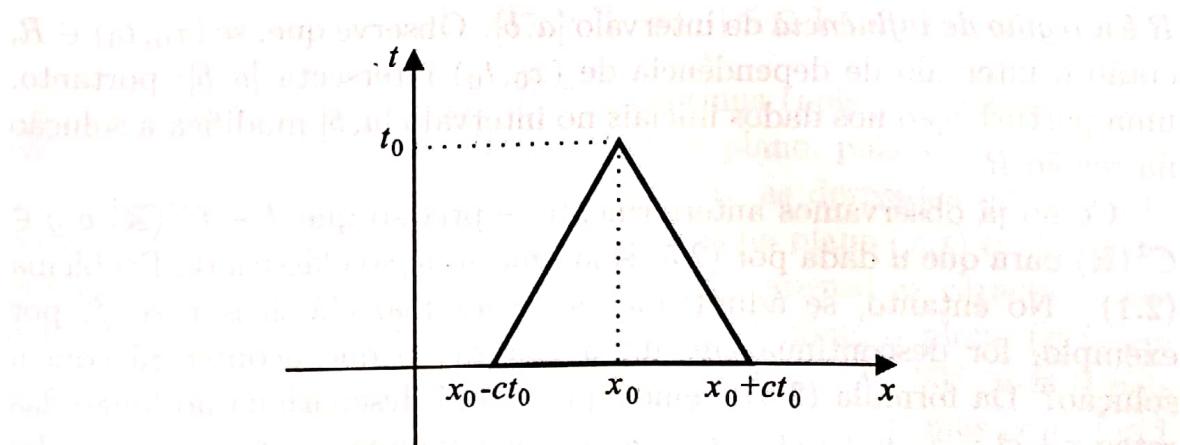
$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (2.5)$$

Então, se  $u$  for uma solução de (2.1),  $u$  será dada por (2.5). Mas precisamos mostrar a recíproca, ou seja, que a função definida por (2.5) é solução da Equação (2.1). De fato, derivando

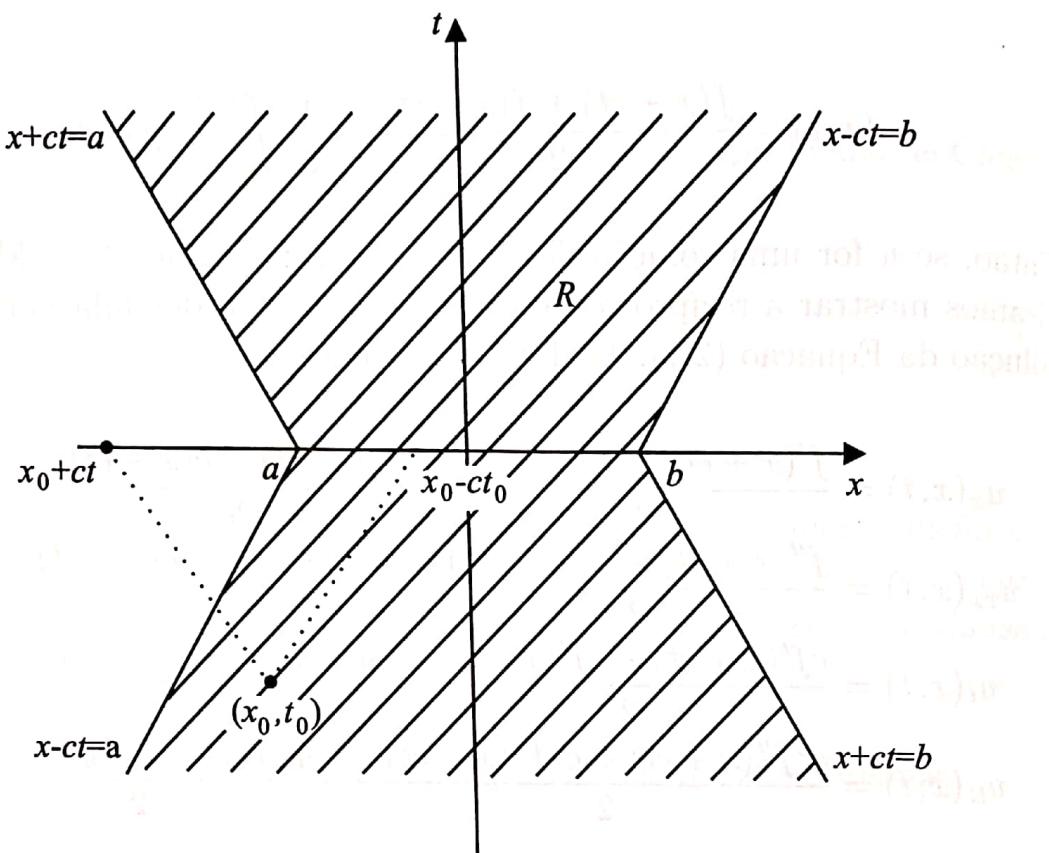
$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{f'(x + ct) + f'(x - ct)}{2} + \frac{g(x + ct) - g(x - ct)}{2c} \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{f''(x + ct) + f''(x - ct)}{2} + \frac{g'(x + ct) - g'(x - ct)}{2c} \\ u_t(x, t) &= \frac{cf'(x + ct) - cf'(x - ct)}{2} + \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{c^2 f''(x + ct) + c^2 f''(x - ct)}{2} + \frac{cg'(x + ct) - cg'(x - ct)}{2} \end{aligned}$$

logo  $u$  é solução do Problema (2.1). Como toda solução é desta forma,  $u$  dada por (2.5) é a única solução de (2.1).

A expressão (2.5) mostra claramente que o valor da solução no ponto  $(x_0, t_0)$  depende apenas dos dados iniciais no intervalo fechado com extremos  $x_0 - ct$  e  $x_0 + ct$ : os dados iniciais podem ser alterados arbitrariamente fora desse intervalo sem mudar o valor da solução no ponto  $(x_0, t_0)$ . Esse intervalo é chamado o *intervalo de dependência* do ponto  $(x_0, t_0)$ .



**Fig. 18:** O intervalo de dependência do ponto  $(x_0, t_0)$  quando  $t_0 > 0$  é  $[x_0 - ct, x_0 + ct]$ .



**Fig. 19:**  $R$  é a região de influência de  $[a, b]$ : modificação dos dados iniciais em  $[a, b]$  muda a solução na região  $R$ .

Dado um intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , a maior região delimitada pelas características passando pelos extremos do intervalo é a região

$$\begin{aligned} R = & \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : a - ct \leq x \leq b + ct\} \\ & \cup \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0) : a + ct \leq x \leq b - ct\}; \end{aligned}$$

$R$  é a *região de influência* do intervalo  $[a, b]$ . Observe que, se  $(x_0, t_0) \in R$ , então o intervalo de dependência de  $(x_0, t_0)$  intersecta  $[a, b]$ ; portanto, uma perturbação nos dados iniciais no intervalo  $[a, b]$  modifica a solução na região  $R$ .

Como já observamos anteriormente, é preciso que  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$  para que  $u$  dada por (2.5) seja uma solução clássica do Problema (2.1). No entanto, se admitirmos soluções não clássicas e se  $f$ , por exemplo, for descontínua em um ponto  $x_0$ , o que acontecerá com a solução? Da fórmula (2.5), vemos que  $u$  será descontínua ao longo das retas  $x + ct = x_0$  e  $x - ct = x_0$ ; em outras palavras, *as descontinuidades se propagam ao longo das características*. É claro que, neste caso,  $u$  dada por (2.5) satisfaz a EDP fora das características que contêm  $x_0$ .

O Problema (2.1), para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , descreve o movimento de uma “corda infinita” vibrando em um plano vertical:  $u(x, t)$  é o deslocamento vertical da corda no ponto  $x$  e no instante  $t$ ,  $f(x)$  é a posição inicial (em  $t = 0$ ) e  $g(x)$  é a velocidade inicial da corda.

**Exemplo 2.1.** Vamos considerar o Problema (2.1) com  $c = 1$ ,  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Neste caso, a solução é

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} = \sin x \cos t.$$

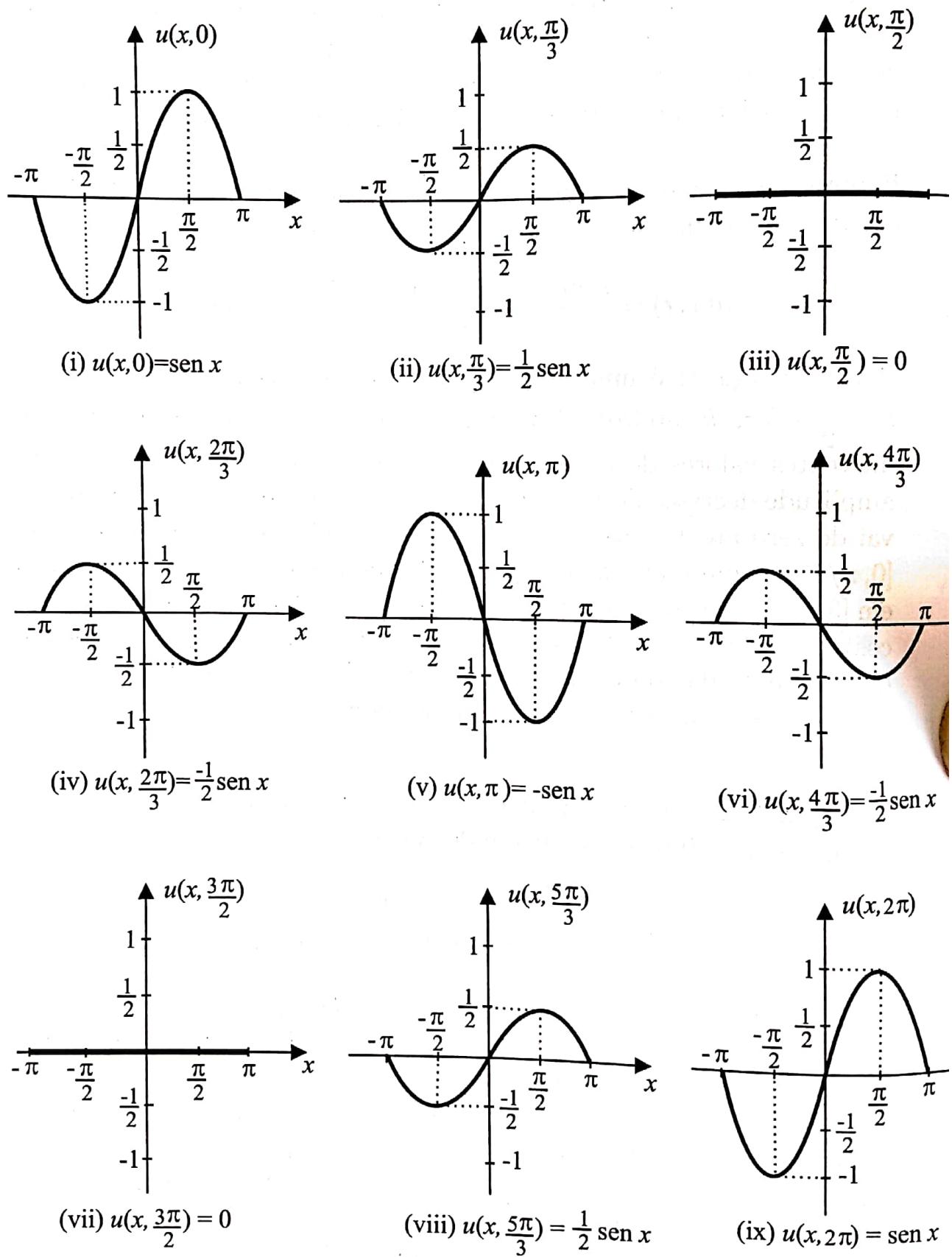
Portanto,  $u(x, t)$  é uma senóide de amplitude  $|\cos t|$  (logo, zero para  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k$  inteiro). A Figura 20 mostra o gráfico de  $u(x, t_0)$  para diferentes valores de  $t_0$ . Observe que, quando  $t$  vai de zero a  $\pi/2$ , a amplitude decresce de 1 até zero; quando  $t$  varia de  $\pi/2$  a  $\pi$ , a amplitude vai de zero até 1, mas a oscilação é ao contrário da oscilação para  $t \in [0, \pi/2]$ ; no intervalo  $[\pi, 3\pi/2]$  a amplitude decresce e cresce novamente em  $[3\pi/2, 2\pi]$  atingindo a posição inicial em  $t = 2\pi$ . Como  $\cos(t+2k\pi) = \cos t$ , então  $u(x, t+2k\pi) = u(x, t)$  qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$  e portanto o movimento da corda em qualquer intervalo de tempo  $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é precisamente o mesmo que no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Exemplo 2.2.** Vamos considerar agora o Problema (2.1) com  $c = 1$ ,  $g \equiv 0$  e  $f$  uma função que não é de classe  $C^2$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1, \\ -2|x| + 2 & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Então  $u$  dada pela fórmula (2.5) é contínua (pois  $f$  é contínua), mas não é mais continuamente diferenciável no plano, pois a derivada de  $f$  é descontínua em  $x = -1$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ : as derivadas de  $u$  devem ser descontínuas ao longo das características no plano  $(x, t)$  contendo os pontos  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Considerando apenas as características que contêm os pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , elas dividem o plano  $(x, t)$  em nove regiões (veja a Figura 21): nas regiões I, III, V, VII,  $u \equiv 0$  pois  $|x+t| > 1$  e  $|x-t| > 1$ ; nas regiões II e VI,  $|x-t| > 1$ , mas  $|x+t| < 1$  logo

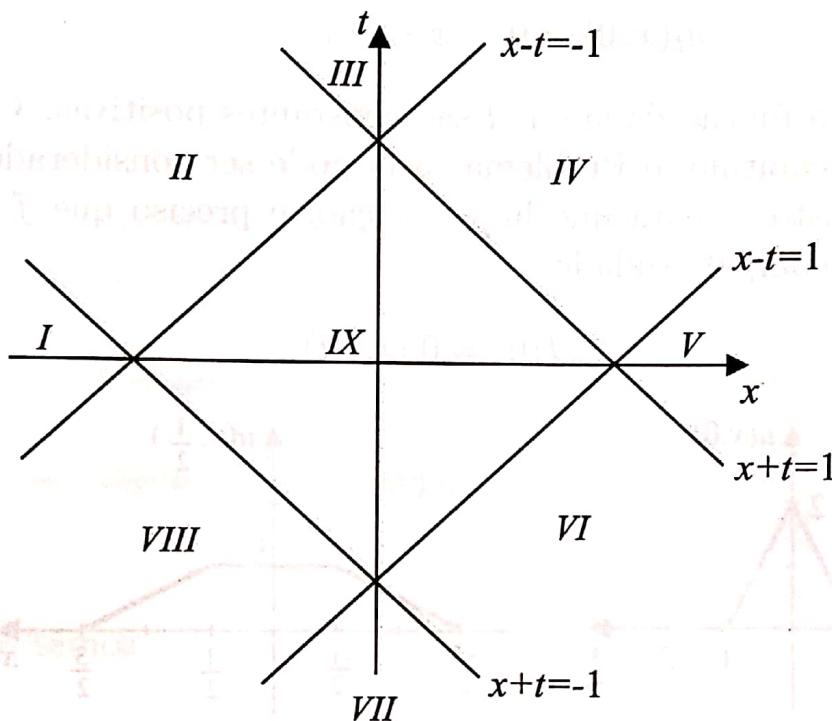
$$u(x, t) = 1 - |x+t|;$$



**Fig. 20:** O gráfico de  $u(x, t_0)$  para alguns valores de  $t_0$  (Exemplo 2.1).

nas regiões IV e VIII,  $|x + t| > 1$ , mas  $|x - t| < 1$ , portanto  $u(x, t) = 1 - |x - t|$ ; finalmente, na região IX,  $|x + t| < 1$  e  $|x - t| < 1$ , logo

$$u(x, t) = 2 - |x - t| - |x + t|.$$



**Fig. 21:** As derivadas de  $u$  são descontínuas nas quatro retas  $x - t = \pm 1$ ,  $x + t = \pm 1$  e também nas retas  $x \pm t = 0$ , que não aparecem na figura.

Observe que, de fato, as derivadas de  $u$  têm descontinuidades ao longo das retas  $x - t = -1$ ,  $x - t = 0$ ,  $x - t = 1$ ,  $x + t = -1$ ,  $x + t = 0$  e  $x + t = 1$ . A Figura 22 mostra o gráfico de  $u(x, t)$  para alguns valores de  $t \geq 0$  (basta considerar  $t \geq 0$  pois  $u(x, t) = u(x, -t)$ ). Note que a onda inicial  $f$  se divide em duas quando  $t$  varia de 0 a 1 e depois elas se afastam, cada uma viajando com velocidade  $c = 1$ , uma para a esquerda, outra para a direita.

### 3 Funções Pares, Ímpares e Periódicas

Na seção anterior, usamos a solução geral (1.5) da equação de onda para resolver um problema em  $\mathbb{R}^2$ . Não é tão fácil, no entanto, aplicar (1.5) diretamente para estudar a equação de onda em uma região do tipo  $(0, l) \times (0, +\infty)$ . Para entender as dificuldades envolvidas, vamos

considerar o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l], \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $f$  é uma função dada e  $c, l$  são constantes positivas. Como vimos no primeiro capítulo, o Problema (3.1) pode ser considerado como um problema misto e, para que haja solução, é preciso que  $f$  satisfaça a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{3.2}$$

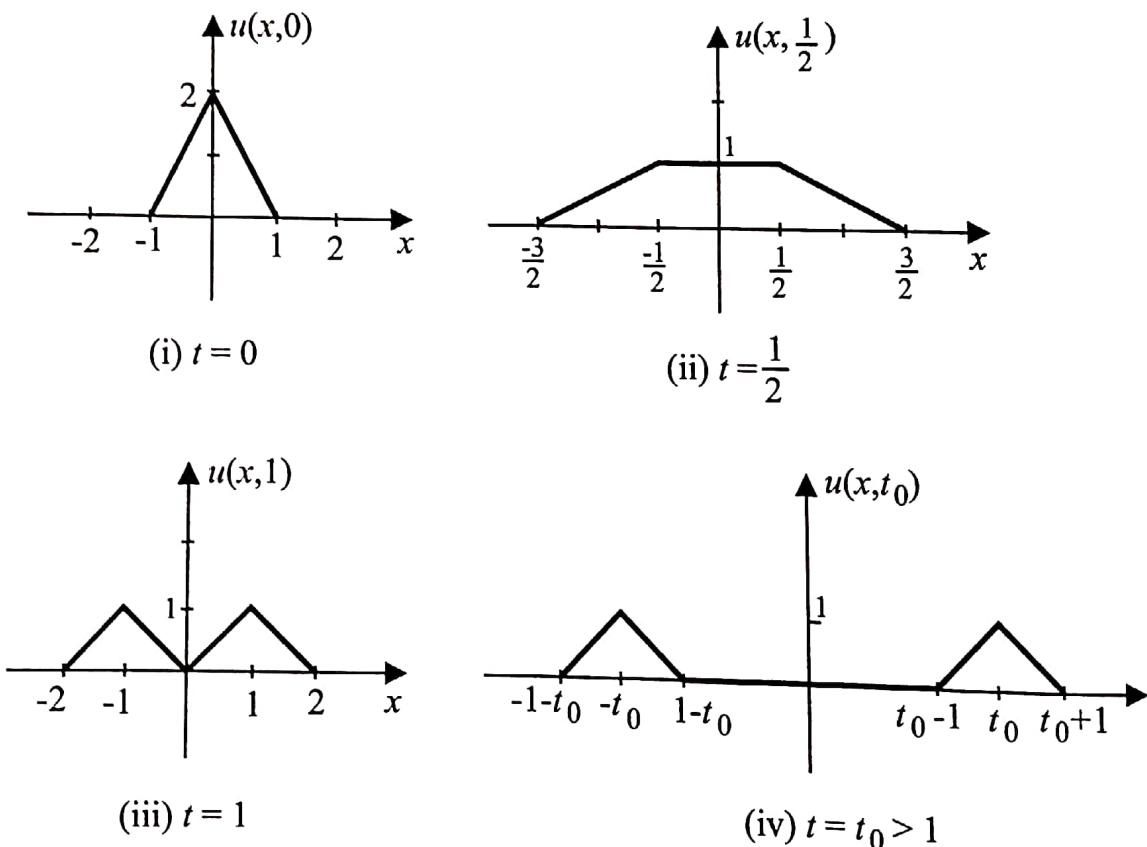


Fig. 22: O gráfico de  $u(x, t_0)$  para alguns valores de  $t_0$  (Exemplo 2.2).

Apesar das semelhanças entre os Problemas (2.1) e (3.1), não podemos usar a fórmula (1.5) para a solução do Problema (3.1), pois  $f$  está definida apenas no intervalo  $[0, l]$ ; esperamos, no entanto, pela dedução anterior, que a fórmula seja válida quando  $x + ct, x - ct \in [0, l]$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$ . E nos outros pontos da região  $[0, l] \times [0, +\infty)$ ? Uma possibilidade é estender a função  $f$  de forma conveniente, para a reta toda; é claro que

a extensão não pode ser arbitrária, pois esperamos que o Problema (3.1) tenha uma única solução. Procedendo como na resolução do Problema (2.1), obtemos que a solução de (3.1) é da forma

$$u(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2}, \quad (3.3)$$

onde  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$  e  $F$  é uma extensão apropriada da função  $f$  dada, ou seja,

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in [0, l]. \quad (3.4)$$

Que outras propriedades a função  $F$  tem que ter? Em primeiro lugar, para  $x = 0$ , temos

$$0 = u(0, t) = \frac{F(ct) + F(-ct)}{2}, \quad \forall t \geq 0,$$

logo  $F$  é uma *função ímpar*, ou seja,

$$F(-y) = -F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Para  $x = l$ , temos

$$0 = u(l, t) = \frac{F(l + ct) + F(l - ct)}{2}, \quad \forall t \geq 0,$$

logo

$$F(l + y) = -F(l - y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Então, se  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$F(y + 2l) = F(l + (y + l)) = -F(l - (y + l)) = -F(-y)$$

e, portanto, usando (3.5),

$$F(y + 2l) = F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

A Propriedade (3.6) significa que  $F$  é uma *função periódica de período  $2l$* . As Equações (3.4), (3.5) e (3.6) determinam completamente a função  $F$ : se  $x \in [0, l]$ ,  $F(x) = f(x)$ ; se  $x \in [-l, 0]$ ,  $-x \in [0, l]$  e, portanto, de (3.5),

$$F(x) = -F(-x) = f(-x), \quad \forall x \in [-l, 0] \quad (3.7)$$

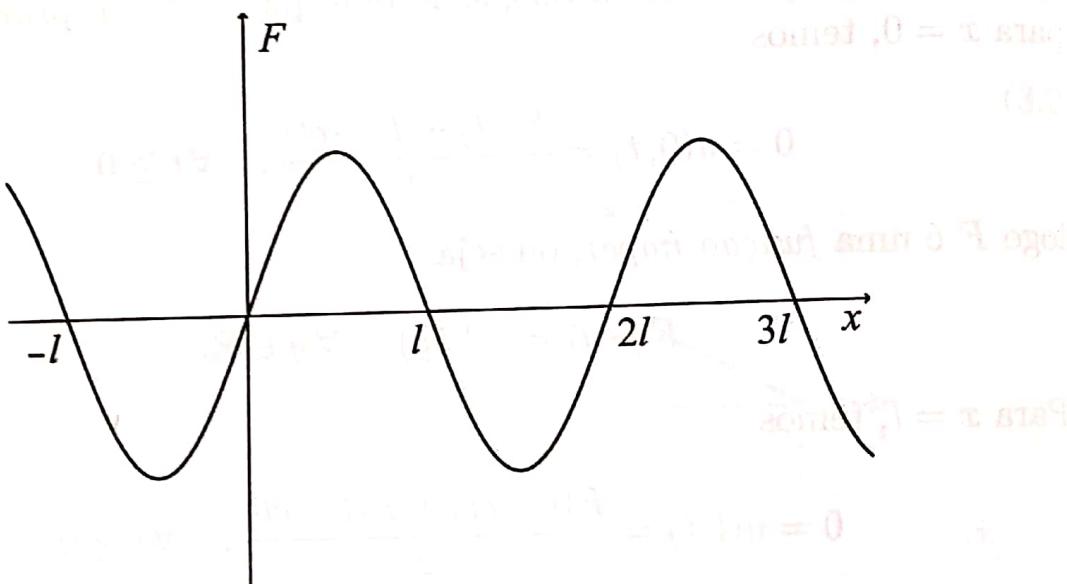
e  $F$  está determinada no intervalo  $[-l, l]$ . Além disso, se  $x \geq l$ , então  $x$  está em algum intervalo da forma  $[(2k - 1)l, (2k + 1)l]$  para algum

inteiro  $k \geq 1$ , logo  $x - 2kl \in [-l, l]$ ; por outro lado, podemos mostrar por indução, a partir de (3.6), que

$$F(y + 2nl) = F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}; \quad (3.8)$$

logo

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x - 2kl + 2kl) = F(x - 2kl) \\ &= \begin{cases} -f(-x + 2kl) & \text{se } (2k-1)l \leq x \leq 2kl, \\ f(x - 2kl) & \text{se } 2kl \leq x \leq (2k+1)l. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$



**Fig. 23:** A extensão ímpar e periódica da função  $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Finalmente, se  $x \leq -l$ ,  $-x \geq l$  e, portanto, de (3.5),

$$F(x) = -F(-x), \quad x \leq -l, \quad (3.10)$$

está determinada pelo que vimos acima. Observe que as Equações (3.4), (3.7), (3.9) e (3.10) determinam  $F$  em intervalos fechados, logo nos pontos da forma  $kl$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $F$  é dada por duas fórmulas diferentes; no entanto, a condição de compatibilidade (3.2) implica que  $F$  está bem definida nesses pontos e que  $F(kl) = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . A função  $F$  assim definida é a *extensão ímpar e periódica de período  $2l$  de  $f$* .

**Observação.** Convencionamos que as derivadas nos extremos do intervalo são derivadas laterais; então, por exemplo,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

e

$$f'(l) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(l+h) - f(l)}{h}.$$

Definições análogas valem para derivadas de ordem maior.

Para obter que  $u$  dada por (3.3) é uma solução clássica da EDP, como (3.3) é da forma (1.5) com  $\varphi = \psi = F/2$ , basta mostrar que  $F \in C^2(\mathbb{R})$ . Para isso, precisamos, em primeiro lugar, que  $f \in C^2([0, l])$ .

A continuidade de  $f$  e a condição de compatibilidade (3.2) implicam na continuidade de  $F$ : de fato, as Equações (3.4), (3.7), (3.9), (3.10) e a continuidade de  $f$  mostram que  $F$  é contínua em todos os intervalos da forma  $((k-1)l, kl)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Por outro lado, pela periodicidade de  $F$ , para provar que  $F$  é contínua em todos os pontos da forma  $kl$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , basta mostrar que  $F$  é contínua em  $x = 0$  e  $x = l$ . Em  $x = 0$ , usando a continuidade de  $f$ , a condição  $f(0) = 0$ , (3.4) e (3.7), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = F(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-f(-x)) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -f(0) = 0 = F(0).$$

Em  $x = l$ , novamente usando a continuidade de  $f$ , a condição  $f(l) = 0$ , (3.4) e (3.9) (com  $k = 1$ ), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow l^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow l^-} f(x) = f(l) = F(l) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow l^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow l^+} (-f(-x+2l)) = -\lim_{y \rightarrow l^-} f(y) = -f(l) = 0 = F(l).$$

Portanto,  $F \in C(\mathbb{R})$ .

Para provar que  $F$  é de classe  $C^1$ , procedendo como acima vemos que basta mostrar que  $F$  é diferenciável em  $x = 0$  e  $x = l$  e que  $F'$  é contínua nesses pontos. Calculando então a derivada de  $F$  em  $x = 0$ , obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0),$$

logo  $F$  é diferenciável em  $x = 0$  com  $F'(0) = f'(0)$ . Quanto à continuidade de  $F'$  na origem, usando as Equações (3.4) e (3.7), vemos que

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } 0 \leq x < l \\ f'(-x) & \text{se } -l < x < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = F'(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(-x) = f'(0) = F'(0),$$

e  $F'$  é contínua em  $x = 0$ . No ponto  $x = l$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(l+h) - F(l)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(l+h) - f(l)}{h} = f'(l),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(l+h) - F(l)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f(-l-h+2l)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(l+h) - f(l)}{h} = f'(l),$$

logo  $F$  é diferenciável em  $x = l$  e, usando (3.4) e (3.9) com  $k = 1$ ,

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } 0 < x \leq l \\ f'(-x+2l) & \text{se } l < x < 2l. \end{cases} \quad (3.12)$$

Mas então

$$\lim_{x \rightarrow l^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow l^-} f'(x) = f'(l) = F'(l),$$

$$\lim_{x \rightarrow l^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow l^+} f'(-x+2l) = \lim_{y \rightarrow l^-} f'(y) = f'(l) = F'(l),$$

e  $F$  é contínua em  $x = l$ .

O leitor atento deve ter observado que, para provar a continuidade de  $F$ , precisamos usar a condição de compatibilidade, enquanto que a continuidade de  $F'$  não necessita de nenhuma condição sobre  $f'$ . A razão é simples: em primeiro lugar, para que seja possível estender uma função  $f \in C([0, l])$  a uma função ímpar em  $C([-l, l])$ , é preciso, pela Equação (3.5), que  $f(0) = -f(0)$  e portanto que  $f(0) = 0$ ; além disso, para que seja possível estender essa nova função  $[-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  a uma função contínua na reta inteira e periódica de período  $2l$ , é preciso que os valores em  $x = -l$  e  $x = l$  sejam iguais, ou seja,  $-f(l) = f(l)$  e portanto  $f(l) = 0$ . Então uma função  $f \in C([0, l])$  pode ser estendida a uma função contínua ímpar e periódica de período  $2l$  se e somente se  $f(0) = f(l) = 0$ . Por outro lado, a derivada de uma função ímpar é uma função par, ou seja, uma função  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz

$$G(-y) = G(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

(Basta derivar a Equação (3.5) para obter (3.13) com  $G = F'$ .) Logo  $F'$  é a extensão par e periódica de período  $2l$  de  $f'$ . Mas qualquer função  $g \in C([0, l])$  pode ser estendida a uma função par  $G$ , contínua em  $\mathbb{R}$  e periódica de período  $2l$ :

$$G(x) = \begin{cases} g(x - 2kl) & \text{se } 2kl \leq x \leq (2kl + 1)l, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ g(-x + 2kl) & \text{se } (2k - 1)l < x < 2kl, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.14)$$

é a extensão de  $g$  que satisfaz estas propriedades. É claro, então, que  $F'$  é a extensão par e periódica de período  $2l$  de  $f'$  e portanto basta a continuidade de  $f'$  para que  $F'$  seja contínua. Note que a derivada de uma função par é uma função ímpar (basta derivar (3.13)) e, portanto, pelo que vimos acima, para que  $F''$  seja contínua precisaremos que, além de  $f \in C^2([0, l])$ ,  $f$  satisfaça

$$f''(0) = 0 = f''(l). \quad (3.15)$$

Vamos provar diretamente que, se  $f \in C^2([0, l])$  satisfizer (3.2) e (3.15), então  $F \in C^2(\mathbb{R})$ . Argumentando como na demonstração de que  $F$  e  $F'$  são contínuas, basta provar que  $F'$  é diferenciável nos pontos  $x = 0$  e  $x = l$  e que  $F''$  é contínua nesses pontos. No ponto  $x = 0$ , usando (3.11), obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F'(h) - F'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{h} = f''(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F'(h) - F'(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(-h) - f'(0)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -f''(0), \end{aligned}$$

logo  $F'$  é diferenciável em  $x = 0$  e

$$F''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{se } 0 \leq x < l \\ -f''(-x) & \text{se } -l < x < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Como  $f'' \in C([0, l])$  e  $f''(0) = 0$ , é claro de (3.16) que  $F''$  é contínua em  $x = 0$ . De maneira análoga, em  $x = l$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F'(l+h) - F'(l)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(l+h) - f'(l)}{h} = f''(l) = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F'(l+h) - F'(l)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(-l-h+2l) - f'(l)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(l+h) - f'(l)}{h} = -f''(l) = 0, \end{aligned}$$

logo

$$F''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{se } 0 < x \leq l, \\ -f''(-x+2l) & \text{se } l < x < 2l. \end{cases} \quad (3.17)$$

Novamente, a continuidade de  $F''$  em  $x = l$  segue do fato de que  $f''(l) = 0$ .

Acabamos de mostrar que a função  $u$  definida por (3.3) é uma solução clássica da EDP em (3.1). Antes de prosseguir na análise do Problema (3.1), vamos colocar em duas proposições as propriedades que vimos acima sobre extensões periódicas pares e ímpares de funções contínuas em um intervalo  $[0, l]$ .

**Proposição 3.1.** *Seja  $f \in C([0, l])$  e suponha que  $f$  satisfaz (3.2). Então a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x-2kl) & \text{se } 2kl \leq x \leq (2k+1)l, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -f(-x+2kl) & \text{se } (2k-1)l < x < 2kl, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.18)$$

*é a extensão ímpar e periódica de período  $2l$  de  $f$  e está em  $C(\mathbb{R})$ . Além disso, se  $f \in C^1([0, l])$ ,  $F \in C^1(\mathbb{R})$  e  $F'$  é a extensão par e periódica de período  $2l$  de  $f' \in C([0, l])$ .*

**Proposição 3.2.** *Seja  $g \in C([0, l])$ . Então a função  $G$  definida por (3.14) é a extensão par e periódica de período  $2l$  da função  $g$  e é contínua na reta toda. Além disso, se  $g \in C^1([0, l])$ , então  $G \in C^1(\mathbb{R})$  se e somente se  $g'(0) = 0 = g'(l)$ ; neste caso,  $G'$  é a extensão ímpar e periódica de período  $2l$  da função  $g' \in C([0, l])$ .*

Funções periódicas são muito importantes e serão utilizadas em outros problemas mais tarde. Em geral, uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita *periódica com período  $T$*  se  $x + T \in A$  sempre que  $x \in A$ ,  $T \neq 0$  e

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in A. \quad (3.19)$$

É claro desta definição que qualquer múltiplo não nulo  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , do período  $T$  é também um período para a função. O menor valor positivo  $T$ , se existir, para o qual a expressão (3.19) é válida é chamado de *período fundamental* de  $f$ . Note que uma função constante é periódica com qualquer período, mas não tem período fundamental. Funções contínuas e periódicas não constantes sempre têm período fundamental. Aproveitamos a oportunidade para demonstrar uma propriedade importante de funções periódicas:

**Proposição 3.3.** *Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica com período fundamental  $T$  e suponha que  $f$  é integrável em qualquer intervalo finito. Então, qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ ,*

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx \\ &= \int_0^T f(x) dx - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(y+T) dy \\ &= \int_0^T f(x) dx - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(y) dy \\ &= \int_0^T f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Voltando ao Problema (3.1), gostaríamos de obter um teorema de existência e unicidade, mas, para isto, precisamos especificar em que classe de funções procuramos soluções. Como observamos anteriormente, estamos interessados em soluções clássicas da EDP, logo  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty))$ ; por outro lado, é preciso que  $u$  esteja definida no fechado  $[0, l] \times [0, +\infty)$  e que  $u_t$  esteja definida em  $[0, l] \times \{0\}$ . Do ponto de vista físico, é natural procurar soluções  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ ; mas então como interpretar a condição  $u_t(x, 0) = 0$ ? Uma possibilidade é definir  $u_t(x, 0)$  como uma derivada normal, ou seja, definir  $u_t(x, 0)$  por

$$u_t(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x, h) - u(x, 0)}{h}, \quad x \in [0, l]. \quad (3.20)$$

Vamos procurar então uma solução no espaço

$$V = \{u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty)) : \exists \text{ o limite (3.20)}\}. \quad (3.21)$$

Pelo que vimos anteriormente, se  $u \in V$  for solução de (3.1), então, como  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty))$ ,  $u$  será da forma (3.3), onde  $F$  é a extensão ímpar e periódica de período  $2l$  da função  $f \in C^2([0, l])$ . Além disso,  $u$  definida por (3.3) é, de fato, de classe  $C^2$  em  $[0, l] \times [0, +\infty)$ , pois, como  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a fórmula (3.3) faz sentido em qualquer ponto  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  e define uma função de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , logo  $u: [0, l] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é a restrição de uma função em  $C^2(\mathbb{R}^2)$ .

Por outro lado, a função  $u$  definida por (3.3) satisfaz as condições de contorno: como  $F$  é ímpar,

$$u(0, t) = \frac{F(ct) + F(-ct)}{2} = \frac{F(ct) - F(ct)}{2} = 0, \quad \forall t \geq 0;$$

usando o fato de que  $F$  é periódica de período  $2l$ , é claro que  $F(l+ct) = F(-l+ct)$ , logo, qualquer que seja  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \frac{F(l+ct) + F(l-ct)}{2} = \frac{F(-l+ct) + F(l-ct)}{2} \\ &= \frac{F(-l+ct) - F(-l+ct)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Quanto às condições iniciais, pela própria definição de  $F$  é claro que

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in [0, l];$$

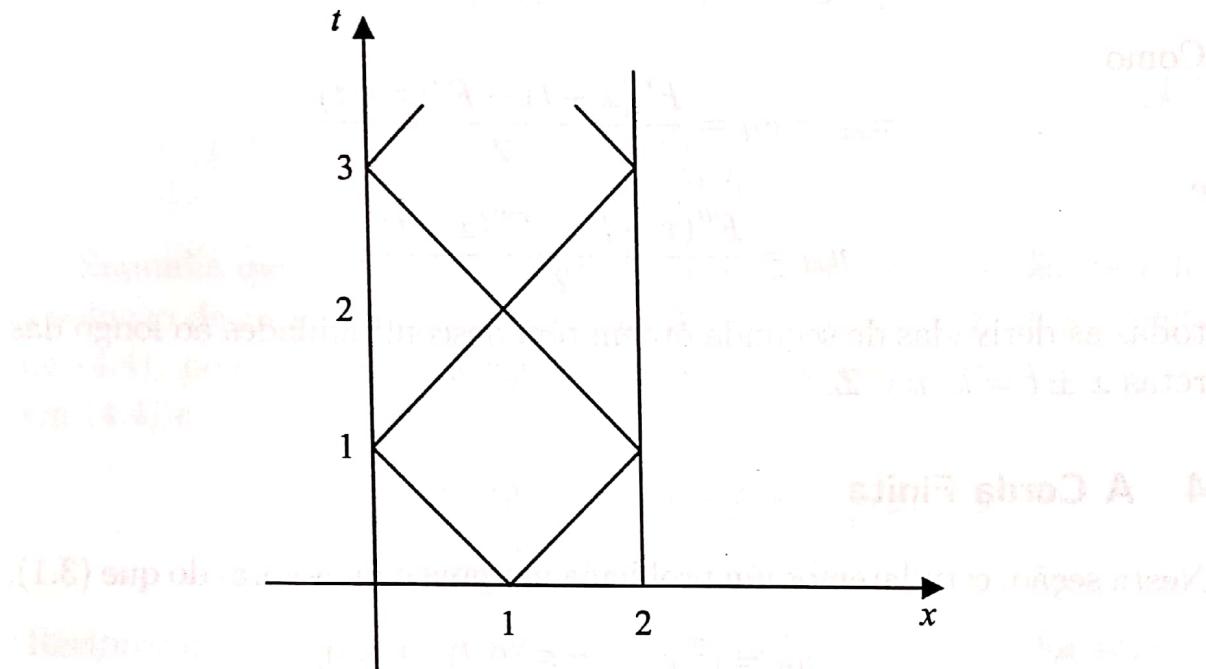
derivando a Equação (3.3) em relação a  $t$ , obtemos

$$u_t(x, t) = \frac{cF'(x+ct) - cF'(x-ct)}{2}$$

e portanto  $u_t(x, 0) = 0, \forall x \in [0, l]$ . Com isso acabamos de mostrar o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.** Seja  $f \in C^2([0, l])$  e suponha que  $f$  satisfaz as Equações (3.2) e (3.15). Então  $u$  definida por (3.3), onde  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por (3.18), é a única solução em  $V$  do Problema (3.1); além disso,  $u$  é de classe  $C^2$  em  $[0, l] \times [0, +\infty)$ .

Se  $f$  ou alguma de suas derivadas até segunda ordem tiver uma descontinuidade em  $x_0 \in [0, l]$ , esta descontinuidade irá se propagar ao longo das características que contêm os pontos da forma  $(x_0 + 2kl, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



**Fig. 24:** As descontinuidades das derivadas de  $u$  (Exemplo 3.5) na região  $[0, 2] \times [0, +\infty)$  estão ao longo dos segmentos de reta  $x \pm t = 1 + 4k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$ .

**Exemplo 3.5.** Sejam  $c = 1$  e  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Neste caso, a derivada de  $f$  tem uma descontinuidade em  $x = 1$  e, portanto, as derivadas da solução  $u$  terão descontinuidades ao longo das retas  $x \pm t = 1 + 4k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 3.6.** Sejam  $c = 1$  e  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -x^2 + x$ . Então  $f \in C^2([0, 1])$ , mas  $f''(0) = f''(1) = -2$ , logo  $u$  não é de classe  $C^2$ . As derivadas de segunda ordem de  $u$  são descontínuas ao longo das retas  $x \pm t = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . De fato, usando a fórmula (3.18),

$$F(x) = \begin{cases} -(x - 2kl)^2 + x - 2kl & \text{se } 2k \leq x \leq 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ (x - 2kl)^2 + x - 2kl & \text{se } 2k - 1 < x < 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e, portanto,

$$F''(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } 2k < x < 2k+1, k \in \mathbb{Z}, \\ 2 & \text{se } 2k-1 < x < 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como

$$u_{xx} = u_{tt} = \frac{F''(x+t) + F''(x-t)}{2}$$

e

$$u_{xt} = \frac{F''(x+t) - F''(x-t)}{2},$$

todas as derivadas de segunda ordem têm descontinuidades ao longo das retas  $x \pm t = k, k \in \mathbb{Z}$ .

## 4 A Corda Finita

Nesta seção, estudaremos um problema um pouco mais geral do que (3.1),

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $f, g$  são funções dadas e  $c, l$  são constantes positivas. Como vimos no Exemplo 3.4 do primeiro capítulo, o Problema (4.1) descreve uma corda elástica de comprimento  $l$ , presa nas extremidades e vibrando em um plano vertical;  $u(x, t)$  é o deslocamento vertical da corda no ponto  $x$  no instante  $t$ . O Problema (4.1) pode ser considerado como um problema misto: as condições

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

são condições de contorno e significam que a corda está presa nas extremidades  $x = 0, x = l$ ; as duas últimas condições em (4.1) são condições iniciais e, como no Problema (2.1),  $f$  e  $g$  representam, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda. As condições de contorno e as condições iniciais não são independentes: para que haja solução é preciso que  $f$  satisfaça a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{4.3}$$

Para simplificar, vamos usar a linearidade da EDP e das condições de contorno para dividir o Problema (4.1) em dois problemas mais simples, um com  $g \equiv 0$  (que é exatamente (3.1)) e outro com  $f \equiv 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Suponha que  $u \in V$  (veja (3.21)) é solução de (4.1): então, se  $v$  for a solução de (3.1) dada pelo Teorema 3.4,  $w = u - v \in V$  será solução de (4.4), pois  $w$  satisfaz a equação de onda, as condições de contorno em (4.4) e

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0, \\ w_t(x, 0) &= u_t(x, 0) - v_t(x, 0) = g(x). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $v \in V$  for solução de (3.1) e se  $w \in V$  for solução de (4.4), então  $u = v + w \in V$  será solução de (4.1). Portanto, como já provamos um teorema de existência e unicidade para (3.1), basta provar existência e unicidade para (4.4) para obter existência e unicidade para (4.1).

É interessante observar que a unicidade em  $V$  para o Problema (4.1) é um corolário da unicidade em  $V$  de (3.1): de fato, suponha que  $u, v \in V$  são soluções de (4.1); então  $w = u - v \in V$  é solução de

$$\begin{aligned} w_{tt} &= c^2 w_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ w(0, t) &= 0 = w(l, t), \quad t \geq 0, \\ w(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l], \\ w_t(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l], \end{aligned}$$

que é exatamente o Problema (3.1) com  $f \equiv 0$  logo, pelo Teorema 3.4,  $w \equiv 0$ , ou seja,  $u \equiv v$ . Como (4.4) é um caso particular de (4.1), a solução de (4.4) em  $V$ , se existir, será única.

Falta apenas achar uma solução de (4.4) em  $V$ . Comparando com a solução de (2.1), esperamos uma solução da forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds, \tag{4.5}$$

onde  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma extensão apropriada da função  $g$ . Impondo a condição de contorno em  $x = 0$ , obtemos

$$\int_{-ct}^{ct} G(s) ds = 0, \quad \forall t \geq 0$$

e, portanto,  $G$  deve ser uma função ímpar. Em analogia com o Problema (3.1), esperamos que  $G$  seja a extensão ímpar e periódica de período  $2l$  de  $g$ . Vamos mostrar que, neste caso,  $u$  dada por (4.5) é solução de (4.4). É claro que  $u$  satisfaz a EDP,  $u(0, t) = 0$  e  $u(x, 0) = 0$ . Calculando  $u(l, t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \frac{1}{2c} \int_{l-ct}^{l+ct} G(s) ds = \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} G(r + l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 G(r + l) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} G(r + l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 G(r - l) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} G(r + l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-l-ct}^{-l} G(s) ds + \frac{1}{2c} \int_l^{l+ct} G(s) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois  $G$  é ímpar. Finalmente,  $u_t(x, t) = [G(x + ct) + G(x - ct)]/2$ , logo, se  $x \in [0, l]$ ,  $u_t(x, 0) = G(x) = g(x)$ .

Observe que, se  $g \in C^1([0, l])$  satisfizer  $g(0) = 0 = g(l)$ , então  $G \in C^1(\mathbb{R})$  pela Proposição 3.1 e, portanto,  $u$  definida por (4.5) será de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Acabamos de provar o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.** *Sejam  $f \in C^2([0, l])$  e  $g \in C^1([0, l])$  tais que  $f$ ,  $f''$  e  $g$  se anulam em  $x = 0$  e  $x = l$ . Então a função  $u: [0, l] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$u(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds, \quad (4.6)$$

onde  $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são as extensões ímpares e periódicas de período  $2l$  das funções  $f$ ,  $g$ , respectivamente, é a única solução  $u \in V$  do Problema (4.1); além disso,  $u$  é de classe  $C^2$  em  $[0, l] \times [0, +\infty)$ .

## 5 Exercícios

### Seção 1: Solução Geral

1. Encontre todas as soluções em  $C^2(\mathbb{R}^2)$  do problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, 0) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $c > 0$  é constante.

2. Encontre todas as soluções em  $C^2(\mathbb{R}^2)$  do problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $c > 0$  é constante.

3. Considere o problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, 0) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Use a solução geral (1.5) da equação de onda para obter uma solução em  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . A solução é única? (Justifique sua resposta.)

4. Suponha que  $u$  é uma solução da equação de onda  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ . Faça a mudança de variável  $y = ct$  e ache a equação satisfeita por  $v(x, y) = u(x, t)$ .

5. Considere o problema

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $f$  é a função característica do intervalo  $(-1, 1)$ , ou seja,  $f(x) = 1$  se  $x \in (-1, 1)$  e  $f(x) = 0$  se  $x \notin (-1, 1)$ .

- (i) Use a forma da solução geral  $u(x, t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$  para mostrar que existe uma infinidade de soluções satisfazendo a equação diferencial fora das características contendo um dos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ .
- (ii) Mostre que apenas uma das soluções obtidas em (i) tem como imagem um conjunto de três elementos.
- (iii) Desenhe os gráficos das funções  $\varphi$  e  $\psi$  que compõem a solução em (ii).
- (iv) Supondo que  $u(x, t)$  é a solução encontrada em (ii), faça os gráficos de  $u(x, 0)$ ,  $u(x, 1/2)$ ,  $u(x, 1)$ ,  $u(x, 3/2)$  e  $u(x, 2)$ .

### 6. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1, \\ 1 - |x| & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Seja  $\Gamma$  a união das características contendo os pontos da forma  $(x_0, 0)$ , onde  $x_0$  é um ponto de descontinuidade de  $f'$ . Encontre uma solução  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty) - \Gamma) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  e mostre que esta é a única solução nesta classe.

### 7. Encontre uma solução $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ para o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $c > 0$  é constante e  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Mostre que a solução é única nesta classe. Se  $f \in C^1(\mathbb{R}) - C^2(\mathbb{R})$ , será possível encontrar solução em  $C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ?

## Seção 2: A Corda Infinita

1. Considere o Problema (2.1) com  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , mas supondo que  $g$  não é diferenciável na origem,  $g \in C^1(\mathbb{R} - \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$ . Seja  $\Gamma$  a união das características contendo a origem. Mostre que  $u$  definida por (2.5) satisfaz a EDP em  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ .

2. Resolva o Problema (2.1) no caso em que  $c = 2$ ,  $f = 0$  e  $g(x) = xe^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Se modificarmos a função  $g$  no intervalo  $(-1, 1)$ , em que região do plano  $xt$  a nova solução será diferente da anterior?

3. Provamos que, quando  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , o Problema (2.1) tem uma única solução em  $C^2(\mathbb{R}^2)$  dada por (2.5). No caso em que  $f \notin C^2(\mathbb{R})$  ou  $g \notin C^1(\mathbb{R})$  e procuramos soluções não clássicas, no entanto, podemos perder a unicidade. Já vimos um exemplo (Exercício 5 da seção anterior) onde  $f \notin C^2(\mathbb{R})$ . Mostre que, se  $c = 1$ , se  $f = 0$  e se  $g$  for a função característica do intervalo  $(-1, 1)$ , então o problema terá uma infinidade de soluções em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$ , onde  $\Gamma$  é a união das características que contêm um dos pontos  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ . Prove que a solução é única na classe  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$ .

4. Resolva o Problema (2.1) no caso em que  $c = 1$ ,  $f(x) = e^{-x^2}$  e  $g(x) = xe^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Faça o gráfico de  $u(x, t_0)$  nos instantes  $t_0 = 0$ ,  $t_0 = 1$ ,  $t_0 = 2$  e  $t_0 = 3$ .

5. (i) Resolva o Problema (2.1) no caso em que  $c = 1$ ,  $f(x) = 0$  e  $g(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Faça o gráfico de  $u(x, t_0)$  nos instantes  $t_0 = 0$ ,  $t_0 = \pi/2$ ,  $t_0 = \pi$ ,  $t_0 = 3\pi/2$  e  $t_0 = 2\pi$ .

6. (i) Encontre todas as soluções do Problema (2.1) em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$  no caso em que  $c = 1$ ,  $f(x) = g(x) = 0$  se  $x \notin (-1, 1)$ ,  $f(x) = -g(x) = 1 - |x|$  se  $x \in (-1, 1)$ , onde  $\Gamma$  é a união das características que contêm um dos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ .

(ii) Mostre que existe uma única solução em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$  e desenhe o gráfico desta solução nos instantes  $t = 0$ ,  $t = 1/2$ ,  $t = 1$ ,  $t = 3/2$  e  $t = 2$ .

7. (i) Encontre todas as soluções do Problema (2.1) em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$  no caso em que  $c = 1$  e  $f(x) = g(x) = 0$  se  $x \notin (-1, 1)$ , onde  $\Gamma$  é a união das características que contêm um dos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ .

(ii) Suponha que  $f, g \in C(\mathbb{R})$ . Mostre que existe uma única solução em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$ .

### Seção 3: Funções Pares, Ímpares e Periódicas

1. Verifique quais entre as funções abaixo são pares ou ímpares: (i)  $xe^{x^2}$ ; (ii)  $\tan(ax)$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ ; (iii)  $x^3$ ; (iv)  $x^4 + x^2$ ; (v)  $x^3 + x^2$ ; (vi)  $|x|$ .

2. Dadas  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , prove as propriedades a seguir.

(i) Se  $f$  e  $g$  forem funções pares, então  $f + g$ ,  $f - g$  e  $fg$  também o serão.

(ii) Se  $f$  e  $g$  forem funções pares e se  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f/g$  será uma função par.

(iii) Se  $f$  e  $g$  forem funções ímpares, então  $f + g$  e  $f - g$  também o serão.

(iv) Se  $f$  e  $g$  forem funções ímpares, então  $fg$  será uma função par.

(v) Se  $f$  e  $g$  forem funções ímpares e se  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f/g$  será uma função par.

(vi) Se  $f$  for, ao mesmo tempo, par e ímpar, então  $f$  será a função identicamente nula.

(vii) Se  $f$  for uma função par e  $g$  for uma função ímpar, então  $fg$  será ímpar.

3. Determine quais das funções abaixo são periódicas e ache o período fundamental de cada uma delas:

(i)  $\sin(\pi x/l)$ , onde  $l > 0$ ;

(ii)  $\sin(5x)$ ;

(iii)  $\operatorname{senh}(2x)$ ;

(iv)  $e^x$ ;

(v)  $f(x) = 0$  se  $x \in [2n - 1, 2n)$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = 1$  se  $x \in [2n, 2n + 1)$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ ;

(vi)  $f(x) = (-1)^n$  se  $x \in [2n - 1, 2n)$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = 1$  para todos os outros valores de  $x \in \mathbb{R}$ .

4. (i) Dê um exemplo de duas funções periódicas de períodos diferentes cuja soma é periódica.

(ii) Dê um exemplo de duas funções periódicas de períodos diferentes cuja soma não é periódica.

(iii) Mostre que se  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem periódicas com períodos  $T_f$  e  $T_g$ , respectivamente, e se existirem  $m, n \in \mathbb{Z}$  tais que  $mT_f = nT_g$ , então  $f + g$  será periódica com período  $mT_f = nT_g$ .

(iv) Mostre que, dados  $a, b \in \mathbb{R}$  não nulos, a função  $f(x) = \operatorname{sen}(ax) + \operatorname{sen}(bx)$  é periódica se e somente se  $a/b \in \mathbb{Q}$ .

5. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e periódica de período  $T > 0$ . Mostre que a função

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

é periódica de período  $T$  se e somente se

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

6. Encontre as extensões pares e periódicas de período  $T$  de cada uma das funções dadas e discuta suas propriedades de continuidade e diferenciabilidade:

(i)  $f(x) = x$  se  $x \in [0, 1]$ ,  $T = 2$ ;

(ii)  $f(x) = x^2$  se  $x \in [0, 1]$ ,  $T = 2$ ;

(iii)  $f(x) = \tan x$  se  $x \in [0, \pi/2)$ ,  $f(\pi/2) = 1$ ,  $T = \pi$ ;

(iv)  $f(x) = \cos(x^2)$  se  $x \in [0, \sqrt{\pi}]$ ,  $T = 2\pi$ ;

(v)  $f(x) = x(x-1)$  se  $x \in [0, 1]$ ,  $T = 2$ .

7. (i) Para cada uma das funções do exercício anterior, determine, quando possível, uma extensão ímpar e periódica de período  $T$  e discuta suas propriedades de continuidade e diferenciabilidade.

(ii) Quando não for possível achar a extensão do item anterior, redefine a função nos extremos dos intervalos de modo a tornar possível tal extensão e encontre-a.

#### Seção 4: A Corda Finita

1. Resolva o Problema (4.1) no caso em que  $c = 1$ ,  $l = \pi$ ,  $f(x) = 0$  e  $g(x) = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

2. Resolva o Problema (4.1) no caso em que  $c = 1 = l$ ,  $f(x) = x^3(x-1)^3$  e  $g(x) = \cos(\pi x - \pi/2)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

3. Resolva o Problema (4.1) no caso em que  $c = 1 = l$ ,  $f(x) = \sin(\pi x)$  e  $g(x) = x^2 - x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

4. Resolva o Problema (4.1) no caso em que  $c = 1 = l$ ,  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x$  e  $g(x) = x^2 - x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

5. Resolva o Problema (4.1) no caso em que  $c = 1$ ,  $l = \pi$ ,  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos^2 x - 1$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

6. Seja  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x$  se  $x \in [0, 1)$ ,  $g(1) = 0$  e seja  $f \equiv 0$ .

(i) Mostre que  $u = u(x, t)$  definida por (4.6) para  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$  é uma solução do Problema (4.1) em  $C^2([0, 1] \times [0, +\infty) - \Gamma) \cap C([0, 1] \times [0, +\infty))$ , onde  $\Gamma$  é conjunto de todas as características contendo os pontos da forma  $(2k+1, 0)$ , ou seja,  $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ com } x+ct = 2k+1 \text{ ou } x-ct = 2k+1\}$ .

(ii) Mostre que existe uma infinidade de soluções em  $C^2([0, 1] \times [0, +\infty) - \Gamma)$ , mas a solução em  $C^2([0, 1] \times [0, +\infty) - \Gamma) \cap C([0, 1] \times [0, +\infty))$  é única.

7. Discuta a existência e unicidade de soluções para o Problema (4.1) no caso em que  $c = 2$ ,  $l = 1$ ,  $f(x) \equiv 0$  e  $g(x) = x$  se  $x \in [0, 1/2)$ ,  $g(x) = 1 - x$  se  $x \in [1/2, 1]$ .

### Exercícios Variados

1. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \alpha(u_t + u_x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é uma constante,  $f$  e  $g$  são funções dadas,  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Discuta a existência e a unicidade em  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . (Sugestão: faça uma mudança de variável conveniente.)

2. Discuta a existência e unicidade em  $C^2(\mathbb{R}^2)$  para o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - 2au_x + a^2u, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $a > 0$  é constante,  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ .

3. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2u_{xx} + h(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $c > 0$  é constante,  $h \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ .

- (i) Faça a mudança de variável  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$  para transformar esse problema em

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= -\frac{1}{4c^2} h\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right), \quad \eta < \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ v(\xi, \xi) &= f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad cv_\xi(\xi, \xi) - cv_\eta(\xi, \xi) = g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Mostre que o problema em (i) tem uma única solução em  $C^2(H) \cap C(\overline{H})$ , onde  $H = \{(\xi, \eta) : \eta < \xi\}$ , dada por

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = & \frac{f(\xi) + f(\eta)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\eta}^{\xi} g(r) dr \\ & + \frac{1}{4c^2} \iint_{D(\xi, \eta)} h\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right) dr ds, \end{aligned}$$

onde  $D(\xi, \eta) = \{(r, s) : \eta \leq s \leq r \leq \xi\}$ .

(iii) Conclua que o problema original tem uma única solução em  $C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(r) dr \\ & + \frac{1}{2c} \iint_{\Omega} h(r, s) dr ds \end{aligned}$$

onde  $\Omega = \Omega(x, t)$  é a região limitada pelas características contendo  $(x, t)$  e pelo eixo dos  $x$ .

4. Considere o problema da corda “semi-infinita”, ou seja,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $c > 0$  é constante e  $f \in C^2([0, +\infty)), g \in C^1([0, +\infty))$  são funções dadas satisfazendo  $f(0) = f''(0) = 0 = g(0)$ . Use a solução geral da equação de onda para mostrar que este problema tem uma única solução em  $C^2([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ . Encontre uma fórmula para esta solução. O que acontece se a condição  $u(0, t) = 0$  for substituída por  $u(0, t) = h(t), t \geq 0$ , com  $h \in C^2([0, +\infty))$ ? Discuta existência e unicidade em  $C^2([0, +\infty) \times [0, +\infty))$  neste caso.

# Capítulo 6

## Separação de Variáveis e Séries de Fourier

Na primeira seção, usaremos um problema envolvendo a equação do calor para introduzir a ideia básica do método de separação de variáveis, o que nos levará, de forma natural, às séries de Fourier. Nas duas últimas seções, começaremos nosso estudo dessas séries.

### 1 O Método de Separação de Variáveis

Nesta seção, usaremos o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \tag{1.1}$$

para introduzir um método clássico para a obtenção de soluções de problemas envolvendo EDPs lineares com coeficientes constantes acompanhadas de condições de contorno e/ou iniciais, o venerável *método de separação de variáveis*.

Como vimos no Exemplo 3.3 do primeiro capítulo,  $u(x, t)$  é a temperatura no instante  $t$  no ponto  $x$  de uma barra de comprimento  $l$  com extremos em contato com um reservatório térmico mantido a temperatura constante zero,  $f$  é a distribuição inicial de temperatura e, para que haja solução,  $f$  tem que satisfazer a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{1.2}$$

Do ponto de vista físico, é razoável procurar soluções  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$  e, para isto, é necessário que  $f \in C([0, l])$ .

A EDP em(1.1) é a equação do calor na sua forma mais simples e, como já vimos anteriormente, é o protótipo das equações parabólicas. Joseph B. Fourier (1768-1830) foi o primeiro a estudar sistematicamente o problema de condução de calor e seu nome está intrinsecamente ligado ao método de separação de variáveis (aliás também conhecido como *método de Fourier*), que é o precursor do método de expansão em auto-funções.

O problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

é um problema linear e homogêneo, ou seja, o espaço de soluções do Problema (1.3) é um subespaço vetorial de  $C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ . Neste caso, vale o princípio da superposição (veja a Proposição 2.2 do Capítulo 1) e a ideia então é procurar uma família de soluções  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  do Problema (1.3), de modo que todas as soluções possam ser expressas na forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \tag{1.4}$$

(com uma noção de convergência adequada). Assim, a solução do Problema (1.1) seria dada por (1.4), onde a sequência de números reais  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$  seria determinada pela condição inicial, ou seja, impondo-se que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, 0). \tag{1.5}$$

Vamos então resolver o Problema (1.1) desta maneira.

Para achar as soluções de (1.3), vamos procurar soluções da forma (daí o nome separação de variáveis!)

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) na EDP, obtemos

$$\varphi(x)\psi'(t) = \alpha^2 \varphi''(x)\psi(t)$$

e, dividindo por  $\alpha^2\varphi(x)\psi(t)$  (nos pontos onde  $\varphi$  e  $\psi$  não se anulam),

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}. \quad (1.7)$$

O lado esquerdo da equação (1.7) é uma função só de  $x$ , enquanto que o lado direito depende apenas de  $t$ , logo ambos os lados têm que ser iguais a uma mesma constante que denotaremos por  $-\lambda$ . Obtemos, então, duas EDOs

$$\begin{aligned} -\varphi''(x) &= \lambda\varphi(x), \\ \psi'(t) &= -\alpha^2\lambda\psi(t). \end{aligned}$$

Estamos procurando soluções  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ , logo queremos

$$\varphi \in C^2((0, l)) \cap C([0, l]) \quad \text{e} \quad \psi \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty)).$$

Impondo a condição de contorno, temos

$$\varphi(0)\psi(t) = 0 = \varphi(l)\psi(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Como não queremos soluções identicamente nulas,  $\varphi$  é solução do problema

$$\begin{aligned} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ \varphi(0) &= 0 = \varphi(l), \end{aligned} \quad (1.8)$$

enquanto que  $\psi$  é qualquer solução da EDO

$$\psi'(t) + \alpha^2\lambda\psi(t) = 0. \quad (1.9)$$

Um valor de  $\lambda$  para o qual (1.8) tem solução não trivial (ou seja, que não é identicamente nula) é chamado um *autovalor* do Problema (1.8) e as soluções não triviais correspondentes são as *autofunções* correspondentes ao autovalor  $\lambda$ .

Como estamos procurando soluções reais e  $-\lambda$  é igual a ambos os lados da equação (1.7), é claro que só nos interessam os casos em que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mas, de fato, os autovalores do Problema (1.8) são sempre reais e positivos. Para provar isso, vamos admitir por um instante soluções complexas e vamos introduzir um *produto interno* no espaço  $C_{\mathbb{C}}([0, l])$ , de todas as funções contínuas  $[0, l] \rightarrow \mathbb{C}$ : se  $f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$ , definimos

$$(f|g) = \int_0^l f(x)\overline{g(x)} dx, \quad (1.10)$$

onde  $\overline{g(x)}$  é o complexo conjugado de  $g(x)$ ,  $x \in [0, l]$ .

**Proposição 1.1.**  $(\cdot|\cdot)$  definido por (1.10) é um produto interno em  $C_{\mathbb{C}}([0, l])$ , ou seja, satisfaçõas as seguintes propriedades:

- (i)  $(f|f) \geq 0, \quad \forall f \in C_{\mathbb{C}}([0, l]);$
- (ii)  $(f|f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0;$
- (iii)  $(\alpha f + g|h) = \alpha(f|h) + (g|h), \quad \forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l]), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C};$
- (iv)  $(f|g) = \overline{(g|f)}, \quad \forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l]).$

A demonstração da Proposição 1.1 é muito simples: basta escrever o produto interno como uma integral e usar as propriedades elementares da integral de funções contínuas.

Voltando ao Problema (1.8), se  $\lambda \in \mathbb{C}$  for um autovalor e se  $\varphi$  for uma autofunção associada,  $\varphi \in C_{\mathbb{C}}^2((0, l)) \cap C_{\mathbb{C}}([0, l])$ , note que, como  $\varphi'' = -\lambda\varphi$ , existirão os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi''(x) = -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\lambda\varphi(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow l^-} \varphi''(x) = -\lambda \lim_{x \rightarrow l^-} \varphi(x) = -\lambda\varphi(l) = 0;$$

por outro lado, como  $\varphi$  é contínua no intervalo fechado,

$$\lambda \int_0^x \varphi(y) dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \varphi''(y) dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\varphi'(x) - \varphi'(a)],$$

$$\lambda \int_x^l \varphi(y) dy = \lim_{b \rightarrow l^-} \int_x^b \varphi''(y) dy = \lim_{b \rightarrow l^-} [\varphi'(b) - \varphi'(x)],$$

logo existem os limites

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a), \quad \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b).$$

Estas propriedades nos permitem integrar as funções  $\varphi''$  e  $\varphi'$  no intervalo

$[0, l]$ . Usando a EDP e integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \lambda(\varphi|\varphi) &= (\lambda\varphi|\varphi) = (-\varphi''|\varphi) = - \int_0^1 \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx \\
 &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} \int_a^b \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx \\
 &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} \left[ \varphi'(x) \overline{\varphi(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) \overline{\varphi'(x)} dx \right] \\
 &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} [\varphi'(b) \overline{\varphi(b)} - \varphi'(a) \overline{\varphi(a)}] + \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx \\
 &= (\varphi'|\varphi') > 0
 \end{aligned}$$

(pois a única solução constante do Problema (1.8) é  $\varphi \equiv 0$ ), logo, como  $(\varphi|\varphi) > 0$ , concluímos que  $\lambda > 0$ . É interessante notar também que, se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  forem autofunções de (1.8) correspondente a autovalores distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  serão *ortogonais* em relação ao produto interno (1.10), ou seja  $(\varphi_1|\varphi_2) = 0$ : de fato, tomando limites como acima, vemos que podemos integrar por partes duas vezes para obter

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\varphi_1|\varphi_2) &= (\lambda_1\varphi_1|\varphi_2) = (-\varphi_1''|\varphi_2) \\
 &= - \int_0^l \varphi_1''(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \\
 &= \int_0^1 \varphi_1'(x) \overline{\varphi_2'(x)} dx \\
 &= - \int_0^l \varphi_1(x) \overline{\varphi_2''(x)} dx \\
 &= (\varphi_1| - \varphi_2'') \\
 &= (\varphi_1|\lambda_2\varphi_2) = \lambda_2(\varphi_1|\varphi_2)
 \end{aligned}$$

logo, como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $(\varphi_1|\varphi_2) = 0$ .

Vamos considerar a existência de autovalores e autofunções reais para o Problema (1.8). Como vimos acima, basta considerar  $\lambda > 0$ , logo a solução geral (real) da EDO em (1.8) é

$$\varphi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais arbitrárias; impondo as condições de contorno,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= a = 0, \\ \varphi(l) &= b \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.\end{aligned}$$

Como  $\varphi \not\equiv 0$ ,  $b \neq 0$  e  $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ , segue que  $\sqrt{\lambda}l = n\pi$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , logo

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.11)$$

são os autovalores de (1.8) e

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l], \quad (1.12)$$

são as autofunções associadas. Note que os valores negativos de  $n$  não fornecem novas soluções pois  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ; portanto todas as autofunções associadas ao autovalor  $\lambda_n$  são múltiplos de  $\varphi_n$ .

Falta apenas resolver a EDO (1.9):  $e^{-\alpha^2\lambda t}$  é um fator integrante e a solução geral é

$$\psi(t) = ke^{-\alpha^2\lambda t}$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária.

Obtivemos, então, as soluções

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

e, usando o princípio da superposição, procuramos uma solução da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0. \quad (1.13)$$

Observe que, formalmente, ou seja, deixando de lado os problemas de convergência e diferenciabilidade termo a termo,  $u$  é solução de (1.3). Procurando uma solução de (1.1) da forma (1.13) e impondo a condição inicial, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l]. \quad (1.14)$$

Portanto, para resolver (1.1) por este método, é preciso saber quais funções  $f \in C([0, l])$  podem ser expressas como uma série em senos da forma (1.14), em que sentido as séries (1.13) e (1.14) convergem e como calcular os coeficientes  $b_n$  conhecendo  $f$ . O cálculo dos coeficientes é bastante simples: como as autofunções  $\varphi_n$  e  $\varphi_m$ , se  $n \neq m$ , correspondem a autovalores distintos, elas são ortogonais em relação ao produto interno (1.10); calculando então formalmente o produto interno de  $f$  com  $\varphi_n$ , obtemos

$$\begin{aligned} (f|\varphi_n) &= \left( \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \varphi_m |\varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m (\varphi_m |\varphi_n) \\ &= b_n (\varphi_n |\varphi_n) = b_n \int_0^l \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx = b_n \frac{l}{2}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx. \quad (1.15)$$

Note que os coeficientes  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dados por (1.15) estão bem definidos se  $f \in C([0, l])$ ; no entanto, a convergência da série (1.14) é mais delicada e será discutida no próximo capítulo.

**Observação.** Ao contrário do método utilizado anteriormente para resolver problemas com a equação de onda, o método de separação de variáveis produz um candidato a solução, mas nada podemos afirmar sobre a unicidade: para resolver a equação de onda, supusemos que  $u$  era uma solução e provamos que  $u$  tinha que ter uma determinada forma: na procura de soluções para o Problema (1.1), partimos de uma determinada forma e nada impede que existam outras soluções completamente diferentes. Mostraremos mais tarde que o Problema (1.1) tem, de fato, uma única solução.

Um problema um pouco diferente, mas que também pode ser tratado pelo método de separação de variáveis, ocorre quando as extremidades da barra estão isoladas, em vez de estarem em contato com um reservatório térmico mantido à temperatura constante igual a zero, como no Problema (1.1). Segundo a lei de Newton, o fluxo de calor através de uma seção da barra é proporcional à variação de temperatura na direção

do eixo, portanto a temperatura  $u(x, t)$  é solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u_x(0, t) &= 0 = u_x(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Neste caso, procedendo como anteriormente, obtemos que  $f$ , em vez de ter uma expansão em série de senos, tem uma expansão em série de cossenos, ou seja,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (1.17)$$

No caso em que o fluxo de calor em cada extremidade da barra é proporcional à temperatura na extremidade, temos ainda outro tipo de condições de contorno. Um exemplo desse caso é o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u_x(0, t) + u(0, t) &= 0 = u_x(l, t) + u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Observe que o problema de contorno obtido de (1.18) retirando-se a condição inicial ainda é um problema linear homogêneo e o método de separação de variáveis pode ser utilizado; neste caso,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]. \quad (1.19)$$

(O fator  $1/2$  é utilizado apenas para que as fórmulas para  $a_n$  sejam do mesmo tipo se  $n > 0$  ou se  $n = 0$ .)

O método de separação de variáveis nos leva então, de maneira natural, ao estudo de séries do tipo (1.19), as *séries de Fourier*. Na próxima seção, começaremos a estudar estas séries e voltaremos ao método de separação de variáveis no Capítulo 8.

## 2 Os Coeficientes de Fourier

Na seção anterior, fomos levados a expressar uma função  $f$  em uma série da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]. \quad (2.1)$$

Gostaríamos de responder três questões fundamentais:

- (i) dada uma função  $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , quando é possível expressar  $f$  como em (2.1)?
- (ii) como calcular os coeficientes  $a_n, b_n$  conhecendo  $f$ ?
- (iii) em que sentido a série (2.1) converge?

Destas três, a segunda é a mais simples (pelo menos do ponto de vista formal) e é a que responderemos nesta seção. Mas, antes, precisaremos estudar algumas propriedades das funções trigonométricas

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

$$\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.3)$$

A primeira propriedade é o caráter periódico dessas funções:

**Proposição 2.1.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , as funções  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  definidas por (2.2) e (2.3), respectivamente, são periódicas com período fundamental  $T = 2l/n$ . Em particular,  $2l$  é um período comum a todas essas funções.*

**Demonstração:** Vamos provar o resultado para  $\psi_n$ ; a demonstração para  $\varphi_n$  é inteiramente análoga. Vamos primeiro mostrar que  $T = 2l/n$  é um período para  $\psi_n$ : de fato,

$$\begin{aligned} \psi_n(x + T) &= \cos\left(\frac{n\pi(x + T)}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \psi_n(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $T'$  for outro período para  $\psi_n$ , então

$$\begin{aligned} \psi_n(x + T') &= \psi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi(x + T')}{l}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) \\ &\quad - \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

escolhendo  $x = l/n$ , obtemos

$$\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{n\pi T'}{l} = 2k\pi \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } T' = \frac{k2l}{n} = kT,$$

portanto  $T$  é o menor período positivo de  $\psi_n$ .  $\square$

Definimos, na seção anterior, o produto interno em  $C_C([0, l])$ ; é claro que a mesma fórmula define um produto interno em  $C([0, l])$ . Em geral, quando  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções tal que seu produto é integrável, podemos definir o produto interno

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (2.4)$$

Se  $(f|g) = 0$ , dizemos que  $f$  e  $g$  são *ortogonais* em  $[a, b]$ . Uma família de funções é dita *ortogonal* em  $[a, b]$  se as funções são ortogonais duas a duas.

**Proposição 2.2.** *O conjunto  $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  é um conjunto ortogonal em  $[-l, l]$  e valem as seguintes relações de ortogonalidade:*

$$\int_{-l}^l \psi_n(x)\psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m, n \in \mathbb{Z}^+, m \neq n, \\ l & \text{se } m = n \in \mathbb{N}, \\ 2l & \text{se } m = n = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\int_{-l}^l \psi_n(x)\varphi_m(x) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall m \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x)\varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ l & \text{se } m = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.7)$$

A demonstração da Proposição 2.2 é por cálculo direto, usando as expressões para o produto de senos e cossenos. Para exemplificar, vamos provar (2.7). Para isto, usaremos as fórmulas

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (2.8)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (2.9)$$

Subtraindo (2.8) de (2.9),

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$$

e, portanto,

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}. \quad (2.10)$$

Usando a fórmula (2.10) para calcular a integral em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx &= \int_{-l}^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) \right] dx; \end{aligned}$$

se  $n \neq m$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \varphi(x) \varphi_m(x) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{l}{(n-m)\pi} 2\sin((n-m)\pi) - \frac{l}{(n+m)\pi} 2\sin((n+m)\pi) \right] = 0; \end{aligned}$$

se  $n = m$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l (\varphi_n(x))^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \right] dx \\ &= l - \frac{1}{2} \frac{l}{2n\pi} 2\sin(2n\pi) = l. \end{aligned}$$

O leitor curioso deve estar se perguntando porque usar o produto interno em  $[-l, l]$ , já que as funções nas quais estamos interessados estão definidas, em princípio, apenas no intervalo  $[0, l]$ . A razão é muito simples: as funções  $\varphi_n$  e  $\psi_m$  não são ortogonais em  $[0, l]$ , o que dificulta o cálculo dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ . É claro que, no caso de uma série apenas em senos, não tem problema, pois  $\varphi_n$  e  $\varphi_m$  são ortogonais em  $[0, l]$  se  $n \neq m$ .

Vamos usar as propriedades acima para calcular formalmente os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  na Equação (2.1), no caso em que a função  $f$  for conhecida. Em termos das funções  $\varphi_n$  e  $\psi_m$ , podemos reescrever (2.1) como

$$f = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n). \quad (2.11)$$

Calculando formalmente o produto interno de  $f$  com  $\psi_0$  em  $[-l, l]$ , com o auxílio da Proposição 2.2 obtemos

$$(f|\psi_0) = \frac{a_0}{2} (\psi_0|\psi_0) = a_0 l$$

e, portanto,

$$a_0 = \frac{1}{l} (f|\psi_0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)\psi_0(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

de maneira inteiramente análoga, fazendo o produto interno de  $f$  com  $\psi_n$  e depois com  $\varphi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\begin{aligned} (f|\psi_n) &= a_n (\psi_n|\psi_n) = a_n l, \\ (f|\varphi_n) &= b_n (\varphi_n|\varphi_n) = b_n l. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{l} (f|\psi_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.12)$$

$$b_n = \frac{1}{l} (f|\varphi_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

É claro que a obtenção das fórmulas acima foi inteiramente formal, mas agora é possível inverter o processo, ou seja, dada  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que as integrais em (2.12) e (2.13) fazem sentido, podemos formar a série (2.1), com  $a_n$  dada por (2.12) e  $b_n$  por (2.13), e estudar sua convergência. As Equações (2.12) e (2.13) são conhecidas como as *fórmulas de Euler-Fourier*.

Sejam  $l > 0$  e  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. A *série de Fourier de f* é a série

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \quad (2.14)$$

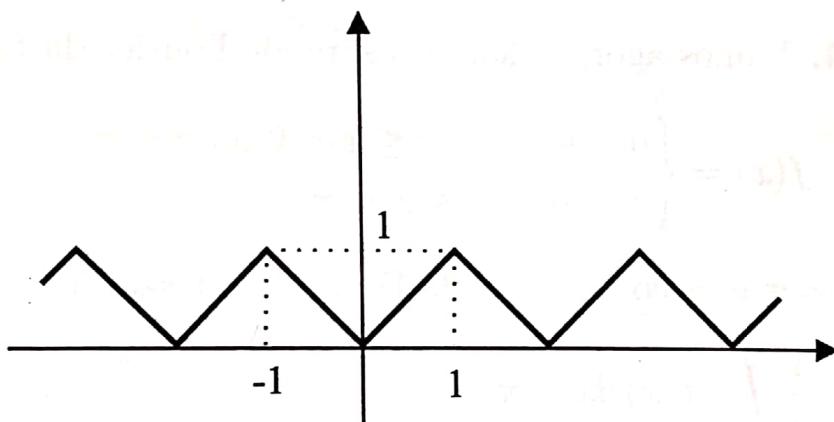
onde os coeficientes  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , são dados pelas fórmulas de Euler-Fourier. Os coeficientes  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  são chamados de *coeficientes de Fourier de f*.

Observe que, pela Proposição 2.1, cada um dos termos da série (2.14) é uma função periódica de período  $2l$  e portanto, se a série convergir para

cada  $x \in \mathbb{R}$ , ela convergirá para uma função periódica de período  $2l$ . Em particular, se a função  $f$  for tal que  $f(-l) \neq f(l)$ , não podemos esperar que a série de Fourier de  $f$  converja para  $f(x)$  para todo  $x \in [-l, l]$ . Além disso, é natural estudar séries de Fourier de funções da reta na reta que são periódicas: se  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  for tal que  $f(-l) = f(l)$  e sua série de Fourier convergir para  $f(x)$  se  $x \in [-l, l]$ , é claro que  $S[f]$  convergirá, de fato, para  $F(x)$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a extensão periódica de período  $2l$  de  $f$ .

**Exemplo 2.3.** Vamos calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



**Fig. 25:** Gráfico da extensão periódica de período 2 da função  $f$  do Exemplo 2.3.

Neste caso,  $l = 1$ . Calculando diretamente os coeficientes de Fourier pelas Equações (2.12) e (2.13):

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 f(x) dx = 1, \\ a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ &= 2 \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 x \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = 0, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-2)}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos((2k+1)\pi x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.4.** Vamos agora calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \text{ ou } x = \pi, \\ \pi & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

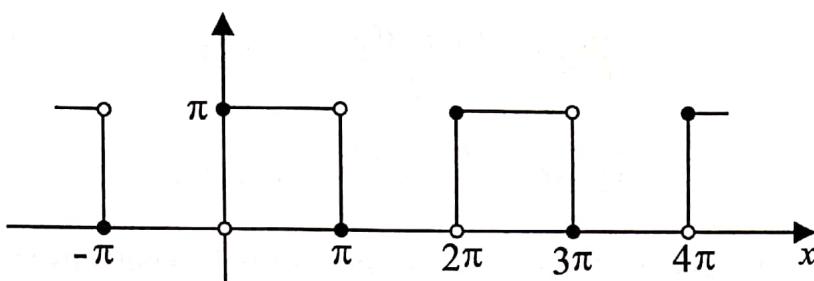
Nesse caso  $l = \pi$  e os coeficientes de Fourier de  $f$  são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi = \frac{1 - (-1)^n}{n} \end{aligned}$$

e portanto a série de Fourier de  $f$  é dada por

$$S[f] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} \sin((2k+1)x)$$

O leitor atento já deve ter observado que a função  $f$  do Exemplo 2.3 é par e que sua série de Fourier é uma série em cossenos. De fato, as funções pares sempre têm séries de Fourier apenas em cossenos enquanto que as funções ímpares têm série de Fourier em senos. A razão é simples: uma função par é ortogonal em  $[-l, l]$  a uma função ímpar.



**Fig. 26:** Gráfico da extensão periódica de período  $2\pi$  da função de  $f$  do Exemplo 2.4.

Podemos reescrever a série de Fourier de uma função  $f$  definida em  $[-l, l]$  de uma maneira diferente usando exponenciais complexas. Lembre que, se  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

de modo que

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/l} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/l} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\pi x/l} \end{aligned}$$

onde a série de  $-\infty$  e  $+\infty$  deve ser interpretada no sentido de valor próprio, ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\pi x/l} \quad (2.15)$$

e os coeficientes  $\hat{f}(n)$ , também chamados de *coeficientes de Fourier complexos* de  $f$ , são dados por

$$\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2} \quad (2.16)$$

$$\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.17)$$

$$\widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

A série (2.15) é a *série de Fourier complexa* de  $f$ . Usaremos muitas vezes a forma complexa da série de Fourier por ser mais concisa. Observe que a convergência da série de Fourier de  $f$ , dada por (2.14), é equivalente à convergência da série complexa no sentido da existência do limite em (2.15). Das Equações (2.12), (2.13), (2.16), (2.17) e (2.18), é fácil ver que

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x)e^{-inx/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.19)$$

Observe que, mesmo para funções reais, os coeficientes de Fourier complexos são de fato números complexos não reais, a não ser que  $b_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  (isto ocorrerá se a função real for uma função par).

### 3 Interpretação Geométrica

Do ponto de vista geométrico, o método que utilizamos para o cálculo dos coeficientes de Fourier é bastante natural. Para ver isto, considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual:

$$(x|y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n). \quad (3.1)$$

Como sabemos, os vetores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$  formam uma base para  $\mathbb{R}^n$  e, portanto, todo vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores  $e_1, \dots, e_n$ ,

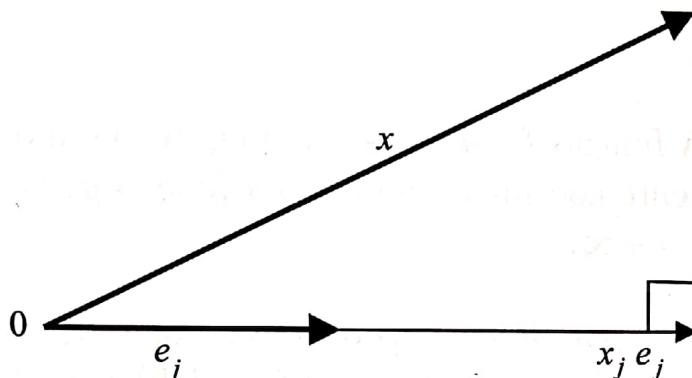
$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Como calculamos os coeficientes  $c_j$ ? Como a base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é orthonormal, ou seja,

$$(e_j | e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k \end{cases}$$

( $\delta_{jk}$  é chamado o *delta de Kronecker*), obtemos

$$(x|e_k) = \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j | e_k \right) = x_k.$$



**Fig. 27:**  $x_j e_j$  é a projeção ortogonal do vetor  $x$  sobre a reta determinada pelo vetor  $e_j$ .

Geometricamente,

$$x_j e_j = (x|e_j) e_j$$

é a projeção ortogonal de  $x$  ao longo do vetor  $e_j$ .

A situação no caso das séries de Fourier é análoga: aqui também temos um espaço vetorial (por exemplo  $C([-l, l])$ ) munido de um produto interno (definido por (2.4) com  $a = -b = l$ ) e um conjunto ortogonal (mas não ortonormal em geral, pois  $(\varphi_n|\varphi_n) = (\psi_n|\psi_n) = l$  se  $n \in \mathbb{N}$ ) formado pelas funções  $\psi_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , e  $\varphi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Embora essas funções não formem uma base no sentido algébrico, se uma função  $f$  puder ser expandida em série de Fourier, se a série convergir pontualmente para  $f$  e se pudermos integrar a série termo a termo, podemos justificar as contas formais que fizemos para achar as fórmulas de Euler-Fourier.

Vamos então usar essas ideias geométricas para deduzir algumas propriedades das séries de Fourier. É conveniente para aplicações escolher um espaço vetorial um pouco maior do que  $C([-l, l])$ .

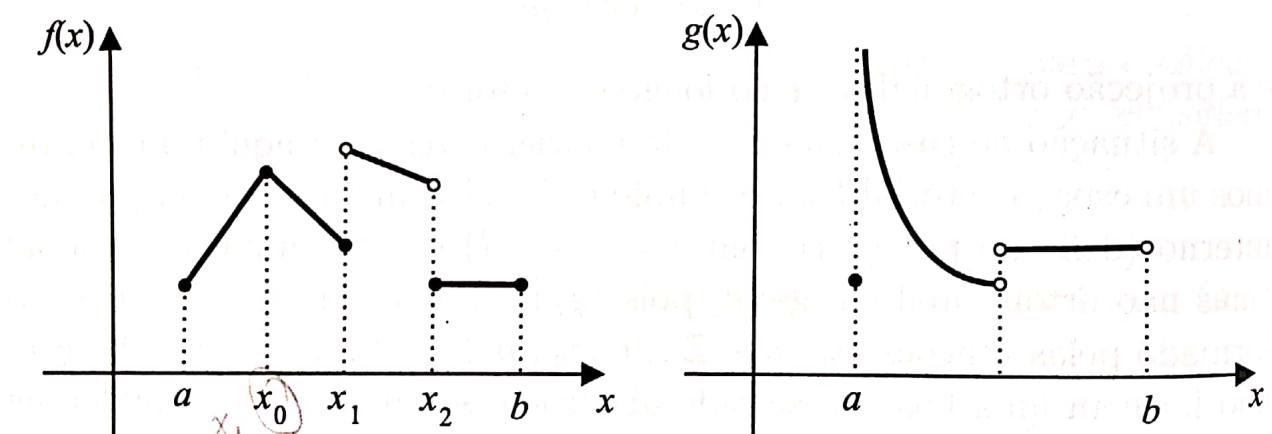
**Definição 3.1.** Uma função  $f$  é dita *seccionalmente contínua* em  $[a, b]$  se existir uma partição  $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  tal que  $f$  seja contínua em cada subintervalo  $(x_j, x_{j+1})$  e que  $f(x)$  tenda a um limite finito quando  $x \in (x_j, x_{j+1})$  tende a  $x_j$  ou a  $x_{j+1}$ ,  $0 \leq j \leq n - 1$ .

Note que uma função seccionalmente contínua em  $[a, b]$  não está necessariamente definida em todo o intervalo  $[a, b]$ : a função  $f$  na Definição 3.1 pode estar definida apenas em  $\bigcup_{j=0}^{n-1} (x_j, x_{j+1})$ . Definimos desta maneira para poder incluir a derivada de funções como a função  $f$  na Figura 28. Note que uma função seccionalmente contínua em  $[a, b]$  é limitada, ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  qualquer que seja  $x$  no domínio de  $f$ .

**Exemplo 3.2.** A função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico é mostrado na Figura 28 é seccionalmente contínua, enquanto a função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  não o é, pois  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ .

Vamos denotar por  $SC([-l, l])$  o espaço das funções reais seccionalmente contínuas em  $[-l, l]$ . Note que  $SC([-l, l])$  é um espaço vetorial e que podemos definir, se  $f, g \in SC([-l, l])$ ,

$$(f|g) = \int_{-l}^l f(x)g(x) dx. \quad (3.2)$$



**Fig. 28:**  $f$  é seccionalmente contínua mas  $g$  não o é. Observe que  $f'$  também é seccionalmente contínua, embora não esteja definida em  $x_0, x_1$  e  $x_2$ .

É importante observar que, em  $SC([-l, l])$ , o “produto”  $(\cdot|\cdot)$  definido acima não é um produto interno pois, como as funções em  $SC([-l, l])$  não são contínuas em geral, existem funções  $f \in SC([-l, l])$  com  $(f|f) = 0$  mas  $f(x) \neq 0$  para algum  $x \in [-l, l]$ . De fato,  $(\cdot|\cdot)$  é uma *forma bilinear simétrica positiva* em  $SC([-l, l])$ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

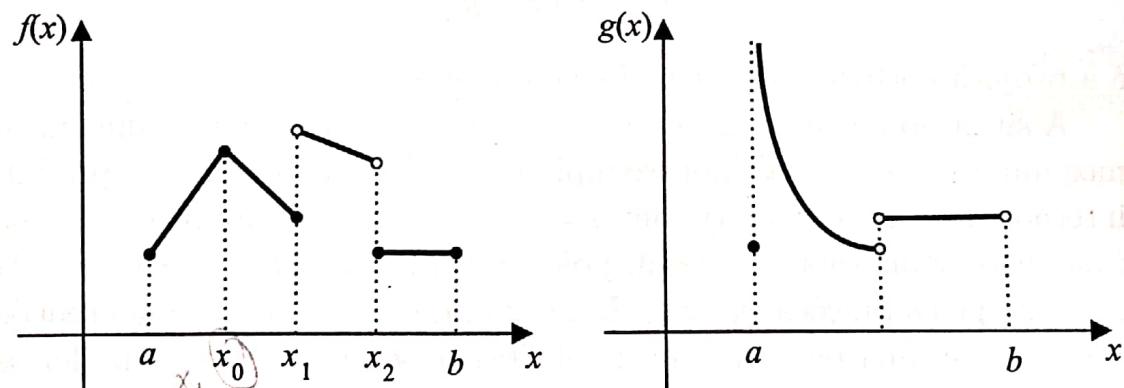
- (i)  $(\alpha f + \beta g|h) = \alpha(f|h) + \beta(g|h), \quad \forall f, g, h \in SC([-l, l]), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

Note que uma função seccionalmente contínua em  $[a, b]$  não está necessariamente definida em todo o intervalo  $[a, b]$ : a função  $f$  na Definição 3.1 pode estar definida apenas em  $\bigcup_{j=0}^{n-1}(x_j, x_{j+1})$ . Definimos desta maneira para poder incluir a derivada de funções como a função  $f$  na Figura 28. Note que uma função seccionalmente contínua em  $[a, b]$  é limitada, ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  qualquer que seja  $x$  no domínio de  $f$ .

**Exemplo 3.2.** A função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico é mostrado na Figura 28 é seccionalmente contínua, enquanto a função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  não o é, pois  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ .

Vamos denotar por  $SC([-l, l])$  o espaço das funções reais seccionalmente contínuas em  $[-l, l]$ . Note que  $SC([-l, l])$  é um espaço vetorial e que podemos definir, se  $f, g \in SC([-l, l])$ ,

$$(f|g) = \int_{-l}^l f(x)g(x) dx. \quad (3.2)$$



**Fig. 28:**  $f$  é seccionalmente contínua mas  $g$  não o é. Observe que  $f'$  também é seccionalmente contínua, embora não esteja definida em  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$ .

É importante observar que, em  $SC([-l, l])$ , o “produto”  $(\cdot|\cdot)$  definido acima não é um produto interno pois, como as funções em  $SC([-l, l])$  não são contínuas em geral, existem funções  $f \in SC([-l, l])$  com  $(f|f) = 0$  mas  $f(x) \neq 0$  para algum  $x \in [-l, l]$ . De fato,  $(\cdot|\cdot)$  é uma *forma bilinear simétrica positiva* em  $SC([-l, l])$ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $(\alpha f + \beta g|h) = \alpha(f|h) + \beta(g|h), \quad \forall f, g, h \in SC([-l, l]), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

- (ii)  $(f|g) = (g|f)$ ,  $\forall f, g \in SC([-l, l])$  (simetria);
- (iii)  $(f|f) \geq 0$ ,  $\forall f \in SC([-l, l])$  (positividade).

Dessas propriedades obtemos facilmente a *desigualdade de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz* (CBS): quaisquer que sejam  $f, g \in SC([-l, l])$ ,

$$|(f|g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad (3.3)$$

onde

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)}, \quad \forall f \in SC([-l, l]). \quad (3.4)$$

De fato, dado  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq (rf + g|rf + g) = r^2 \|f\|^2 + 2r(f|g) + \|g\|^2; \quad (3.5)$$

como (3.5) é válida  $\forall r \in \mathbb{R}$ , o discriminante tem que ser menor ou igual a zero, ou seja,

$$4(f|g)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0$$

e portanto a Desigualdade (3.3) é válida.

**Observação.** Segundo (HARDY, LITTLEWOOD e PÓLYA, 1973), a Desigualdade (3.3) foi provada primeiro por Cauchy para o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$  (1821); Bunyakowski (1859) e Schwarz (1885) provaram independentemente o resultado para o caso de produto interno definido por integrais. Na Europa Ocidental, nos Estados Unidos e, em consequência, no Brasil, a desigualdade é conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*.

É importante observar que a Desigualdade (3.3) é válida em qualquer espaço vetorial real munido de uma forma bilinear simétrica positiva - em particular, em qualquer espaço vetorial real munido de um produto interno.

A função  $\|\cdot\|$  definida por (3.4) é uma *semi-norma* em  $SC([-l, l])$ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in SC([-l, l]);$
- (ii)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|, \quad \forall f \in SC([-l, l]), \quad \alpha \in \mathbb{R};$
- (iii)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in SC([-l, l])$  (*desigualdade triangular*.)

A demonstração das propriedades (i) e (ii) é trivial; quanto à desigualdade triangular, basta usar a desigualdade CBS:

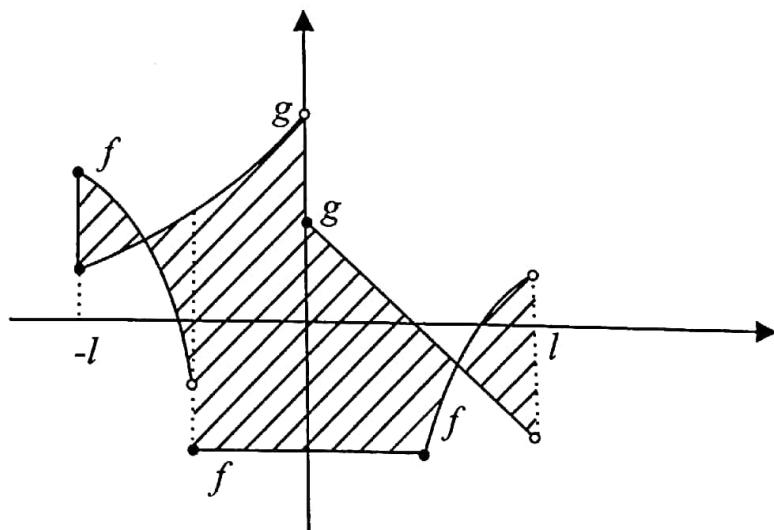
$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g|f + g) \\ &= \|f\|^2 + 2(f|g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|(f|g)| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

Outra propriedade importante é o *Teorema de Pitágoras*:

$$(f|g) = 0 \Rightarrow \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \quad (3.6)$$

(A demonstração é imediata: basta analisar as duas primeiras linhas do cálculo acima.)

Se  $f, g \in SC([-l, l])$ ,  $\|f - g\|$  é a integral de  $-l$  a  $l$  do quadrado da distância entre o ponto  $(x, f(x))$  no gráfico de  $f$  e o ponto  $(x, g(x))$  no gráfico de  $g$ , logo  $\|f - g\|$  mede, de certa forma, o quanto as funções  $f$  e  $g$  estão longe uma da outra. Observe que se  $f$  e  $g$  diferem apenas em um número finito de pontos,  $\|f - g\| = 0$ .



**Fig. 29:** A região compreendida entre os gráficos de  $f$  e de  $g$ ;  $\|f - g\|$  é um tipo de medida do tamanho desta região.

Voltando às séries de Fourier, note que, se  $f \in SC([-l, l])$ , a série de Fourier de  $f$  está bem definida. Uma das propriedades fundamentais das séries de Fourier é que a série truncada dá a melhor aproximação possível da função  $f$  no seguinte sentido:

**Proposição 3.3.** Se  $f \in SC([-l, l])$  e se

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

for a série de Fourier de  $f$ , então quaisquer que sejam  $N \in \mathbb{Z}^+$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $c_n, d_m \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq n \leq N$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| f - \left( \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \psi_n + \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right) \right\| \\ & \leq \left\| f - \left( \frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^N c_n \psi_n + \sum_{m=1}^M d_m \varphi_m \right) \right\|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Além disso, a igualdade é válida se e somente se  $a_n = c_n$  para todo  $n = 0, \dots, N$  e  $b_m = d_m$  para todo  $m = 1, \dots, M$ .

**Demonstração:** Vamos denotar por  $S_{NM}$  o espaço vetorial gerado por

$$\{\psi_n : 0 \leq n \leq N\} \cup \{\varphi_m : 1 \leq m \leq M\}$$

e seja

$$g = f - \left( \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \psi_n + \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right).$$

Usando as equações de Euler-Fourier (2.12) e (2.13) e as relações de ortogonalidade (2.5), (2.6) e (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} (g|\psi_0) &= (f|\psi_0) - \frac{a_0}{2} (\psi_0|\psi_0) = 0, \\ (g|\psi_n) &= (f|\psi_n) - a_n (\psi_n|\psi_n) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ (g|\varphi_m) &= (f|\varphi_m) - b_m (\varphi_m|\varphi_m) = 0, \quad 1 \leq m \leq M, \end{aligned}$$

logo  $g$  é ortogonal a todos os elementos de  $S_{NM}$ . Como

$$h = \frac{a_0 - c_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^N (a_n - c_n) \psi_n + \sum_{m=1}^M (b_m - d_m) \varphi_m \in S_{NM},$$

pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} & \left\| f - \left( \frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^N c_n \psi_n + \sum_{m=1}^M d_m \varphi_m \right) \right\|^2 \\ &= \|g + h\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2 \geq \|g\|^2 \\ &= \left\| f - \left( \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \psi_n + \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right) \right\|^2 \end{aligned}$$

o que prova (3.7). É claro que, se  $a_n = c_n$  e  $b_m = d_m$ ,  $n = 0, \dots, N$ ,  $m = 1, \dots, M$ , a igualdade em (3.7) será válida. Reciprocamente, se a igualdade for válida pelo cálculo acima vemos que  $\|h\|^2 = 0$ ; mas  $h$  é uma função contínua, logo

$$0 = \|h\|^2 = \int_{-l}^l (h(x))^2 dx \Rightarrow h \equiv 0,$$

ou seja,  $a_n = c_n$  e  $b_m = d_m$ , quaisquer que sejam  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$ .  $\square$

Outra propriedade fundamental das séries de Fourier é a chamada *desigualdade de Bessel*:

**Proposição 3.4.** Seja  $f \in SC([-l, l])$  e seja

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

sua série de Fourier. Então as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

convergem e vale a desigualdade de Bessel

$$l \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \right) \leq \|f\|^2. \quad (3.8)$$

**Demonstração:** Para cada  $N, M \in \mathbb{N}$ , usando as relações de ortogonalidade e as equações de Euler-Fourier,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| f - \frac{a_0}{2} \psi_0 - \sum_{n=1}^N a_n \psi_n - \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right\|^2 \\
&= (f|f) - \frac{a_0}{2} (f|\psi_0) - \sum_{n=1}^N a_n (f|\psi_n) - \sum_{m=1}^M (f|\varphi_m) - \frac{a_0}{2} (\psi_0|f) \\
&\quad + \frac{a_0^2}{4} (\psi_0|\psi_0) - \sum_{n=1}^N a_n (\psi_n|f) + \sum_{n=1}^N a_n^2 (\psi_n|\psi_n) \\
&\quad - \sum_{m=1}^M b_m (\varphi_m|f) + \sum_{m=1}^M b_m^2 (\varphi_m|\varphi_m) \\
&= (f|f) - l \frac{a_0^2}{2} - l \sum_{n=1}^N a_n^2 - l \sum_{m=1}^M b_m^2.
\end{aligned}$$

Portanto, quaisquer que sejam  $N, M \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2 \leq \frac{1}{l} \|f\|^2. \quad (3.9)$$

Como toda série limitada de termos positivos é convergente, a desigualdade (3.9) implica na convergência das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2.$$

Podemos então tomar o limite quando  $N, M \rightarrow +\infty$  em (3.9) para obter a desigualdade de Bessel.  $\square$

Na sua forma complexa, a desigualdade de Bessel fica:

**Corolário 3.5.** Seja  $f \in SC([-l, l])$  e seja  $\{\widehat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  a sequência dos coeficientes de Fourier complexos de  $f$ . Então a série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(k)|^2$$

converge e vale a desigualdade de Bessel (na sua forma complexa)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2l} \|f\|^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx.$$

A demonstração do Corolário 3.5 é imediata: basta usar as Equações (2.16), (2.17) e (2.18) junto com a Proposição 3.4. Observe que, de fato, o Corolário 3.5 é válido também para funções complexas: se  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$  for seccionalmente contínua, então  $f = u + iv$  com  $u, v \in SC([-l, l])$  e

$$\widehat{f}(n) = \widehat{u}(n) + i\widehat{v}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

mas, como  $\overline{\widehat{g}(n)} = \widehat{g}(-n)$  (veja (2.17) e (2.18)) para  $g$  real,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)|^2 &= \widehat{f}(n)\overline{\widehat{f}(n)} = (\widehat{u}(n) + i\widehat{v}(n))(\widehat{u}(-n) - i\widehat{v}(-n)) \\ &= |\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{v}(n)|^2 + i[\widehat{u}(-n)\widehat{v}(n) - \widehat{u}(n)\widehat{v}(-n)], \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^N [|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{v}(n)|^2]$$

e o Corolário 3.5 segue.

Um corolário de aspecto inocente da desigualdade de Bessel que é fundamental para a teoria de séries de Fourier é o chamado *lema de Riemann-Lebesgue*:

**Corolário 3.6.** Se  $f \in SC([-l, l])$  e se

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

for sua série de Fourier, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Na sua forma complexa, o lema de Riemann-Lebesgue fica

**Corolário 3.7.** Se  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$  for seccionalmente contínua, então  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  quando  $|n| \rightarrow +\infty$ .

## 4 Exercícios

### Seção 1: O Método de Separação de Variáveis

1. Determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para transformar cada uma das EDPs abaixo em um par de EDOs; neste caso, ache as EDOs:

$$(i) \ xu_{xx} + u_t = 0;$$

$$(ii) \ tu_{xx} + xu_t = 0;$$

$$(iii) \ u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0;$$

$$(iv) \ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$(v) \ u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0.$$

2. A equação de calor a duas dimensões espaciais é dada por  $\alpha^2 \Delta u = u_t$ , onde  $u = u(x, y, t)$  e  $\Delta$  é o laplaciano em relação às variáveis espaciais  $(x, y)$ . Suponha que  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$  e ache as EDOs satisfeitas por  $X, Y, T$ .

3. Considere a equação de calor a duas dimensões como no Exercício 2.

(i) Mostre que a equação em coordenadas polares fica  $v_t = \alpha^2(v_{rr} + v_r/r + v_{\theta\theta}/r^2)$ , onde  $v(r, \theta, t) = u(x, y, t)$ .

(ii) Suponha que  $v(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$  e ache as EDOs satisfeitas por  $R, \Theta$  e  $T$ .

4. Utilize o método de separação de variáveis para obter soluções formais para os Problemas (1.16) e (1.18), mostrando que as Equações (1.17) e (1.19), respectivamente, têm que ser satisfeitas.

5. Este problema ilustra o fato de que o parâmetro  $\lambda$  pode aparecer também nas condições de contorno. Considere as vibrações longitudinais

de uma barra elástica uniforme de comprimento  $l$ . Pode-se mostrar que o deslocamento  $u(x, t)$  satisfaz a equação

$$(E/\rho)u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\rho$  é a densidade de massa. Suponha que a extremidade  $x = 0$  está fixa e que a extremidade  $x = l$  está rigidamente presa a uma massa  $m$ . Pode-se mostrar que as condições de contorno neste caso são dadas por

$$u(0, t) = 0 = E A u_x(l, t) + m u_{tt}(l, t), \quad t > 0,$$

onde  $A$  é a área da seção reta (constante).

- (i) Suponha que  $u(x, t) = X(x)T(t)$  e ache as EDOs satisfeitas por  $X$  e  $T$ .
- (ii) Mostre que as condições de contorno para  $X$  são dadas por

$$X(0) = 0 = X'(l) - \gamma \lambda l X(l)$$

onde  $\gamma = m/(\rho A l)$ .

- (iii) Determine a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores do problema de contorno para  $X$ .

**6.** O movimento de uma membrana circular (como um tambor) é governado pela equação da onda a duas dimensões espaciais:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad t > 0.$$

- (i) Mude as coordenadas cartesianas  $(x, y)$  para coordenadas polares  $(r, \theta)$  e reescreva a equação nas novas coordenadas.
- (ii) Suponha que  $v(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$  é solução da equação em (i) e ache as EDOs satisfeitas por  $R$ ,  $\Theta$  e  $T$ .

## Seção 2: Os Coeficientes de Fourier

1. Calcule a série de Fourier de cada uma das funções abaixo:

- (i)  $f(x) = -x, \quad -l \leq x < l, \quad f(l) = l;$
- (ii)  $f(x) = -l - x, \text{ se } -l \leq x < 0; \quad f(x) = l - x \text{ se } 0 \leq x \leq l;$
- (iii)  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$
- (iv)  $f(x) = l - |x|, \quad -l \leq x \leq l;$
- (v)  $f(x) = 1 \text{ se } |x| \leq \pi/2, \quad f(x) = 0 \text{ se } \pi/2 < |x| \leq \pi;$
- (vi)  $f(x) = x^2, \quad |x| \leq 1;$
- (vii)  $f(x) = 0 \text{ se } -l \leq x < 0 \text{ ou } x = l, \quad f(x) = a \text{ se } 0 \leq x < l,$  onde  $a \in \mathbb{R}$  é uma constante.

2. Seja  $F \in C(\mathbb{R})$  periódica de período  $2l$ .

- (i) Prove que, se  $F$  for par, sua série de Fourier será uma série em cossenos (ou seja,  $b_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ).
- (ii) Prove que, se  $F$  for ímpar, sua série de Fourier será uma série em senos (ou seja,  $a_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ ).

3. Calcule os coeficientes de Fourier complexos das funções do Exercício 1.

4. Seja  $F \in C(\mathbb{R})$  periódica de período  $2l$ .

- (i) Prove que, se  $F$  for par, todos os seus coeficientes de Fourier complexos serão, de fato, números reais, ou seja,  $\widehat{F}(n) \in \mathbb{R}$  qualquer que seja  $n \in \mathbb{Z}$ ; além disso,  $\widehat{F}(n) = \widehat{F}(-n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (ii) Prove que, se  $F$  for ímpar, então  $\widehat{F}(0) = 0$  e  $\widehat{F}(n)$  será um imaginário puro se  $n \neq 0$ , ou seja,  $\widehat{F}(n) = ir_n$  para algum  $r_n \in \mathbb{R}$ .

### Seção 3: Interpretação Geométrica

1. Para cada uma das funções do Exercício 1 da Seção 2, ache uma cota superior para as séries  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ .
2. Suponha que  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é periódica com período  $2\pi$  e  $f(0) = 0$ .
  - (i) Defina a função complexa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica com período  $2\pi$  por  $g(x) = f(x)/(e^{ix} - 1)$  se  $x \neq 0$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $g(0) = -if'(0)$ . Mostre que  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .
  - (ii) Mostre que  $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n-1) - \widehat{g}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
  - (iii) Conclua que a série de Fourier complexa de  $f$  na origem converge para  $f(0) = 0$  no sentido que

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^m \widehat{f}(k) = 0.$$

# Capítulo 7

## Convergência das Séries de Fourier

Neste capítulo, discutiremos a convergência das séries de Fourier. Para isso, começaremos estudando algumas propriedades de sequências e de séries de funções que são discutidas, em geral, em um primeiro curso de análise (veja, por exemplo, [LIMA, 1989]). Na segunda seção, demonstraremos um teorema de convergência pontual. Na terceira, veremos quando a série converge uniformemente. Terminaremos o capítulo introduzindo o importante conceito de convolução para funções periódicas.

### 1 Sequências e Séries de Funções

**Definição 1.1.** Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência de funções complexas contínuas definidas em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ . Dizemos que a sequência  $\{f_n\}$  converge pontualmente em  $\Omega$  para uma função  $f$  se, e somente se, dados  $x \in \Omega$  e  $\varepsilon > 0$ , existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Dizemos que a sequência  $\{f_n\}$  converge uniformemente em  $\Omega$  para uma função  $f$  se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.2)$$

Dizemos que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

converge pontualmente (respectivamente, uniformemente) em  $\Omega$  se e somente a sequência de funções

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x), \quad x \in \Omega,$$

convergir pontualmente (respectivamente, uniformemente) em  $\Omega$ .

Observe que, na definição de convergência pontual, o inteiro  $N$  pode depender de  $x$ , enquanto que, na convergência uniforme, o mesmo  $N$  funciona para todos os valores de  $x$ . Uma propriedade importante é que uma sequência de funções contínuas convergindo uniformemente converge para uma função contínua:

**Teorema 1.2.** *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  um conjunto não vazio e  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C_C(\Omega)$ . Se a sequência  $\{f_n\}$  convergir uniformemente para uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , então  $f \in C_C(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Seja  $x_0 \in \Omega$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como a sequência converge uniformemente, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$x \in \Omega, \quad n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por outro lado, como  $f_N$  é contínua em  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \Omega, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto:

$$x \in \Omega, \quad |x - x_0| < \delta$$

↓

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

o que prova que  $f$  é contínua em  $x_0$ . Como  $x_0 \in \Omega$  é arbitrário,  $f \in C_C(\Omega)$ .  $\square$

**Teorema 1.3 (Teste  $M$  de Weierstrass).** *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  um conjunto não vazio e  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C_C(\Omega)$ . Suponha que existe uma sequência numérica  $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$  tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

*Então a série de funções  $\sum f_n(x)$  converge uniformemente em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Vamos mostrar em primeiro lugar que a série converge pontualmente em  $\Omega$ : de fato, como a série numérica  $\sum M_n$  converge, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$l \geq n \geq N \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=n}^l M_k < \varepsilon;$$

logo, qualquer que seja  $x \in \Omega$ ,

$$\left| \sum_{k=n}^l f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^l |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^l M_k < \varepsilon, \quad (1.3)$$

o que prova que a série  $\sum f_n(x)$  converge pelo critério de Cauchy. Vamos então denotar por  $f(x)$  a soma da série, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Para cada  $x \in \Omega$  fixo, tomando o limite (já sabemos que existe!) em (1.3) quando  $l \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} M_k \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (1.4)$$

Mas então, quaisquer que sejam  $x \in \Omega$  e  $n \geq N$ , usando (1.4)

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k(x) \leq \varepsilon,$$

o que prova que a convergência é de fato uniforme.  $\square$

**Teorema 1.4.** Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C_C([a, b])$  e suponha que a sequência  $\{f_n\}$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função  $f \in C_C([a, b])$ . Então, qualquer que seja  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  seccionalmente contínua,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)g(x) dx.$$

**Demonstração:** Como  $g$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Por outro lado, como  $g$  é seccionalmente contínua, as integrais

$$\int_a^b f(x)g(x) dx, \quad \int_a^b f_n(x)g(x) dx$$

existem. Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$x \in [a, b], \quad n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

Então, se  $n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)g(x) dx - \int_a^b f_n(x)g(x) dx \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} M \int_a^b dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

O Teorema 1.4 nos diz que podemos trocar a ordem de um limite com uma integral sobre um intervalo finito, desde que o limite seja uniforme. Então podemos trocar a ordem de uma série convergindo uniformemente com uma integral: se  $\sum f_n$  convergir uniformemente, com  $f_n \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$ , definindo

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad x \in [a, b],$$

é claro que  $F_n \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$  e a sequência  $\{F_n\}$  convergirá uniformemente, logo

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)g(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b F_n(x)g(x) ds \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)g(x) dx \end{aligned}$$

qualquer que seja  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  seccionalmente contínua.

A situação para o caso de integrais impróprias é um pouco diferente: por exemplo, nas condições do Teorema 1.4, se as funções forem contínuas em  $[a, +\infty)$ , então

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) g(x) dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^m \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) g(x) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^m f_n(x) g(x) dx, \end{aligned}$$

mas, para trocar a ordem dos limites, é preciso que *os dois limites* sejam uniformes. Portanto, o teorema vale no caso de integrais impróprias se a integral convergir uniformemente. Para maiores detalhes veja [CARS-LAW, 1950].

**Teorema 1.5.** Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência em  $C_{\mathbb{C}}^1([a, b])$ . Suponha que a série  $\sum f_n(x_0)$  converge em algum ponto  $x_0 \in [a, b]$  e que a série das derivadas  $\sum f'_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  a uma função  $g \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$ . Então a série  $\sum f_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  a uma função  $f \in C_{\mathbb{C}}^1([a, b])$  e  $f' = g$ .

**Demonstração:** Dado  $x \in [a, b]$ , como a série das derivadas converge uniformemente, pelo Teorema 1.4 podemos integrar a série de  $x_0$  até  $x$ , obtendo

$$\int_{x_0}^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)]$$

mas, por hipótese, a série  $\sum f_n(x_0)$  converge, logo a série  $\sum f_n(x)$  também converge para um valor que denotaremos por  $f(x)$  e obtemos

$$\int_{x_0}^x g(t) dt + f(x_0) = f(x); \quad (1.5)$$

portanto, como  $x \in [a, b]$  é arbitrário,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é de classe  $C^1$  com  $f' = g$ . Falta apenas mostrar que a série converge uniformemente. Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow \begin{cases} \left| g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall t \in [a, b], \\ \left| f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Então, se  $x \in [a, b]$  e  $n \in N$ , usando (1.5) obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x g(t) dt + f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_k(x_0)) \right| + \left| f(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) \right| \\
&< \left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} \left| g(t) - \sum_{k=1}^n f'_k(t) \right| dt + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

onde  $\min\{x, x_0\}$  e  $\max\{x, x_0\}$  denotam, respectivamente, o menor (mínimo) e o maior (máximo) entre os números  $x$  e  $x_0$ .  $\square$

## 2 Convergência Pontual

Como já observamos anteriormente, é natural estudar séries de Fourier de funções da reta na reta que são periódicas. Dada uma função  $f \in SC([-l, l])$  podemos estendê-la de forma natural a uma função periódica  $F$  de período  $2l$  que é seccionalmente contínua em cada intervalo  $[a, b]$ : se  $x \in [(2k-1)l, (2k+1)l)$  e se  $f$  estiver definida em  $x - 2kl \in [-l, l]$ , a extensão  $F$  será dada por

$$F(x) = f(x - 2kl).$$

Vamos denotar por  $SC_{\text{per}}(2l)$  o espaço das funções reais periódicas de período  $2l$  que são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo  $[a, b]$ . Observe que podemos identificar, de maneira natural,  $SC_{\text{per}}(2l)$  e  $SC([-l, l])$ .

De maneira análoga, vamos denotar por  $C_{\text{per}}(2l)$  o espaço das funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e periódicas de período  $2l$ . Note que podemos

identificar, de maneira natural,  $C_{\text{per}}(2l)$  com  $\{f \in C([-l, l]) : f(-l) = f(l)\}$ .

Dados  $f \in SC_{\text{per}}(2l)$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , denotaremos por  $f(x_0^+)$  e  $f(x_0^-)$  os limites laterais

$$f(x_0^+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x).$$

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Seja  $f \in SC_{\text{per}}(2l)$  e suponha que  $f$  é diferenciável, a menos de um número finito de pontos em  $(-l, l)$ , com  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Então, qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , a série de Fourier de  $f$  no ponto  $x$  converge a  $(f(x^+) + f(x^-))/2$ .*

Antes de demonstrar o Teorema 2.1 em toda a sua generalidade, vamos mostrar que o resultado é válido em um caso bem simples:

**Lema 2.2.** *Seja  $f$  como no Teorema 2.1 e suponha que  $f$  é contínua na origem com  $f(0) = 0$ . Então a série de Fourier de  $f$  na origem converge para  $f(0)$ , ou seja,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

**Demonstração:** Usaremos a forma complexa da série de Fourier. Vamos definir uma função complexa auxiliar

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} & \text{se } x \neq 0, \quad x \in [-l, l], \\ -il f'(0^+)/\pi & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$g(x + 2l) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

Note que  $g$  tem limites laterais quando  $x \rightarrow 0$  pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x} \left( \frac{e^{i\pi x/l} - e^0}{x} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{f'(0^+)}{i\pi/l} = \frac{-il}{\pi} f'(0^+) = g(0) \end{aligned}$$

e, de maneira análoga,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -il f'(0^-)/\pi.$$

Como  $f \in SC_{\text{per}}(2l)$  e a função  $x \mapsto e^{i\pi x/l} - 1$  é contínua, periódica de período  $2l$  e só se anula em  $x = 0$  no intervalo  $[-l, l]$ , a função  $g$  definida por (2.1) é seccionalmente contínua e portanto, pelo lema de Riemann-Lebesgue (na sua forma complexa),

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \widehat{g}(n) = 0.$$

Por outro lado,

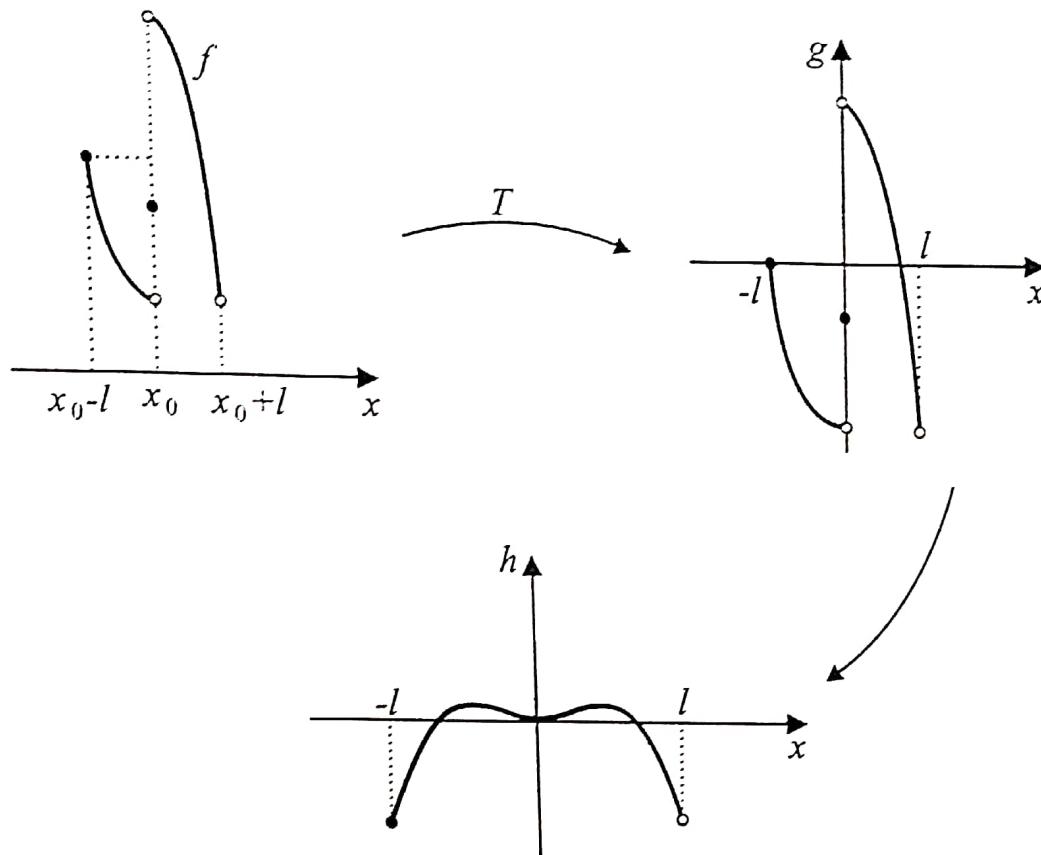
$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x)(e^{i\pi x/l} - 1)e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x)e^{-i(n-1)\pi x/l} dx - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x)e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \widehat{g}(n-1) - \widehat{g}(n)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{k=-n}^m \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(m) \rightarrow 0$$

quando  $n, m \rightarrow +\infty$ . □

Este caso simples implica o teorema geral. A ideia é ir transformando a função  $f$  até obter outra função como no lema (veja a Figura 30). A demonstração que faremos a seguir é de autoria de Paul R. Chernoff [CHERNOFF, 1980]; ela torna mais claro o importante papel do lema de Riemann-Lebesgue e é bem mais simples que a clássica.



**Fig. 30:** A ideia da demonstração do Teorema 2.1 é ir transformando a função  $f$  até obter uma função como no Lema 2.2.

É interessante observar que o Lema 2.2 prova a convergência da série complexa no sentido que

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^m \widehat{f}(k) = 0$$

e não apenas no sentido de valor principal, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = 0.$$

Para o caso geral, provaremos apenas a convergência no sentido de valor principal.

**Demonstração do Teorema 2.1.** Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Vamos primeiro definir uma transformação no plano que leve o ponto  $(x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2)$  na origem. A mais simples é a transformação

$$T: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - x_0, y - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2) \in \mathbb{R}^2.$$

## 152 Convergência das Séries de Fourier

Note que  $T$  leva o gráfico de  $f$  nos pontos da forma

$$(x - x_0, f(x) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2),$$

que é exatamente o gráfico da função  $g$  definida por

$$g(x) = f(x + x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2.$$

A função  $g$  ainda não é como no Lema 2.2 pois não é em geral contínua em  $x = 0$ ; no entanto, como  $[g(0^+) + g(0^-)]/2 = 0$ , podemos obter uma função contínua na origem fazendo a média

$$h(x) = \begin{cases} [g(x) + g(-x)]/2 & \text{se } x \neq 0, x \in [-l, l], \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x + 2l) = h(x).$$

Como  $f, f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , é claro que  $g$  e sua derivada pertencem a  $SC_{\text{per}}(2l)$  e, portanto,  $h$  e sua derivada também pertencem a  $SC_{\text{per}}(2l)$ . Além disso, por construção,  $h$  é contínua na origem com  $h(0) = 0$ . Aplicando o Lema 2.2, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k) = 0.$$

Por outro lado,  $\widehat{h}(k) = [\widehat{g}(k) + \widehat{g}(-k)]/2$ , logo

$$\sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = \sum_{k=-n}^n \widehat{h}(k).$$

Calculando então os coeficientes de Fourier complexos de  $g$ , obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left[ f(x + x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] e^{-ik\pi x/l} dx \right] \\ &= \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l} - \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{-ik\pi x/l} dx, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \widehat{g}(0) &= \widehat{f}(0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2 \\ \widehat{g}(k) &= \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l}, k \neq 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\pi x_0/l} - \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) = 0,$$

o que prova o resultado desejado.  $\square$

A condição de diferenciabilidade de  $f$  no Teorema 2.1 pode ser enfraquecida (veja [CHERNOFF, 1980]), mas é importante observar que é preciso alguma condição além de  $f \in SC_{\text{per}}(2l)$ : de fato, é possível mostrar que, dado qualquer subconjunto enumerável  $E \subseteq [-l, l]$ , existe uma função contínua cuja série de Fourier diverge em todos os pontos de  $E$ ! (Veja [KATZNELSON, 1968; II.3.4].)

**Exemplo 2.3.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Vimos no Exemplo 2.3 do capítulo anterior que a série de Fourier (real) de  $f$  é dada por

$$S[f] = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

Como  $f$  é contínua e diferenciável em  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  com  $f' \in SC([-1, 1])$ , pelo Teorema 2.1 a série  $S[f]$  converge para  $f(x)$ , ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Em particular, tomando  $x = 0$ , obtemos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Exemplo 2.4.** Seja  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ \pi & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Calculamos a série de Fourier de  $f$  no Exemplo 2.4 do capítulo anterior:

$$S[f] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} \sin((2k+1)x).$$

Como  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas,  $S[f]$  converge para  $f$  nos pontos onde  $f$  é contínua e para a média dos limites laterais nos pontos onde  $f$  dá um salto. Em particular, como  $f$  é contínua em  $x = \pi/2$ , obtemos

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k$$

e, portanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

### 3 Convergência Uniforme

Se  $f$  for contínua em  $[-l, l]$  com  $f(-l) = f(l)$  e diferenciável em  $(-l, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f'$  seccionalmente contínua, então, de fato, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$  em  $[-l, l]$ . Antes de provar esse resultado, no entanto, precisamos da relação entre os coeficientes de Fourier de  $f$  e de  $f'$ .

**Proposição 3.1.** *Suponha que  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  é diferenciável em  $(-l, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Então os coeficientes de Fourier complexos de  $f$  e  $f'$  satisfazem*

$$(\widehat{f'})(n) = \frac{in\pi}{l} \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

*Quanto aos coeficientes reais, se as séries de Fourier de  $f$  e  $f'$  forem dadas, respectivamente por*

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n) \\ S[f'] &= \frac{a'_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \psi_n + b'_n \varphi_n) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} a'_0 &= 0 \\ a'_n &= \frac{n\pi}{l} b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b'_n &= -\frac{n\pi}{l} a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Demonstração:** Pelas fórmulas que relacionam os coeficientes de Fourier reais e complexos de uma função  $f$  as fórmulas (3.2) são equivalentes a (3.1). Vamos então provar (3.1): como  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , é fácil ver que podemos integrar por partes, obtendo

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f'(x) e^{-n\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \left[ f(x) e^{-inx/l} \Big|_{x=-l}^{x=l} + \frac{in\pi}{l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx/l} dx \right] \\ &= \frac{in\pi}{l} \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

□

Observe que a equação (3.1) nos diz que, quanto mais diferenciável for a função  $f$ , mais rápido sua série de Fourier convergirá pois, se  $f$  for  $k$  vezes diferenciável com  $f^{(k)} \in SC_{\text{per}}(2l)$ ,  $k \geq 1$ , usando (3.1)  $k$  vezes, obteremos

$$\widehat{f}(n) = \left( \frac{l}{in\pi} \right)^k \widehat{f^{(k)}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \tag{3.3}$$

Em particular, se  $k \geq 2$ , a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ : de fato, se  $f, f' \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f'' \in SC_{\text{per}}(2l)$ , pelo lema de Riemann-Lebesgue,  $\widehat{f''}(n) \rightarrow 0$  quando  $|n| \rightarrow +\infty$ , logo a sequência  $\{\widehat{f''}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é limitada, ou seja, existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$|\widehat{f''}(n)| \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

aplicando então (3.3), obtemos

$$|\widehat{f}(n)e^{inx/l}| \leq \frac{l^2}{n^2\pi^2} |\widehat{f''}(n)| \leq \frac{Kl^2}{\pi^2} \frac{1}{n^2};$$

como a série  $\sum(1/n^2)$  converge, pelo teste  $M$  de Weierstrass a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente; como a série de Fourier de

$f$  converge para  $f$  pelo Teorema 2.1, a série converge uniformemente para  $f$ .

Melhorando um pouco o argumento acima, obtemos:

**Teorema 3.2.** Suponha que  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  é diferenciável em  $(-l, l)$  a menos de um número finito de pontos, com  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  para  $f$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.1 e pelo teste  $M$  de Weierstrass, basta mostrar que existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$\sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)| \leq K, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Para provar (3.4), seja  $N \in \mathbb{N}$  arbitrário; usando (3.1), a desigualdade CBS para  $\mathbb{R}^{2N}$  e a desigualdade de Bessel, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|} |\widehat{f}'(n)| \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{\sqrt{l}}{\pi \sqrt{2}} \|f'\| \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = K. \end{aligned}$$

□

Com o Teorema 3.2 fica mais fácil mostrar, pelo menos quando  $f$  for contínua com  $f'$  seccionalmente contínua, que a desigualdade de Bessel é de fato uma identidade:

**Teorema 3.3.** Sejam  $f, g \in C_{\text{per}}(2l)$  e suponha que  $f$  é diferenciável em  $(-l, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$ . Então

$$\frac{1}{2l} (f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}. \quad (3.5)$$

Em particular, vale a identidade de Parseval

$$\frac{1}{2l} \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2. \quad (3.6)$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.2, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ ; aplicando então o Teorema 1.4, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l} (f|g) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) \int_{-l}^l \overline{g(s)} e^{in\pi s/l} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}. \end{aligned}$$

□

O Teorema 3.3 vale em situações bem mais gerais. A fórmula (3.5), por exemplo, é válida se  $f, g \in SC_{\text{per}}(2l)$  (e até para uma classe maior de funções – veja [IORIO & IORIO, 1988]).

Na sua forma real, a equação (3.5) fica

$$\frac{1}{l} (f|g) = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \quad (3.7)$$

onde  $a_n$ ,  $b_n$  e  $A_n$ ,  $B_n$  são os coeficientes reais de Fourier de  $f$  e  $g$  respectivamente; a identidade de Parseval, então, pode ser reescrita na forma

$$\frac{l}{l} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.8)$$

A identidade de Parseval, tanto na sua forma complexa (3.6) quanto na sua forma real (3.8), é muitas vezes utilizada para o cálculo de séries.

**Exemplo 3.4.** Vamos usar a identidade de Parseval para calcular a série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Como vimos no Exemplo 2.3 do capítulo anterior, os coeficientes de Fourier reais da função

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

são dados por

$$a_0 = 1, \quad a_n = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}, \quad b_n = 0.$$

Aplicando então a identidade de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \frac{1}{2} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \right)^2 = \frac{1}{2} + 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)^4 \pi^4} \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \end{aligned}$$

## 4 Convolução

Nesta seção, definiremos a operação de convolução para funções periódicas. Mas, antes disso, vamos introduzir o conceito de continuidade uniforme:

**Definição 4.1.** Uma função  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo, é dita uniformemente contínua em  $I$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in I, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

É claro que uma função uniformemente contínua é contínua; a recíproca será verdadeira se  $I$  for um intervalo fechado e limitado:

**Teorema 4.2.** Se  $f: [b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, então  $f$  será uniformemente contínua.

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $x \in [a, b]$ , como  $f$  é contínua em  $x$ , existe  $\delta_x > 0$  tal que:

$$y \in [a, b], \quad |y - x| < \delta_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2. \quad (4.1)$$

Considere os intervalos  $I_x = (x - \delta_x/2, x + \delta_x/2)$ . Vamos mostrar que existe um número finito de pontos  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  tal que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_{x_j}. \quad (4.2)$$

Suponha, por absurdo, que não existe um tal conjunto finito: então o ponto médio  $\frac{a+b}{2}$  divide o intervalo  $[a, b]$  em dois intervalos fechados de tamanho  $\frac{b-a}{2}$  e pelo menos um deles, que chamaremos  $[a_1, b_1]$  não pode ser coberto por um número finito de intervalos  $I_x$ ; repetindo esse processo, obtemos uma sequência de intervalos

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \dots$$

tal que  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  e nenhum  $[a_n, b_n]$  pode estar contido em um número finito de intervalos  $I_x$ ; por outro lado,

$$a \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b,$$

logo existem os limites

$$a \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c \leq d = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq b;$$

em particular,

$$c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n],$$

logo, escolhendo  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{2} \delta_c,$$

vemos que

$$[a_n, b_n] \subset \left( c - \frac{b-a}{2^n}, c + \frac{b-a}{2^n} \right) \subseteq \left( c - \frac{1}{2} \delta_c, c + \frac{1}{2} \delta_c \right) = I_c$$

e o intervalo  $[a_n, b_n]$  pode ser coberto por apenas um dos intervalos, uma contradição.

Sejam então  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  tais que a expressão (4.2) é válida e seja  $\delta > 0$  o menor entre os números  $\delta_{x_1}/2, \dots, \delta_{x_n}/2$ . Sejam  $x, y \in [a, b]$  tais que  $|x - y| < \delta$ : de (4.2) existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in I_{x_j}$  e portanto, pela definição de  $\delta$ ,

$$|x - x_j| < \frac{1}{2} \delta_{x_j} < \delta_{x_j}$$

$$|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < \delta + \frac{1}{2} \delta_{x_j} \leq \delta_{x_j},$$

logo, usando (4.1),

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova o teorema.  $\square$

É interessante observar que, para funções de várias variáveis, vale um resultado análogo. Se  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é *uniformemente contínua em  $D$*  se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in D, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e

$$|x - y| = \left[ \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right]^{1/2}.$$

Vale então o seguinte teorema (que não demonstraremos):

**Teorema 4.3.** *Se  $D$  for um subconjunto fechado e limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $f \in C(D)$ , então  $f$  será uniformemente contínua.*

A demonstração do Teorema 4.3 é semelhante à do Teorema 4.2 mas um pouco mais complicada: no lugar dos intervalos  $I_x$  devemos ter bolas abertas  $B(x_j; \delta_x/2)$ ; a dificuldade é provar que o conjunto  $D$  pode ser coberto por um número finito de tais bolas – de fato essa é uma propriedade dos *compactos*. Para maiores detalhes, veja [RUDIN, 1976].

Como já observamos anteriormente, podemos identificar  $C_{\text{per}}(2l)$  de maneira natural com  $\{f \in C([-l, l]) : f(-l) = f(l)\}$ . Com essa identificação, é fácil ver que

**Corolário 4.4.** *Se  $f \in C_{\text{per}}(2l)$  então  $f$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ .*

Vamos definir agora a operação de convolução: se  $f, g \in SC_{\text{per}}(2l)$ , a *convolução* de  $f$  e  $g$  é a função  $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x - y) dy. \quad (4.3)$$

**Proposição 4.5.** Sejam  $f, g, h \in SC_{\text{per}}(2l)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então  $f * g \in C_{\text{per}}(2l)$  e valem as seguintes propriedades:

- (i)  $(f * g) * h = f * (g * h)$  (associatividade);
- (ii)  $f * g = g * f$  (comutatividade);
- (iii)  $(f + g) * h = f * h + g * h$ ,  $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$  (distributividade).

**Demonstração:** Vamos fixar  $x_0 \in \mathbb{R}$ : como  $f$  é seccionalmente contínua em  $[-l, l]$  e  $g$  é seccionalmente contínua em  $[x_0 - l, x_0 + l]$ , existe uma partição  $-l = y_0 < y_1 < \dots < y_n = l$  do intervalo  $[-l, l]$  tal que  $f(y)$  e  $g(x_0 - y)$  são contínuas em  $y \in (y_{j-1}, y_j)$  qualquer que seja  $j = 1, \dots, n$ , e têm limites laterais quando  $y \rightarrow y_{j-1}^+$  ou  $y \rightarrow y_j^-$ ; portanto, a integral em (4.3) está bem definida. Como  $x_0 \in \mathbb{R}$  é arbitrário, a fórmula (4.3) define uma função  $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Note que  $f * g$  é periódica de período  $2l$ , uma vez que  $g$  o é.

Para mostrar que  $f * g$  é continua em  $x_0$ , note, em primeiro lugar, que, como  $f$  e  $g$  são seccionalmente contínuas, elas são limitadas, ou seja, existem constantes  $M > 0$  e  $N > 0$  tais que

$$|f(y)| \leq M, \quad |g(y)| \leq N, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , vamos escolher  $\eta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \eta &< (y_j - y_{j-1})/2, \quad \forall j = 1, \dots, n, \\ \eta &\leq \frac{l}{4nMN} \varepsilon. \end{aligned}$$

Para cada  $j = 1, \dots, n$ , sejam  $I_j = [x_0 - y_j, x_0 - y_{j-1}]$  e  $g_j \in C(I_j)$  definida por

$$\begin{aligned} g_j &= g \text{ em } (x_0 - y_j, x_0 - y_{j-1}), \\ g_j(x_0 - y_j) &= \lim_{y \rightarrow y_j^-} g(x_0 - y), \\ g_j(x_0 - y_{j-1}) &= \lim_{y \rightarrow y_{j-1}^+} g(x_0 - y). \end{aligned}$$

Como cada  $g_j$  é uniformemente contínua em seu intervalo de definição, existe  $\delta_j > 0$  tal que

$$y, z \in I, \quad |y - z| < \delta_j \Rightarrow |g_j(y) - g_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Seja  $\delta > 0$  o menor entre os  $\delta_j$  e  $\eta$ , ou seja,

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n, \eta\}.$$

Observe que, pela escolha de  $\eta$ , o intervalo  $[y_{j-1} + \eta, y_j - \eta]$  tem tamanho positivo e que, pela escolha de  $\delta$ , qualquer que seja  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{cases} y \in [y_{j-1} + \eta, y_j - \eta] \\ |h| < \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + h - y, x_0 - y \in I_j, \\ |(x_0 + h - y) - (x_0 - y)| = |h| < \delta \leq \delta_j. \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} |h| < \delta &\Rightarrow |(f * g)(x_0) - (f * g)(x_0 + h)| \\ &\leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(y)| |g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)| dy \\ &\leq \frac{M}{2l} \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} |g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)| dy \\ &\leq \frac{M}{2l} \sum_{j=1}^n \left[ \int_{y_{j-1}}^{y_{j-1} + \eta} 2N dy \right. \\ &\quad + \int_{y_{j-1} + \eta}^{y_j - \eta} |g_j(x_0 - y) - g_j(x_0 + h - y)| dy \\ &\quad \left. + \int_{y_j - \eta}^{y_j} 2N dy \right] \\ &< \frac{2MNn}{l} \eta + \frac{M}{2l} \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1} + \eta}^{y_j - \eta} dy \\ &< \frac{2MNn}{l} \frac{l}{4MNn} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4l} 2l \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que  $f * g$  é contínua em  $x_0$ . Como  $x_0$  é arbitrário, segue que  $f * g \in C_{\text{per}}(2l)$ .

Para provar (i), basta mudar a ordem de integração e fazer uma

mudança de variável  $t = y - x$ :

$$\begin{aligned}
 [(f * g) * h](x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l (f * g)(y)h(x - y)dy \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dy h(x - y) \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dz f(z)g(y - z) \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dz f(z) \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dy g(y - z)h(x - y) \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dz f(z) \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dt g(t)h(x - z - t) \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dz f(z)(g * h)(x - z) = [f * (g * h)](x).
 \end{aligned}$$

Quanto a (ii), como a função  $z \mapsto f(x - z)g(z)$  é periódica de período  $2l$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , usando a Proposição 3.3 do Capítulo 5 obtemos:

$$\begin{aligned}
 (f * g)(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x - y)dy \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} f(x - z)g(z)dz \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(z)f(x - z)dz \\
 &= (g * f)(x).
 \end{aligned}$$

Finalmente, (iii) é uma consequência imediata da linearidade da integral.

□

Uma propriedade interessante da convolução é a seguinte:

**Proposição 4.6.** Se  $f, g \in SC_{\text{per}}(2l)$ , então  $(f * g)^{\wedge}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
 (f * g) ^\wedge(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l (f * g)(x) e^{-inx/l} dx \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx e^{-inx/l} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dy f(y)g(x-y) \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dy f(y) e^{-in\pi y/l} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx g(x-y) e^{-in\pi(x-y)/l} \\
 &= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).
 \end{aligned}$$

□

Com a notação de convolução, podemos reescrever os teoremas de convergência demonstrados anteriormente de outra forma. Para simplificar a notação, observe que a mudança de variável  $y = \pi x/l$  transforma o intervalo  $[-l, l]$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Dessa forma podemos considerar  $l = x$  e a série de Fourier complexa de  $f \in SC([-\pi, \pi])$  é dada por

$$S[f](x) = S(f; x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}, \quad (4.4)$$

onde

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (4.5)$$

Daqui em diante, utilizaremos apenas a forma complexa da série de Fourier com  $l = \pi$  (o que não é restrição alguma!) por ser mais concisa.

Vamos denotar por  $S_N(f; x)$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$ , a  $N$ -ésima soma parcial da série de Fourier de  $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$  na sua forma complexa:

$$S_N[f](x) = S_N(f; x) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{inx}. \quad (4.6)$$

Podemos então reescrever  $S_N(f; x)$  como

$$\begin{aligned}
 S_n(f; x) &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iny} dy e^{-inx} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right] dy.
 \end{aligned}$$

O *núcleo de Dirichlet de ordem N* é a função  $D_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Então a  $N$ -ésima soma parcial da série de Fourier de  $f$  satisfaz

$$S_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy. \quad (4.8)$$

O teorema de convergência pontual (Teorema 2.1) pode ser obtido fazendo um estudo cuidadoso da integral em (4.8) quando  $N \rightarrow +\infty$  (veja [FIGUEIREDO, 1977]).

É possível mostrar que os núcleos de Dirichlet  $D_N$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$ , são, de fato, funções reais, ou seja,  $D_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Usando a notação de convolução, a equação (4.8) pode ser reescrita na forma

$$S_N[f] = f * D_N \quad (4.9)$$

e os Teoremas 2.1 e 3.2 dizem, respectivamente, que:

- (i) se  $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$  for diferenciável em  $(-\pi, \pi)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ , então, qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(f * D_N)(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{quando } N \rightarrow +\infty; \quad (4.10)$$

- (ii) se  $f \in C_{\text{per}}(2\pi)$  for diferenciável em  $(-\pi, \pi)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ , então

$$f * D_N \rightarrow f \text{ uniformemente em } \mathbb{R} \text{ quando } N \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

Como mencionamos anteriormente, existem funções contínuas cujas séries de Fourier divergem em um conjunto enumerável. No entanto existem outros métodos de “somar” uma série. Um desses métodos é a *somabilidade no sentido de Cesaro*: seja

$$\sigma_N[f](x) = \sigma_N(f; x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S_j(f; x) \quad (4.12)$$

a média aritmética das somas parciais  $S_0, S_1, \dots, S_N$ ; diremos que a série de Fourier é *somável no sentido de Cèsaro* (ou *(c, 1)-somável*) no ponto  $x_0$  se existir o limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N(f; x_0).$$

A média aritmética  $\sigma_N[f]$  também pode ser escrita como uma convolução: para cada  $N \in \mathbb{Z}^+$ , se definirmos o *núcleo de Féjer de ordem N* como sendo a função  $K_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

então

$$\sigma_N[f] = f * K_N. \quad (4.14)$$

O leitor não terá dificuldade em provar (4.14), assim como o fato de que o núcleo de Féjer é a média aritmética dos núcleos de Dirichlet, ou seja,

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N D_j(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Da mesma forma que os núcleos de Dirichlet, os núcleos de Féjer são de fato funções reais.

É possível provar que:

**Teorema 4.7.** Se  $f \in C_{\text{per}}(2\pi)$ , sua série de Fourier será uniformemente somável a  $f$  no sentido de Cèsaro .

Um *polinômio trigonométrico* é uma combinação linear finita com coeficientes complexos das funções  $e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Note que  $\sigma_N[f] = f * K_N$  é um polinômio trigonométrico. O Teorema 4.7 então implica facilmente o famoso *teorema de aproximação de Weierstrass*:

**Corolário 4.8.** Toda função contínua e periódica de período  $2\pi$  pode ser uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico.

Existem outros conceitos de somabilidade, por exemplo *somabilidade no sentido de Abel* onde, em vez de considerar a sequência das médias aritméticas, considera-se a média geométrica de razão  $r \in [0, 1)$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx} = (P_r * f)(x), \quad (4.15)$$

onde  $P_r(x) = P(r, x)$  é o *núcleo de Poisson*

$$P(r, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}. \quad (4.16)$$

O núcleo de Poisson, se comparado com o núcleo de Féjer, tem a desvantagem de não ser um polinômio trigonométrico; no entanto, este núcleo é muito importante e liga a teoria de séries trigonométricas com a teoria de funções analíticas. Encontraremos novamente o núcleo de Poisson no próximo capítulo.

Para o leitor interessado, recomendamos o excelente artigo [ZYG-MUND, 1976]; veja também [WEISS, 1965] e a discussão bibliográfica em [IORIO, 1986].

## 5 Exercícios

### Seção 1: Sequências e Séries de Funções

1. Mostre que a série de Fourier de  $f(x) = l - |x|$ ,  $x \in [-l, l]$ , converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .
2. Considere a função  $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - (i) Mostre que  $f$  é periódica e calcule seu período fundamental  $T$ .
  - (ii) Escolhendo  $l = T/2$ , calcule a série de Fourier de  $f$ .
  - (iii) Mostre que a série em (ii) converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .

3. Seja  $f(x) = x^2$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $f(x+2) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Mostre que a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente.

### Seção 2: Convergência Pontual

1. Seja  $f(x) = -x$ ,  $-l \leq x < l$ ,  $f(l) = l$ .
  - (i) Discuta a convergência pontual da série de Fourier de  $f$ .

(ii) Use (i) para calcular  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-1}$ .

(iii) A série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ ? Por quê?

2. Calcule  $\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-2}$ . (Sugestão: calcule a série de Fourier de  $f(x) = l - |x|$ ,  $x \in [-l, l]$ .)

3. Discuta a convergência pontual da série de Fourier da função  $f(x) = 1$  se  $|x| \leq \pi/2$ ,  $f(x) = 0$  se  $\pi/2 < |x| \leq \pi$ .

4. Use a série de Fourier da função  $f(x) = x^2$ ,  $|x| \leq 1$ , para calcular as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-2}$ .

5. Discuta a convergência pontual da série de Fourier da função  $f(x) = 0$  se  $-1 \leq x < 0$ ,  $f(x) = 3$  se  $0 \leq x < 1$ ,  $f(x+2) = f(x)$  se  $x \in \mathbb{R}$ .

6. Discuta a convergência pontual da série de Fourier da função  $f(x) = x^3$  se  $-1 \leq x < 1$ ,  $f(x+2) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Seção 3: Convergência Uniforme

1. Considere a função  $f(x) = (\pi - x)/2$  se  $0 \leq x < 2\pi$ ,  $f(x+2\pi) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(i) Calcule  $S[f]$  e discuta sua convergência.

(ii) Use (i) para estudar  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \cos(nx)$ .

(iii) Use (ii) para calcular  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}$ .

(iv) Calcule  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-4}$ .

2. Considere a função  $f(x) = \pi/2 - |x|$  se  $|x| \leq \pi$ ,  $f(x+2\pi) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Calcule  $S[f]$  e discuta sua convergência.
- (ii) Use (i) para estudar  $\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-3} \sin((2k+1)x)$ .
- (iii) Use (ii) para calcular  $\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-6}$ .
- (iv) Use (iii) para calcular  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-6}$ .

3. Seja  $f(t) = |\sin t|$  e seja  $\omega \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ .

- (i) Calcule a série de Fourier de  $f$  e discuta sua convergência.
- (ii) Use (i) para calcular  $\sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - 1)^{-1}$ .
- (iii) Utilize séries de Fourier para achar formalmente uma solução particular da EDO  $x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$  que seja periódica de período  $\pi$ . Essa solução formal é solução?
- (iv) Resolva o problema de valor inicial  $x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

4. Prove que, se  $f$  for  $k$  vezes diferenciável com  $f^{(k-1)} \in C_{\text{per}}(2l)$  e  $f^{(k)} \in SC_{\text{per}}(2l)$ , então  $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in\pi/l)^k \widehat{f}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### Seção 4: Convolução

1. Seja  $D_N$  o núcleo de Dirichlet de ordem  $N \in \mathbb{Z}^+$ .

- (i) Mostre que

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(Nx + x/2)}{\sin(x/2)} & \text{se } x \neq 2k\pi \\ 2N + 1 & \text{se } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- (ii) Prove que  $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) dy = 2\pi$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Prove a fórmula (4.14) e mostre que o núcleo de Féjer é a média aritmética dos núcleos de Dirichlet.

3. Seja  $K_N$  o núcleo de Féjer de ordem  $N \in \mathbb{Z}^+$ .

(i) Mostre que  $(N+1)\sin^2(x/2)K_N(x) = \sin^2((N+1)x/2)$  se  $x \neq 2k\pi$  e  $K_N(2k\pi) = N+1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Prove que  $K_N(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e que  $K_N \in C_{\text{per}}(2\pi)$ .

(iii) Mostre que  $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx = 2\pi$ .

(iv) Prove que, qualquer que seja

$$\delta \in (0, \pi), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} K_N(x) dx = 0.$$

4. Prove o Teorema 4.7.

### Exercícios Variados

1. Utilize o método de separação de variáveis e as séries de Fourier para achar uma solução do problema

$$u_{xx} = 4u_t, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0 = u(2, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 2 \sin(\pi x/2) - \sin(\pi x) + 4 \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

2. Prove que, se  $f \in C([0, l])$  satisfizer  $f(0) = 0 = f(l)$ , for diferenciável em  $[0, l]$  a menos de um número finito de pontos e se  $f' \in SC([0, l])$ , então a solução formal encontrada na primeira seção do Capítulo 6 para o problema

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty),$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

está em  $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty))$  e é, de fato, solução.

**3.** O método de separação de variáveis pode ser usado também para resolver o problema da corda finita. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l]. \end{aligned}$$

- (i) Use o método de separação de variáveis para obter uma família enumerável de soluções da EDP satisfazendo as condições de contorno  $u(0, t) = 0 = u(l, t)$ ,  $t \geq 0$ .
- (ii) Imponha as condições iniciais para obter um candidato à solução da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x/l) \cos(n\pi ct/l)$$

e calcule os coeficientes  $b_n$ . (Os números  $\lambda_c = n\pi c/l$  são as chamadas *frequências naturais* da corda; o período espacial  $2l/n$  é o *comprimento de onda*. Note que o movimento da corda é periódico no tempo com período  $2l/c$ .)

- (iii) Verifique que condições  $f$  tem que satisfazer para que a série encontrada em (ii) defina uma função de classe  $C^2$ , possa ser derivada termo a termo e seja, de fato, solução do problema.
- (iv) Mostre que é possível somar a série em (ii) e que a solução em (ii) coincide com a solução encontrada na terceira seção do Capítulo 5. Verifique que as condições em (iii) podem ser enfraquecidas.

**4.** A energia total  $E(t)$  de uma corda vibrante de comprimento  $l$  é dada por

$$E(t) = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho(u_t(x, t))^2 + \frac{1}{2} T(u_x(x, t))^2 \right] dx,$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $T$  é a tensão (que supomos constante; a equação da onda é  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , onde  $c^2 = T/\rho$ ). Suponha que a corda tem velocidade inicial nula e use a expansão em série da solução (exercício anterior) para mostrar que

$$E(t) = \frac{\pi^2 T}{4l} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 k_n^2$$

(o que prova que a energia é constante).

5. Considere o problema de contorno

$$\begin{aligned} u &\in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty)), \\ u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u_x(l, t) + \gamma u(l, t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $\gamma$  e  $\alpha$  são constantes positivas.

(i) Procure soluções da forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$  e mostre que  $X$  e  $T$  satisfazem

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \lambda X(x), \quad 0 < x < l, \\ X(0) &= 0 = X'(l) + \gamma X(l), \\ T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(ii) Mostre que os auto-valores  $\lambda$  em (i) são estritamente positivos e satisfazem a equação  $\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + \gamma \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ .

(iii) Desenhe os gráficos das funções  $y = \tan x$  e  $y = -x/(\gamma l)$ ,  $x > 0$ , e deduza graficamente que existe um número infinito e enumerável de auto-valores positivos. Denotando esses auto-valores por  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ , verifique graficamente que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

(iv) Ache uma solução  $u_n(x, t)$  correspondente ao auto-valor  $\lambda_n$ .

(v) Sabendo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x),$$

determine a solução do problema que satisfaz a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ .

# Capítulo 8

## A Equação de Laplace

Neste capítulo, utilizaremos o método de separação de variáveis para resolver dois problemas de Dirichlet: na primeira seção, a região  $\Omega$  é o interior de um retângulo e, na segunda,  $\Omega$  é o interior do disco de raio 1 centrado na origem.

### 1 O Problema de Dirichlet em um Retângulo

Nesta seção, discutiremos um tipo de problema envolvendo a equação de Laplace

$$\Delta u = 0. \quad (1.1)$$

Embora a equação (1.1) tenha aparecido pela primeira vez em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752, a equação ficou com o nome de Laplace em honra a Pierre-Simon Laplace (1749-1827) que, a partir de 1782, estudou extensivamente suas soluções enquanto investigava a atração gravitacional entre corpos no espaço. A equação de Laplace aparece em muitos problemas da Física Matemática: por exemplo, no estudo de campos eletrostáticos, a função potencial elétrico em um meio dielétrico sem cargas elétricas satisfaz a equação de Laplace; a energia potencial de uma partícula sobre a qual agem apenas forças gravitacionais também satisfaz a equação de Laplace (e por isso a equação é chamada algumas vezes de *equação do potencial*); a temperatura estado estacionário é também solução da equação de Laplace.

Note que em nenhum dos problemas mencionados acima existe dependência no tempo: a equação de Laplace descreve processos esta-

cionários. Esperamos, portanto, que os problemas relacionados com a equação de Laplace não tenham condições iniciais e sejam problemas de contorno.

Discutiremos a seguir o problema de Dirichlet em um caso bem simples:

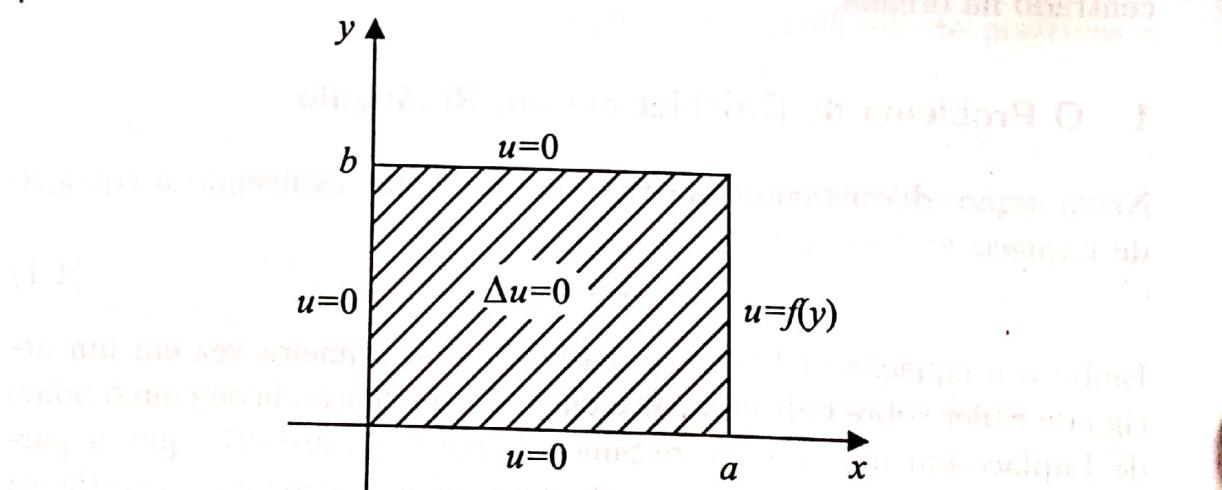
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde  $f \in C(\partial\Omega)$  é dada e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  é o interior de um retângulo.

Vamos começar resolvendo, pelo método de separação de variáveis, o problema (1.2) no caso em que  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  e que  $f$  se anula para  $y = 0$ ,  $y = b$  e  $x = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \text{ em } (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= 0 = u(x, b), \quad x \in [0, a], \\ u(0, y) &= 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde  $f \in C([0, b])$  satisfaz  $f(0) = 0 = f(b)$ .



**Fig. 31:** O problema de Dirichlet no caso em que  $f$  se anula para  $y = 0$ ,  $y = b$  e  $x = 0$ .

Procurando soluções  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda;$$

impondo as condições de contorno homogêneas, chegamos aos problemas

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X \text{ em } (0, a), \\ X(0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} -Y'' &= \lambda Y \text{ em } (0, b), \\ Y(0) &= 0 = Y(b). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Como vimos anteriormente, o problema (1.5) só tem solução não trivial se

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{b^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

e, nesse caso, as soluções são da forma

$$Y_k(y) = B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b];$$

por outro lado, a solução geral da equação em (1.4) para  $\lambda = \lambda_k$  é dada por

$$X_k(x) = A_k \exp\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_k \exp\left(-\frac{k\pi x}{b}\right)$$

e portanto, impondo a condição em  $x = 0$ , as soluções de (1.4) para  $\lambda = \lambda_k$  são da forma

$$X_k(x) = A_k \left[ \exp\left(\frac{k\pi x}{b}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi x}{b}\right) \right] = 2A_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi x}{b}\right).$$

Procuramos então uma solução do problema (1.3) da forma

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right).$$

Impondo a condição de contorno não homogênea,

$$f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right), \quad y \in [0, b],$$

e, portanto,

$$D_k = \frac{b_k}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde

$$b_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{b}\right) dt, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Logo

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{\operatorname{senh}(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b] \quad (1.7)$$

é um candidato à solução do problema (1.3). Observe que, se pudermos derivar a série termo a termo,  $u$  dada por (1.7) é de fato solução da equação de Laplace. Como a função seno hiperbólico é estritamente crescente,

$$0 \leq \frac{\operatorname{senh}(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \leq 1, \quad \forall x \in [0, a], \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e a série em (1.7) convergirá se a série de Fourier de  $f$  convergir. A convergência da série das derivadas é mais complicada e, aparentemente, precisaríamos de muita diferenciabilidade de  $f$ . Mas, para evitar isso, podemos reescrever a série (1.7) um pouco diferente, usando (1.6):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right) dt \frac{\operatorname{senh}(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt, \end{aligned}$$

onde

$$K(x, y, t) = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh}(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right). \quad (1.8)$$

**Teorema 1.1.** Seja  $f \in C([0, b])$  diferenciável em  $(0, b)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC([0, b])$  e suponha que  $f(0) = 0 = f(b)$ . Então a série em (1.7) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$  e  $u$  é solução de (1.3).

Antes de provar o teorema, vamos analisar a função  $K$ :

**Lema 1.2.** A função  $K$  definida por (1.8) está em  $C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e satisfaaz  $K_{xx} + K_{yy} = 0$ .

**Demonstração:** Para simplificar a notação, seja

$$K(x, y, t) = \frac{2 \operatorname{senh}(k\pi x/b)}{b \operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right),$$

$k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [0, a)$ ,  $y, t \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$K(x, y, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} K_k(x, y, t).$$

Vamos primeiro mostrar que a série em (1.8) converge uniformemente em  $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  qualquer que seja  $\varepsilon \in (0, a)$ : de fato, se  $0 \leq \bar{x} = \pi x/b < \bar{a} = \pi a/b$ ,

$$0 \leq \frac{\operatorname{senh}(k\bar{x})}{\operatorname{senh}(k\bar{a})} = \frac{e^{k\bar{x}} - e^{-k\bar{x}}}{e^{k\bar{a}} - e^{-k\bar{a}}} = e^{-k(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 - e^{-2k\bar{x}}}{1 - e^{-2k\bar{a}}} < e^{-k(\bar{a}-\bar{x})}$$

e portanto, se  $x \in [0, a - \varepsilon]$ ,

$$\frac{b}{2} |K_k(x, y, t)| \leq \exp\left(-k \frac{\pi(a-x)}{b}\right) \leq \exp\left(-k \frac{\pi\varepsilon}{b}\right);$$

como a série  $\sum \exp(-k\pi\varepsilon/b)$  converge, pelo teste  $M$  de Weierstrass a série em (1.8) converge uniformemente. Isso prova que  $K$  é contínua em  $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  para qualquer  $\varepsilon \in (0, a)$  e portanto  $K \in (C[0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Vamos analisar agora a série das derivadas. É claro que  $K_k \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ; derivando em relação a  $x$ ,

$$D_1 K_k(x, y, t) = \frac{2k\pi}{b^2} \frac{\cosh(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right)$$

e portanto, se  $x \in [0, a - \varepsilon]$ ,

$$\begin{aligned} |D_1 K_k(x, y, t)| &\leq \frac{2\pi}{b^2} k e^{-k(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 + e^{-2k\bar{x}}}{1 - e^{-2k\bar{a}}} \\ &\leq \frac{2\pi}{b^2} k \exp\left(-\frac{k\pi\varepsilon}{b}\right) \frac{2}{1 - \exp(-2\pi a/b)} \\ &= C k e^{-\alpha k} \end{aligned}$$

onde  $C$  e  $\alpha$  são constantes positivas; como a série  $\sum k e^{-\alpha k}$  converge, novamente pelo teste  $M$  de Weierstrass a série das derivadas  $\sum D_1 K_k$  converge uniformemente. Derivando em relação a  $y$  ou a  $t$  obtemos resultados análogos. Por indução é fácil ver que, se  $j = 1, 2$  ou  $3$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|D_j^n K_k| \leq C k^n e^{-\alpha k}$$

onde  $C$  e  $\alpha$  são constantes positivas ( $\alpha = \pi\varepsilon/b$  e  $C$  depende de  $j$  e de  $n$ ) e, portanto, a série das derivadas de qualquer ordem converge uniformemente em  $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Usando indução, o Teorema 1.5 do Capítulo 7 (para cada variável) e o fato de que  $\varepsilon \in (0, a)$  é arbitrário, concluimos que  $K \in C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e que suas derivadas são obtidas derivando a série termo a termo.

Falta apenas mostrar que  $K_{xx} + K_{yy} = 0$ : mas isso é consequência do fato de que, qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\partial_x^2 K_k + \partial_y^2 K_k = 0$ .  $\square$

**Lema 1.3.** Seja  $f \in C([0, b])$  como no enunciado do Teorema 1.1. Então a série em (1.7) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$ ; além disso

$$u(x, y) = \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt, \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, b]. \quad (1.9)$$

**Demonstração:** Seja  $F$  a extensão ímpar e periódica de período  $2b$  de  $f$ . Então  $F \in C_{\text{per}}(2b)$  e  $F' \in SC_{\text{per}}(2b)$ , logo (veja a demonstração do Teorema 3.2 do Capítulo 7) a série  $\sum \widehat{F}(k)$  dos coeficientes de Fourier complexos de  $F$  converge absolutamente. Por outro lado, como  $F$  é uma função ímpar, sua série de Fourier real é uma série em senos e, portanto, os coeficientes complexos satisfazem

$$\widehat{F}(0) = 0, \quad \widehat{F}(k) = -ib_k/2, \quad \widehat{F}(-k) = ib_k/2, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde

$$b_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b F(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{b}\right) dt = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{b}\right) dt.$$

Concluimos então que a série  $\sum b_k$  converge absolutamente. Mas, se  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ ,

$$\left| b_k \frac{\sinh(k\pi x/b)}{\sinh(k\pi a/b)} \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \right| \leq |b_k|,$$

logo a série em (1.7) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$ .

Para provar a fórmula (1.9), vamos fixar  $x \in [0, a)$ . Tomando  $0 < \delta < a - x$ , a série (1.8) que define  $K$  converge uniformemente em  $[0, a - \delta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (como vimos na demonstração do Lema 1.2) e  $x \in [0, a - \delta]$ ,

logo podemos trocar a ordem da série com a integral:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh}(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right) dt \\ &= \int_0^b \sum_{k=1}^{+\infty} f(t) K_k(x, y, t) dt \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt. \end{aligned}$$

□

Precisamos agora derivar a expressão integral que define  $u$ . Vamos então provar um teorema geral sobre derivação de integrais em intervalos finitos.

**Teorema 1.4.** *Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo (finito ou infinito) e suponha que  $F \in C([a, b] \times I)$  é tal que a derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial y}$  existe e é contínua em  $[a, b] \times I$ . Seja*

$$f(y) = \int_a^b F(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (1.10)$$

*Então  $f$  é continuamente diferenciável em  $I$  e*

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (1.11)$$

**Demonstração:** Vamos mostrar em primeiro lugar que  $f$  definida por (1.10) é contínua em  $I$ . Fixe  $y_0 \in I$ . Se  $y_0$  está no interior do intervalo, então existe  $\eta > 0$  tal que  $J = [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq I$ ; se  $y_0$  é um dos extremos do intervalo  $I$ , tomaremos  $J = [y_0, y_0 + \eta] \subseteq I$  ou  $J = [y_0 - \eta, y_0] \subseteq I$ , dependendo se  $y_0$  é o menor ou o maior valor possível de  $y \in I$ , respectivamente. Em qualquer caso,  $F$  é uniformemente contínua em  $[a, b] \times J$  e portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , que podemos escolher menor que  $\eta$ , tal que

$$y \in J, \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |F(x, y) - F(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Logo, como  $\delta < \eta$ ,

$$\begin{aligned} y \in I, |y - y_0| < \delta &\Rightarrow y \in J, |y - y_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| &\leq \int_a^b |F(x, y) - F(x, y_0)| dx < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $f$  em  $y_0$ .

Antes de mostrar a diferenciabilidade de  $f$  em  $I$  gostaríamos de lembrar que, se  $I = [c, d]$ , a diferenciabilidade de  $f$  em  $c$  significa a existência do limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h};$$

analogamente, a diferenciabilidade de  $f$  em  $d$  significa a existência de

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(d + h) - f(d)}{h}.$$

Vamos agora provar a diferenciabilidade de  $f$  em  $I$ . Dado  $y_0 \in I$ , seja  $J$  como acima. Como  $\frac{\partial F}{\partial y}$  é uniformemente contínua em  $[a, b] \times J$ , existe  $\delta > 0$ ,  $\delta < \eta$ , tal que

$$z \in J, |z - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Por outro lado, se  $z \in J$  é tal que  $0 < |z - y| < \delta$ , pelo teorema do valor médio, existe um ponto intermediário  $\bar{z}_x$  (que depende de  $x$  em geral) entre  $z$  e  $y$  tal que

$$\frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x)$$

e, portanto,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Mas então

$$\begin{aligned} z \in I, |z - y| < \delta &\Rightarrow z \in J, |z - y| < \delta \\ \Rightarrow \frac{f(z) - f(y)}{z - y} &= \int_a^b \frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right] dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \\ \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(y)}{z - y} - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| dx < \varepsilon, \end{aligned}$$

logo  $f$  é diferenciável em  $I$  e vale (1.11).

Finalmente, como  $\frac{\partial F}{\partial y}$  é contínua em  $[a, b] \times I$ , procedendo como no início da demonstração vemos que a integral em (1.11) define, de fato, uma função contínua.  $\square$

Agora ficou fácil mostrar o Teorema 1.1:

**Demonstração do Teorema 1.1.** Pelo Lema 1.3, a série em (1.7) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$  e portanto  $u \in C([0, a] \times [0, b])$ . Pelo Lema 1.2,  $K \in C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e  $K_{xx} + K_{yy} = 0$ . Usando então o Teorema 1.4, a expressão (1.9) e indução, obtemos que  $u \in C^\infty([0, a] \times [0, b])$  e

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \int_0^b f(t)[K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t)] dt = 0$$

sempre que  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ . Além disso, como

$$K_k(x, 0, t) = 0, \quad K_k(x, b, t) = 0 \quad \text{e} \quad K_k(0, y, t) = 0$$

quaisquer que sejam  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x, y, t \in \mathbb{R}$ ,  $u$  satisfaz as condições de contorno em  $y = 0$ ,  $y = b$  e  $x = 0$ . Como a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em  $[0, b]$ , é claro que  $u(a, y) = f(y)$  para todo  $y \in [0, b]$ . Portanto  $u$  é solução de (1.3).  $\square$

O problema (1.3) é um caso particular de (1.2) com  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  e  $f \in C(\partial\Omega)$  particularmente simples. Para uma  $f \in C(\partial\Omega)$  arbitrária, o problema fica:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \text{ em } \Omega = (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad x \in [0, a], \\ u(0, y) &= g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \tag{1.12}$$

onde  $f_1, f_2 \in C([0, a])$  e  $g_1, g_2 \in C([0, b])$  são dadas e satisfazem

$$\begin{aligned} f_1(0) &= g_1(0), \quad f_1(a) = g_2(0), \\ f_2(0) &= g_1(b), \quad f_2(a) = g_2(b). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Para resolver (1.12), vamos primeiro transformá-lo em um problema do mesmo tipo mas com valor zero nos pontos  $(a, 0)$  e  $(a, b)$ : para isso basta definir

$$v(x, y) = u(x, y) - \frac{b-y}{b} g_2(0) - \frac{y}{b} g_2(b). \tag{1.14}$$

Um cálculo imediato mostra que  $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  é solução de (1.12) se e somente se  $v \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  é solução de

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ v(x, 0) &= F_1(x), \quad v(x, b) = F_2(x), \quad x \in [0, a], \\ v(0, y) &= G_1(y), \quad v(a, y) = G_2(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde

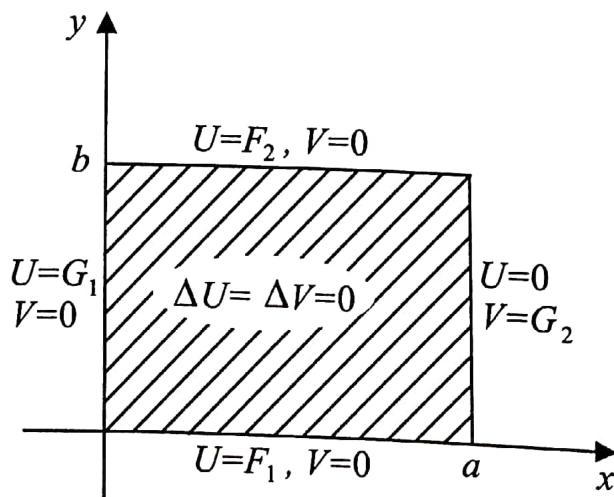
$$\begin{aligned} F_1(x) &= f_1(x) - f_1(a), \\ F_2(x) &= f_2(x) - f_2(a), \\ G_1(y) &= g_1(y) - \frac{b-y}{b} g_2(0) - \frac{y}{b} g_2(b), \\ G_2(y) &= g_2(y) - \frac{b-y}{b} g_2(0) - \frac{y}{b} g_2(b). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Observe que, de (1.13),

$$\begin{aligned} F_1(0) &= G_1(0), \quad F_1(a) = G_2(0) = 0, \\ F_2(0) &= G_1(b), \quad F_2(a) = G_2(b) = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

O problema (1.15), por sua vez, pode ser dividido em dois, ou seja, se  $U, V \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  são soluções, respectivamente, dos problemas

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \text{ em } \Omega, \\ U(x, 0) &= F_1(x), \quad U(x, b) = F_2(x), \quad x \in [0, a], \\ Y(0, y) &= G_1(y), \quad U(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (1.18)$$



**Fig. 32:**  $v = U + V$  é solução de (1.15).

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0 \text{ em } \Omega, \\ V(x, 0) &= 0 = V(x, b), \quad x \in [0, a], \\ V(0, y) &= 0, \quad V(a, y) = G_2(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \tag{1.19}$$

então  $v = U + V \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  é solução de (1.15). O problema (1.19) já sabemos resolver; quanto a (1.18), podemos novamente transformá-lo em um problema do mesmo tipo mas com valores nulos em  $(0, 0)$  e  $(0, b)$ ; a solução desse último problema, por sua vez é a soma das soluções de três problemas do tipo

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w_1(0, y) &= w_1(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \\ w_1(x, 0) &= 0, \quad w_1(x, b) = h_1(x), \quad x \in [0, a], \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} \Delta w_2 &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w_2(0, y) &= h_2(y), \quad w_2(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \\ w_2(x, 0) &= 0 = w_2(x, b), \quad x \in [0, a], \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \Delta w_3 &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w_3(0, y) &= 0 = w_3(a, y), \quad y \in [0, b], \\ w_3(x, 0) &= h_3(x), \quad w_3(x, b) = 0, \quad x \in [0, a]. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Deixamos os detalhes para o leitor completar.

## 2 O Problema de Dirichlet no Disco Unitário

O objetivo desta seção é resolver o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f \in C(\partial\Omega), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  é o disco unitário. Nesse caso a geometria do problema não nos permite aplicar diretamente o método de separação de variáveis: observe que só utilizamos o método quando a região de interesse  $\Omega$  pode ser escrita como um produto cartesiano  $\Omega = A \times B$  (no caso de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = I \times J$  onde  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  são intervalos

abertos). O disco aberto, no entanto, pode ser escrito como um produto cartesiano em coordenadas polares. Vamos então reescrever o problema (2.1) em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta,\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $r \in [0, 1)$ , segue que

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta &= y/x \text{ se } x \neq 0;\end{aligned}\tag{2.3}$$

fazendo  $v(r, \theta) = u(x, y)$ , obtemos, quando  $r \neq 0$ , pela regra da cadeia

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2};\tag{2.4}$$

definindo

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta),\tag{2.5}$$

vemos que  $g \in C_{\text{per}}(2\pi)$ ; procuramos então  $v(r, \theta)$  satisfazendo

$$\begin{aligned}v &\in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times \mathbb{R}), \\v(r, \theta + 2\pi) &= v(r, \theta), \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in \mathbb{R}, \\r^2 v_{rr} + rv_r + v_{\theta\theta} &= 0, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in \mathbb{R}, \\v(1, \theta) &= g(\theta).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Observe que, embora a mudança de coordenadas não funcione bem na origem, queremos que  $v$  seja de classe  $C^2$  na origem com  $v(0, \theta)$  independente de  $\theta$ . Note também que a EDP em (2.6) é mais complicada do que as consideradas anteriormente, pois tem coeficientes variáveis que se anulam em  $r = 0$ . Devemos, portanto, esperar dificuldades adicionais. Apesar disso, vamos resolver o problema (2.6) pelo método de separação de variáveis: procurando soluções da forma

$$v(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$$

obtemos

$$\frac{r^2 \varphi''(r) + r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) &= 0, \\ \psi(\theta + 2\pi) &= \psi(\theta),\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0.\tag{2.8}$$

Se  $\lambda$  for um autovalor de (2.7) com auto-função  $\psi$  (podendo ser complexa) de classe  $C^1$ , então, integrando de 0 a  $2\pi$ , obteremos

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{\psi(t)} dt &= - \int_0^{2\pi} \psi''(t)\overline{\psi(t)} dt \\ &= -\psi'(t)\overline{\psi(t)} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt \\ &= -\psi'(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} + \psi'(0)\overline{\psi(0)} + \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt,\end{aligned}$$

logo  $\lambda \geq 0$  e, se  $\lambda = 0$ ,

$$\int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow \psi = \text{constante}$$

é solução de (2.7). Se  $\lambda > 0$ , a solução geral da EDO em (2.7) é

$$\psi(\theta) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Então, como  $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ ,

$$\begin{aligned}A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta + 2\sqrt{\lambda}\pi) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta) \\ = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

o que implica que  $\sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{N}$  (observe que basta considerar a raiz positiva). Portanto, os auto-valores de (2.7) são da forma  $k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e as auto-funções associadas são

$$\psi_k(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta), \quad k \in \mathbb{Z}^+.\tag{2.9}$$

Por outro lado, se  $\lambda = k^2$ , a equação (2.8) fica

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - k^2\varphi(r) = 0,\tag{2.10}$$

que é uma *equação de Euler* de segunda ordem. Para resolver (2.10) procuramos uma solução da forma

$$\varphi(r) = r^\alpha. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.10), obtemos

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - k^2 r^\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm k.$$

Logo, se  $k \in \mathbb{N}$ , a solução geral de (2.10) é

$$\varphi_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

No caso em que  $k = 0$ , fazendo  $w = \varphi'_0$ , a equação (2.10) fica

$$\begin{aligned} rw'(r) + w(r) &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rw) = 0 \Rightarrow rw = \text{cte} \Rightarrow w = \frac{D_0}{r} \\ &\Rightarrow \varphi'_0(r) = \frac{D_0}{r} \Rightarrow \varphi_0(r) = C_0 + D_0 \ln r. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral de (2.10) é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= C_k r^k + D_k r^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \varphi_0(r) &= C_0 + D_0 \ln r. \end{aligned}$$

Como estamos procurando soluções de (2.6) contínuas em  $\bar{\Omega}$ , queremos apenas as soluções de (2.10) que sejam contínuas em  $r = 0$ , ou seja, só queremos as funções  $\varphi_k$  com  $D_k = 0$ . Logo, as soluções de (2.10) que nos interessam são

$$\varphi_k = C_k r^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.12)$$

Procuramos então soluções de (2.6) da forma

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)] r^k. \quad (2.13)$$

Para simplificar, vamos usar a forma complexa de (2.13),

$$v(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} r^{|k|}. \quad (2.14)$$

Impondo a condição  $v(1, \theta) = g(\theta)$ , obtemos

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta},$$

logo

$$c_k = \widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt. \quad (2.15)$$

Usando (2.15), podemos reescrever (2.14) como

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt e^{ik\theta} r^{|k|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik(\theta-t)} r^{|k|} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt \\ &= (g * P_r)(\theta), \end{aligned}$$

onde

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} r^{|k|} \quad (2.16)$$

é o *núcleo de Poisson* (do disco unitário). Observe que, se  $0 \leq r < 1$ , a série em (2.16) converge e

$$\begin{aligned} P_r(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (re^{it})^k + \sum_{k=1}^{+\infty} (re^{-it})^k \\ &= 1 + \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Em que sentido a função  $v$  definida por

$$v(r, \theta) = (g * P_r)(\theta) \quad (2.18)$$

é solução de (2.6)? Vamos mostrar que  $v$  é de classe  $C^2$  em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  e que  $v(r, \theta) \rightarrow g(\theta)$  uniformemente quando  $r \rightarrow 1^-$ . Com isso, provaremos que  $u(x, y) = v(r, \theta)$  é solução do problema (2.1). Nosso objetivo, então, é provar o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.** Seja  $v(r, \theta)$  definida por (2.18) e defina  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$u(x, y) = \begin{cases} v(r, \theta) & \text{se } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ f(x, y) & \text{se } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Então  $u$  é solução de (2.1).

**Observação.** Definimos convergência uniforme apenas para sequências e séries de funções (Definição 1.1 do Capítulo 7), mas a definição aqui é análoga: qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < 1 - r < \delta \Rightarrow |v(r, \theta) - f(\theta)| < \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Antes de provar o Teorema 2.1, mostraremos algumas propriedades das funções  $P_r(\theta)$  e  $v(r, \theta)$ .

**Lema 2.2.** Seja  $P(r, t) = P_r(t)$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Então, para cada  $r \in [0, 1]$  fixo,  $P(r, \cdot) \in C_{\text{per}}(2\pi)$ ,  $P \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R})$  e

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

em  $(0, 1) \times \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Da expressão (2.17) é claro que  $P(r, \cdot)$  é periódica de período  $2\pi$ . Por outro lado, se  $0 \leq r < 1$ ,

$$|1 - 2r \cos t + r^2| \geq 1 + r^2 - 2r|\cos t| \geq 1 + r^2 - 2r = (1 - r)^2 > 0$$

logo, da fórmula

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad (2.20)$$

é fácil ver que, de fato,  $P \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R})$ . Um cálculo direto mostra que a equação (2.19) é válida em  $(0, 1) \times \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lema 2.3.**  $v \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R})$  e satisfaz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

em  $(0, 1) \times \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Pelo Lema 2.2,  $P \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R})$ . Usando então a continuidade de  $g$ , o Teorema 1.4 e indução, é fácil ver que podemos derivar debaixo do sinal de integral infinitas vezes; portanto  $v \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R})$  e, se  $r \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, \theta - t) + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}(r, \theta - t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}(r, \theta - t) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.4.** Quaisquer que sejam  $r \in [0, 1)$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1. \quad (2.22)$$

Em particular,  $P(r, t) > 0$  para  $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Para provar (2.21), note que

$$\begin{aligned} |re^{i\theta} - e^{it}|^2 &= (re^{i\theta} - e^{it})(re^{-i\theta} - e^{-it}) \\ &= r^2 - r(e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}) + 1 \\ &= 1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2; \end{aligned}$$

a fórmula (2.21) segue então de (2.20). Para provar (2.22), vamos escrever a série em (2.16) que define  $P$  de outra maneira: como  $P$  é uma função real,

$$\begin{aligned} P(r, t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} r^{|k|} = \Re \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} r^{|k|} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(kt) r^{|k|} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kt) r^k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sejam  $r \in [0, 1)$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ . Como o cosseno é uma função limitada, a série em (2.23) converge uniformemente em  $[0, R] \times \mathbb{R}$  qualquer que seja  $R \in [0, 1)$  e, portanto, escolhendo  $R > r$ , podemos integrá-la termo a termo; além disso, como  $P(r, t)$  é periódica de período  $2\pi$  como função de  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} P(r, t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kt) r^k \right] dt \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = 1. \end{aligned}$$

□

O próximo lema é a peça fundamental na demonstração do Teorema 2.1.

**Lema 2.5.**  $v(r, \theta)$  converge uniformemente a  $g(\theta)$  quando  $r \rightarrow 1^-$ .

**Demonstração:** Queremos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que

$$0 < 1 - r < \eta \Rightarrow |v(r, \theta) - g(\theta)| < \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Vamos então estimar a diferença  $v(r, \theta) - g(\theta)$ . Usando o Lema 2.4,

$$\begin{aligned} v(r, \theta) - g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') P_r(\theta - \theta') d\theta' - g(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') (g(\theta') - g(\theta)) d\theta' \\ \Rightarrow |v(r, \theta) - g(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') |g(\theta') - g(\theta)| d\theta'. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \theta - \theta'$  e usando o fato de que  $P_r$  e  $g$  são periódicas de período  $2\pi$ , obtemos

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt. \quad (2.25)$$

Note que

$$\lim_{r \uparrow 1} P_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0, t \in [-\pi, \pi], \\ +\infty & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Portanto, para majorar a integral em (2.25) é preciso dividí-la em duas partes: uma quando  $t$  está perto de zero e outra quando  $t$  está longe de zero.

Seja então  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Como  $g$  é contínua em  $[-\pi, \pi]$  e periódica de período  $2\pi$ ,  $g$  é uniformemente contínua e portanto existe  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \pi/2$  e

$$\theta, \theta' \in \mathbb{R}, |\theta - \theta'| < \delta \Rightarrow |g(\theta) - g(\theta')| < \varepsilon/2. \quad (2.26)$$

Além disso  $g$  é limitada, logo existe  $M > 0$  tal que

$$|g(t)| \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, usando (2.25), (2.26), o Lema 2.4 e o fato de que  $P_r$  é par,

$$\begin{aligned} |v(r, \theta) - g(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) 2M dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) 2M dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) dt + \frac{M}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 0 < \delta \leq t \leq \pi &\Rightarrow \cos t \leq \cos \delta \Rightarrow 1 - 2r \cos t + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2 \\ \Rightarrow P_r(t) &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} = P_r(\delta), \end{aligned}$$

logo

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M P_r(\delta).$$

Mas

$$P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} \rightarrow 0$$

quando  $r \rightarrow 1^-$  (note que  $\delta$  não depende de  $\theta$ !) e, portanto, existe  $\eta > 0$  tal que

$$0 < 1 - r < \eta \Rightarrow P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Note que  $\eta$  depende de  $\delta$  mas não de  $\theta$ . Logo,

$$0 < 1 - r < \eta \Rightarrow |v(r, \theta) - g(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

□

**Demonstração do Teorema 2.1.** Os Lemas 2.3 e 2.5, juntamente com o fato de que  $P(r, \cdot)$  é periódica de período  $2\pi$ , mostram que  $v$  é solução de (2.6) se definirmos  $v(r, \theta)$  em  $r = 1$  por  $v(1, \theta) = g(\theta)$ . É claro então que  $u$  é solução de (2.1). □

**Observação.** Ao provar o Teoema 2.1, mostramos que, de fato,  $u \in C^\infty(\Omega)$ . É possível provar mais: se  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  for *harmônica* (ou seja,  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ ), onde  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$ , então  $u$  será a parte real de uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  *analítica* em  $\Omega$ .

O método de separação de variáveis nos dá um candidato a solução: é preciso depois “eleger” o candidato, ou seja, provar que a função encontrada é de fato solução. Além disso, nada nos garante que a solução é única. No caso de problemas elíticos, a unicidade é normalmente obtida através de princípios do máximo. Isso será discutido no Capítulo 12.

### 3 Exercícios

#### Seção 1: O Problema de Dirichlet em um Retângulo

1. Seja  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ . Ache uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  para o problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u(0, y) &= \operatorname{sen} y = u(\pi, y), \quad 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} x = u(x, \pi), \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

2. Ache uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  da equação de Laplace em  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ ,  $a$  e  $b$  constantes positivas,

satisfazendo as condições de contorno  $u(0, y) = 0 = u(a, y)$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, b) = g(x)$ ,  $0 \leq x \leq a$ , onde

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < a/2, \\ a - x & \text{se } a/2 \leq x < a. \end{cases}$$

**3.** Sejam  $a > 0$  constante e  $f \in C([0, a])$  satisfazendo  $f(0) = 0 = f(a)$ .

- (i) Utilize o método de separação de variáveis para achar um candidato a solução para o problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2((0, a) \times (0, +\infty)) \cap C([0, a] \times [0, +\infty)), \\ \Delta u &= 0 \text{ em } (0, a) \times (0, +\infty), \\ u(0, y) &= 0 = u(a, y), \quad y \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

- (ii) Determine que condições  $f$  tem que satisfazer para que o candidato encontrado em (i) seja de fato solução.

**4.** Discuta a existência de soluções e resolva, quando possível,

$$\begin{aligned} u &\in C^2((0, a) \times (0, b)) \cap C([0, a] \times [0, b]), \\ \Delta u &= 0 \text{ em } (0, a) \times (0, b), \\ u(0, y) &= 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b], \\ u(x, 0) &= h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad x \in [0, a]. \end{aligned}$$

**5.** Considere o problema de Neumann

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } (0, a) \times (0, b), \\ u_x(0, y) &= 0, \quad u_x(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b], \\ u_y(x, 0) &= 0 = u_y(x, b), \quad x \in [0, a]. \end{aligned}$$

- (i) Mostre que a equação de Laplace e as condições de contorno homogêneas determinam o conjunto de soluções

$$u_n(x, y) = c_n \cosh(n\pi x/b) \cos(n\pi y/b), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

- (ii) Fazendo uma superposição das soluções em (i), determine formalmente uma solução do problema.

**Observação.** Não é possível determinar a constante  $c_0$ . Além disso, para que exista solução é preciso que seja possível expandir  $f$  em uma série de Fourier em cossenos de período  $2b$  com  $a_0 = 0$  e, portanto, é preciso que  $\int_0^b f(y) dy = 0$ . Essas duas propriedades – o problema está determinado a menos de uma constante aditiva e  $f$  tem que satisfazer uma condição para que haja solução – são propriedades comuns a todos os problemas de Neumann.

6. Resolva o problema que consiste da equação de Laplace no retângulo  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , com  $u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = f(y)$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_y(x, b) = 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

7. Prove o Teorema 1.4 para funções complexas.

## Seção 2: O Problema de Dirichlet no Disco Unitário

1. Resolva

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f \in C(\partial\Omega), \end{aligned}$$

onde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$  e  $R > 0$  é constante.

2. Resolva o problema acima no caso em que  $f$  é constante.

3. Resolva o Exercício 1 no caso em que  $f(R \cos \theta, R \sin \theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + C$ ,  $A, B, C$  constantes,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

4. Resolva o Exercício 1 no caso em que  $f(R \cos \theta, R \sin \theta) = R^2 \cos^2 \theta - R^2 \sin^2 \theta$ .

5. Ache a solução da equação de Laplace *fora* do círculo de raio  $R$ , ou seja,

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $u$  limitada,

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega),$$

onde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R^2\}$ . Retire a condição “ $u$  limitada” e verifique que o novo problema tem uma infinidade de soluções.

# Capítulo 9

## A Equação de Calor

Neste capítulo, discutiremos alguns problemas envolvendo a equação de calor a uma dimensão espacial. Na primeira seção, estudaremos problemas em um intervalo finito e, na segunda, na reta inteira, o que nos levará de maneira natural à introdução da transformada de Fourier.

### 1 De Volta ao Problema de Transmissão de Calor

Vamos voltar ao problema (1.1) do Capítulo 6,

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde  $f \in C([0, l])$  satisfaz a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{1.2}$$

Vamos procurar soluções do problema (1.1) em  $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty))$ . Usando o método de separação de variáveis, obtemos, no Capítulo 6, um candidato à solução do problema (1.1)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l]. \quad (1.5)$$

Observe que, se a série em (1.5) convergir em  $[0, l]$ , então convergirá em toda a reta a uma função ímpar e periódica de período  $2l$ , logo a série em (1.5) será, de fato, a série de Fourier de  $F$ , onde  $F$  é a extensão ímpar e periódica de período  $2l$  de  $f$ .

A análise da série em (1.3) é semelhante à análise que fizemos anteriormente ao resolver o problema de Dirichlet no interior de um retângulo. Observe que, pelo lema de Riemann-Lebesgue, a sequência  $\{b_n\}$  dos coeficientes de Fourier reais de  $F$  é limitada e, portanto, devido ao fator exponencial, a série em (1.3) converge uniformemente em  $[0, l] \times [\varepsilon, +\infty)$  qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ . Isso nos permite reescrever (1.3), no caso em que  $t > 0$ , na forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \\ &= \int_0^l f(y) \left[ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \right] dy \\ &= \int_0^l f(y) k(x, y, t) dy, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde

$$k(x, y, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \quad (1.7)$$

é o *núcleo do calor* (para o problema (1.1)). Note que a série que define  $k(x, y, t)$  converge uniformemente em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$ , qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , e que  $k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty))$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário,  $k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$ . Concluimos, portanto, derivando debaixo do sinal de integral, que  $u \in C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ . Derivando a série (1.7) termo a termo, é fácil ver que  $k$  satisfaz a equação do calor  $k_t = \alpha^2 k_{xx}$ , logo  $u$  satisfaz a equação do calor em  $[0, l] \times (0, +\infty)$ . É claro também, usando (1.3) ou (1.6), que, se  $t > 0$ ,  $u(0, t) = 0 = u(l, t)$ .

Quando  $t = 0$  a situação é mais delicada, como era de se esperar. No entanto, supondo que  $f$  é diferenciável a menos de um número finito

de pontos em  $(0, l)$  com  $f' \in SC([0, l])$ , a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente e, portanto, a série em (1.3) converge uniformemente em  $[0, l] \times [0, +\infty)$ , o que mostra que  $u$  é contínua no segmento de reta  $t = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$  e satisfaaz(1.1). Acabamos então de provar o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.** *Seja  $f \in C([0, l])$  satisfazendo (1.2) e suponha que  $f$  é diferenciável em  $[0, l]$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC([0, l])$ . Então a série em (1.3) converge uniformemente em  $[0, l] \times [0, +\infty)$  para uma função  $u \in C([0, l]) \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$  que é a solução do problema (1.1).*

Observe que, se  $f$  for seccionalmente contínua em  $[0, l]$  em vez de contínua, com derivada seccionalmente contínua e se

$$f(x) = [f(x^+) + f(x^-)]/2, \quad \forall x \in (0, l),$$

$$f(0) = 0 = f(l),$$

então a série de Fourier converge pontualmente para  $f$ , embora a convergência não seja uniforme; nesse caso, a série (1.3) converge uniformemente em  $\mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$  como anteriormente e define uma função em  $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$  que é solução de (1.1), embora não seja contínua. Assim, mesmo quando  $f$  não é contínua, a solução  $u(x, t)$  é de classe  $C^\infty$  para valores arbitrariamente pequenos de  $t > 0$ ! Isso ilustra o fato de que o modelo de condução de calor que usamos suaviza *instantaneamente* quaisquer descontinuidades que apareçam na distribuição inicial de temperatura. Do ponto de vista físico, isso é uma desvantagem da equação do calor: a velocidade de propagação da perturbação é infinita! Sob esse aspecto, o modelo da equação de onda é melhor. No entanto, para valores grandes de  $t > 0$ , a equação funciona bem: a presença do fator exponencial em cada termo da série em (1.3) e o fato que os coeficientes  $b_n$  são limitados implica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, l],$$

o que está de acordo com a intuição física.

No caso em que  $f$  for apenas contínua, um estudo cuidadoso do núcleo do calor permite mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^l f(y)k(x, y, t) dy = f(x)$$

e que o limite é uniforme em  $x$  para  $x \in [0, l]$ ; nesse sentido é que podemos dizer que, se  $f \in C([0, l])$  com  $f(0) = 0 = f(l)$ , então

$$u(x, t) = \int_0^l f(y) k(x, y, t) dy, \quad x \in [0, l], \quad t > 0,$$

é solução de (1.1). O leitor interessado deve consultar a seção 1.7 de [Dym & McKean, 1972].

O problema (1.1) é, de fato, um problema bem posto. Vamos analisar primeiro a dependência contínua nos dados iniciais: se  $f$  e  $\tilde{f}$  são como no Teorema 1.1 e se  $u$  e  $\tilde{u}$  são as soluções correspondentes do problema (1.1), então, se  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{l} \int_0^l |f(y) - \tilde{f}(y)| dy \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \\ &\leq 2\|f - \tilde{f}\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \end{aligned}$$

onde

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty = \max_{x \in [0, l]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.$$

(Note que  $|f - \tilde{f}| \in C([0, l])$ , logo atinge um máximo em  $[0, l]$ .) Logo, para cada  $t > 0$  fixo, dado  $\varepsilon > 0$ , se  $\delta > 0$  for tal que  $2\delta M < \varepsilon$ , onde

$$M = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

então

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty < \delta \Rightarrow |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, l].$$

Em outras palavras, pequenas variações na condição inicial acarretam pequenas variações, para cada  $t > 0$  fixo, na solução final. Nesse sentido, o problema (1.1) tem dependência contínua nos dados.

É possível mostrar a unicidade de solução para o problema (1.1) através de princípios do máximo (veja o Capítulo 12). Outra maneira é através da chamada *integral de energia*:

$$E(t) = \int_0^l (u(x, t))^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (1.8)$$

Suponha que  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$  é uma solução de (1.1): então  $E$  definida por (1.8) é contínua em  $[0, +\infty)$  e diferenciável em  $(0, +\infty)$ ; derivando a equação (1.8), usando a equação diferencial e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^l 2u(x, t)u_t(x, t) dx = \int_0^l 2\alpha^2 u(x, t)u_{xx}(x, t) dx \\ &= -2\alpha^2 \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

e, portanto,  $E$  é uma função decrescente. Em particular,

$$0 \leq E(t) = \int_0^l (u(x, t))^2 dx \leq E(0) = \int_0^l (f(x))^2 dx. \quad (1.9)$$

Por outro lado, se  $v \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$  for outra solução de (1.1), então  $\omega = u - v$  será solução do problema

$$\begin{aligned} \omega_t &= \alpha^2 \omega_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ \omega(0, t) &= 0 = \omega(l, t), \quad t \geq 0, \\ \omega(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, l] \end{aligned}$$

que é um problema do mesmo tipo de (1.1) com  $f \equiv 0$ , logo vale a equação (1.9) com  $\omega$  no lugar de  $u$  e  $f \equiv 0$ , ou seja,

$$0 \leq \int_0^l (\omega(x, t))^2 dx \leq 0.$$

Então  $\omega \equiv 0$  e  $u \equiv v$ . Acabamos de provar o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.** *Se o problema (1.1) tiver solução em  $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty))$ , ela será única.*

Assim, se  $f \in C([0, l])$  satisfizer  $f(0) = 0 = f(l)$ ,  $u$  dada por (1.3) será a única solução de (1.1) em  $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty))$ ; além disso  $u$  será de classe  $C^\infty$  em  $[0, l] \times (0, +\infty)$ .

Vamos agora discutir outro problema para a equação de calor, mudando as condições de contorno para condições não homogêneas:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= T_1, \quad u(l, t) = T_2, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são constantes e  $f$  tem que satisfazer a condição de compatibilidade

$$f(0) = T_1, \quad f(l) = T_2. \quad (1.11)$$

Não podemos aplicar diretamente o método de separação de variáveis nesse caso devido a não homogeneidade das condições de contorno. Do ponto de vista físico, esperamos que a temperatura  $u(x, t)$  tenda, quando  $t \rightarrow +\infty$ , a uma distribuição estacionária de temperatura  $v(x)$  que independe da temperatura inicial  $u(x, 0)$ ; a temperatura  $u(x, t)$  deve ser a soma de uma distribuição transiente  $w(x, t)$  com a solução estacionária  $v(x)$ , com  $w(x, t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Quem é essa solução estacionária? É claro que  $v$  tem que satisfazer as condições de contorno e a EDP; como  $v$  não depende de  $t$ ,  $v$  é solução do problema

$$\begin{aligned} v''(x) &= 0, \quad x \in (0, l), \\ v(0) &= T_1, \quad v(l) = T_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Por outro lado, se  $u(x, t) = w(x, t) + v(x)$  e se  $v$  for solução de (1.12), então  $w$  será solução de

$$\begin{aligned} w_t &= \alpha^2 w_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ w(0, t) &= 0 = w(l, t), \quad t \geq 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - v(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Como a solução do problema (1.12) é

$$v(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1, \quad x \in [0, l], \quad (1.14)$$

combinando as observações acima com os Teoremas 1.1 e 1.2, obtemos:

**Teorema 1.3.** *Se  $f \in C([0, l])$  for diferenciável em  $(0, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC([0, l])$  e se  $f$  satisfizer (1.11), então a única solução de (1.10) em  $C([0, l] \times (0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty))$  será dada por*

$$u(x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad (1.15)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left( f(y) - \frac{T_2 - T_1}{l} y - T_1 \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

Além disso, a série em (1.15) converge uniformemente em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  e  $u \in C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ .

O método de separação de variáveis pode ser usado também para condições de contorno diferentes das discutidas acima. Por exemplo, se considerarmos uma barra com a extremidade em  $x = l$  isolada termicamente e com a extremidade em  $x = 0$  mantida a uma temperatura constante  $T$ , as condições de contorno ficam

$$u(0, t) = T, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Para resolver esse problema, basta reduzir as condições de contorno dadas para condições homogêneas subtraindo a solução estacionária; o problema homogêneo é resolvido então pelo método de separação de variáveis.

Um tipo mais geral de condição de contorno ocorre quando o fluxo de calor em um dos extremos da barra (por exemplo, em  $x = l$ ) é proporcional à temperatura: a condição de contorno fica

$$u_x(l, t) - hu(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.17)$$

onde  $h$  é uma constante não negativa. Nesse caso, o método de separação de variáveis nos leva a um problema de Sturm-Liouville (veja [CHURCHILL, 1978, Seção 67]).

## 2 O Problema da Barra Infinita

Nesta seção, vamos estudar o problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)), \\ u &\text{ limitada.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

O leitor atento deve ter notado que tomamos  $\alpha = 1$  na equação de calor usual

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}; \quad (2.2)$$

no entanto, isso não é restrição alguma pois uma simples mudança de variável

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha}{x} \\ v(y, t) &= u(x, t) \end{aligned}$$

transforma a equação (2.2) na equação  $v_t = v_{yy}$ . A condição “ $u$  limitada” é uma condição de contorno no infinito e vai nos garantir, como veremos mais tarde, a unicidade da solução de (2.1); note que esta condição impõe a condição de compatibilidade  $f$  limitada.

Usando o método de separação de variáveis, vamos procurar soluções da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.3)$$

para o problema sem a condição inicial (que é um problema linear homogêneo). Substituindo (2.3) na EDP em (2.1), obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda = \text{cte.}$$

Tendo em vista as condições de diferenciabilidade requeridas e a condição de contorno no infinito,  $X$  e  $T$  têm que ser soluções, respectivamente, dos problemas

$$\begin{aligned} X &\in C^2(\mathbb{R}) \text{ limitada,} \\ X'' &= -\lambda X \text{ em } \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} T &\in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ T' &= -\lambda T \text{ em } (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.5)$$

A solução geral da EDO em (2.4) é

$$X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda}x} + B e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (2.6)$$

e, como procuramos soluções *limitadas*,  $\sqrt{-\lambda}$  tem que ser um imaginário puro, de modo que  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$ . Aqui aparece a grande diferença entre o problema na reta inteira e o problema em um intervalo finito: o conjunto de auto-valores de (2.4) não é enumerável! Como a solução geral da EDO em (2.5) é

$$T(t) = C e^{-\lambda t}, \quad (2.7)$$

obtemos, para cada  $\lambda \geq 0$ ,

$$u_\lambda(x, t) = (A_\lambda e^{i\sqrt{\lambda}x} + B_\lambda e^{-i\sqrt{\lambda}x}) e^{-\lambda t}.$$

Fazendo  $\lambda = \xi^2$ ,  $\xi \geq 0$ ,

$$u_\xi(x, t) = (a_\xi e^{i\xi x} + b_\xi e^{-i\xi x}) e^{-\xi^2 t}. \quad (2.8)$$

Como não temos uma família enumerável de auto-valores, não podemos formar uma série “somando” todas as soluções (2.8). Mas o que corresponde a uma “soma contínua” (em contraposição a uma “soma discreta”, ou seja, uma série) é uma integral. É natural então perguntar se é possível obter uma solução do problema (2.1) integrando as soluções (2.8), o que nos leva a procurar uma solução da forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{+\infty} u_\xi(x, t) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} a(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi + \int_0^{+\infty} b(\xi) e^{-i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} a(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi + \int_{-\infty}^0 b(-\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} dt. \quad (2.9)$$

(Colocamos o fator  $(2\pi)^{-1/2}$  na frente da integral apenas por uma questão estética: ele faz com que certas fórmulas sejam agradavelmente simétricas.) Impondo a condição inicial,  $f$  tem que satisfazer

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (2.10)$$

Note que, ao contrário do que fizemos na primeira seção do Capítulo 6, optamos por trabalhar com a forma complexa (2.8) por ser mais conveniente (como aliás tivemos oportunidade de verificar no caso das séries de Fourier). No entanto, em alguns problemas (por exemplo no caso de uma “barra semi-infinita”, ou seja,  $x \in [0, +\infty)$  – veja [FIGUEIREDO, 1977]) será interessante considerar uma representação integral da condição inicial  $f$  na forma

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(\xi) \operatorname{sen}(\xi x) d\xi$$

ou

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(\xi) \cos(\xi x) d\xi.$$

A fórmula (2.10) nos leva então a procurar condições sob as quais uma função  $f$  pode ser representada nessa forma. Note que (2.10) pode

ser interpretada como uma expansão de  $f$  em auto-funções do operador  $(-d^2/dx^2)$  uma vez que, se  $\varphi_\xi = e^{i\xi x}$ , então

$$-\varphi'' = \xi^2 \varphi_\xi.$$

A primeira pergunta natural é, se  $f$  puder ser representada na forma (2.10), quem será a função  $g$ ? Tendo em vista a nossa experiência com séries de Fourier (compare (2.10) com a forma complexa da série de Fourier!), a resposta deve ser dada calculando a “projeção de  $f$  ao longo de  $\varphi_\xi$ ”. Calculando então o “produto interno” de  $f$  com  $\varphi_\xi$  (observe que aqui precisamos integrar ao longo da reta inteira) e prosseguindo como se todas as operações abaixo fossem válidas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi_\xi(x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a dx e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta g(\eta) e^{i\eta x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta g(\eta) \int_{-a}^a dx e^{-i(\xi-\eta)x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta g(\eta) \frac{e^{-i(\xi-\eta)a} - e^{i(\xi-\eta)a}}{-i(\xi-\eta)} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \frac{\sin((\xi-\eta)a)}{\xi-\eta} d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\xi - \frac{r}{a}\right) \frac{\sin r}{r} dr \\ &= g(\xi) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin r}{r} dr \\ &= g(\xi) \end{aligned}$$

pois a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existe como integral de Riemann imprópria e é igual a  $\pi$  (para o cálculo dessa integral, veja, por exemplo, [CHURCHILL, 1978, Seção 39]). Portanto, os coeficientes da expansão (2.10) devem ser dados por

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Caso a integral em (2.11) faça sentido, a função  $g$  obtida acima é chamada a *transformada de Fourier de  $f$*  e denotada por  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}f$ .

Antes de estudar com mais detalhes em que condições as fórmulas (2.10) e (2.11) são válidas, vamos prosseguir na obtenção de soluções para o problema (2.1). Substituindo (2.11) em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) e^{-i\xi y} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Note que a integral em  $\xi$  converge pois  $|e^{i\xi(x-y)}| = 1$  e a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} d\xi$$

converge. Na verdade, podemos até calcular explicitamente essas integrais, mas, antes disso, precisamos do seguinte resultado:

**Teorema 2.1.** *Seja  $F \in C(\mathbb{R} \times I)$ , onde  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo (finito ou infinito). Suponha que  $F$  é diferenciável em relação a  $y$  com  $\frac{\partial F}{\partial y} \in C(\mathbb{R} \times I)$  e que existem funções contínuas  $g_1, g_2$  tais que*

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\leq g_1(x) \text{ e } \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \leq g_2(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times I, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) dx &< +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

*Então as integrais impróprias*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx$$

*convergem e a função*

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

*é continuamente diferenciável em  $I$  com*

$$f'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx. \quad (2.14)$$

**Demonstração:** Em primeiro lugar, como  $F$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}$  são majoradas por funções de  $x$  integráveis na reta inteira, é claro que as integrais impróprias em (2.13) e (2.14) convergem. Vamos mostrar que  $f \in C(I)$ ; a demonstração que a integral em (2.14) também define uma função contínua é análoga.

Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $g_1$  é integrável em  $\mathbb{R}$ , existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$\int_{|x|>M} g_1(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.4 do Capítulo 8, a função

$$f_M(y) = \int_{|x|\leq M} F(x, y) dx, \quad y \in I,$$

é contínua em  $I$ , logo, dado  $y \in I$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in I, |y - z| < \delta \Rightarrow |f_M(y) - f_M(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} z \in I, |y - z| < \delta &\Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \int_{|x|>M} |F(x, y) - F(x, z)| dx \\ &+ \left| \int_{|x|\leq M} F(x, y) dx - \int_{|x|\leq M} F(x, z) dx \right| \\ &\leq 2 \int_{|x|>M} g_1(x) dx + |f_M(y) - f_M(z)| \\ &< 2 \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Falta apenas mostrar que  $f$  definida por (2.13) é diferenciável com derivada dada por (2.14). Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $N > 0$  tal que

$$\int_{|x|>N} g_2(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pelo Teorema 1.4 do Capítulo 8, a função

$$f_N(y) = \int_{|x|\leq N} F(x, y) dx, \quad y \in I$$

é diferenciável em  $I$  com derivada

$$\frac{d}{dy} f_N(y) = \int_{|x| \leq N} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in I.$$

Então, dado  $y \in I$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in I, \quad 0 < |z - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f_N(z) - f_N(y)}{z - y} - \int_{|x| \leq N} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por outro lado, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $\bar{z}_x$  entre  $z$  e  $y$  (pelo teorema do valor médio) tal que

$$\left| \frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) \right| \leq g_2(x),$$

logo

$$\begin{aligned} z \in I, \quad 0 < |z - y| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(y)}{z - y} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{|x| \leq N} \frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} dx - \int_{|x| \leq N} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right| \\ &\quad + \int_{|x| > N} \left| \frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} \right| dx + \int_{|x| > N} \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| dx \\ &\leq \left| \frac{f_N(z) - f_N(y)}{z - y} - \int_{|x| \leq N} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right| + 2 \int_{|x| > N} g_2(x) dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.2.** (i)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad \forall t > 0;$

(ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-x^2/4t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$

**Demonstração:** Seja

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} d\xi.$$

Então

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2 t} d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-(\xi^2 + \eta^2)t} \end{aligned}$$

e, portanto, usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} dr r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2 t} = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2 t} dr \\ &= \frac{\pi}{t} \int_{-\infty}^0 e^x dx = \left. \frac{\pi}{t} e^x \right|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{t}, \end{aligned}$$

logo  $I = \sqrt{\pi/t}$ , o que prova (i).

Para  $t > 0$  fixo, seja

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Como  $F(\xi, x) = e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x}$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$  com

$$\begin{aligned} |F(\xi, x)| &\leq e^{-\xi^2 t} \\ \left| \frac{\partial F}{\partial x} (\xi, x) \right| &= \left| i\xi e^{-\xi^2 t} \right| = |\xi| e^{-\xi^2 t} \end{aligned}$$

e as integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| e^{-\xi^2 t} dt$$

convergem, pelo Teorema 2.1  $\varphi$  é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{-i}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} (-2\xi t e^{-\xi^2 t}) d\xi \\ &= \frac{-i}{2t} \left[ e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} ixe^{i\xi x} d\xi \right] \\ &= -\frac{x}{2t} \varphi(x). \end{aligned}$$

Mas então  $\varphi$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{-x}{2t} \varphi(x), \\ \varphi(0) &= \sqrt{\frac{\pi}{t}},\end{aligned}$$

logo

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

□

Substituindo o valor da integral na fórmula (2.12), obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.15)$$

A fórmula (2.15) nos dá, portanto, um candidato à solução. Note que, para  $t > 0$ , como  $f$  é uma função contínua e limitada, a integral em (2.15) converge. A função

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.16)$$

é chamada de *núcleo do calor* (para o problema (2.1)). Vamos estabelecer algumas propriedades do núcleo  $K$  para depois mostrar em que sentido  $u$  definida por (2.16) é, de fato, solução de (2.1).

**Lema 2.3.** *O núcleo do calor  $K$  é de classe  $C^\infty$  e satisfaz a equação do calor em  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Além disso, quaisquer que sejam  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ ,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y, t) dy = 1. \quad (2.17)$$

**Demonstração:** Da expressão (2.16) é claro que  $K \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ . Um cálculo direto mostra que

$$K_t = K_{xx}$$

em  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Para provar (2.17), vamos fazer uma mudança de variável

$$\eta = \frac{x-y}{2\sqrt{t}}$$

e usar o Lema 2.2(i):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t) dy &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1. \end{aligned}$$

A primeira igualdade em (2.17) sai do fato de que (fazendo  $x = 0$ )  $K(-y, t) = K(y, t)$ , quaisquer que sejam  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.** Seja  $f \in C(\mathbb{R})$  limitada. Então

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x-y, t) dy = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

e o limite é uniforme em  $[-M, M]$ , onde  $M > 0$  é arbitrário.

**Demonstração:** Queremos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que

$$0 < t < \eta \Rightarrow |u(x, t) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-M, M], \quad (2.18)$$

onde  $u$  é dado por (2.15). Usando o Lema 2.3,

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x-y, t) dy - f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t) (f(y) - f(x)) dy \\ \Rightarrow |u(x, t) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t) |f(y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

Seja  $R > 0$  arbitrário. Então

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &\leq \int_{|x-y| < R} |f(y) - f(x)| K(x-y, t) dy \\ &\quad + \int_{|x-y| \geq R} |f(y) - f(x)| K(x-y, t) dy. \end{aligned}$$

Como  $f$  é limitada, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

logo

$$\begin{aligned} & \int_{|x-y| \geq R} |f(y) - f(x)| K(x-y, t) dy \\ & \leq 2C \int_{|x-y| \geq R} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy \\ & = \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \int_{|s| \geq R/\sqrt{4t}} e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $f$  é contínua,  $f$  é uniformemente contínua em  $[-2M, 2M]$  e, portanto, existe  $\delta > 0$  tal que  $\delta \leq M$  e

$$x, y \in [-2M, 2M], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

Então

$$\begin{aligned} |x| \leq M, |x - y| < \delta & \Rightarrow |y| \leq |x| + |x - y| < M + \delta < 2M \\ & \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Escolhendo  $R = \delta$  e usando o Lema 2.3, obtemos, qualquer que seja  $x \in [-M, M]$ ,

$$\int_{|x-y| < \delta} |f(y) - f(x)| K(x-y, t) dx < \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x-y| < \delta} K(x-y, t) dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|s| \geq \delta/\sqrt{4t}} e^{-s^2} ds = 0,$$

logo existe  $\eta > 0$  (que depende de  $\delta$  e  $\varepsilon$  – e portanto de  $M$  –, mas não depende de  $x$ ) tal que

$$0 < t < \eta \Rightarrow 2C \int_{|s| \geq \delta/\sqrt{4t}} e^{-s^2} ds \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

o que prova (2.18). □

**Teorema 2.5.** *Seja  $f \in C(\mathbb{R})$  limitada. Então a função*

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x-y, t) dy & \text{se } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, t = 0, \end{cases}$$

é solução do problema (2.1). Além disso,  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ .

**Demonstração:** Usando o Teorema 2.1, é fácil verificar que podemos derivar debaixo do sinal da integral quanto quisermos em  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , logo, pelo Lema 2.3,  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$  e satisfaz a equação do calor. Note que, como  $f$  é limitada,

$$|u(x, t)| \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) dy = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

onde  $C > 0$  é tal que

$$|f(y)| \leq C, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $u$  é limitada. Falta apenas mostrar a continuidade de  $u$  nos pontos da forma  $(x_0, 0)$ : dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , seja  $M = |x_0| + 1$ ; pelo Lema 2.4, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que

$$0 < t < \eta \Rightarrow |u(x, t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-M, M];$$

por outro lado, como  $f$  é contínua em  $x_0$ , existe  $\delta \in (0, 1)$  tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, como  $\delta < 1$ ,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta, 0 < t < \eta &\Rightarrow x \in [-M, M], 0 < t < \eta, |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |u(x, t) - u(x_0, 0)| = |u(x, t) - f(x)| \\ &\leq |u(x, t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $u$  em  $(x_0, 0)$ .  $\square$

Gostaríamos de observar que os resultados que provamos acima são válidos em  $\mathbb{R}^n$ : nesse caso, o núcleo de calor é

$$K(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

e a solução do problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ u_t &= \Delta u \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned}$$

onde  $f \in C(\mathbb{R})$  é uma função conhecida e limitada, é dada por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x - y, t) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Note que o Teorema 2.5 nos dá uma solução do problema (2.1), mas não sabemos se a solução é única ou não. Veremos mais tarde que, de fato, o problema (2.1) tem uma única solução.

Na resolução do problema (2.1), a transformada de Fourier apareceu apenas como um passo intermediário formal; no entanto, em muitos problemas, ela aparece de forma essencial, como veremos no próximo capítulo.

### 3 Exercícios

#### Seção 1: De Volta ao Problema de Transmissão de Calor

1. Resolva:

$$\begin{aligned} u &\in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty)), \\ u_t &= u_{xx} \text{ em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= T = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= T + b \operatorname{sen}(\pi x/l), \quad x \in [0, l]. \end{aligned}$$

2. Considere uma barra uniforme de comprimento  $l$ , difusividade térmica  $\alpha^2$  e distribuição inicial de temperatura  $f(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/l)$ ,  $x \in [0, l]$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . Suponha que as extremidades da barra estão isoladas. Encontre a temperatura  $u(x, t)$ . Qual é a temperatura estado estacionário?

3. Considere uma barra uniforme de comprimento  $l$ , difusividade térmica  $\alpha^2$  e distribuição inicial de temperatura  $f(x)$ ,  $x \in [0, l]$ . Suponha que a temperatura em  $x = 0$  é constante e igual a zero, enquanto que a extremidade  $x = l$  está isolada termicamente.

(i) Use o método de separação de variáveis para obter soluções do tipo

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}((2n - 1)\pi x/2l) \exp(-(2n - 1)^2\pi^2\alpha^2t/(4l^2)), \quad n \in \mathbb{N}$$

para o problema homogêneo dado pela equação de calor e as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = l$ .

- (ii) Encontre uma expansão em série para a temperatura  $u(x, t)$  da forma  $\sum c_n u_n$  que satisfaz a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ .
- (iii) Dê condições sobre a função  $f$  para que a expressão (ii) seja uma solução do problema em  $C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ . Essa solução é única?
- (iv) O que acontece se a extremidade  $x = 0$  for mantida à temperatura constante  $T$ ?

4. (i) Obtenha uma solução formal do problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} + g(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(t) \operatorname{sen}(n\pi x/l),$$

supondo que

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \operatorname{sen}(n\pi x/l), \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty),$$

(ii) O que você pode dizer sobre o problema abaixo?

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} + g(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned}$$

5. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 \Delta u \text{ em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é não vazio, aberto e limitado,  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha > 0$  é constante e  $f \in C(\overline{\Omega})$  é nula na fronteira  $\partial\Omega$ .

- (i) Separe a variável temporal  $t$  das variáveis no problema de contorno para obter um problema de auto-valores para  $-\Delta$  e uma EDO em  $t$ .
- (ii) Suponha que  $n = 2$  e  $\Omega = (0, l) \times (0, l)$ . Use novamente o método de separação de variáveis para obter os auto-valores e auto-funções do problema em (i).
- (iii) Obtenha uma expansão em série para a solução do problema original.

6. Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  e considere o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \\ u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0. \end{aligned}$$

- (i) Faça uma mudança de variável  $\tilde{x} = x/l$ ,  $\tilde{y} = y/l$  para recair em um problema análogo com  $\alpha = 1$ . Daqui para a frente suponha que  $\alpha = 1$ .
- (ii) Separe as variáveis espaciais da variável temporal e obtenha o problema

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda v \text{ em } D, \\ v|_{\partial D} &= 0. \end{aligned}$$

É possível mostrar (veja o Exercício 9 da primeira seção do Capítulo 12) que  $\lambda > 0$ . Suponha, daqui para frente, que  $\lambda > 0$ .

- (iii) Reescreva o problema em (ii) em coordenadas polares.
- (iv) Separe as variáveis  $r$  e  $\theta$  e mostre que a nova constante de separação  $\eta$  é real e não negativa.
- (v) Resolva o problema obtido em (iv) para a função  $\theta$  e faça uma mudança de variável  $\rho = \sqrt{\lambda}r$  para obter a *equação de Bessel de ordem*  $\eta$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\rho^2 - \eta^2)R(\rho) = 0.$$

**Observação.** No caso em que  $\eta^2 = n \in \mathbb{Z}^+$ , a solução geral da equação de Bessel é da forma  $R(\rho) = CJ_n(\rho) + DY_n(\rho)$ , onde  $C$  e  $D$  são constantes arbitrárias e  $J_n$  e  $Y_n$  são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente. A função  $Y_n$  é ilimitada quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , de modo que as soluções que interessam são os múltiplos de  $J_n$ . (Veja [CHURCHILL, 1978].)

- (vi) Usando a observação acima e o fato de que os zeros positivos da função de Bessel  $J_n$  formam uma coleção infinita enumerável  $\alpha_{nm}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , mostre que os auto-valores do problema em (ii) são da forma  $\lambda_{nm} = \alpha_{nm}^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Obtemos, portanto, um candidato à solução do problema original (em coordenadas cilíndricas e no caso  $\alpha = 1$ ) da forma

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} [A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta)] J_n(\alpha_{nm} r) \exp(-\alpha_{nm}^2 t)$$

onde os coeficientes  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  são determinados pela condição inicial. (Não calcule: é preciso usar as relações de ortogonalidade das funções  $J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-in\theta + \rho \sin \theta) d\theta$ ; para maiores detalhes, veja [CHURCHILL, 1978].)

## Seção 2: O Problema da Barra Infinita

1. Resolva o problema (2.1) no caso em que  $f$  é uma função constante.
2. Defina a função erf (também chamada de *função erro*) por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad x \in \mathbb{R}.$$

Escreva a solução do problema (2.1) em termos da função erro no caso em que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > a, \\ |x| & \text{se } |x| \leq a. \end{cases}$$

3. Encontramos a solução do problema (2.1) supondo que  $f \in C(\mathbb{R})$  é limitada e é claro que, se retirarmos a limitação da função  $f$ , a solução

$u$  não poderá ser limitada. Mostre que, se  $f \in C(\mathbb{R})$  for tal que  $|f(x)| \leq ce^{ax^2}$ , onde  $a$  e  $c$  são constantes positivas, então  $u(x, t)$  definida por (2.15) para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < t < (4a)^{-1}$ , satisfará a equação de calor nessa faixa. Mostre também que  $u(x, t) \rightarrow f(x_0)$  quando  $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$ .

4. Ache uma solução do problema

$$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)),$$

$$u_t = u_{xx} \text{ se } \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$u(x, 0) = Ax + B, \quad s \in \mathbb{R},$$

onde  $A, B$  são constantes.

5. Resolva o problema no Exercício 4 modificando a condição inicial para  $u(x, 0) = Ax^2 + Bx + C$ ,  $A, B$  e  $C$  constantes,  $x \in \mathbb{R}$ .

6. O que acontecerá com a expressão (2.15) se  $f$  tiver uma descontinuidade, mas  $f \in SC(\mathbb{R})$ ?

7. Ache uma solução da equação do calor em  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  que satisfaça  $u(x, t) \rightarrow f(x)$  quando  $t \rightarrow 0^+$ ,  $|x| \neq a$ , onde  $f(x) = 1$  se  $|x| < a$  e  $f(x) = 0$  se  $|x| > a$ ,  $a$  uma constante positiva. (Observação: escreva a solução em termos da função erro).

8. Repita o exercício anterior para o caso em que  $f(x) = 0$  se  $x < 0$  e  $f(x) = 1$  se  $x > 0$ , com  $u(x, t) \rightarrow f(x)$  quando  $t \rightarrow 0^+$  se  $x \neq 0$ .

9. Ache uma solução para o problema da “barra semi-infinita”

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0.$$

10. Prove o Teorema 2.1 para funções complexas.

# Capítulo 10

## A Transformada de Fourier

Começaremos este capítulo estudando algumas propriedades da transformada de Fourier no espaço de funções absolutamente integráveis. Na segunda seção, estudaremos a transformada no espaço de Schwartz e, na terceira, introduziremos o conceito de convolução para funções não periódicas. Na quarta e última seção faremos duas aplicações.

### 1 A Transformada em $\mathcal{L}^1$

Na resolução de um problema envolvendo a equação de calor na reta inteira (problema (2.1) do capítulo anterior), encontramos uma representação de uma função  $f \in C(\mathbb{R})$  limitada da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

onde

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

Note que nem toda função contínua e limitada pode ser representada nesta forma: é preciso que as integrais impróprias em (1.2) e (1.1) converjam (pelo menos!). Estudaremos para que funções  $f$  em que sentido as fórmulas acima são válidas.

Vamos começar então definindo a transformada de Fourier: se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for integrável em qualquer intervalo  $[a, b]$  e se a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b |f(x)| dx = \|f\|_1 < +\infty \quad (1.3)$$

existir, então a função  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (1.4)$$

estará bem definida para qualquer  $\xi \in \mathbb{R}$  e será chamada de *transformada de Fourier* de  $f$ . O problema fundamental da teoria é tentar recuperar  $f$  de sua transformada. Este problema é bastante complexo (lembrem o caso das séries!) e vamos resolvê-lo para uma classe especial de funções; para esta classe, provaremos a *fórmula de inversão*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (1.5)$$

Não é por acaso que estamos utilizando a notação  $\hat{f}$  tanto para séries quanto para transformadas: de fato a série e a transformada de Fourier são exemplos de uma teoria mais geral, a análise harmônica em grupos abelianos localmente compactos. O leitor curioso (e com algum conhecimento de Análise!) encontrará mais informação [RUDIN, 1963] ou no livro clássico [LOOMIS, 1953].

Vamos denotar por  $\mathcal{L}^1$  o espaço das funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolutamente integráveis, ou seja, integráveis em qualquer intervalo  $[a, b]$  e satisfazendo (1.3);  $\|\cdot\|_1$  define uma *semi-norma* (veja a terceira seção do Capítulo 6) em  $\mathcal{L}^1$ . Como as funções em  $\mathcal{L}^1$  não são necessariamente contínuas,  $\|f\|_1$  pode ser zero sem que  $f \equiv 0$  (basta que  $f$  seja diferente de zero apenas em um número finito de pontos). O espaço  $\mathcal{L}^1$  é “muito grande” para podemos inverter a transformada de Fourier: se  $f \in \mathcal{L}^1$  nem sempre  $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$ , logo a integral em (1.5) pode não existir.

**Exemplo 1.1.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \in [-l, l], \\ 0 & \text{se } x \notin [-l, l], \end{cases}$$

onde  $a, l \in \mathbb{R}$ ,  $l > 0$ ,  $a \neq 0$ . É claro que  $f \in \mathcal{L}^1$ . Vamos calcular  $\widehat{f}$ : se  $\xi \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l e^{-i\xi x} dx \\ &= i \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-il\xi} - e^{il\xi}}{\xi} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\xi l)}{\xi}\end{aligned}$$

e, se  $\xi = 0$ ,

$$\widehat{f}(0) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} l.$$

Como  $x^{-1}\sin x$  é integrável na reta inteira mas  $|x^{-1}\sin x|$  não o é,  $\widehat{f} \notin \mathcal{L}^1$ .

Vamos começar o nosso estudo da transformada de Fourier com algumas propriedades bem simples.

**Proposição 1.2.** *Sejam  $f, g \in \mathcal{L}^1$ . Então:*

- (i)  $(f + \lambda g)\widehat{ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \lambda \widehat{g}(\xi)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$  ( $\overline{f}$  é a função complexa conjugada de  $f$ );
- (iii) se  $y \in \mathbb{R}$  e  $f_y(x) = f(x - y)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_y \in \mathcal{L}^1$  e  

$$(f_y)\widehat{ }(\xi) = e^{-i\xi y} \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}; \quad (1.6)$$
- (iv)  $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** A primeira propriedade é trivial: basta usar a linearidade da integral. A segunda propriedade também é imediata:

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x)e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x} dx} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$

Quanto a (iii), o gráfico da função  $f_y$  é o gráfico de  $f$  transladado  $|y|$  unidades (para a direita se  $y > 0$ , para a esquerda se  $y < 0$ ), logo  $f_y \in \mathcal{L}^1$  e

$$\begin{aligned}(f_y)\widehat{ }(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\xi(t+y)} dt \\ &= e^{-i\xi y} \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Finalmente,  $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$ . □

**Teorema 1.3.** Seja  $f \in \mathcal{L}^1$ . Então sua transformada de Fourier  $\widehat{f}$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Dado  $\varepsilon > 0$ , pela condição (1.3) existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$\int_{|x|>M} |f(x)| dx < \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \varepsilon.$$

Seja  $N > 0$  tal que  $N \geq \|f\|_1$ . Como a função  $y \mapsto e^{iy}$  é contínua em  $y = 1$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|x| < \delta_1 \Rightarrow |e^{iy} - 1| < \frac{\sqrt{2\pi}}{2N} \varepsilon.$$

Mas então, se  $\delta = \delta_1/M$ ,

$$|\eta| < \delta \Rightarrow |x\eta| < \delta_1, \quad \forall x \in [-M, M]$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |\eta| < \delta &\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\leq M} |f(x)| |e^{i\eta x} - 1| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>M} |f(x)| |e^{i\eta x} - 1| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2N} \int_{|x|\leq M} |f(x)| dx + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>M} |f(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2N} \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade uniforme de  $f$ . □

É interessante observar que o lema de Riemann-Lebesgue também é válido em  $\mathcal{L}^1$ , ou seja, se  $f \in \mathcal{L}^1$ ,  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$ . A demonstração no caso geral é um pouco mais complicada, mas fica fácil se  $f$  for seccionalmente contínua em qualquer intervalo  $[a, b]$ :

**Proposição 1.4.** Seja  $f \in \mathcal{L}^1$  tal que  $f$  é seccionalmente contínua em qualquer intervalo  $[a, b]$ . Então

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

**Demonstração:** Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\widehat{f}$  é uniformemente contínua, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\xi - \eta| < \delta \Rightarrow |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por outro lado, de (1.3), existe  $M > 0$  tal que

$$\int_{|x| > M} |f(x)| < \sqrt{2\pi} \frac{\varepsilon}{3}, \quad M \geq \frac{\pi}{\delta}.$$

Seja  $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} M f\left(\frac{M}{\pi} y\right).$$

Como  $f$  é seccionalmente contínua em  $[-M, M]$ ,  $g$  é seccionalmente contínua em  $[-\pi, \pi]$  e, portanto, vale o lema de Riemann-Lebesgue (para séries de Fourier – Corolário 3.7 do Capítulo 6), ou seja,

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \in \mathbb{Z}, |n| \rightarrow +\infty.$$

Seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \in \mathbb{Z}, |n| \geq N \Rightarrow |\widehat{g}(n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se  $\xi \in \mathbb{R}$  com  $|\xi| > N\pi/M$ , escolha  $K \in \mathbb{Z}$  tal que

$$K - 1 < \frac{M}{\pi} \xi \leq K;$$

então  $|K| \geq N$  e

$$0 \leq \frac{\pi K}{M} - \xi = \frac{\pi}{M} \left( K - \frac{M}{\pi} \xi \right) < \frac{\pi}{M} \leq \delta.$$

Logo

$$\begin{aligned}
 |\widehat{f}(\xi)| &\leq \left| \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}\left(\frac{\pi K}{M}\right) \right| + \left| \widehat{f}\left(\frac{\pi K}{M}\right) \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>M} |f(x)| dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-M}^M f(x) e^{-i\pi K x/M} dx \right| \\
 &< \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{M}{\pi}y\right) e^{-iKy} \frac{M}{\pi} dy \right| \\
 &= \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iKy} dy \right| = \frac{2\varepsilon}{3} + |\widehat{g}(K)| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$|\xi| > \frac{M\pi}{M} \Rightarrow |\widehat{f}(\xi)| < \varepsilon.$$

□

## 2 O Espaço de Schwartz

O *espaço de Schwartz*, que denotaremos por  $S = S(\mathbb{R})$ , é a coleção das funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  tais que, quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ , existe uma constante  $C_{\alpha, \beta}$  com

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha, \beta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad (2.1)$$

$f^{(\beta)}$  é a  $\beta$ -ésima derivada de  $f$ .

Observe, em primeiro lugar, que as funções de  $S$  tendem a zero em  $\pm\infty$  rapidamente: de fato, se  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in S$ ,

$$|x^n f(x)| \leq C \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{C}{|x^n|}, \quad x \neq 0,$$

logo  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow +\infty$  mais rápido que o inverso de qualquer polinômio. Essa propriedade implica que  $S \subseteq \mathcal{L}^1$ . É claro que, se  $f \in S$ , então a função  $g(x) = x^\alpha f^{(\beta)}(x)$  também está em  $S$  quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ : ela é infinitamente diferenciável e  $x^{\alpha'} g^{(\beta')}(x)$ , quaisquer que sejam  $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^+$ , é uma soma finita de termos da forma  $x^n f^{(m)}(x)$ , logo limitada. Finalmente, é evidente que  $S$  é um espaço vetorial complexo e que o produto (pontual) de funções de  $S$  está em  $S$ .

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for infinitamente diferenciável e tiver *suporte compacto* (ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $f \equiv 0$  fora do intervalo  $[-M, M]$ ), então

$f \in S$ : a propriedade (2.1) segue do fato de que funções contínuas em um intervalo fechado limitado são limitadas.

**Exemplo 2.1.** Seja  $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$ . É claro que  $\gamma$  não tem suporte compacto, mas  $\gamma \in S$ , pois  $\gamma$  é infinitamente diferenciável e, se  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$x^\alpha \gamma^{(\beta)}(x) = p(x)e^{-x^2/2},$$

onde  $p(x)$  é um polinômio, logo  $x^\alpha \gamma^{(\beta)}(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow +\infty$  e é uma função limitada. É interessante observar que, pelo Lema 2.2 do capítulo anterior,  $\widehat{\gamma} = \gamma$  (e, pelo menos nesse caso, vale a fórmula de inversão).

O espaço de Schwartz é “feito sob medida” para o estudo da transformada de Fourier, como veremos mais adiante.

**Proposição 2.2.** Se  $f \in S$  então  $f' \in S$  e

$$(f')\widehat{ }(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

**Demonstração:** Já vimos que  $f' \in S$ . Calculando a transformada de Fourier de  $f'$ ,

$$\begin{aligned} (f')\widehat{ }(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - (-i\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right] \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Um argumento simples de indução mostra que:

**Corolário 2.3.** Se  $f \in S$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)} \in S$  e

$$(f^{(n)})\widehat{ }(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi). \quad (2.3)$$

Os resultados acima, de aspecto inocente, são, na verdade, muito profundos. A Proposição 2.2 nos diz que o operador diferencial  $\frac{d}{dx}$  agindo em  $S$  é levado, via transformada de Fourier, no operador de multiplicação por  $i\xi$  no espaço  $\{\widehat{f}: f \in S\}$ . Isso nos permite transformar

equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e nos permitirá, mais tarde, reduzir equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias. Precisamos então saber quem é o espaço das transformadas de  $S$ :

**Teorema 2.4.** *A transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  define uma bijeção linear de  $S$  em si mesmo e sua inversa é dada por*

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = f^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, f \in S. \quad (2.4)$$

Observe que, se soubermos que  $\mathcal{F}: S \rightarrow S$  é uma bijeção, as fórmulas (1.5) e (2.4) são equivalentes: de fato, se (1.5) for válida, como  $\mathcal{F}$  é uma bijeção, toda  $f \in S$  será da forma  $f = \widehat{g}$  para alguma  $g \in S$  e, portanto,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1} f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}g)(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se (2.4) for válida,

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f)(x) = (\mathcal{F}^{-1} \widehat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Para provar o Teorema 2.4 precisaremos de alguns lemas:

**Lema 2.5.** *Se  $f \in S$ , então  $\widehat{f} \in S$ .*

**Demonstração:** Como  $f \in S$ , podemos derivar debaixo do sinal de integral em relação a  $\xi$  quantas vezes quisermos (pelo Teorema 2.1 do Capítulo 9; embora este teorema tenha sido demonstrado para funções reais, separando uma função complexa nas suas partes real e imaginária é fácil ver que o resultado é válido para funções complexas), obtendo

$$\widehat{f}^{(\beta)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^\beta f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad (2.5)$$

qualquer que seja  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ , o que prova que  $\widehat{f}$  é de classe  $C^\infty$ . A fórmula (2.5) pode ser reescrita, em notação imprecisa porém clara, como

$$\widehat{f}^{(\beta)} = (-i)^\beta (x^\beta f). \quad (2.6)$$

Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ , usando a fórmula (2.5) e o Corolário 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \widehat{f^{(\beta)}}(\xi) &= (-i)^{\beta+\alpha} (i\xi)^\alpha (x^\beta f)(\xi) \\ &= (-i)^{\beta+\alpha} \left( \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (x^\beta f) \right)(\xi) \\ &= \widehat{g}(\xi),\end{aligned}$$

onde  $g = (-i)^{\beta+\alpha} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (x^\beta f)$ . É claro que  $g \in S \subseteq \mathcal{L}^1$  logo, pela Proposição 1.2,  $\widehat{g}$  é limitada, ou seja,  $\xi^\alpha \widehat{f^{(\beta)}}(x)$  é limitada, o que prova que  $\widehat{f} \in S$ .  $\square$

**Lema 2.6.** Se  $f \in S$  é tal que  $f(0) = 0$ , então

$$0 \leq f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

**Demonstração:** Vamos primeiro mostrar que existe  $g \in S$  tal que

$$f(x) = xg(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fato, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx)) dt = \int_0^1 xf'(tx) dt = xg(x)$$

onde

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt;$$

como  $f$  é infinitamente diferenciável, separando  $f$  em suas partes real e imaginária e usando o Teorema 1.4 do Capítulo 8, podemos diferenciar quantas vezes quisermos debaixo do sinal de integral, obtendo sempre uma função contínua, logo  $g$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$ . Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ : como  $x^\alpha g^{(\beta)}$  é contínua, ela é limitada em  $[-1, 1]$ ; se  $|x| \geq 1$ ,  $g(x) = x^{-1}f(x)$  e é fácil mostrar por indução que

$$g^{(\beta)}(x) = \frac{1}{x^{\beta+1}} \sum_{k=0}^{\beta} (-1)^k \frac{\beta!}{(\beta-k)!} x^{\beta-k} f^{(\beta-k)}(x),$$

logo

$$|x| \geq 1 \Rightarrow |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| \leq \sum_{k=0}^{\beta} \frac{\beta!}{(\beta-k)!} |x|^{\alpha+\beta-k} |f^{(\beta-k)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$$

e  $x^\alpha g^{(\beta)}(x)$  é limitada. Isso prova que  $g \in S$ . Utilizando a fórmula (2.6), obtemos

$$\widehat{f}(\xi) = (xg)(\xi) = i\widehat{g}'(\xi)$$

e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} (\widehat{g}(\xi)) d\xi = i\widehat{g}(\xi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

□

**Lema 2.7.** Se  $f \in S(\mathbb{R})$ , então

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

**Demonstração:** Vamos definir uma função auxiliar  $g$ ,

$$g(x) = f(x) - f(0)\gamma(x)$$

onde

$$\gamma(x) = e^{-x^2/2}.$$

Como já vimos,  $\widehat{\gamma} = \gamma$  e, em particular, a fórmula de inversão é válida para  $\gamma$ ; como  $f, \gamma \in S$ , é claro que  $g \in S$  e  $g(0) = 0$ . Logo, pelo Lema 2.6,

$$g(0) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\xi) d\xi.$$

Por outro lado, pela linearidade da transformada de Fourier (Proposição 1.2),

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - f(0)\widehat{\gamma}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - f(0)\gamma(\xi),$$

logo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi - f(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi - f(0). \end{aligned}$$

□

Estamos prontos para provar a fórmula de inversão em  $S$ :

**Lema 2.8.** *Se  $f \in S$ , então*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

**Demonstração:** Se  $\xi, x \in \mathbb{R}$ , pela Proposição 1.2,

$$\widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} = (\widehat{f(-x)})(\xi),$$

onde  $f_{-x}(t) = f(t + x)$ . Como o gráfico de  $f_{-x}$  é o gráfico de  $f$  transladado de  $|x|$  unidades, é claro que  $f_{-x} \in S$ . Pelo Lema 2.7,

$$f(x) = f_{-x}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f(-x)})(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

□

**Demonstração do Teorema 2.4.** Pela Proposição 1.2 e pelo Lema 2.5,  $\mathcal{F}: S \rightarrow S$  é linear. Da fórmula de inversão (2.7), é claro que  $\mathcal{F}$  é injetora pois

$$\mathcal{F}f = 0 \Rightarrow \widehat{f} \equiv 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = 0$$

Falta apenas mostrar que  $\mathcal{F}$  é sobrejetora (pois, nesse caso, as fórmulas (2.4) e (2.7) são equivalentes). De fato, dado  $f \in S$ ,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \widehat{f}(-x) \quad (2.8)$$

está em  $S$  (pois  $\widehat{f} \in S$  e, se  $h \in S$ ,  $x \mapsto h(-x)$  também pertence a  $S$ ) e, pela fórmula de inversão (2.7),

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x) e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i\xi y} dy = \widehat{g}(\xi), \end{aligned} \quad (2.9)$$

logo  $f = \widehat{g}$ .

□

**Observação.** Das expressões (2.8) e (2.9) vemos que

$$\widehat{\widehat{g}}(x) = g(-x) \quad (2.10)$$

e (2.10) vale para toda  $g \in S$ . Portanto a transformada de Fourier  $\mathcal{F}: S \rightarrow S$  tem a propriedade que  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^2 = J$ , onde  $J: S \rightarrow S$  é definido por

$$(Jf)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, como  $J^2$  é a identidade  $I: S \rightarrow S$ , temos que

$$\mathcal{F}^4 = I. \quad (2.11)$$

A identidade (2.11) significa, em particular, que as raízes quarta da unidade,  $\pm i, \pm 1$  são auto-valores do operador  $\mathcal{F}$ . As *funções de Hermite*

$$h_n(x) = e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.12)$$

são auto-funções pois

$$\mathcal{F}h_n = \widehat{h}_n = (-i)^n h_n. \quad (2.13)$$

Note que

$$h_0(x) = \gamma(x) = e^{-x^2/2}$$

e

$$h_n(x) = p_n(x)e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde  $p_n(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , logo  $h_n \in S$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

### 3 A Operação de Convolução

Já definimos anteriormente (veja a quarta seção do Capítulo 7) a operação de convolução para funções seccionalmente contínuas e periódicas. Vamos agora definir esta operação para funções não periódicas. Seja  $f \in \mathcal{L}^1$  e seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  limitada e seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado. A *convolução* de  $f$  e  $g$  é a função  $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Note, em primeiro lugar, que a integral em (3.1) converge pois, como  $g$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e, portanto,

$$|f(y)g(x-y)| \leq M|f(y)| \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x-y)| \leq M\|f\|_1 < +\infty.$$

O espaço  $\mathcal{L}^1$  não é um bom espaço para a operação de convolução, mas o espaço de Schwartz é: mostraremos mais adiante que a convolução de fato define uma operação em  $S$ . Veremos também que essa operação corresponde, via transformada de Fourier, à multiplicação pontual (a menos de uma constante).

**Lema 3.1.** Se  $f, g \in S$ , então  $f * g \in C_{\mathbb{C}}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1$  e

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (3.2)$$

**Demonstração:** Como a função  $F(x, y) = f(y)g(x-y)$  é infinitamente diferenciável e, para cada  $x$  fixo,  $F(x, \cdot)$  e todas as suas derivadas estão em  $S$  (logo, em particular, em  $\mathcal{L}^1$ ), pelo Teorema 2.1 do Capítulo 9 é fácil ver que  $f * g$  é infinitamente diferenciável. Para mostrar então que  $f * g \in \mathcal{L}^1$  e que vale a desigualdade (3.2), basta mostrar que

$$\int_a^b |(f * g)(x)| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . De fato,

$$\begin{aligned} \int_a^b |(f * g)(x)| dx &= \int_a^b \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy \right| dx \\ &\leq \int_a^b dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy |f(y)| |g(x-y)| \\ &= \int_a^b dx \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n dy |f(y)| |g(x-y)| \\ &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) dx, \end{aligned}$$

onde

$$G_n(x) = \int_{-n}^n |f(y)| |g(x-y)| dy.$$

É claro que  $G_n \in C(\mathbb{R})$ , logo, para trocar a ordem da integral com o limite acima, basta mostrar que o limite é uniforme (veja o Teorema 1.4 do Capítulo 7). De fato, como  $g$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como  $f \in \mathcal{L}^1$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Então, qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow \left| G_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy \right| \\ &\leq \int_{|y| \geq n} |f(y)| |g(x-y)| dy \leq M \int_{|y| \geq N} |f(y)| |dy| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo  $G_n$  converge uniformemente para

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b |(f * g)(x)| dx &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b dx \int_{-n}^n dy |f(y)| |g(x-y)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n dy |f(y)| \int_a^b dx |g(x-y)| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dy |f(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} dx |g(x-y)| \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy |f(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} dz |g(z)| \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.2.** Sejam  $f, g, h \in S$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Então

- (i)  $f * g = g * f$ ,
- (ii)  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ,
- (iii)  $(f + g) * h = f * h + g * h$ ,
- (iv)  $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$ .

A demonstração da Proposição 3.2 é imediata e ficará a cargo do leitor; salientamos apenas que a expressão  $(f * g) * h$  faz sentido, já que  $f * g \in \mathcal{L}^1$  pelo Lema 3.1 e  $h$  é limitada.

Vamos introduzir um produto interno em  $S$ : se  $f, g \in S$ ,

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx. \quad (3.3)$$

É fácil mostrar que  $(\cdot|\cdot)$  definido por (3.3) é de fato um produto interno em  $S$  (veja a Proposição 1.1. do Capítulo 6). Se  $f \in S$ , usaremos a notação

$$\|f\|_2 = (f|f)^{1/2} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (3.4)$$

(Compare com as equações (3.2) e (3.4) do Capítulo 6: a situação aqui é um pouco diferente porque  $(f|g)$  toma valores complexos em geral quando  $f, g \in S$ .) Vamos mostrar que, de fato,  $\|\cdot\|_2$  definida por (3.4) define uma *norma* em  $S$ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\|f\|_2 \geq 0$ ,  $\forall f \in S$ ;
- (ii) se  $f \in S$ ,  $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ;
- (iii)  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$ ,  $\forall f \in S$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- (iv)  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ ,  $\forall f, g \in S$ .

As três primeiras propriedades acima são imediatas. Para provar a desigualdade triangular (propriedade (iv) acima), precisamos da desigualdade CBS

$$|(f|g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad \forall f, g \in S. \quad (3.5)$$

Supondo (3.5), a desigualdade triangular segue pois

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_2^2 &= (f + g|f + g) = \|f\|_2^2 + (f|g) + (g|f) + \|g\|_2^2 \\
 &= \|f\|_2^2 + 2\Re(f|g) + \|g\|_2^2 \\
 &\leq \|f\|_2^2 + 2|(f|g)| + \|g\|_2^2 \\
 &\leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 \\
 &= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2,
 \end{aligned}$$

onde usamos que  $\overline{(f|g)} = (g|f)$  (uma das propriedades do produto interno). Para provar (3.5), vamos fixar  $f, g \in S$ : então  $(f|g) = |(f|g)|e^{i\theta}$  para algum  $\theta \in [0, 2\pi]$  e, portanto, qualquer que seja  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (re^{i\theta} f + g|re^{i\theta} f + g) \\
 &= r^2\|f\|_2^2 + re^{-i\theta}(f|g) + re^{i\theta}(g|f) + \|g\|_2^2 \\
 &= r^2\|f\|_2^2 + 2r|(f|g)| + \|g\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Mas um polinômio de segundo grau com coeficientes reais que tem no máximo uma raiz real tem discriminante menor ou igual a zero, ou seja,

$$4|(f|g)|^2 - 4\|f\|_2^2\|g\|_2^2 \leq 0,$$

logo

$$|(f|g)| \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

**Teorema 3.3.** Se  $f, g \in S$ , então  $f * g \in S$  e

$$(f * g)(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Além disso, vale a identidade de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2. \quad (3.7)$$

**Demonstração:** Como  $f * g \in \mathcal{L}^1$  pelo Lema 3.1, podemos calcular a transformada de Fourier de  $f * g$ ; além disso, como as integrais convergem uniformemente (veja a demonstração do Lema 3.1), podemos trocar a

ordem de integração obtendo

$$\begin{aligned}
 (f * g)\hat{\gamma}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y)g(x-y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\xi x} g(x-y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) e^{-i\xi y} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i\xi z} g(z) \\
 &= \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$

Como  $f, g \in S$ , pelo Lema 2.5,  $\widehat{f}, \widehat{g} \in S$ , logo  $(f * g)\hat{\gamma} \in S$  e, portanto, pelo Teorema 2.4,  $f * g \in S$ . Falta apenas mostrar (3.7). Para isso, note primeiro que, usando (3.6) e a fórmula de inversão em  $S$ , se  $f, g \in S$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)\hat{\gamma}(\xi) d\xi = (f * g)(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(-y) dy.
 \end{aligned}$$

Mas então, dada  $f \in S$ , se  $g(y) = \overline{f(-y)}$ ,  $g \in S$  e sua transformada de Fourier é

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} e^{-i\xi x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\
 &= \overline{\widehat{f}(\xi)},
 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi = (f * g)(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

□

## 4 Aplicações

Vamos ilustrar com dois exemplos o uso da transformada de Fourier para obter candidatos à solução de problemas envolvendo EDP's lineares. Consideraremos primeiro um problema para a equação de calor não homogênea:

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ u_t &= u_{xx} + g(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $f \in C(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  são funções limitadas dadas. A EDP em (4.1) é a equação do calor acrescida de um termo não homogêneo  $g(x, t)$ . No problema (4.1), tanto a EDP quanto a condição inicial não são homogêneas, mas podemos dividí-lo em dois problemas, um com a EDP homogênea, outra com a condição inicial homogênea.

Considere então os seguintes problemas:

$$\begin{aligned} v &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ v_t &= v_{xx} \text{ em } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} w &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ w_t &= w_{xx} + g(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ w(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

É claro que, se  $v$  for solução de (4.2) e se  $w$  for solução de (4.3), então  $u = v + w$  será solução de (4.1). Obtivemos, na última seção do capítulo anterior, uma solução para o problema (4.2) usando o método de separação de variáveis:

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x - y, t) dy = (f * K_t)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{4.4}$$

onde

$$K(x, t) = K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4.5}$$

é o núcleo do calor. Observe que, para cada  $t > 0$  fixo,  $K_t \in S$ .

Vamos proceder formalmente, como na segunda seção do Capítulo 9, para achar um candidato à solução de (4.3). Aplicando a transformada de Fourier na variável  $x$ , obtemos

$$\begin{array}{l} \partial_t \hat{w} = -\xi^2 \hat{w} + \hat{g}(\xi, t), \quad t > 0, \\ \hat{w}(\xi, 0) = 0. \end{array} \quad (4.6)$$

Para cada  $\xi \in \mathbb{R}$  fixo, (4.6) é, de fato, um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem, portanto sua solução é única. Usando o fator integrante  $e^{\xi^2 t}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t(e^{\xi^2 t} \hat{w}) &= e^{\xi^2 t} \hat{g}(\xi, t) \\ \Rightarrow e^{\xi^2 t} \hat{w}(\xi, t) &= \hat{w}(\xi, 0) + \int_0^t e^{\xi^2 s} \hat{g}(\xi, s) ds \\ \Rightarrow \hat{w}(\xi, t) &= e^{-\xi^2 t} \int_0^t e^{\xi^2 s} \hat{g}(\xi, s) ds. \end{aligned}$$

Calculando formalmente a transformada inversa, obtemos

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} \int_0^t ds e^{\xi^2 s} \hat{g}(\xi, s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{i\xi x} e^{-\xi^2(t-s)} \hat{g}(\xi, s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{i\xi x} e^{-\xi^2(t-s)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y, s) e^{-i\xi y} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y, s) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2(t-s)} e^{i\xi(x-y)}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2 do capítulo anterior, como  $s < t$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2(t-s)} e^{i\xi(x-y)} d\xi &= \sqrt{\frac{\pi}{t-s}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4(t-s)}\right) \\ &= 2\pi K(x-y, t-s), \end{aligned}$$

logo

$$w(x, t) = \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y, s) K(x-y, t-s). \quad (4.7)$$

Provar que a função  $w$  definida por (4.7) é, de fato, solução do problema (4.3) é mais complicado: note que a integral em  $s$  é uma integral imprópria e que não podemos aplicar o Teorema 1.4 do Capítulo 8 para derivar a solução em  $t$ , pois  $K(x - y, t - s)$  está definida apenas para  $s < t$ . Apesar disso, procedendo como na última seção do capítulo anterior, é possível provar que, para cada  $t > 0$  fixo, a integral em  $y$  (que já sabemos que converge) tende para  $g(x, t)$  quando  $s \rightarrow t^-$  e é fácil provar que a integral em (4.7) converge se  $t > 0$ . A derivação da integral é mais complicada, mas é possível mostrar que  $w$  é solução da EDP em (4.3) e que  $w(x, t) \rightarrow 0$  quando  $t \downarrow 0$ , portanto  $w$  é, de fato, solução do problema (4.3). Com isso,  $u(\cdot, t)$  definida por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x - y, t) dy \\ &\quad + \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y, s) K(x - y, t - s), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned} \tag{4.8}$$

é solução do problema (4.1). Mais precisamente, é válido o seguinte resultado (que não demonstraremos):

**Teorema 4.1.** *Sejam  $f \in C(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  limitadas. Então  $u(x, t)$  definida por (4.8) é solução do problema (4.1).*

Vamos agora usar a transformada de Fourier para resolver

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ limitada,} \\ \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  é o semi-plano superior e  $f$  é uma função contínua e limitada dada. Observe que, se retirarmos a condição de limitação, não há unicidade: por exemplo, se  $f \equiv 0$ , as funções  $u_1(x, y) = y$  e  $u_2(x, y) = 0$  têm laplaciano nulo. É possível provar que o problema (4.9) tem uma única solução.

Vamos aplicar a transformada de Fourier em relação à variável  $x$  para resolver (4.9):

$$\begin{aligned} -\xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \partial_y^2 \hat{u}(\xi, y) &= 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para cada  $\xi$  fixo, a solução geral da EDO em (4.10) é

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(y)e^{-\xi y}.$$

Por outro lado, pela fórmula de inversão, procuramos soluções da forma

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi, \quad y > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

que sejam limitadas, logo  $\widehat{u}(\xi, y)$  tem que ser limitada quando  $y \rightarrow +\infty$ , o que implica que  $A(\xi) = 0$  se  $\xi > 0$  e  $B(\xi) = 0$  se  $\xi < 0$ , ou seja,

$$\widehat{u}(\xi, y) = C(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Impondo a condição inicial vemos que

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}$$

é a solução desejada de (4.10). Utilizando a fórmula de inversão, obtemos, formalmente,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{i\xi s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-|\xi|y} e^{i\xi(x-s)}. \end{aligned}$$

### Lema 4.2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

### Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi &= \int_{-\infty}^0 e^{\xi y} e^{i\xi x} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-\xi y} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi y} e^{-i\xi x} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-\xi y} e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\xi y} e^{-i\xi x} d\xi &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\xi(y+ix)} d\xi \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-b(y+ix)} - 1}{-(y+ix)} = \frac{1}{y+ix} \end{aligned}$$

pois  $y > 0$ ; logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{y+ix} + \frac{1}{y-ix} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

□

Portanto, um candidato à solução de (4.9) é

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} f(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (4.11)$$

A função

$$P(x, y) = P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \quad (4.12)$$

é chamada de *núcleo de Poisson* de  $\Omega$  e (4.11) pode ser reescrita na forma

$$u(x, y) = (f * P_y)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (4.13)$$

Da expressão (4.12), é claro que  $P(x, y) > 0$  quaisquer que sejam  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ , e que  $P \in C^\infty(\Omega)$ . Um cálculo direto mostra que  $\Delta P = 0$  e que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) ds = 1. \quad (4.14)$$

**Lema 4.3.** *Quaisquer que sejam  $f \in C(\mathbb{R})$  limitada e  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,*

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) f(s) ds = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

*e o limite é uniforme em  $I$ .*

**Demonstração:** Seja  $M > 0$  tal que  $I \subseteq [-M, M]$ . Vamos mostrar que o limite é uniforme em  $[-M, M]$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que

$$0 < y < \eta \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) f(s) ds - f(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-M, M].$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  é contínua em  $[-2M, 2M]$ ,  $f$  é uniformemente contínua, logo existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$x, s \in [-2M, 2M], |x-s| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhendo  $\delta = \min\{\delta_1, M\}$ , obtemos

$$x \in [-2M, 2M], |x-s| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, usando (4.14), qualquer que seja  $x \in [-M, M]$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) f(s) ds - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) (f(s) - f(x)) ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) |f(s) - f(x)| ds \\ &= \int_{|x-s|<\delta} P(x-s, y) |f(s) - f(x)| ds \\ &\quad + \int_{|x-s|\geq\delta} P(x-s, y) |f(s) - f(x)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|x-s|\geq\delta} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} |f(s) - f(x)| ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $f$  é limitada, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq C, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) f(s) ds - f(x) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C}{\pi} \int_{|x-s| \geq \delta} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} ds \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4C}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\delta}{y} \right) \right). \end{aligned}$$

Com  $\arctan s \rightarrow \pi/2$  quando  $s \rightarrow +\infty$  e  $\arctan s < \pi/2$ , existe  $\eta > 0$  tal que

$$0 < y < \eta \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\delta}{y} < \frac{\pi}{4C} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$0 < y < \eta \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) f(s) ds - f(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-M, M].$$

□

**Teorema 4.4.** Seja  $f \in C(\mathbb{R})$  limitada. Então a função

$$u(x, y) = \begin{cases} (f * P_y)(x) & \text{se } y > 0, x \in \mathbb{R}, \\ f(x) & \text{se } y = 0, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.16)$$

é solução de (4.9). Além disso,  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

**Demonstração:** Em primeiro lugar, é fácil mostrar por indução que

$$\partial_x^n P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{p_n(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}},$$

$$\partial_y^n P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{q_n(x^2, y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}},$$

onde  $p_n$  e  $q_n$  são polinômios,  $p_n(x, y)$ , como polinômio em  $x$ , tem grau  $n$  e  $q_n(x^2, y)$ , também como polinômio em  $x$ , tem grau  $n$ , se  $n$  par, e  $n+1$ , se  $n$  ímpar, de modo que as integrais impróprias

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x^n P(x-s, y)| ds, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_y^n P(x-s, y)| ds$$

convergem. Aplicando então o Teorema 2.1 do Capítulo 9, como  $f$  é limitada, podemos derivar debaixo do sinal de integral quantas vezes quisermos para obter que

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s, y) f(s) ds, \quad (x, y) \in \Omega,$$

é de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ . Além disso, se  $(x, y) \in \Omega$ ,

$$\Delta u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta P(x - s, y) f(s) ds = 0.$$

Observe também que  $u$  é continua em  $\bar{\Omega}$  pelo Lema 4.3 e limitada pois

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(x - s, y) f(s) ds \right| \leq C$$

onde  $C > 0$  é tal que  $|f(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Na verdade, é possível provar que  $u$  é *analítica real* em  $\Omega$  (ou seja, pode ser representada pela sua série de Taylor em uma vizinhança de qualquer ponto  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ); essa é, na verdade, uma propriedade de qualquer *função harmônica* (qualquer função de classe  $C^2$  que satisfaz a equação de Laplace).

## 5 Exercícios

### Seção 1: A Transformada em $\mathcal{L}^1$

1. Calcule as transformadas de Fourier das funções abaixo:

(i)  $f(x) = e^{-a|x|}, a > 0;$

(ii)  $f(x) = e^{-ax^2}, a > 0;$

(iii)  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1; \end{cases}$

(iv)  $f(x) = e^{-a|x|} \cos(cx), a > 0, c \in \mathbb{R};$

(v)  $f(x) = e^{-ax^2} \sin(cx), a > 0, c \in \mathbb{R}.$

2. Mostre as seguintes propriedades da transformada de Fourier:

(i)  $\mathcal{F}[f(-x)](\xi) = \widehat{f}(-\xi);$

(ii)  $\mathcal{F}[\overline{f(x)}](\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)};$

(iii)  $\mathcal{F}[f(x/a)](\xi) = a \widehat{f}(a\xi), a \neq 0;$

$$(iv) \quad \mathcal{F}[f(x - b)](\xi) = e^{-ib\xi} \widehat{f}(\xi), \quad b \in \mathbb{R};$$

$$(v) \quad \mathcal{F}[f(x)e^{-icx}](\xi) = \widehat{f}(\xi + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Calcule a transformada de Fourier das funções abaixo:

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 2| & \text{se } |x - 2| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x - 2| > 1; \end{cases}$$

$$(ii) \quad f(x) = \exp\left(-\frac{(x - 3)^2}{2}\right);$$

$$(iii) \quad f(x) = e^{-(ix+x^2)};$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a & \text{se } |x| \leq a, \quad (a > 0) \\ 0 & \text{se } |x| > a. \end{cases}$$

4. Seja  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente integrável, ou seja, integrável em qualquer intervalo  $[a, b] \subseteq [0, +\infty)$  e satisfazendo

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b |f(x)| dx < +\infty.$$

Defina as transformadas *cosseno* e *seno* de  $f$  por

$$F_c(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$F_s(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(i) Mostre que, se  $f_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a extensão par de  $f$ , então

$$F_c(\xi) = \sqrt{\pi/2} (f_p)(\xi).$$

(ii) Prove que, se  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a extensão ímpar de  $f$ ,

$$F_s(\xi) = i\sqrt{\pi/2} (f_i)(\xi).$$

(iii) Se  $f(x) = e^{-ax}$ ,  $a > 0$ , mostre que  $F_c(\xi) = a(a^2 + \xi^2)^{-1}$  e  $F_s(\xi) = \xi(a^2 + \xi^2)^{-1}$ .

5. (i) Prove a fórmula do somatório de Poisson: se  $f \in C^1(\mathbb{R})$  for tal que existe  $K > 0$  com  $|f(x)| + |f'(x)| \leq K(1+x^2)^{-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então, qualquer que seja  $L > 0$  fixo,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2kL) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) \exp\left(\frac{inx}{L}\right).$$

- (ii) Aplique o resultado acima para a função  $f(x) = (a^2 + x^2)^{-1}$ ,  $a > 0$ , para obter

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4k^2\pi^2} = \frac{1}{2a} \frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}.$$

6. Seja  $f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1$  (real!). Mostre que:

- (i)  $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$  qualquer que seja  $\xi \in \mathbb{R}$  se e somente se  $f$  for uma função par;
- (ii)  $\hat{f}(\xi)$  será imaginário puro qualquer que seja  $\xi \in \mathbb{R}$  se e somente se  $f$  for ímpar.

## Seção 2: O Espaço de Schwartz

1. Mostre que, se  $f \in S$ , a fórmula de inversão pode ser escrita na forma

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\xi) \cos(\xi x) + B(\xi) \sin(\xi x)] dx.$$

Encontre os coeficientes  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$ .

2. Prove a fórmula (2.13).

3. Suponha que  $f \in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$  é tal que  $x^n f(x)$  é uma função em  $\mathcal{L}^1$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que  $\hat{f} \in C_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{R})$  e que vale a fórmula (2.6), para  $\beta = 1, \dots, n$ .

4. (i) Sejam  $I$  um intervalo limitado e  $\chi_I$  sua função característica, ou seja,  $\chi_I(x) = 1$  se  $x \in I$ ,  $\chi_I(x) = 0$  se  $x \notin I$ . Mostre que  $\chi_I$  pode ser

aproximada por funções de  $S$  em relação a  $\|\cdot\|_1$ , ou seja, mostre que existe uma sequência  $\{\varphi_n\} \subseteq S$  tal que

$$\|\chi_I - \varphi_n\| = \int_{\mathbb{R}} |\chi_I(x) - \varphi_n(x)| dx = \int_I |1 - \varphi_n(x)| dx \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ ; equivalentemente, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\varphi \in S$  tal que  $\|\chi_I - \varphi\|_1 < \varepsilon$ . (Sugestão: um protótipo de uma função que “suaviza” um salto é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x} \exp \frac{-1}{1-x}\right) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Esta função interpola entre os valores zero para  $x \leq 0$  e um para  $x \geq 1$  de maneira infinitamente diferenciável. Utilize modificações convenientes de  $f$  para obter a sequência  $\{\varphi_n\}$ .)

- (ii) Uma *função escada*  $E$  é uma função seccionalmente contínua (que suporemos contínua à direita) que assume apenas um número finito de valores, ou seja, existem números  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  e  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  tais que

$$E(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j \chi_{I_j}(x)$$

onde  $I_0 = (-\infty, a_0)$ ,  $I_j = [a_{j-1}, a_j]$  se  $1 \leq j \leq n$  e  $I_{n+1} = [a_n, +\infty)$ . Prove que toda função escada de suporte compacto (ou seja, tal que  $\lambda_0 = 0 = \lambda_{n+1}$ ) pode ser aproximada por funções de  $S$  em relação a  $\|\cdot\|_1$ .

- (iii) Se  $f \in \mathcal{L}^1$  for seccionalmente contínua, mostre que  $f$  poderá ser aproximada por funções escada de suporte compacto em relação a  $\|\cdot\|_1$ .
- (iv) Conclua que as funções de  $\mathcal{L}^1$  que são seccionalmente contínuas podem ser aproximadas por funções de  $S$  em relação a  $\|\cdot\|_1$ .

### Seção 3: A Operação de Convolução

1. Mostre que, se  $f, g \in \mathcal{L}^1 \cap C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$  e se  $g$  for limitada, então  $f * g \in \mathcal{L}^1 \cap C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$  e  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .
2. (Este problema está relacionado com o quarto exercício da seção anterior.)
  - (i) Seja  $I$  um intervalo limitado. Mostre que a função  $\chi_I$  pode ser aproximada por funções de  $S$  em relação a  $\|\cdot\|_2$ .
  - (ii) Prove que toda função escada de suporte compacto pode ser aproximada por funções de  $S$  em relação a  $\|\cdot\|_2$ .
  - (iii) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  seccionalmente contínua e suponha que  $f$  é de *quadrado integrável*, ou seja,

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Mostre que  $f$  pode ser aproximada por funções escada de suporte compacto em relação a  $\|\cdot\|_2$ .

- (iv) Deduza que toda função seccionalmente contínua de quadrado integrável pode ser aproximada por funções de  $S$  em relação a  $\|\cdot\|_2$ .
- (v) Suponha que  $f \in \mathcal{L}^1$  é seccionalmente contínua e de quadrado integrável. Conclua que  $\widehat{f}$  é uniformemente contínua, de quadrado integrável e vale a identidade de Parseval.

3. Sejam  $f$  e  $g$  funções escada de suporte compacto. Prove as seguintes propriedades:

- (i)  $f * g$  é contínua e tem suporte compacto;
- (ii)  $(f * g)\widehat{\phantom{x}}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$  qualquer que seja  $\xi \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $(f * g)\widehat{\phantom{x}} \in \mathcal{L}^1$ ;
- (iv)  $(f * g)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f * g)\widehat{\phantom{x}}(\xi) d\xi$ ;
- (v)  $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f * g)\widehat{\phantom{x}}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

4. Demonstre a Proposição 3.2.

5. (i) Calcule a transformada de Fourier de  $\chi_I$ , onde  $I = [-a, a]$ ,  $a > 0$ .

(ii) Use (i) e os resultados do Exercício 3 para calcular

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

#### Seção 4: Aplicações

1. Use a transformada de Fourier para achar formalmente uma solução para o problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $h \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  são funções dadas e, para cada  $t > 0$  fixo,  $h(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R})$ . (Sugestão: use os Exercícios 3 e 5 da seção anterior.)

2. Use a transformada de Fourier para resolver o problema da corda infinita (problema (2.1) do Capítulo 5).

3 Use a transformada de Fourier para achar uma solução do problema

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $\alpha$  é constante e  $f \in C(\mathbb{R})$  é limitada.

# Capítulo 11

## As Identidades de Green

Embora os resultados deste capítulo sejam válidos em  $\mathbb{R}^n$ , estudaremos apenas o caso  $n = 2$ . Na primeira seção, enunciaremos o teorema de Green no plano e demonstraremos o teorema de divergência; na segunda seção, provaremos as três identidades de Green.

### 1 Preliminares

Vamos começar introduzindo alguns conceitos topológicos. Seja  $S$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Um subconjunto  $A$  de  $S$  será dito *aberto em S* se existir um conjunto  $A_1$  aberto em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A = S \cap A_1$ . Analogamente,  $F \subseteq S$  será *fechado em S* se existir  $F_1$  fechado em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F = S \cap F_1$ . Observe que todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  é aberto e fechado em si mesmo e que  $A \subseteq S$  será aberto em  $S$  se e somente se  $S - A$  for fechado em  $S$ . Além disso, se  $S$  for aberto (respectivamente, fechado) em  $\mathbb{R}^n$ , então os subconjuntos abertos (respectivamente, fechados) em  $S$  serão exatamente os subconjuntos de  $S$  que são abertos (respectivamente, fechados) em  $\mathbb{R}^n$ .

Um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  será dito *conexo* se  $S$  não puder ser escrito como uma união disjunta de dois subconjuntos não vazios abertos em  $S$ . Em particular, se  $S$  for conexo e se  $A \subseteq S$  for, ao mesmo tempo, aberto e fechado em  $S$ , então  $A = S$  ou  $A = \emptyset$ : de fato, nesse caso  $A$  e  $S - A$  são abertos em  $S$ , disjuntos e  $S = A \cup (S - A)$ , logo um desses subconjuntos é vazio, ou seja,  $A = \emptyset$  ou  $A = S$ . Um *domínio* é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que é aberto e conexo.

Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  for aberto e  $u \in C^2(\Omega)$ , diremos que  $u$  é *harmônica* em  $\Omega$  se  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto. Um *campo vetorial* em  $\Omega$  é uma função  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$  com  $m > 1$ ; o campo vetorial  $F$  será de *classe*  $C^k$  se e somente se cada uma de suas componentes  $F_j: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  for de classe  $C^k$ ,  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ ,  $x \in \Omega$ . Se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  for de classe  $C^1$ , o campo vetorial contínuo

$$\nabla f = \text{grad } f = (D_1 f, \dots, D_n f) \quad (1.1)$$

será chamado de *gradiente* de  $f$ . Diremos que um campo vetorial  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  provém de um *potencial* se existir uma função  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciável em  $\Omega$  tal que  $F = \nabla \varphi$ . Se  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  for um campo vetorial de classe  $C^1$ , a função

$$\nabla \cdot F = \text{div } F = \sum_{j=1}^n D_j F_j \quad (1.2)$$

será chamada de *divergência* de  $F$ ,  $F = (F_1, \dots, F_n)$ . Note que, se  $\Delta f$  for o laplaciano de  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , então

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot \nabla f \quad (1.3)$$

e, por essa razão, escreve-se  $\Delta = \nabla^2$ .

Muitas vezes é conveniente estender as definições acima para conjuntos fechados  $\bar{\Omega}$ . Por exemplo,  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  será de classe  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$  se e somente se  $f \in C^1(\Omega)$  e se existirem  $g_1, \dots, g_n \in C(\bar{\Omega})$  tais que  $g_j = D_j f$  em  $\Omega$ ,  $j = 1, \dots, n$ . As definições acima podem ser estendidas de maneira análoga.

Um teorema fundamental para o estudo das EDPs é o teorema da divergência. Como o teorema da divergência em  $\mathbb{R}^2$  é um corolário do teorema Green, vamos lembrar, do curso de cálculo, o enunciado deste teorema (para uma demonstração, veja [APOSTOL, 1965]).

**Teorema 1.1** (Teorema de Green). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e sejam  $P, Q: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas. Suponha que:*

- (i)  *$\partial\Omega$  é uma curva fechada simples (ou seja,, sem auto-interseção) retificável;*
- (ii) *as derivadas parciais  $Q_x$  e  $P_y$  existem e são limitadas em  $\Omega$ ;*

(iii) as integrais dupla

$$\int_{\bar{\Omega}} Q_x \, dx dy, \quad \int_{\bar{\Omega}} P_y \, dx dy$$

existem.

Então a integral de linha

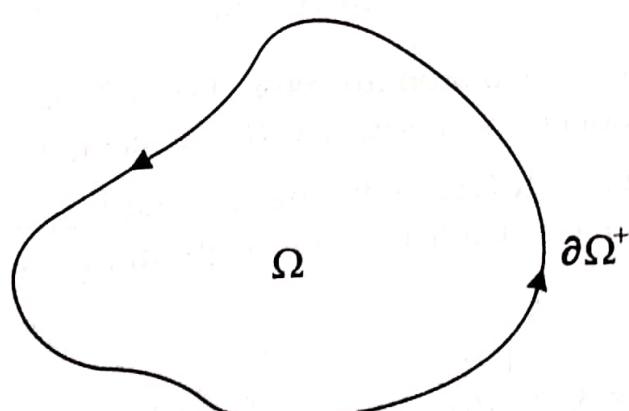
$$\int_{\partial\Omega^+} (P \, dx + Q \, dy)$$

existe e

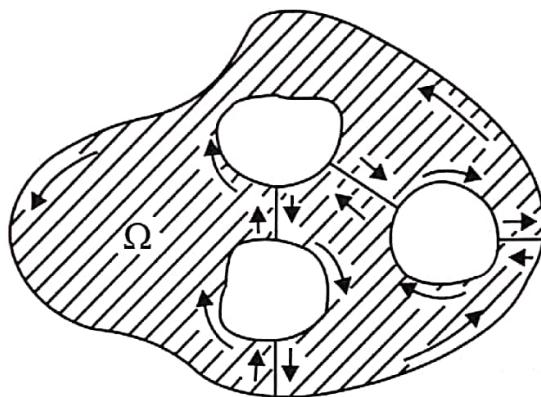
$$\int_{\bar{\Omega}} (Q_x - P_y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (P \, dx + Q \, dy). \quad (1.4)$$

Intuitivamente, a orientação positiva de  $\partial\Omega$  é tal que andando em cima de  $\partial\Omega$  a região  $\Omega$  está sempre à nossa esquerda (veja a Figura 33). Podemos tornar precisa essa definição usando o *índice de rotação* (veja a seção 11.24 de [APOSTOL, 1969]).

O teorema de Green, como enunciado acima, supõe que o domínio  $\Omega$  seja simplesmente conexo (ou seja, sem “buracos”). No caso em que  $\Omega$  tiver um número finito de “buracos”, poderemos reduzir ao caso do Teorema 1.1 usando curvas auxiliares como na Figura 34: a integral sobre  $\Omega$  se escreve como uma soma finita de integrais sobre regiões sem “buracos”.



**Fig. 33:** Orientação positiva de  $\partial\Omega$ .



**Fig. 34:** O teorema de Green também é válido para domínios multiplamente conexos.

O teorema de Green é válido também para funções complexas: se  $P, Q: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $P = P_1 + iP_2$ ,  $Q = Q_1 + iQ_2$  e se os pares  $P_1, Q_1$  e  $P_2, Q_2$  satisfizerem as condições do Teorema 1.1, então

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy &= \int_{\bar{\Omega}} (\partial_x Q_1 - \partial_y P_1) dx dy + i \int_{\bar{\Omega}} (\partial_x Q_2 - \partial_y P_2) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega^+} (P_1 dx + Q_1 dy) + i \int_{\partial\Omega^+} (P_2 dx + Q_2 dy) \\ &= \int_{\partial\Omega^+} (P dx + Q dy). \end{aligned}$$

Antes de enunciar o teorema da divergência, vamos introduzir a noção de *normal externa*. Suponha que  $\Omega$  é um domínio limitado tal que  $\partial\Omega$  é uma curva suave, ou seja, admite uma parametrização continuamente diferenciável  $\alpha$  tal que o vetor velocidade  $\alpha'(t)$  nunca se anula. Mergulhe  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^3$  considerando, por exemplo,  $\Omega$  contido no plano  $z = 0$  e defina

$$\hat{n} = \frac{\alpha'(t) \times \vec{k}}{|\alpha'(t) \times \vec{k}|}, \quad (1.5)$$

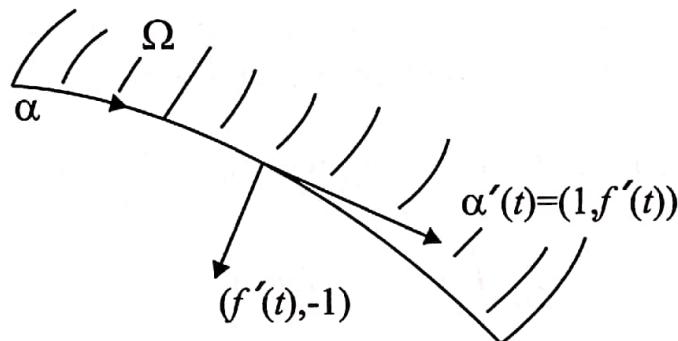
onde  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  e  $\times$  é o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ . Se a parametrização  $\alpha$  fornecer uma orientação positiva a  $\partial\Omega$ ,  $\hat{n}$  definida por (1.5) será a normal externa unitária (veja a Figura 35 – na figura, o vetor  $\vec{k}$  “sai” do papel). Calculando explicitamente o produto vetorial em (1.5) se  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,

$$\alpha'(t) \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (y'(t), -x'(t), 0).$$

Voltando para  $\mathbb{R}^2$ , a fórmula (1.5) fica

$$\hat{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (y'(t), -x'(t)). \quad (1.6)$$

Vamos usar a convenção de que, sempre que falarmos em *normal unitária à curva*  $\alpha$  no ponto  $t$ , estaremos nos referindo a  $\hat{n}(t)$  definida por (1.6). Como observamos acima, no caso de curvas fechadas orientadas positivamente,  $\hat{n}$  é a normal externa unitária. Note também que podemos definir  $\hat{n}$  por (1.6) a menos de um número finito de pontos se  $\alpha$  for uma união finita de curvas suaves.



**Fig. 35:** Se a parametrização  $\alpha$  fornecer uma orientação positiva a  $\partial\Omega$ ,  $\hat{n}(t)$  será a normal externa unitária no ponto  $\alpha(t)$ .

Uma curva suave pode ser sempre parametrizada pelo comprimento do arco pois

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)| > 0.$$

Em particular, se  $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função seccionalmente contínua e se  $\alpha: [a, b] \rightarrow U$  for uma curva suave, então a integral de  $f$  ao longo de  $\alpha$  em relação ao comprimento de arco será

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| \, dt = \int_0^L f(\beta(s)) \, ds$$

onde  $L$  é o comprimento de  $\alpha$  e  $\beta: s \in [0, L] \mapsto \alpha(t(s)) \in U$  é a reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

**Teorema 1.2 (Teorema da Divergência).** *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio limitado cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma união finita de curvas suaves. Seja  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$ . Então*

$$\int_{\bar{\Omega}} \nabla \cdot F \, dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} \, ds, \quad (1.7)$$

onde  $\hat{n}$  é a normal externa unitária.

**Demonstração:** Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  as curvas que compõem  $\partial\Omega$ , onde  $\alpha_i: t \in [a_i, b_i] \mapsto (x_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{R}^2$  dão uma orientação positiva a  $\partial\Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se  $\Omega$  for simplesmente conexo (sem “buracos”),  $\partial\Omega$  será uma curva simples fechada seccionalmente  $C^1$ , logo retificável e, portanto, o teorema de Green é válido em  $\Omega$ . Se  $\Omega$  não for simplesmente conexo, como  $\partial\Omega$  será composto por um número finito de curvas suaves,  $\Omega$  terá um número finito de “buracos” e, portanto, usando curvas auxiliares (veja a Figura 34),  $\Omega$  pode ser decomposto em um número finito de domínios (e partes de suas fronteiras, o que não altera a integral dupla) que satisfazem as condições do Teorema 1.1, logo o teorema de Green é válido em  $\Omega$ . Logo, se  $F = (F_1, F_2)$ , fazendo  $P = -F_2$  e  $Q = F_1$ , podemos aplicar o teorema de Green para obter

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \nabla \cdot F \, dx dy &= \int_{\bar{\Omega}} (\partial_x Q - \partial_y P) \, dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (P dx + Q dy) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} (P dx + Q dy) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} [-F_2(\alpha_i(t))x'_i(t) + F_1(\alpha_i(t))y'_i(t)] dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (F_1(\alpha_i(t)), F_2(\alpha_i(t))) \cdot (y'_i(t), x'_i(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} F(\alpha_i(t)) \cdot \hat{n}(t) |\alpha'_i(t)| dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^{L(\alpha_i)} F \cdot \hat{n}_i \, ds = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} \, ds. \end{aligned}$$

□

O teorema da divergência é válido em  $\mathbb{R}^n$ . No caso  $n = 3$ , por exemplo, a “curva suave” deve ser substituída por uma “superfície suave” (veja [APOSTOL, 1969] ou [IORIO & IORIO, 1988]).

## 2 As Identidades de Green

Descreveremos nesta seção algumas fórmulas, as chamadas *identidades de Green*, que são muito úteis em EDP. Demonstraremos essas identidades em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 2.1.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ . Então valem as seguintes identidades:

$$\int_{\bar{\Omega}} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (2.1)$$

$$\int_{\bar{\Omega}} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (2.2)$$

onde  $\frac{\partial}{\partial n}$  é a derivada direcional na direção da normal unitária externa  $\hat{n}$ .

**Demonstração:** Para demonstrar (2.1), seja  $F = v \nabla u$ . Então  $F$  é um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$  e

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Aplicando então o teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx dy &= \int_{\bar{\Omega}} \nabla \cdot F dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} ds = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \hat{n} ds = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Para provar (2.2), basta usar (2.1): de fato,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy &= \int_{\bar{\Omega}} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx dy - \int_{\bar{\Omega}} (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

□

A fórmula (2.1) é conhecida como a *primeira identidade de Green*, enquanto que (2.2) é a *segunda identidade de Green*.

**Corolário 2.2.** Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio onde vale o teorema da divergência e  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  tal que  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ . Então valem as seguintes identidades:

$$\int_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (2.3)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (2.4)$$

**Demonstração:** Para provar (2.3) basta fazer  $u = v$  em (2.1); quanto a (2.4), basta fazer  $v \equiv 1$  em (2.2).  $\square$

**Corolário 2.3.** Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio onde vale o teorema da divergência,  $f \in C(\partial\Omega)$  e  $g \in C^2(\partial\Omega)$ . Então o problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= g \text{ em } \Omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

tem, no máximo, uma solução.

**Demonstração:** Suponha que  $u$  e  $v$  são soluções de (2.5), e seja  $w = u - v$ . Então  $w$  é solução de

$$\begin{aligned} w &\in C^2(\bar{\Omega}) \\ \Delta w &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Como  $w = 0$  em  $\partial\Omega$ , de (2.3)

$$\int_{\bar{\Omega}} |\nabla w|^2 dx dy = 0$$

e portanto, como  $w \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $\nabla w \equiv 0$  em  $\bar{\Omega}$ , logo  $w$  é constante em  $\bar{\Omega}$  (pois  $\Omega$  é conexo) e  $w \equiv 0$  (pois  $w = 0$  em  $\partial\Omega$ ).  $\square$

Observe que o Corolário 2.3 nos dá um resultado muito fraco: é natural esperar unicidade para o problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= h \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde  $f \in C(\Omega)$  e  $g \in C(\partial\Omega)$  são dados. Mostraremos no próximo capítulo que o problema (2.6) tem, de fato, no máximo, uma solução.

Nosso próximo objetivo é provar um resultado extremamente importante para a teoria do potencial, a chamada *terceira identidade de Green*. Para simplificar a notação, vamos denotar os pontos em  $\mathbb{R}^2$  por

letras gregas minúsculas  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. Em particular, se  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  for um aberto limitado e se  $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  for integrável em  $\bar{U}$ , usaremos a notação

$$\int_{\bar{U}} f(\xi) d\xi = \int_{\bar{U}} f(x, y) dx dy.$$

**Definição 2.4.** A solução fundamental de  $\Delta u = 0$  em  $\mathbb{R}^2$  é a função  $F: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln |\xi|, \quad \xi \neq 0. \quad (2.7)$$

Se  $n \geq 3$ , a *solução fundamental* de  $\Delta u = 0$  em  $\mathbb{R}^n$  é a função  $F: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(\xi) = \frac{1}{(2-n)w_n} |\xi|^{2-n}, \quad \xi \neq 0, \quad (2.8)$$

onde  $w_n$  é a área da esfera  $S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ .

Poderíamos ter definido também a solução fundamental para  $n = 1$ , só que nesse caso, em vez da equação de Laplace, temos a equação  $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ : a solução fundamental de  $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$  em  $\mathbb{R}$  é a função  $F: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < 0, \\ \xi & \text{se } \xi > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

A área da esfera  $S^{n-1}$  é dada por

$$w_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (2.10)$$

onde  $\Gamma$  é a *função gama*,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} dy. \quad (2.11)$$

Em geral, a área da esfera de raio  $R$  em  $\mathbb{R}^n$  é dada por  $w_n R^{n-1}$ . (Veja, por exemplo, a seção 11.31 de [APOSTOL, 1969].)

Calculando diretamente, é fácil ver que se  $F$  for a solução fundamental de  $\Delta u = 0$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\Delta F = 0$  em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Seja  $F$  a solução fundamental de  $\Delta u = 0$  em  $\mathbb{R}^2$ . Para cada  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , vamos denotar por  $F_\xi$  a função  $F_\xi(\eta) = F(\xi - \eta)$  definida para  $\eta \neq \xi$ . Com essa notação, temos:

**Teorema 2.5** (Terceira identidade de Green). *Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  um domínio limitado onde vale o teorema da divergência e seja  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Então, qualquer que seja  $\xi \in \Omega$ ,*

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi \right) ds + \int_{\bar{\Omega}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta. \quad (2.12)$$

A primeira dificuldade na demonstração é fazer sentido da segunda integral na equação (2.12): como  $F_\xi(\eta)$  diverge quando  $\eta \rightarrow \xi$ , temos que definir a integral sobre  $\bar{\Omega}$  como uma integral imprópria. Observe que a outra integral em (2.12) não tem problema: se  $\xi \in \Omega$  e  $\eta \in \partial\Omega$ , então  $F_\xi(\eta)$  está bem definida e é uma função continuamente diferenciável de  $\eta$ .

Lembramos que, quando  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ , o fecho da bola  $B(\xi; r)$  centrada em  $\xi$  de raio  $r$  é a bola fechada centrada em  $\xi$  de raio  $r$ ,

$$\overline{B(\xi; r)} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\xi - \eta| \leq r\}.$$

**Lema 2.6.** *Sejam  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $R > 0$  e  $g: \overline{B(\xi; R)} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $g$  for limitada e se  $F_\xi g$  for integrável em relação ao comprimento de arco ao longo de qualquer círculo centrado em  $\xi$  de raio  $r \in (0, R)$ , então*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds = 0. \quad (2.13)$$

**Demonstração:** Seja  $M > 0$  tal que

$$|g(\eta)| \leq M, \quad \forall \eta \in \overline{B(\xi; R)}.$$

Então, se  $0 < r < R$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds &= \int_{|\xi - \eta|=r} F(\xi - \eta) g(\eta) \, ds(\eta) \\ &= \frac{\ln r}{2\pi} \int_{|\xi - \eta|=r} g(\eta) \, ds(\eta) \\ \Rightarrow \left| \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds \right| &\leq M \frac{|\ln r|}{2\pi} \int_{|\xi - \eta|=r} \, ds(\eta) = Mr|\ln r| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $r \rightarrow 0^+$ .

□

**Lema 2.7.** Sejam  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $R > 0$  e  $g \in C(\overline{B(\xi, R)})$ . Então

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial n} g \, ds = g(\xi), \quad (2.14)$$

onde  $\frac{\partial}{\partial n}$  denota, como de hábito, a derivada direcional na direção da normal unitária externa  $\hat{n}$ .

**Demonstração:** Se  $\xi = (a, b)$  e  $\eta = (x, y)$ , então:

$$\begin{aligned} F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \ln |\xi - \eta| = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \\ \partial_x F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \frac{x-a}{|\xi - \eta|^2}, \\ \partial_y F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \frac{y-b}{|\xi - \eta|^2}. \end{aligned}$$

Além disso, se  $\eta \in \partial B(\xi; r)$  para  $r \in (0, R)$ ,  $|\xi - \eta| = r$  e

$$\hat{n}(\eta) = \frac{\eta - \xi}{|\eta - \xi|},$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial n} g \, ds &= \int_{|\xi - \eta|=r} \nabla F_\xi(\eta) \cdot \hat{n}(\eta) g(\eta) \, ds(\eta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - \eta|=r} \frac{\eta - \xi}{|\xi - \eta|^2} \cdot \frac{\eta - \xi}{|\xi - \eta|} g(\eta) \, ds(\eta) \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{|\xi - \eta|=r} g(\eta) \, ds(\eta), \end{aligned}$$

que é o valor médio de  $g$  sobre o círculo de raio  $r$ . Queremos mostrar então que o valor médio de  $g$  sobre o círculo de raio  $r$  centrado em  $\xi$  tende ao valor de  $g$  no centro,  $g(\xi)$ , quando  $r \rightarrow 0^+$ . De fato, como  $g$  é contínua na região fechada e limitada  $\overline{B(\xi; r)}$ ,  $g$  é uniformemente contínua (Teorema 4.3 do Capítulo 7), de modo que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\eta, \eta' \in \overline{B(\xi, R)}, |\eta - \eta'| < \delta \Rightarrow |g(\eta) - g(\eta')| < \varepsilon.$$

Então, se  $0 < r < \delta$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial n} g \, ds - g(\xi) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi r} \int_{|\xi-\eta|=r} (g(\eta) - g(\xi)) \, ds(\eta) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r} \int_{|\xi-\eta|=r} |g(\eta) - g(\xi)| \, ds(\eta) < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova (2.14).  $\square$

**Lema 2.8.** Dado  $\xi \in \Omega$ , seja  $R > 0$  tal que  $B(\xi; R) \subseteq \Omega$ . Para cada  $r \in (0, R)$ , seja  $\Omega_r = \Omega - \overline{B(\xi; r)}$ . Então, qualquer que seja  $g \in C(\overline{\Omega})$ , existe o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\overline{\Omega}_r} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta. \quad (2.15)$$

**Demonstração:** Seja

$$I(r) = \int_{\overline{\Omega}_r} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta. \quad (2.16)$$

É claro que a integral em (2.16) existe se  $0 < r < R$ , pois  $F_\xi g \in C(\overline{\Omega}_r)$ . Como  $g \in C(\overline{\Omega})$  e  $\overline{\Omega}$  é fechado e limitado,  $g$  é limitada, logo existe  $M > 0$  tal que

$$|g(\eta)| \leq M, \quad \forall \eta \in \overline{\Omega}.$$

Sejam  $0 < s < t < R$ : então

$$|I(r) - I(s)| = \left| \int_{\overline{\Omega}_r - \overline{\Omega}_s} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta \right| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{s < |\xi - \eta| \leq t} |\ln|\xi - \eta|| \, d\eta.$$

Para calcular essa última integral, vamos introduzir um sistema de coordenadas polares centrado em  $\xi$  (veja a Figura 36):  $\eta = \xi + (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $s < r \leq t$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Então

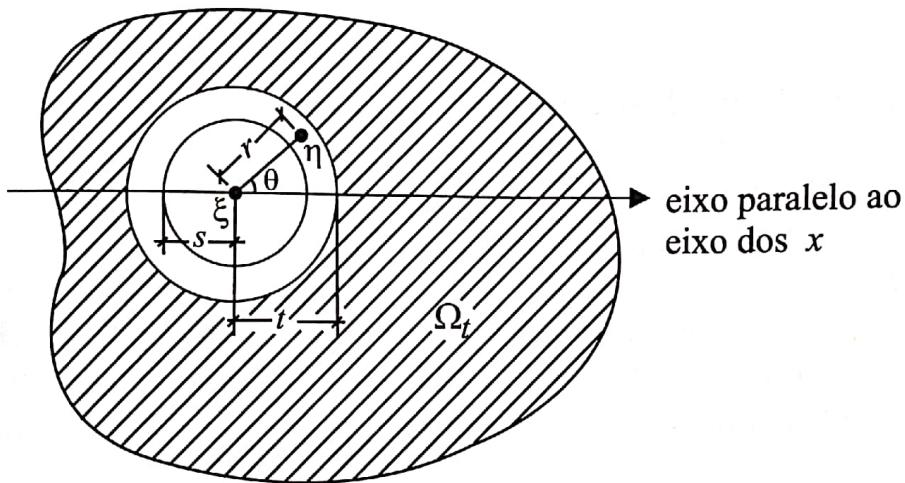
$$\int_{s < |\xi - \eta| \leq t} |\ln|\xi - \eta|| \, d\eta = \int_s^t dr r \int_0^{2\pi} d\theta |\ln r| = 2\pi \int_s^t r |\ln r| \, dr.$$

Por outro lado,  $\lim_{r \rightarrow 0^+} (r \ln r) = 0$ , logo a função  $r \ln r$  é limitada perto de zero, ou seja, existe  $N > 0$  tal que

$$0 < r < 1 \Rightarrow 0 < r |\ln r| < N.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta = \varepsilon/(MN)$ : se  $\{r_n\} \subseteq (0, R)$  for tal que  $r_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

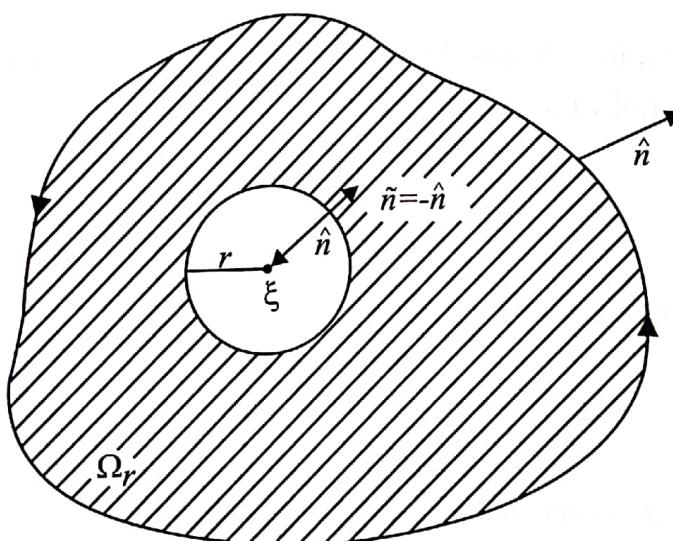
$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |r_n - r_m| < \delta$$



**Fig. 36:** Sistema de coordenadas polares centrado em  $\xi$ .

$$\Rightarrow |I(r_n) - I(r_m)| \leq MN|r_n - r_m| < \varepsilon$$

e, portanto, pelo critério de Cauchy, existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(r_n)$ . Como  $I(r_n)$  tem limite qualquer que seja a sequência  $\{r_n\} \subseteq (0, R)$  convergindo a zero, existe o limite de  $I(r)$  quando  $r \rightarrow 0^+$  (veja [LIMA, 1989]).  $\square$



**Fig. 37:** A orientação positiva de  $\partial\Omega_r$  coincide com a orientação positiva de  $\partial\Omega$  e com a orientação negativa de  $\partial B(\xi; r)$ .

Já sabemos então que sentido dar à segunda integral em (2.12):

$$\int_{\bar{\Omega}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\bar{\Omega}_r} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta. \quad (2.17)$$

Agora estamos prontos para demonstrar a terceira identidade de Green:

**Demonstração do Teorema 2.5.** Vamos fixar  $\xi \in \Omega$  e escolher  $R > 0$  tal que  $B(\xi; R) \subseteq \Omega$ . Como no Lema 2.8, se  $0 < r < R$ ,  $\Omega_r - \Omega - \overline{B(\xi; r)}$ . Observe que  $\partial\Omega_r = \partial\Omega \cup \partial B(\xi; r)$  e que a orientação positiva de  $\partial\Omega_r$  coincide com a orientação positiva de  $\partial\Omega$  e com a orientação negativa de  $\partial B(\xi; r)$  (veja a Figura 37). Em outras palavras, se  $\hat{n}$  for a normal externa unitária a  $\partial\Omega_r$  e se  $\tilde{n}$  for a normal externa unitária a  $\partial B(\xi; r)$ , então  $\tilde{n} = -\hat{n}$  em  $\partial B(\xi; r)$ . Usando o fato de que  $\Delta F_\xi(\eta) = 0$  quando  $\eta \in \bar{\Omega}_r$  e aplicando a segunda identidade de Green com  $v = F_\xi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}_r} F_\xi \Delta u d\eta &= \int_{\bar{\Omega}_r} (F_\xi \Delta u - u \Delta F_\xi) d\eta \\ &= \int_{\partial\Omega_r} \left( F_\xi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( F_\xi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} \right) ds \\ &\quad - \int_{\partial B(\xi; r)} \left( F_\xi \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \tilde{n}} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como  $\bar{\Omega}$  é fechado e limitado e  $\nabla u \cdot \tilde{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \tilde{n}}$  é limitada, logo, pelo Lema 2.6,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} ds = 0.$$

Além disso, como  $u$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ , pelo Lema 2.7

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} u \frac{\partial F_\xi}{\partial \tilde{n}} ds = u(\xi)$$

e, pelo Lema 2.8, como  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , existe o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\bar{\Omega}_r} F_\xi \Delta u d\eta = \int_{\bar{\Omega}} F_\xi \Delta u d\eta.$$

O resultado segue fazendo o limite quando  $r \rightarrow 0^+$  em (2.18).  $\square$

As três identidades de Green são válidas em  $\mathbb{R}^n$ . A demonstração das duas primeiras é idêntica ao caso  $n = 2$ : basta usar o teorema da divergência. A demonstração da terceira é um pouco diferente, pois a solução fundamental tem uma forma diferente para  $n \geq 3$  (veja [IORIO & IORIO, 1988]).

A terceira identidade de Green em  $\mathbb{R}^3$  é importante, do ponto de vista físico, na teoria do potencial. Para maiores detalhes, o leitor interessado pode consultar [PURCELL, 1965].

### 3 Exercícios

#### Seção 1: Preliminares

1. Procure um livro de cálculo ou análise vetorial que contenha o teorema de Green e o teorema da divergência no plano (por exemplo, [STEWART, 2005]) e faça os exercícios correspondentes.

2. Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aberto,  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\xi \in \Omega$  e  $R > 0$  tal que  $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$ .

Prove que

$$\int_{\overline{B(\xi; R)}} \Delta u(\eta) d\eta = R \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r}(R, \theta) d\theta,$$

onde  $v(r, \theta) = u(\xi + (r \cos \theta, r \sin \theta))$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

#### Seção 2: As identidades de Green

1. Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Use a primeira identidade de Green para provar que o problema

$$\begin{aligned} v &\in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \\ -\Delta v &= \lambda v \text{ em } D, \\ v|_{\partial D} &= 0 \end{aligned}$$

só tem solução não trivial se  $\lambda \geq 0$ .

2. Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio onde vale o teorema da divergência e  $g \in C^1(\partial\Omega)$ . Considere o problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\overline{\Omega}), \\ \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- (i) Use o Corolário 2.2 para provar que só é possível a existência de solução se  $\int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$ .
- (ii) Mostre que, se existir solução, ela não será única.

3. Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio limitado cuja fronteira é uma união finita de curvas suaves. Prove que, se  $v$  for harmônica em  $\overline{\Omega}$  e constante em  $\partial\Omega$ , então  $v$  será constante em  $\overline{\Omega}$ .

# Capítulo 12

## Princípios do Máximo e Teoremas de Unicidade

Neste capítulo, usaremos os resultados do Capítulo 11 para provar teoremas de unicidade para alguns problemas resolvidos anteriormente. Na primeira seção, demonstraremos um princípio do máximo para funções harmônicas, obtendo unicidade para os problemas resolvidos no Capítulo 8. Na segunda seção, provaremos um princípio do máximo para o operador  $L = \alpha^2 \partial_x^2 - \partial_t$ , o que nos permitirá obter unicidade para os problemas resolvidos anteriormente envolvendo a equação de calor. Na terceira e última seção, introduziremos as integrais de energia para a equação de onda e demonstraremos a unicidade para os problemas resolvidos no Capítulo 5 usando essas integrais.

### 1 Princípio do Máximo para Funções Harmônicas

Nesta seção, discutiremos algumas propriedades de funções harmônicas, inclusive o princípio do máximo, que nos permitirá estabelecer resultados sobre unicidade de soluções. É interessante observar que muitos problemas associados a EDPs dos três tipos (elípticas, parabólicas, hiperbólicas) têm soluções satisfazendo princípios de máximo. Tais princípios, em geral, permitem a obtenção de informações sobre soluções de EDPs sem conhecimento explícito dessas soluções. Uma boa referência sobre princípios do máximo em geral é o livro [PROTTER & WEINBERGER, 1967].

**Teorema 1.1** (Teorema do Valor Médio). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto e seja  $u$  uma função harmônica em  $\Omega$ . Então, quaisquer que sejam  $\xi \in \Omega$  e  $R > 0$  com  $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$ ,*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u \, ds. \quad (1.1)$$

**Demonstração:** Aplicando a terceira identidade de Green a  $B(\xi; R)$ , obtemos

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{\partial B(\xi; R)} \left( u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} F_\xi \right) ds + \int_{\overline{B(\xi; R)}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta \\ &= \int_{\partial B(\xi; R)} u \frac{\partial F_\xi}{\partial n} ds - \int_{\partial B(\xi; R)} F_\xi \frac{\partial u}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

pois  $\Delta u = 0$ . Como já calculamos anteriormente (veja a demonstração do Lema 2.7 do Capítulo 11), se  $\eta \in \partial B(\xi; R)$ ,

$$\begin{aligned} F \frac{1}{2\pi} \ln |\xi - \eta| &= \frac{1}{2\pi} \ln R \\ \frac{\partial F_\xi}{\partial n}(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\xi - \eta|} = \frac{1}{2\pi R} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u \, ds - \frac{\ln R}{2\pi} \int_{\partial B(\xi; R)} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Como  $u$  é harmônica em  $B(\xi; R)$ , pelo Corolário 2.2 do Capítulo 11,

$$\int_{\partial B(\xi; R)} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0,$$

o que prova o teorema. □

**Observação.** É interessante ressaltar que a recíproca do Teorema 1.1 é válida: se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  for aberto, se  $u \in C^2(\Omega)$  e se a fórmula (1.1) for válida, então  $u$  será harmônica em  $\Omega$ . Este é um resultado notável, pois é possível provar que toda função harmônica é analítica!

**Teorema 1.2** (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio e seja  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $\bar{\Omega}$  e harmônica em  $\Omega$ . Suponha que  $u$  atinge seu máximo em  $\Omega$ , ou seja, suponha que existe  $\xi_0 \in \Omega$  tal que  $u(\xi) \leq u(\xi_0)$  qualquer que seja  $\xi \in \bar{\Omega}$ . Então  $u$  é constante em  $\bar{\Omega}$ .*

Na demonstração do Teorema 1.2, utilizaremos o seguinte fato: dado  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , se a função  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua em  $S$ , então a imagem inversa  $f^{-1}(F)$  de qualquer fechado  $F \subseteq \mathbb{R}$  será fechada em  $S$ . Note que, como  $f^{-1}(\mathbb{R} - F) = S - f^{-1}(F)$ , é equivalente mostrar que a imagem inversa  $f^{-1}(A)$  de qualquer aberto  $A \subseteq \mathbb{R}$  é aberta em  $S$ . Seja  $A \subseteq \mathbb{R}$  aberto. Qualquer que seja  $x \in f^{-1}(A)$ , como  $f(x) \in A$  e  $A$  é aberto, existe  $\varepsilon_x > 0$  tal que  $B(f(x); \varepsilon_x) = \{y \in \mathbb{R}: |y - f(x)| < \varepsilon_x\} \subseteq A$ . Por outro lado, como  $f$  é contínua em  $x$ , existe  $\delta_x = \delta(x, \varepsilon_x) > 0$  tal que

$$\begin{aligned} x' \in S, |x' - x| < \delta_x &\Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon_x \\ &\Rightarrow f(x') \in B(f(x); \varepsilon_x) \subseteq A \\ &\Rightarrow x' \in f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Mas então

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} \{x\} \subseteq S \cap \left( \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B(x; \delta_x) \right) \subseteq f^{-1}(A)$$

e  $f^{-1}(A)$  é a interseção de  $S$  com um aberto em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,  $f^{-1}(A)$  é aberto em  $S$ .

Devemos observar que a recíproca é verdadeira e, de fato,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  será contínua em  $S$  se e somente se a imagem inversa  $f^{-1}(A)$  de qualquer aberto  $A \subseteq \mathbb{R}$  for aberta em  $S$  se e somente se a imagem inversa  $f^{-1}(F)$  de qualquer fechado  $F \subseteq \mathbb{R}$  for fechada em  $S$ . A demonstração é bem simples e fica a cargo do leitor.

**Demonstração do Teorema 1.2.** Por hipótese,  $u$  é limitada superiormente e atinge o máximo em  $\Omega$ , ou seja, existe  $\xi_0 \in \Omega$  tal que

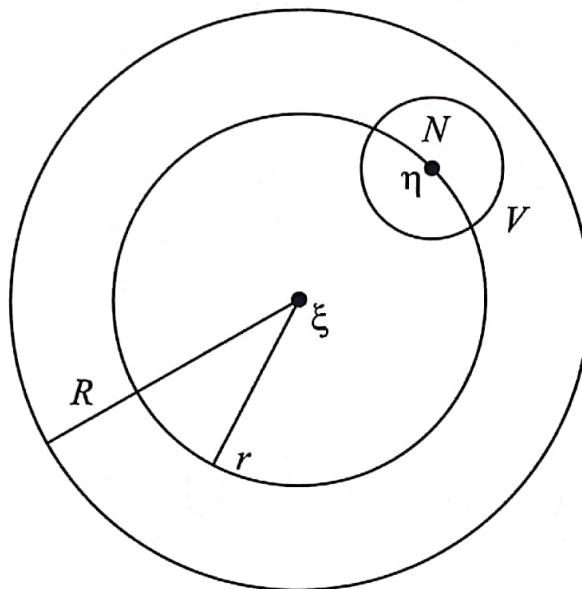
$$u(\xi_0) = M = \max\{u(\xi): \xi \in \bar{\Omega}\}. \quad (1.2)$$

Seja  $S = \{\xi \in \Omega: u(\xi) = M\}$ . Então  $S \neq \emptyset$  e  $S$  é fechado em  $\Omega$  (pois é a imagem inversa do fechado  $\{M\}$  pela função contínua  $u|_{\Omega}$ ). Vamos

mostrar que  $S$  é aberto em  $\Omega$ , ou seja,  $S$  é aberto. Sejam  $\xi \in S$  arbitrário e  $R > 0$  tal que  $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$ . Como  $u$  é harmônica em  $\Omega$ , pelo teorema do valor médio

$$M = u(\xi) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} u \, ds, \quad \forall r \in (0, R). \quad (1.3)$$

Vamos mostrar que  $B(\xi; R) \subseteq S$ : suponha, por absurdo, que  $B(\xi; R) \not\subseteq S$ ; então existe  $\eta \in B(\xi; R)$  tal que  $\eta \notin S$ , logo  $u(\eta) < M = u(\xi)$ ; pela continuidade de  $u$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $\eta$  em  $B(\xi; R)$  tal que  $u < M$  em  $V$ ; fazendo então  $r = |\xi - \eta|$ ,  $N = V \cap \partial B(\xi; r)$  e usando as equações (1.2) e (1.3), obtemos



**Fig. 38:** Se  $u(\eta) < M = u(\xi)$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $\eta$  onde  $u < M$ .

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) - N} u \, ds + \frac{1}{2\pi r} \int_N u \, ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) - N} ds + \frac{1}{2\pi r} \int_N u \, ds \\ &< \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) - N} ds + \frac{M}{2\pi r} \int_N ds = M. \end{aligned}$$

uma contradição. Portanto,  $B(\xi; R) \subseteq S$  e  $S$  é aberto. Como  $\Omega$  é conexo,  $S \neq \emptyset$  e  $S$  é aberto e fechado em  $\Omega$ ,  $S = \Omega$  e  $u$  é constante em  $\Omega$ , logo, por continuidade, em  $\overline{\Omega}$ .  $\square$

É claro que vale também o *princípio do mínimo*: basta aplicar o princípio do máximo para  $-u$ . Note que esses princípios dizem, de fato, que o máximo e o mínimo de uma função real harmônica em  $\Omega$  são atingidos em  $\partial\Omega$ , desde que  $\Omega$  seja um domínio limitado (pois nesse caso  $u$  é limitada e atinge um máximo e um mínimo). Note que, no teorema, não pedimos que o domínio  $\Omega$  seja limitado: no caso de domínio não limitado, a função pode não ter um máximo; o que o Teorema 1.2 diz é que, se a função atingir um máximo, ele será atingido em algum ponto da fronteira  $\partial\Omega$ .

O Teorema 1.2 pode ser melhorado: de fato, é possível provar que, se  $u$  for harmônica em um domínio  $\Omega$  e tiver um *máximo local* em  $\Omega$ , então  $u$  será constante em  $\Omega$ . (Esse resultado é conhecido como *princípio forte do máximo* para funções harmônicas.)

**Corolário 1.3.** *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e sejam  $f \in C(\Omega)$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$ . Então existe no máximo uma solução do problema*

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= f \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= g, \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.4}$$

**Demonstração:** Sejam  $u$ ,  $v$  soluções de (1.4) e  $w = u - v$ : então  $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  é harmônica em  $\Omega$ , logo atinge seu máximo e seu mínimo em  $\partial\Omega$ ; como  $w|_{\partial\Omega} \equiv 0$ ,  $w \equiv 0$  e  $u \equiv v$ .  $\square$

Observe que o Corolário 1.3 mostra, em particular, que as soluções dos problemas (1.2) e (2.1) do Capítulo 8 são únicas. O corolário, no entanto, não pode ser usado para provar a unicidade do problema de Dirichlet no semi-plano superior, pois, nesse caso, o domínio não é limitado; a unicidade para esse problema pode ser provada usando o princípio do máximo forte.

## 2 Princípio do Máximo para a Equação de Calor

Nesta seção, provaremos a unicidade dos problemas envolvendo a equação de calor a uma dimensão espacial, que resolvemos no Capítulo 9, usando um princípio do máximo. Lembramos ao leitor que já provamos a unicidade do Problema 1.1 do Capítulo 9 por outro método, usando a integral de energia (veja o Teorema 1.2 do Capítulo 9).

Vamos denotar por  $L$  o operador  $\alpha^2 \partial_x^2 - \partial_t$ ,

$$Lu \equiv \alpha^2 \partial_x^2 u - \partial_t u, \quad (2.1)$$

onde  $\alpha > 0$  é constante.

**Lema 2.1.** *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aberto e  $u \in C^2(\Omega)$  tal que  $Lu > 0$  em  $\Omega$ . Então  $u$  não tem máximo local em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que  $u$  atinge um máximo local em  $(x_0, t_0) \in \Omega$ : então  $\nabla u(x_0, t_0) = 0$ , de modo que, em particular,  $\partial_t u(x_0, t_0) = 0$ ; além disso, como a função  $x \mapsto u(x, t_0)$  tem um máximo local em  $x_0$ ,  $\partial_x^2 u(x_0, t_0) \leq 0$ ; portanto,  $Lu(x_0, t_0) = \alpha^2 \partial_x^2 u(x_0, t_0) - \partial_t u(x_0, t_0) \leq 0$ , uma contradição.  $\square$

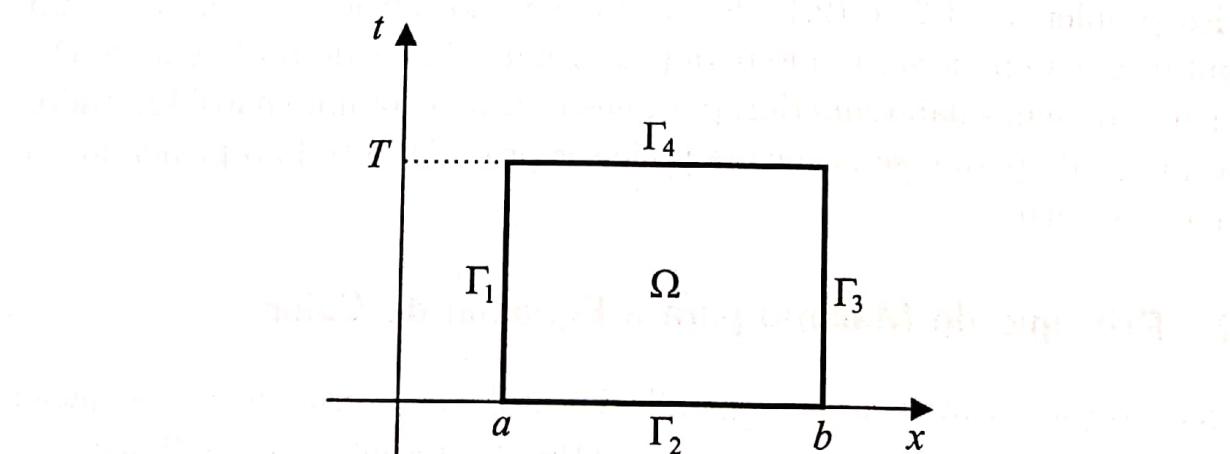
Duas consequências imediatas são:

**Corolário 2.2.** *Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  for um domínio limitado,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $Lu > 0$  em  $\Omega$ , então  $u$  atingirá seu máximo em  $\partial\Omega$ .*

**Corolário 2.3.** *Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  for aberto e  $v \in C^2(\Omega)$  for tal que  $Lv < 0$  em  $\Omega$ , então  $v$  não terá mínimo local em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Aplique o Lema 2.1 para  $u = -v$ .  $\square$

**Teorema 2.4 (Princípio do Máximo para o Operador  $L$ ).** *Sejam  $\Omega = (a, b) \times (0, T)$ ,  $\Gamma_1 = \{(a, t) : 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\Gamma_2 = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\}$ ,  $\Gamma_3 = \{(b, t) : 0 \leq t \leq T\}$  e  $\Gamma_4 = \{(x, T) : a < x < b\}$ . Suponha que  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  em  $\Omega \cup \Gamma_4$ , contínua em  $\bar{\Omega}$  e satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega \cup \Gamma_4$ . Então o máximo de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  ocorre em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .*



**Fig. 39:**  $\Omega$  é o interior de um retângulo com bordo  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  e  $u \in C^2(\Omega \cup \Gamma_4) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega \cup \Gamma_4$ .

**Demonstração:** Seja  $m = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}$  e suponha, por absurdo, que o máximo de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  não ocorre em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ : então, se  $M = \max\{u(x, t) : (x, t) \in \bar{\Omega}\}$ ,  $M > m$  e existe  $(x_0, t_0) \in \Omega \cup \Gamma_4$  tal que  $u(x_0, t_0) = M$ . Vamos definir

$$w(x) = \frac{M - m}{2(b - a)^2} (x - x_0)^2, \quad x \in [a, b],$$

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

Como  $w \in C^2([a, b])$  e  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma_4)$ ,  $v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma_4)$ . Além disso,

$$Lv = Lu + Lw \geq Lu = \alpha^2 \frac{M - m}{(b - a)^2} > 0 \text{ em } \Omega \cup \Gamma_4,$$

de modo que, pelo Lema 2.1, o máximo de  $v$  em  $\bar{\Omega}$  é atingido em  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ . Por outro lado, se  $(x, t) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ,

$$v(x, t) = u(x, t) + w(x) \leq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M = v(x_0, t_0)$$

e, portanto, o máximo de  $v$  em  $\bar{\Omega}$  é atingido em  $\Gamma_4$ . Seja  $(\tilde{x}, T) \in \Gamma_4$  tal que  $v(\tilde{x}, T) = \max\{v(x, t) : (x, t) \in \bar{\Omega}\}$ . Como a função  $x \in [a, b] \mapsto v(x, T)$  tem um máximo em  $\tilde{x} \in (a, b)$ ,  $\partial_x^2 v(\tilde{x}, T) \leq 0$  e  $Lv > 0$  em  $\Gamma_4$ ,

$$\partial_t v(\tilde{x}, T) < \alpha^2 \partial_x^2 v(\tilde{x}, T) \leq 0; \quad (2.2)$$

mas a função  $t \in [0, T] \mapsto v(\tilde{x}, t)$  é não decrescente para  $t$  próximo de  $T$  (já que possui um máximo em  $t = T$ ), logo,  $\partial_t v(\tilde{x}, T) \geq 0$ , o que contradiz (2.2).  $\square$

**Corolário 2.5.** *Sejam  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  como no Teorema 2.4 e seja  $u \in C^2(\Omega \cap \Gamma_4) \cap C(\bar{\Omega})$ . Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega \cup \Gamma_4$ , o mínimo de  $u$  ocorrerá em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . Em particular, se  $Lu = 0$  em  $\Omega \cup \Gamma_4$ , o máximo e o mínimo de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  serão atingidos em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .*

**Teorema 2.6.** *Dados  $f \in C([a, b])$ ,  $A, B \in C([0, +\infty))$  e  $g \in C^1((a, b) \times (0, +\infty))$ , existe no máximo uma solução para o problema*

$$\begin{aligned} u &\in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C([a, b] \times [0, +\infty)), \\ \partial_t u &= \alpha^2 \partial_x^2 u + g \text{ em } (a, b) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) &= A(t), \quad u(b, t) = B(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Demonstração:** Suponha que  $u$  e  $v$  são soluções de (2.3) e seja  $w = u - v$ . Então  $w$  é solução de

$$\begin{aligned} w &\in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C([a, b] \times [0, +\infty)), \\ Lw &= 0 \text{ em } (a, b) \times (0, +\infty), \\ w(x, 0) &= 0 = w(a, t) = w(b, t), \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Seja  $T > 0$ : pelo Corolário 2.5, o máximo e o mínimo de  $w$  em  $[a, b] \times [0, T]$  são atingidos em  $(\{a\} \times [0, T]) \cup ([a, b] \times \{0\}) \cup (\{b\} \times [0, T])$ , onde  $w = 0$ , logo  $w \equiv 0$  em  $[a, b] \times [0, T]$ . Como  $T > 0$  é arbitrário,  $w \equiv 0$  em  $[a, b] \times [0, +\infty)$ , ou seja,  $u \equiv v$ .  $\square$

**Teorema 2.7.** *Sejam  $g \in C(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$  e  $f \in C(\mathbb{R})$  limitada. Então existe no máximo uma solução do problema*

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada}, \\ \partial_t u &= \alpha^2 \partial_x^2 u + g \text{ em } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Demonstração:** Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  são soluções de (2.4) e seja  $w = u_1 - u_2$ . Então  $w$  é solução de

$$\begin{aligned} w &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada}, \\ Lw &= 0 \text{ em } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ w(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Seja  $M > 0$  tal que  $|w(x, t)| \leq M$  qualquer que seja  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Sejam  $T > 0$ ,  $a > 0$  e  $v: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$v(x, t) = w(x, t) - \frac{M}{a^2} x^2 - \frac{2M\alpha^2}{a^2} t.$$

Sejam  $\Omega = (-a, a) \times (0, T)$ ,  $\Gamma_1 = \{-a\} \times [0, T]$ ,  $\Gamma_2 = [-a, a] \times \{0\}$ ,  $\Gamma_3 = \{a\} \times [0, T]$  e  $\Gamma_4 = (-a, a) \times \{T\}$ : então  $v \in C^2(\Omega \cup \Gamma_4) \cap C(\overline{\Omega})$  e

$$Lv = L - \frac{2M\alpha^2}{a^2} + \frac{2M\alpha^2}{a^2} = 0 \text{ em } \Omega \cup \Gamma_4,$$

logo, pelo Corolário 2.5, o máximo e o mínimo de  $v$  em  $\overline{\Omega}$  são atingidos em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . Mas, em  $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ ,

$$v(x, t) \leq M - \frac{M}{a^2} a^2 - \frac{2M\alpha^2}{a^2} t \leq -\frac{2M\alpha^2}{a^2} t \leq 0$$

e em  $\Gamma_2$

$$v(x, 0) = w(x, 0) - \frac{M}{a^2} x^2 = \frac{-M}{a^2} x^2 \leq 0.$$

Então  $v \leq 0$  em  $\bar{\Omega}$  e

$$w(x, t) \leq \frac{M}{a^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{a^2} t \text{ se } |x| \leq a, 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

Como  $T > 0$  e  $a > 0$  são arbitrários, tomando o limite quando  $a \rightarrow +\infty$  em (2.5), obtemos que  $w \leq 0$  em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

Procedemos de maneira análoga para provar que  $w \geq 0$ : definindo

$$\tilde{v}(x, t) = -w(x, t) - \frac{M}{a^2} x^2 - \frac{2M\alpha^2}{a^2} t,$$

obtemos  $L\tilde{v} = 0$  em  $\Omega \cup \Gamma_4$  e, aplicando o Corolário 2.5,  $\tilde{v} \leq 0$  em  $\bar{\Omega}$ , logo

$$w(x, t) \geq -\frac{M}{a^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{a^2} t \text{ se } |x| \leq a, 0 \leq t \leq T; \quad (2.6)$$

fazendo  $a \rightarrow +\infty$  em (2.6),  $w \geq 0$  em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Portanto  $w \equiv 0$ .  $\square$

É interessante observar que o princípio do máximo que provamos para o operador  $L = \alpha^2 \partial_x^2 - \partial_t$  vale em  $\mathbb{R}^n$  para o operador  $L = \alpha^2 \Delta - \partial_t$ . Para maiores detalhes veja [PROTTER & WEINBERGER, 1967].

### 3 Integrais de Energia

A demonstração de unicidade para o problema de Cauchy com a equação de onda a uma dimensão espacial pode ser feita de várias maneiras: através da mudança de variável  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$  (como já fizemos no Capítulo 5), através do princípio do máximo (veja [PROTTER & WEINBERGER, 1967]) ou através de integrais de energia. O primeiro método não funciona para dimensão  $n > 1$ . Vamos então provar a unicidade usando integrais de energia, que é um método que funciona em geral.

Vamos considerar a equação de onda a uma dimensão espacial

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Como vimos anteriormente, o problema básico associado à equação (3.1) é o problema de valor inicial ou problema de Cauchy, ou seja, encontrar

uma solução  $u = u(x, t)$  que satisfaça as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções dadas.

Note que basta resolver o problema (3.1), (3.2) para  $t > 0$ : de fato, o problema para  $t < 0$  pode ser reduzido ao anterior ( $t' > 0$ ) através da mudança de variável  $t' = -t$  (a equação de onda é invariante sob essa mudança de variável – o que *não acontece* com a equação do calor!). Daqui para frente vamos nos preocupar apenas com a solução de (3.1), (3.2) para  $t > 0$ .

Dado um intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $T \geq 0$  e  $u(\cdot, T) \in C^2(I)$ , a integral

$$E(u; I, T) = \frac{1}{2} \int_I [u_t^2(x, T) + c^2 u_x^2(x, T)] dx \tag{3.3}$$

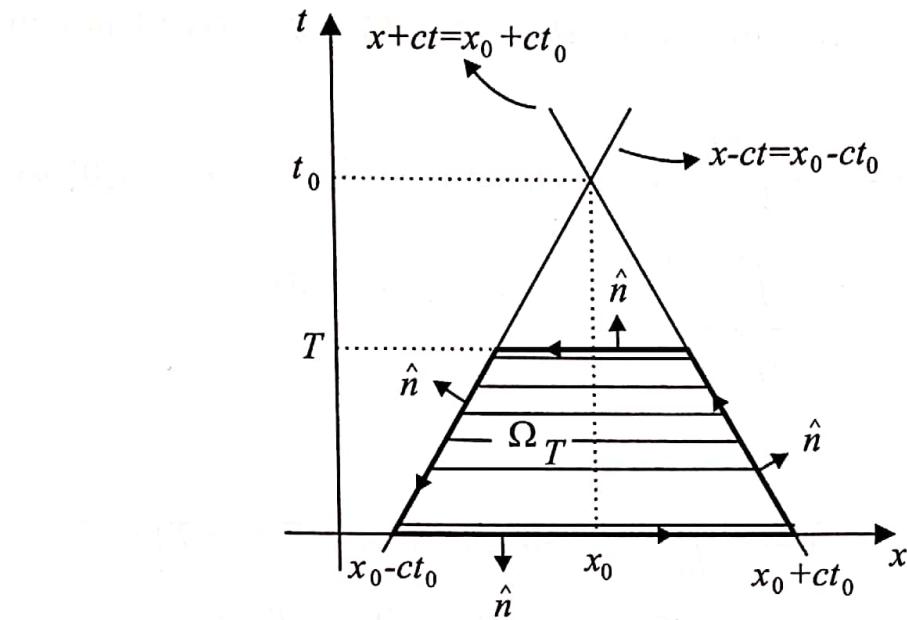
é chamada de *energia de  $u$  contida em  $I$  no instante  $t = T$*  (veja [MAIN, 1984]; essa é, de fato, a energia no caso de densidade 1). (Para simplificar a notação, escrevemos simplesmente  $u_x^2$  ao invés de  $(u_x)^2$ .) Note que a energia é sempre maior ou igual a zero.

Já vimos que as curvas características para a equação de onda (3.1) são as retas  $x \pm ct = \text{cte}$ . Observe que as duas retas características passando pelo ponto  $(x_0, t_0)$  podem ser colocadas em uma única equação

$$(x - x_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0. \tag{3.4}$$

**Teorema 3.1.** *Sejam  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ,  $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 < 0\}$ ,  $0 < T < t_0$ ,  $I_0 = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = \Omega \cap \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$  e  $I_T = [x_0 - c(t_0 - T), x_0 + c(t_0 - T)] = \Omega \cap \{(x, T) \in \mathbb{R}^2\}$ . Suponha que  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfaz a equação de onda (3.1) em  $\Omega$ . Então*

$$E(u; I_T, T) \leq E(u; I_0, 0). \tag{3.5}$$



**Fig. 40:**  $\Omega_T$  é a região aberta limitada pelas retas  $t = 0$ ,  $t = T$  e pelas características passando por  $(x_0, t_0)$ .

A demonstração do Teorema 3.1 é baseada na identidade diferencial

$$2u_t(u_{tt} - c^2u_{xx}) = (u_t^2 + c^2u_x^2)_t - 2c^2(u_tu_x)_x. \quad (3.6)$$

Para mostrar (3.6) para uma função  $u$  de classe  $C^2$ , basta notar que

$$\begin{aligned} 2u_tu_{tt} &= (u_t^2)_t, \\ 2c^2u_tu_{xx} &= 2c^2(u_tu_x)_x - 2c^2u_{tx}u_x = 2c^2(u_tu - x)_x - c^2(u_x^2)_t. \end{aligned}$$

**Demonstração do Teorema 3.1.** Seja  $\Omega_T = \{(x, t) \in \Omega : 0 < t < T\}$ . Observe que o teorema da divergência é válido em  $\Omega_T$  (veja a Figura 40). Como  $u$  é solução da equação de onda em  $\Omega$ , o lado esquerdo de (3.6) é zero em  $\Omega_T$ , logo, por continuidade em  $\bar{\Omega}_T$ ; por outro lado, se  $F: \bar{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}^2$  for definida por

$$F(x, t) = (-2c^2u_tu_x, u_t^2 + c^2u_x^2), \quad (3.7)$$

então  $F$  será de classe  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$  e o lado direito de (3.6) será a divergência de  $F$ . Integrando (3.6) sobre  $\bar{\Omega}_T$ , usando que  $u$  é solução de (3.1) em  $\Omega$  e o teorema da divergência, obtemos:

$$0 = \int_{\bar{\Omega}_T} \nabla \cdot F dxdt = \int_{\partial\Omega_T} F \cdot \hat{n} ds. \quad (3.8)$$

Observe que  $\partial\Omega_T \cap \{t = 0\} = I_0$  e  $\partial\Omega_T \cap \{t = T\} = I_T$ . Da Figura 40 é fácil ver que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_T \cap \{t=0\}} F \cdot \hat{n} ds &= - \int_0^{2ct_0} [u_t^2(x_0 - ct_0 + s, 0) + c^2 u_x^2(x_0 - ct_0 + s, 0)] ds \\ &= - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} [u_t^2(x, 0) + c^2 u_x^2(x, 0)] dx \\ &= -2E(u; I_0, 0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_T \cap \{t=T\}} F \cdot \hat{n} ds &= \int_0^{2c(t_0 - T)} [u_t^2(x_0 + c(t_0 - T) - s, T) + \\ &\quad + c^2 u_x^2(x_0 + c(t_0 - T) - s, T)] ds \\ &= \int_{x_0 - c(t_0 - T)}^{x_0 + c(t_0 - T)} [u_t^2(x, T) + c^2 u_x^2(x, T)] dx \\ &= 2E(u; I_T, T),\end{aligned}$$

de modo que podemos reescrever a Equação (3.8) na forma

$$\begin{aligned}2E(u; I_0, 0) - 2E(u; I_T, T) &= \\ = \int_{\partial\Omega_t \cap \{x+ct=x_0+ct_0\}} F \cdot \hat{n} ds + \int_{\partial\Omega_t \cap \{x-ct=x_0-ct_0\}} F \cdot \hat{n} ds, &\quad (3.9)\end{aligned}$$

e basta provar que o lado direito de (3.9) é sempre maior ou igual a zero. Em  $\partial\Omega_T \cap \{x + ct = x_0 + ct_0\}$ ,

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (1, c) \Rightarrow F \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} [-2c^2 u_t u_x + c u_t^2 + c^3 u_x^2] \\ &= \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} (u_t - c u_x)^2 \geq 0;\end{aligned}$$

analogamente, em  $\partial\Omega_T \cap \{x - ct = x_0 - ct_0\}$ ,

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-1, c) \Rightarrow F \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} [2c^2 u_t u_x + c u_t^2 + c^3 u_x^2] \\ &= \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} (u_t + c u_x)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

portanto as integrais em (3.9) são sempre maiores ou iguais a zero, o que prova o teorema.  $\square$

O Teorema 3.1 nos permite obter a unicidade de solução para o problema (3.1), (3.2). De fato, vale um resultado mais geral:

**Teorema 3.2.** *Dadas  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$  e  $h \in C(\mathbb{R}^2)$ , existe no máximo uma solução para o problema*

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\mathbb{R}^2), \\ u_{tt} &= c^2 u_{xx} + h(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

**Demonstração:** Suponha que  $u$  e  $v$  são soluções de (3.10) e seja  $w = u - v$ . Então  $w$  satisfaz

$$\begin{aligned} w &\in C^2(\mathbb{R}^2), \\ w_{tt} &= c^2 w_{xx} \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ w(x, 0) &= 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1, quaisquer que sejam  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  e  $0 < T < t_0$ ,

$$0 \leq E(w; I_T, T) \leq E(w; I_0, 0) = 0$$

(notação como no enunciado do Teorema 3.1) e, fazendo  $t = t_0 - T$ ,

$$\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} [w_t^2(x, t) + c^2 w_x^2(x, t)] dx = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0;$$

como o integrando é uma função contínua e maior ou igual a zero, segue que

$$w_t(x, t) = 0 = w_x(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

logo  $w$  é constante em  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  e, por continuidade, em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , o que significa que  $w \equiv 0$  em  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  (pois  $w(x, 0) = 0$ ). O mesmo argumento funciona, no caso de  $T < 0$ , trocando  $t$  por  $-t$ , logo  $w \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

No caso do problema da corda finita, a energia é constante, como mostra o próximo teorema.

**Teorema 3.3.** *Suponha que  $u \in C^2([a, b] \times (0, +\infty)) \cap C^1([a, b] \times [0, +\infty))$  satisfaça a equação de onda (3.1) em  $(a, b) \times (0, +\infty)$  e a condição*

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.11}$$

Então a energia de  $u$  no intervalo  $[a, b]$  é constante, ou seja,  $E(t) = E(0)$  qualquer que seja  $t \geq 0$ , onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_a^b [u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)] dx.$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.4 do Capítulo 8,  $E(t)$  é continuamente diferenciável em  $[0, +\infty)$  e

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_a^b (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t dx.$$

Usando (3.6), obtemos, qualquer que seja  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t dx - c^2 \int_a^b (u_t u_x)_x dx \\ &= E'(t) - c^2 [u_t(b, t)u_x(b, t) - u_t(a, t)u_x(a, t)]. \end{aligned}$$

Como  $u \in C^1([a, b] \times [0, +\infty))$  satisfaz (3.11),

$$u_t(a, t) = 0 = u_t(b, t),$$

logo  $E'(t) = 0$  qualquer que seja  $t \geq 0$  e  $E(t)$  é constante em  $[0, +\infty)$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** Dadas  $A, B \in C^2((0, +\infty)) \cap C^1([0, +\infty))$ ,  $f \in C^1([a, b])$ ,  $g \in C([a, b])$  e  $h \in C([a, b] \times (0, +\infty))$ , existe no máximo uma solução de

$$\begin{aligned} u &\in C^2([a, b] \times (0, +\infty)) \cap C^1([a, b] \times [0, +\infty)), \\ u_{tt} &= c^2 u_{xx} + h(x, t), \quad x \in (a, b), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) &= A(t), \quad u(b, t) = B(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

**Demonstração:** Suponha que  $u$  e  $v$  são soluções de (3.12) e seja  $w = u - v$ . Então  $w$  satisfaz as condições do Teorema 3.3 com

$$w(x, 0) = 0 = w_t(x, 0),$$

logo

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_a^b [w_t^2(x, 0) + c^2 w_x^2(x, 0)] dx = 0$$

e, portanto,

$$w_t(x, t) = 0 = w_x(x, t), \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall t \geq 0,$$

logo  $w$  é constante e, de fato,  $w \equiv 0$  em  $[a, b] \times [0, +\infty)$ .  $\square$

É interessante comparar o teorema acima com a unicidade do problema (4.1) do Capítulo 5: no Corolário 4.3 do Capítulo 5, obtivemos a unicidade de um problema semelhante a (3.12), com  $h \equiv 0 \equiv A \equiv B$ ,  $a = 0$  e  $b = l$ , mas no espaço  $V$  das funções  $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C[0, l] \times [0, +\infty)$ ) que têm derivada normal ao longo da reta  $t = 0$ , ou seja, para as quais existe o limite

$$u_t(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x, h) - u(x, 0)}{h}.$$

Estamos exigindo um pouco mais de diferenciabilidade no Teorema 3.4.

Os resultados desta seção são válidos em  $n$  dimensões espaciais e as demonstrações são análogas; a equação (3.6), por exemplo, fica

$$2u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) = u_t^2 + c^2(u_{x_1}^2 + \dots + u_{x_n}^2) - 2c^2[(u_t u_{x_1})_{x_1} + \dots + (u_t u_{x_n})_{x_n}]$$

e a demonstração do teorema equivalente ao Teorema 3.1 é inteiramente análoga.

## 4 Exercícios

### Seção 1: Princípio do Máximo para Funções Harmônicas

1. Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio. Dizemos que  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é *subharmônica* (respectivamente, *superharmônica*) em  $\Omega$  se  $u \in C^2(\Omega)$  e  $\Delta u \geq 0$  (respectivamente,  $\Delta u \leq 0$ ) em  $\Omega$ . Sejam  $\xi \in \Omega$  e  $R > 0$  tal que  $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$ .

- (i) Prove que, se  $u$  for subharmônica em  $\Omega$ , então

$$u(\xi) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds.$$

(Sugestão: use o Exercício 6 da primeira seção do Capítulo 11.)

- (ii) (Princípio do máximo para funções subharmônicas). Suponha que  $u$  é subharmônica em  $\Omega$  e que atinge seu máximo  $M$  em  $\Omega$ . Mostre que  $u \equiv M$  em  $\Omega$ .
- (iii) Enuncie e demonstre resultados análogos a (i) e (ii) para funções superharmônicas.
- (iv) Suponha que  $\Omega$  é limitado e sejam  $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas com  $v$  harmônica em  $\Omega$ ,  $u$  subharmônica em  $\Omega$  e  $u = v$  em  $\partial\Omega$ . Prove que  $u \leq v$  em  $\Omega$ . O que acontece se  $u$  for superharmônica em vez de subharmônica?

**2.** Seja  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Prove que a única solução do problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= u^3 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

é  $u \equiv 0$ . (Sugestão: use os resultados do Exercício 1.)

**3.** Suponha que  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução do problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= -1 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde  $\Omega = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ . Encontre cotas inferior e superior para  $u(0, 0)$ . (Sugestão: considere  $v = u + (1/4)(x^2 + y^2)$ .)

**4.** Seja  $u$  harmônica em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  e suponha que  $u(\xi) = g(|\xi|)$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , onde  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que existem constantes  $A, B$  tais que  $u(\xi) = A \ln |\xi| + B$ .

**5.** Para o caso em que  $\Omega = B(\xi_0; R)$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^2$ , vale um teorema do valor médio um pouco mais forte: prove que, neste caso, se  $u$  for harmônica em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$  então

$$u(\xi_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial\Omega} u \, ds.$$

6. Seja  $D$  o disco aberto de raio  $R$  e centro  $Q$  e suponha que  $u$  é uma função real harmônica em  $D$  e contínua em  $\overline{D}$ . Seja  $K = \int_D u^2 dx dy$ . Mostre que

$$|u(Q)| \leq \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K}{\pi}}$$

e, mais geralmente, qualquer que seja  $P \in D$ ,

$$|u(P)| \leq \frac{1}{R-r} \sqrt{\frac{K}{\pi}},$$

onde  $r$  é a distância entre  $P$  e  $Q$ . (Sugestão: considere a integral

$$\iint_D [u - u(Q)]^2 dx dy.$$

7. Mostre, calculando diretamente, que a função  $u(x, y) = (1 - x^2 - y^2)/(1 - 2x + x^2 + y^2)$  é harmônica no disco unitário centrado na origem. Como o numerador se anula em todos os pontos do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , os princípios de máximo e de mínimo deveriam implicar em  $u \equiv 0$ . Encontre o erro neste argumento.

8. Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aberto e  $a, b, c \in C(\Omega)$  com  $c < 0$  em  $\Omega$ . Mostre que, se  $u \in C^2(\Omega)$  satisfizer  $\Delta u + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y) = 0$ , então  $u$  não terá máximo local em  $\Omega$ .

9. (Este exercício completa o Exercício 6 da primeira seção do Capítulo 9.) Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ . Prove que o problema

$$\begin{aligned} v &\in C^2(D) \cap C(\overline{D}), \\ \Delta v &= -\lambda v \text{ em } D, \\ v|_{\partial D} &= 0, \end{aligned}$$

só tem solução não-trivial se  $\lambda > 0$ .

## Seção 2: Princípio do Máximo para a Equação do Calor

1. Enuncie e prove um teorema análogo ao Teorema 2.4 para o operador  $L = \alpha^2 \Delta - \partial_t$ , onde  $\alpha > 0$  é constante e  $\Delta$  é o laplaciano nas 2 variáveis espaciais  $(x, y)$ .

2. Mostre que o Lema 2.1 é válido para o operador  $Lu \equiv a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t$  se  $a > 0$  em  $\Omega$ .
3. Considere o operador  $Lu \equiv xu_{xx} - u_t$ .
- Mostre que  $u(x, t) = -(x^2 + 2xt)$  satisfaz  $Lu = 0$ .
  - Estude os máximos e mínimos de  $u$  nas regiões  $\bar{\Omega}_1 = [-1, 1] \times [0, 1/2]$ ,  $\bar{\Omega}_2 = [-1/2, 1/2] \times [0, 1/2]$ ,  $\bar{\Omega}_3 = [-2, 2] \times [0, 1/2]$  e  $\bar{\Omega}_4 = [a, b] \times [0, T]$ , onde  $a \geq 0$ .

# Sugestões e Respostas

Cada uma das doze seções a seguir tem o mesmo título de um dos doze capítulos anteriores e contém soluções para exercícios propostos naquele capítulo. Em cada uma delas, a notação  $p.q$  significa o  $q$ -ésimo exercício da seção  $p$  do capítulo correspondente.

## 1 Definições Básicas

**1.1.** (i) 3; (ii) 3; (iii) 1; (iv) 2; (v) 1.

**1.2.** (i) não linear; (ii) linear não homogênea; (iii) não linear; (iv) não linear; (v) não linear; (vi) linear homogênea.

**1.3.** 1(i)  $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ ; 1(ii)  $uD_1^2D_2u$ ; 1(iii)  $u_xu_t$ ; 1(iv)  $\partial_x^2u$ ; 1(v)  $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \frac{\partial u}{\partial x}$ ; 2(i)  $D_1u^2 + D_2u$ ; 2(ii)  $x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ; 2(iii)  $(u_x)^2 + u_t$ ; 2(iv)  $u_{xx} - u_{tt}$ ; 2(v)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ; 2(vi)  $x^2D_2^2u + y^2D_1^2u$ .

**1.4.** 1(i), 1(iv), 2(ii), 2(iv), 2(v) e 2(vi).

**2.1** Se  $a, b \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{\partial}{\partial x} (au + bv) + x(au + bv) = a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + xu \right) + b \left( \frac{\partial v}{\partial x} + xv \right) = 0$$

e, portanto,  $au + bv$  será solução da equação  $\frac{\partial u}{\partial x} + xu$  sempre que  $u$  e  $v$  forem soluções.

**3.1** O problema é de Cauchy e a condição  $u(t^3, t^5) = t^2 + 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma condição inicial.

**3.2.** Esse é um problema de contorno: queremos resolver a equação no interior do círculo centrado na origem de raio 2 conhecendo a função na circunferência. A condição  $u(2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t) = t \operatorname{sen} t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é uma condição de contorno.

**3.3.** As condições  $u(x, 0) = f(x)$  e  $u_t(x, 0) = g(x)$  são condições iniciais e o problema é de Cauchy.

**3.4.** A condição  $u(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t) = t(2\pi - t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é de contorno, logo temos um problema de contorno.

**3.5.** Este problema pode ser considerado tanto como um problema misto (e, nesse caso, as condições  $u(0, t) = \alpha(t)$  e  $u(1, t) = \beta(t)$  são de contorno, enquanto que  $u(x, 0) = \gamma(x)$  é uma condição inicial) ou como um problema de contorno na região ilimitada  $[0, 1] \times [0, +\infty)$  (e, nesse caso, todas as condições são de contorno). Observe que, para que haja solução, as funções dadas  $\alpha, \beta, \gamma$  têm que satisfazer as condições de compatibilidade  $\alpha(0) = \gamma(0), \beta(0) = \gamma(1)$ .

## 2 Equações de Primeira Ordem: O Caso Linear

**1.1.** (i)  $u(x, y) = x + x^2 + x^2y + y^3/3 - x^4 - x^6/3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; (ii)  $u(x, y) = 2x - x \cos(y/x), x > 0, y \in \mathbb{R}$ .

**1.2.** (i) não tem solução; (ii)  $u(x, y) = xe^y + f(x)$ , onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é tal que  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ ; (iii)  $u(x, y) = x^2y + y^2 - ye^{2y} + 1$ ; (iv)  $u(x, y) = x^2y + f(y)$ , onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é tal que  $f(y) = 1 - y^2, \forall y \geq 0$ ; (v) não tem solução.

**1.3.** Suponha que  $u \in C^1(\mathbb{R})$  é solução: então qualquer que seja  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , integrando a equação diferencial ao longo do segmento de reta horizontal que vai do ponto  $(p(y_0), y_0)$  ao ponto  $(x_0, y_0)$ , obtemos

$$u(x_0, y_0) - u(p(y_0), y_0) = \int_{p(y_0)}^{x_0} u_x(x, y_0) dx = \int_{p(y_0)}^{x_0} h(x, y_0) dx;$$

portanto, usando a condição inicial e o fato de que  $(x_0, y_0)$  é arbitrário,

$$u(x, y) = f(y) + \int_{p(y)}^x h(t, y) dt, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (*)$$

Reciprocamente, se  $f, p \in C^1(\mathbb{R})$  e  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $u$  dada por  $(*)$  está em  $C^1(\mathbb{R}^2)$  e é solução do problema dado. Logo a solução do problema é única e dada pela fórmula  $(*)$ .

**2.1.** Em cada um dos itens abaixo,  $c$  é uma constante arbitrária: (i) retas  $3y + 4x = c$ ; (iii) retas  $y + 3x = c$ ; (v) hipérboles  $y = \frac{x}{1+cx}$ ; (vii) hipérboles  $y = c/x$ ; (ix)  $y = a \operatorname{sen} x + c$ .

**2.2.** As respostas abaixo foram obtidas integrando a equação ao longo das curvas características: (i)  $u(x, y) = x^3/9, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; (iii)  $u(x, y) = -\cos x + \cos((3x + y)/4) - (\operatorname{sen} y)/3 + (\operatorname{sen} ((3x + y)/4))/3 + p((3x + y)/4), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; (v)  $u(x, y) = 1 + x^2/2 - x^2y^2/[2(xy - x + y)^2], x > 0, y > x/(x + 1)$ ; (vii)  $u(x, y) = x^2 + x + xy \ln((x + 1)/y), x > 0, y > 0$ ; (ix)  $u(x, y) = [\ln(\operatorname{sen}(a + y - a \operatorname{sen} x))]/a - 1 - a \cos x + \operatorname{sen} x + (y - a \operatorname{sen} x)(x - \pi/2), a \operatorname{sen} x - a < y < a \operatorname{sen} x - a + \pi$ .

**2.3.** (i) Note, em primeiro lugar, que a curva inicial em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma(t) = (t, 1, 1), t \in \mathbb{R}$ , é uma curva regular para a EDP, pois os vetores  $(\sigma'(t), \rho'(t)) = (1, 0)$  e  $(a(\Gamma(t)), b(\Gamma(t))) = (t, -1)$  nunca são paralelos. Vamos então resolver o sistema

$$\begin{aligned} x_s(s, t) &= x, \quad x(0, t) = t, \\ y_s(s, t) &= -y, \quad y(0, t) = 1, \\ v_s(s, t) &= v^2, \quad v(0, t) = 1. \end{aligned}$$

Como esse sistema é desacoplado, resolvemos separadamente cada equação obtendo  $x = te^s$ ,  $y = e^{-s}$ ,  $v = -(s - 1)^{-1}$ . Invertendo a mudança de variável,  $t = xy$ ,  $s = -\ln y$  e, portanto,  $u(x, y) = (1 + \ln y)^{-1}$ ,  $y > 1/e$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) A resolução é análoga a de (i): a curva inicial  $\Gamma(t) = (t, 0, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é regular e recaímos no sistema

$$\begin{aligned}x_s &= 2y, \quad x(0, t) = t, \\y_s &= 1, \quad y(0, t) = 0, \\v_s &= 2xyv^2, \quad v(0, t) = t.\end{aligned}$$

O sistema é acoplado, mas podemos resolver primeiro para  $y$ , depois para  $x$  e finalmente para  $v$ , obtendo  $x = s^2 + t$ ,  $y = s$ ,  $v = -2t/(s^4t + 2s^2t^2 - 2)$ . Logo  $t = x - y^2$ ,  $s = y$  e  $u(x, y) = -2(x - y^2)/[y^4(x - y^2) + 2y^2(x - y^2)^2 - 2]$ .

(v) Novamente, a curva  $\Gamma(t) = (t, -t, 2t)$ ,  $t > 0$ , é regular, pois  $(\sigma'(t), \rho'(t)) = (1, -1)$  e  $(a(\Gamma(t)), b(\Gamma(t))) = (2t, 2t)$  nunca são paralelos se  $t > 0$ . Precisamos resolver o sistema

$$\begin{aligned}x_s &= v, \quad x(0, t) = t, \\y_s &= v, \quad y(0, t) = -t, \\v_s &= -x - y, \quad v(0, t) = 2t.\end{aligned}$$

Esse sistema não é tão simples como os anteriores, mas note que  $v_s = -(x+y) \Rightarrow v_{ss} = -x_s - y_s = -2v$ . Obtemos, então,  $v(s, t) = A(t)\cos(\sqrt{2}s) + B(t)\sin(\sqrt{2}s)$ ,  $x(s, t) = (\sqrt{2}/2)A(t)\sin(\sqrt{2}s) - (\sqrt{2}/2)B(t)\cos(\sqrt{2}s) + C(t)$ ,  $y(s, t) = (\sqrt{2}/2)A(t)\cos(\sqrt{2}s) - (\sqrt{2}/2)B(t)\sin(\sqrt{2}s) - C(t)$ , onde  $A(t) = 2t$ ,  $B(t) = 0$ ,  $C(t) = t$ . Resolvendo para  $t$  e  $s$ ,  $t = (x - y)/2$ ,  $\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}s) = (x + y)/(x - y)$  e  $u(x, y) = \sqrt{(x^2 - 6xy + y^2)/2}$ ; a solução é válida na região aberta  $\Omega$  limitada pelas semi-retas  $y = (3 - 2\sqrt{2})x$ ,  $x \geq 0$  e  $y = (3 + 2\sqrt{2})x$ ,  $x \leq 0$ , e que contém a curva plana inicial  $\gamma(t) = (t, -t)$ ,  $t > 0$ .

(vii)  $\Gamma(t) = (a, a \cos t, a \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é regular, pois os vetores  $(\sigma', \rho') = (0, -a \sin t)$  e  $(a(\Gamma(t)), b(\Gamma(t))) = (a^2 + a^2 \cos^2 t, 2a^2 \cos t)$  nunca são paralelos se  $0 < t < \pi$ . Precisamos então resolver o sistema

$$\begin{aligned}x_s &= x^2 + y^2, \quad x(0, t) = a, \\y_s &= 2xy, \quad y(0, t) = a \cos t, \\v_s &= xv, \quad v(0, t) = a \sin t.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo as duas primeiras equações, podemos resolver primeiro para  $x + y$  e  $x - y$ . A solução é dada por  $u(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$  na região  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, -x < y < x\}$ . (O sinal de  $u$  foi determinado pela condição inicial, pois  $a \sin t > 0$  se  $t \in (0, \pi)$ ; a região  $\Omega$  é o maior subconjunto aberto conexo de  $|x| \geq |y|$  – que é onde a função  $u$  está definida – que contém a curva plana inicial.)

**3.1** Em cada um dos itens abaixo,  $f$  é uma função arbitrária de classe  $C^1$ . (i)  $u(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + f(x)$ ; (iii)  $u(x, y) = x^3/9 + f(4x + 3y)$ ; (v)  $u(x, y) = e^{mx}(-ab \sin(by) + m \cos(by))/(m^2 + a^2b^2) + f(ax + y)$ ; (vii)  $u(x, y) = x + y + 4 + f(4x + y) \exp(-x)/17$ ; (ix)  $u(x, y) = 1 + f(xy) \exp(y/(2x))$ ,  $x \neq 0$ ; (xi)  $u(x, y) = f(x^2 + y^2)/x$ ,  $x \neq 0$ .

**3.2** (i)  $u(x, y) = f(\ln|x| + 2 \ln|y|)$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ; (iii)  $u(x, y) = -x^2y/5 + f(7 \ln|x| + \ln|y|)$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ; (v) se  $-\gamma = 2a = 2\beta \neq 0$ , então  $u(x, y) =$

$(x^2 + y^2)(\ln |x| + \ln |y|)/(2\alpha) + xyf(\ln |x| - \ln |y|)$ ; se  $-\gamma = 2\alpha \neq 2\beta$ , então  $u(x, y) = x^2(\alpha \ln |x| + \beta \ln |y|)/(\alpha^2 + \beta^2) + y^2/(2\beta - 2\alpha) + f(\beta \ln |x| - \alpha \ln |y|) \exp[2\alpha(\alpha \ln |x| + \beta \ln |y|)/(\alpha^2 + \beta^2)]$ ; se  $-\gamma = 2\beta \neq 2\alpha$ , então  $u(x, y) = y^2(\alpha \ln |x| + \beta \ln |y|)/(\alpha^2 + \beta^2) + x^2/(2\alpha - 2\beta) + f(\beta \ln |x| - \alpha \ln |y|) \exp[2\beta(\alpha \ln |x| + \beta \ln |y|)/(\alpha^2 + \beta^2)]$ ; finalmente, se  $-\gamma \neq 2\alpha$  e  $-\gamma \neq 2\beta$ ,  $u(x, y) = x^2/(2\alpha + \gamma) + y^2/(2\beta + \gamma) + f(\beta \ln |x| - \alpha \ln |y|) \exp[-\gamma(\alpha \ln |x| + \beta \ln |y|)/(\alpha^2 + \beta^2)]$ ; em qualquer dos casos, a função está definida para  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ .

**3.3.** (i) As características são curvas da forma  $s \mapsto (s + c_1, s^2/2 + c_2, c_3 e^s)$ . Tomando como curva inicial  $(1, t, \xi(t))$ , onde  $\xi$  é arbitrária, obtemos uma solução da forma  $u(x, y) = \xi(y - x^2/2 + 1/2)e^{x-1}$ . Portanto, a solução geral é  $u(x, y) = f(2y - x^2)e^x$ , onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária. (iii) As características são curvas da forma  $s \mapsto (\frac{-1}{s+C_1}, \frac{-1}{s+C_2}, \frac{C_3}{s+C_1})$  e a solução geral é  $u(x, y) = xf(\frac{xy}{x-y})$ ,  $x \neq y$ , onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é arbitrária.

### 3 Equações de Primeira Ordem: Nem tudo São Flores

**1.1.** A curva inicial plana  $\gamma(t) = (3t, -4t)$  é uma característica plana, mas a curva em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma(t) = (3t, -4t, t^3 + 1)$  não é uma característica, logo o problema não tem solução.

**1.3.** As características planas são as retas  $5y - 4x = c$  onde  $c$  é uma constante arbitrária. A curva plana inicial  $\gamma(t) = (5t, e^{4t} - 1)$  é tangente, em  $t = 0$ , à característica plana  $5y - 4x = 0$ , intercepta duas vezes as características planas com  $c > 0$  e não intercepta as características planas com  $c < 0$ . No caso em que  $c > 0$ ,  $\gamma$  intercepta a característica plana  $5y - 4x = c$  nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  onde  $x_1 > 0, x_2 < 0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem  $4x = 5e^{4x/5} - 5(c+1)$ ; como  $u$  é constante ao longo das características, é preciso que  $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$ , o que, de fato, acontece, pois  $u(x_1, y_1) = -c - 1 = u(x_2, y_2)$ . Na região  $5y - 4x \geq 0$ , existe uma única solução  $u(x, y) = y - \frac{4}{5}x - 1$ ; na região  $5y - 4x < 0$ , existe uma infinidade de soluções. Como  $u$  é constante ao longo das características planas, todas as soluções são da forma  $u(x, y) = f(5y - 4x)$  onde  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é tal que  $f(t) = t/5 - 1$  se  $t \geq 0$ . Observe que não existe região aberta  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  contendo a curva  $\gamma$  onde o problema tenha solução única, pois, em qualquer vizinhança da origem, existe um ponto contido na região  $5y - 4x < 0$ , onde a solução não está determinada.

**1.5.** As características planas são as retas  $y + ax = c$ . Se  $c > a^2 + a$ , a curva inicial plana  $\gamma(t) = (2t + 1, t^2 - 2at + a^2)$  intersecta a característica plana  $y + ax = c$  em dois pontos,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , logo  $f$  tem que satisfazer alguma condição para que exista solução na região  $y + ax > a^2 + a$ . Se  $c < a^2 + a$ ,  $\gamma$  não intersecta a característica plana  $y + ax = c$  e portanto a solução não está determinada. Para achar a condição que  $f$  tem que satisfazer, basta integrar ao longo das características para obter

$$u(x, y) = \frac{-ab}{a^2b^2 + m^2} e^{mx} \operatorname{sen}(by) + \frac{m}{a^2b^2 + m^2} e^{mx} \operatorname{cos}(by) + F(y + ax). \quad (*)$$

O problema tem solução se e somente se a função  $f$  satisfaz, para  $t \geq 0$

$$f(t) - f(-t) = \frac{e^m}{a^2 b^2 + m^2} \{ -ab[e^{2mt} \sin(b(t-a^2)) - e^{-2mt} \sin(b(t+a^2))] + \\ + m[e^{2mt} \cos(b(t-a^2)) - e^{2mt} \cos(b(t+a^2))] \};$$

nesse caso todas as soluções são da forma (\*), onde  $F \in C^1(\mathbb{R})$  é tal que

$$F(t) = f\left(\sqrt{t-(a^2+a)}\right) + \frac{ab}{a^2 b^2 + m^2} \exp\left(m + 2m\sqrt{t-(a^2+a)}\right) \sin\left(b(t-a) - 2ab\sqrt{t-(a^2+a)}\right) - \frac{m}{a^2 b^2 + m^2} \exp\left(m + 2m\sqrt{t-(a^2+a)}\right) \cos\left(b(t-a) - 2ab\sqrt{t-(a^2+a)}\right),$$

se  $t \geq a^2 + a$ .

**1.7.** Esse problema tem uma única solução em alguma região aberta  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  contendo a curva inicial plana  $\gamma(t) = (t, -t)$ ,  $t > 0$ , pois a curva  $\gamma$  nunca é paralela às características planas. A solução é  $u(x, y) = (x^2+y^2)/2 + (1-2xy/(y-x))(2xy/(y-x))$ ,  $x > 0$ ,  $y < 0$ .

**1.9.** O problema terá solução se e somente se  $f$  for uma função par, ou seja,  $f(x) = f(-x)$  qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ ; neste caso, todas as soluções serão da forma  $u(x, y) = -x^4/8 + 3x^2y/2 + F(y-x^2/2)$ , onde  $F \in C^1(\mathbb{R})$  satisfaz  $F(t) = f(\sqrt{-2t}) + t^2/2$  para  $t \leq 0$ .

**1.11.** A curva inicial  $\Gamma(t) = (t, -t, 1)$ ,  $t < 0$ , é uma característica, logo o problema tem uma infinidade de soluções. As soluções são da forma  $u(x, y) = F(\theta(x, y)) + x + y - (x+y)/\sqrt{x^2+y^2}$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , onde  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$  se  $x > 0$ ,  $\theta = \arctan(y/x) + \pi$  se  $x < 0$  e  $y > 0$ ,  $\theta = \arctan(y/x) - \pi$  se  $x < 0$  e  $y \leq 0$ ,  $\theta = \pi/2$  se  $x = 0$  e  $y > 0$ ,  $\theta = -\pi/2$  se  $x = 0$  e  $y < 0$ ,  $F \in C^1([-\pi, \pi])$ ,  $F(-\pi) = F(\pi)$ ,  $F'(-\pi) = F'(\pi)$  e  $F(3\pi/4) = 1$ .

**2.1.** (i) Reta  $3y + 4x = 25$ ; (iii)  $y = x$ ,  $x > 0$ ; (v) o ramo da hipérbole  $y = \frac{2}{x}$   $x > 0$ .

**2.2.** (i) Retas  $x = ct + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ; (iii) retas  $x = t + c$ ,  $c < 0$ , e  $x = c$ ,  $c > 0$ .

**2.3.** A única solução clássica na região  $\mathbb{R} \times [0, 1)$  é  $u(x, t) = -x/(1-t)$ . Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \lim_{(x, t) \rightarrow (x_0, 1)} u(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_0 < 0 \\ -\infty & \text{se } x_0 > 0 \\ \text{não existe} & \text{se } x_0 = 0 \end{cases}$$

pois  $u$  é constante e igual a  $c$  ao longo da característica plana  $x = -ct + c$ . Note que todas as características planas passam pelo ponto  $(0, 1)$ .

**2.4.** A única solução clássica na região  $\mathbb{R} \times [0, 1)$  é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1, t \leq 0, \\ (1+x)/(1+t) & \text{se } -1 < x \leq t, t \geq 0, \\ (1-x)/(1-t) & \text{se } 0 \leq t < x < 1. \end{cases}$$

Além disso, não existe o limite para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1)$ ,  $(x, t) \rightarrow (1, 1)$  pois  $u = u_0(x_0) = -x_0 + 1$  ao longo da reta  $x = (-x_0 + 1)t + x_0$ ,  $0 \leq x_0 \leq 1$ .

**3.1.**  $u(x, t) = 1$  se  $x < t/3$ ,  $u(x, t) = 0$  se  $x > t/3$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

**3.3.**  $u(x, t) = 1$  se  $x < t/4$ ,  $u(x, t) = 0$  se  $x > t/4$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

## 4 Equações Semi-Lineares de Segunda Ordem

**1.1.** A equação é hiperbólica no plano inteiro e, portanto, tem duas famílias de curvas características: as retas  $2y - 5x = c_1$  e as retas  $2y - x = c_2$ ,  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

**1.3.** A equação é elítica no plano inteiro, logo não tem curvas características.

**1.5.** A equação é parabólica no plano inteiro e, portanto, tem uma família de curvas características:  $\arctan x + \arctan y = c$ ,  $c \in (-\pi, \pi)$  uma constante. Equivalentemente, as curvas características são da forma  $y = (k - x)/(1 + kx)$ ,  $k$  uma constante arbitrária e  $y = 1/x$  (que corresponde a  $k \rightarrow \pm\infty$ , ou seja,  $c = \pm\pi/2$ ).

**2.1.** (i)  $v_{\xi\eta} = u_\xi + v_\eta/4$ ; (ii)  $v_{\eta\eta} = v/16 + v_\xi/8 - v_\eta/8$ ; (iii)  $v_{\xi\eta} = (1/2)[\tan((\eta + \xi)/2) + \tan((\eta - \xi)/2)]v_\xi + (1/2)[\tan((\eta + \xi)/2) - \tan((\eta - \xi)/2)]v_\eta$ ,  $\xi, \eta \in (-\pi, \pi)$ ; (iv)  $v_{\eta\eta} = (1/2)[\tan((\xi + \eta)/2) + \tan((\xi - \eta)/2)]v_\xi + (1/2)[\tan((\xi + \eta)/2) - \tan((\xi - \eta)/2)]v_\eta + \tan((\xi - \eta)/2)v^2$ ,  $\xi, \eta \in (-\pi, \pi)$ .

**2.3.** (i) Fazendo a mudança de variável  $\xi = 3x$ ,  $\eta = -3x + 2y$ , obtemos  $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \xi(\xi + \eta)v/108$ ; (ii) fazendo a mudança de variável  $\xi = y$ ,  $\eta = x + x^3/3$ , obtemos  $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = -2f(\eta)v_\eta/(1 + f(\eta)^2)^2$ , onde  $f(\eta)$  está determinada implicitamente por  $\eta = f(\eta) + f(\eta)^3/3$ .

## 5 A Equação de Onda

**1.1.**  $u(x, t) = 1 + \varphi(x + ct) - \varphi(x - ct)$ , onde  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ .

**1.3.** Se  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  for solução da equação de onda, então existirão  $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$  tal que  $u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(t - ct)$ ; impondo as condições iniciais vemos que existe alguma constante  $k$  tal que  $\varphi(x) = (1 + k)/2$  e  $\psi(x) = (1 - k)/2$ , logo  $u(x, t) = 1$  quaisquer que sejam  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ . Como a função constante igual a 1 é de fato solução do problema, essa é a única solução.

**1.5.** (i) As características passando por um dos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$  são as retas  $x \pm t = \pm 1$ . Tomando  $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \pm t = \pm 1\}$ , procuramos  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$  da forma  $u(x, t) = \varphi(x + t) + \psi(x - t)$ . É claro que  $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R} - \{-1, 1\})$ . Impondo as condições de contorno, obtemos  $\varphi(x) = (1 + k_1)/2$  e  $\psi(x) = (1 - k_1)/2$  se  $x \in (-1, 1)$ ,  $\varphi(x) = k_2/2$  e  $\psi(x) = -k_2/2$  se  $x \notin [-1, 1]$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes arbitrárias. Tomando  $k = (1 + k_1 - k_2)/2$  vemos que

$$u_k(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x + t| > 1 \text{ e } |x - t| > 1, \\ k & \text{se } |x + t| < 1 \text{ e } |x - t| > 1, \\ 1 - k & \text{se } |x + t| > 1 \text{ e } |x - t| < 1, \\ 1 & \text{se } |x + t| < 1 \text{ e } |x - t| < 1, \end{cases}$$

está em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$  e é solução, logo existem uma infinidade de soluções (pois  $k$  é uma constante arbitrária).

(ii) A imagem de  $u_k$  é  $\{0, k, 1-k, 1\}$ , logo a imagem é um conjunto de três elementos se e somente se  $k = 1 - k$ , ou seja,  $k = 1/2$ .

**1.7.** Suponha que  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  é solução: como  $u$  é de classe  $C^2$ ,  $u$  é da forma  $u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$  para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  com  $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ . Impondo as condições iniciais, obtemos  $\varphi(x) = (f(x) + k)/2$  e  $\psi(x) = (f(x) - k)/2$ , onde  $k$  é uma constante arbitrária, e, portanto,  $u(x, t) = (f(x + ct) + f(x - ct))/2$ . Como tal  $u$  é de fato solução do problema, essa é a única solução. No caso em que  $f \in C^1(\mathbb{R}) - C^2(\mathbb{R})$ , não é possível achar solução em  $C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ , pois tal solução seria obrigatoriamente da forma  $u(x, t) = (f(x + ct) + f(x - ct))/2$ , que não é de classe  $C^2$ ; as singularidades de  $f$  são propagadas ao longo das características.

**2.1.**  $\Gamma = \{(x, t) : x \pm ct = 0\}$ . Derivando diretamente a equação (2.5), é fácil ver que  $u$  satisfaz a equação de onda em  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  e que  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ .

**2.3.** (Para entender melhor a resolução desse problema, o leitor deve fazer um desenho no plano  $xt$ .)  $\Gamma = \{(x, t) : x \pm t = \pm 1\}$  divide o plano em nove regiões conexas:  $\Omega_1 = \{x + t < -1, x - t < -1\}$ ,  $\Omega_2 = \{-1 < x + t < 1, x - t < -1\}$ ,  $\Omega_3 = \{x + t > 1, x - t < -1\}$ ,  $\Omega_4 = \{x + t > 1, -1 < x - t < 1\}$ ,  $\Omega_5 = \{x + t > 1, x - t > 1\}$ ,  $\Omega_6 = \{-1 < x + t < 1, x - t > 1\}$ ,  $\Omega_7 = \{x + t < -1, x - t > 1\}$ ,  $\Omega_8 = \{x + t < -1, -1 < x - t < 1\}$ ,  $\Omega_9 = \{-1 < x + t < 1, -1 < x - t < 1\}$ . Como  $u \in C^2(\Omega_i)$ , existem funções  $\varphi_i, \psi_i$  de classe  $C^2$  tais que  $u(x, t) = \varphi_i(x + t) + \psi_i(x - t)$  se  $(x, t) \in \Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$ . Como  $\{(x, t) : t = 0\}$  intersecta apenas as regiões  $\Omega_1, \Omega_9$  e  $\Omega_5$  se supusermos que  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$ , as condições iniciais determinarão  $u$  apenas nessas três regiões. De fato, quaisquer que sejam  $\varphi_i, \psi_i$  de classe  $C^2$ ,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, t) \in \Omega_1 \cup \Omega_5, \\ t & \text{se } (x, t) \in \Omega_9, \\ \varphi_i(x + t) + \psi_i(x - t) & \text{se } (x, t) \in \Omega_i, 2 \leq i \leq 8, i \neq 5, \end{cases}$$

é uma solução em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$ . Partindo da solução geral (1.5), é fácil ver que todas as soluções em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$  são dessa forma. Note que  $u$  não está definida em  $\Gamma$ .

Vamos supor que  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$  é solução: como  $u = 0$  em  $\Omega_1$ , por continuidade  $u = 0$  ao longo da semi-reta  $x + t = -1, t \geq 0$ ; além disso, como  $u = t$  em  $\Omega_9$ ,  $u = t$  ao longo do segmento  $x - t = -1, 0 \leq t \leq 1$ ; usando o fato de que  $u(x, t) = \varphi_2(x + t) + \psi_2(x - t)$  para  $(x, t) \in \Omega_2$ , obtemos  $0 = \varphi_2(-1) + \psi_2(-1 - 2t)$  se  $t \geq 0$  e  $t = \varphi_2(2t - 1) + \psi_2(-1)$  se  $0 \leq t \leq 1$ ; logo  $\varphi_2(s) = (s + 1)/2 + \varphi_2(-1)$  se  $-1 \leq s \leq 1$  e  $\psi_2(s) = -\varphi_2(-1)$  se  $s \leq -1$ , de modo que  $u(x, t) = (x + t + 1)/2$  em  $\Omega_2$ . Procedendo de maneira análoga obtemos a solução em  $\Omega_8$ ; além disso, a solução em  $\Omega_9 \cup \Omega_5$  determina a solução em  $\Omega_4 \cup \Omega_6$ , a solução em  $\Omega_2 \cup \Omega_4$  determina a solução em  $\Omega_9 \cup \Omega_5$  determina a solução em  $\Omega_4 \cup \Omega_6$ , a solução em  $\Omega_6 \cup \Omega_8$  determina a solução em  $\Omega_7$ . Portanto, a solução é única em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$  e coincide com a definida por (2.5).

**2.5.** (i)  $u(x, t) = (\cos(x - t) - \cos(x + t))/2$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

**2.7.** (i) Usando a mesma notação que no Exercício 2.3, todas as soluções em  $C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma)$  são da forma (2.5) em  $\Omega_9$ , se anulam em  $\Omega_1 \cup \Omega_5$  e são da forma  $u(x, t) = \varphi_i(x + t) + \psi_i(x - t)$  em  $\Omega_i$ ,  $2 \leq i \leq 8, i \neq 5$ , onde  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  são funções arbitrárias de classe  $C^2$ .

(ii) Procedendo como no Exercício 2.3, se  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 - \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$  for solução, então  $u$  será da forma (2.5); isso prova que a solução é única.

**3.1.** As funções (i), (ii), (iii) são ímpares, (iv) e (vi) são pares e (v) não é par nem ímpar.

**3.3.** (i) É periódica com período fundamental  $2l$ ; (ii) é periódica com período fundamental  $2\pi/5$ ; (iii) não é periódica; (iv) não é periódica; (v) é periódica com período fundamental 2; (vi) é periódica com período fundamental 4.

**3.5.**  $F(x)$  é periódica de período  $T \Leftrightarrow F(x+T) = F(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^{x+T} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t) dt = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0.$

**3.7.** Apenas a função  $f(x) = x(x-1)$ ,  $x \in [0, 1]$ , tem tal extensão, pois  $f(0) = f(1) = 0$ ; a extensão é dada por  $F(x) = (x-2k)(x-2k-1)$  se  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $2k \leq x \leq 2k+1$  e  $F(x) = -(-x+2k)(-x+2k-1)$  se  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $2k-1 < x < 2k$ ;  $F \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ .

(ii) Resolveremos esse item apenas para a função  $f(x) = x$ ; os outros itens são análogos. Para  $f(x) = x$ , basta redefinir  $f$  em  $x = 1$ ; a função  $f_1(x) = x$  se  $x \in [0, 1]$ ,  $f_1(x) = 0$  se  $x = 1$  tem como extensão ímpar e periódica de período 2 a função  $F_1(x) = x - 2k$  se  $x \in (2k-1, 2k+1)$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $F_1(x) = 0$  se  $x \in \mathbb{Z}$ . A extensão  $F_1$  não é contínua em  $I = \{2k+1: k \in \mathbb{Z}\}$  e está em  $C^\infty(\mathbb{R} - I)$ .

**4.1.**  $u(x, t) = \sin x \sin t$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \geq 0$ .

**4.3.**  $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t) + H(x, t)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ , onde  $H(x, t) = -[(x-t-2k)^3 - (x+t-2k)^3]/6 + [(x-t-2k)^2 - (x+t-2k)^2]/4$  se  $2k \leq x-t \leq x+t \leq 2k+1$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $H(x, t) = -[(x-t-2k)^3 + (x+t-2j)^3]/6 + [(x-t-2k)^2 - (x+t-2j)^2]/4$ , se  $2k \leq x-t \leq 2k+1 \leq x+t \leq 2j-1 \leq x+t \leq 2j$ ;  $H(x, t) = -[(x-t-2k)^3 - (x+t-2j)^3]/6 + [(x-t-2k)^2 - (x+t-2j)^2]/4$  se  $2k \leq x-t \leq 2k+1 < 2j \leq x+t \leq 2j+1$ ;  $H(x, t) = [(x-t-2k)^3 - (x+t-2k)^3]/6 - [(x-t-2k)^2 - (x+t-2k)^2]/4$ , se  $2k-1 \leq x-t \leq x+t \leq 2k$ ;  $H(x, t) = [(x-t-2k)^3 + (x+t-2j)^3]/6 + [(x-t-2k)^2 - (x+t-2j)^2]/4$  se  $2k-1 \leq x-t \leq 2k \leq 2j \leq x+t \leq 2j+1$ ;  $H(x, t) = [(x-t-2k)^3 - (x+t-2j)^3]/6 + [(x-t-2k)^2 - (x+t-2j)^2]/4$ , se  $2k-1 \leq x-t \leq 2k < 2j-1 \leq x+t \leq 2j$ .

**4.5.**  $u(x, t) = \sin x \cos t + H(x, t)/4$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \geq 0$ , onde  $H(x, t) = \cos(2x)\sin(2t) - 2t$ , se  $2k\pi \leq x-t \leq x+t \leq (2k+1)\pi$ ;  $H(x, t) = -\sin(2x)\cos(2t) + 2x - 2(k+j)\pi$ , se  $2k\pi \leq x-t \leq (2k+1)\pi \leq (2j-1)\pi \leq x+t \leq 2j\pi$ ;  $H(x, t) = \cos(2x)\sin(2t) - 2t + 2(j-k)\pi$ , se  $2k\pi \leq x-t \leq (2k+1)\pi < 2j\pi \leq x+t \leq (2j+1)\pi$ ;  $H(x, t) = -\cos(2x)\sin(2t) + 2t$ , se  $(2k-1)\pi \leq x-t \leq x+t \leq 2k\pi$ ;  $H(x, t) = \sin(2x)\cos(2t) - 2x + 2(k+j)\pi$ , se  $(2k-1)\pi \leq x-t \leq 2k\pi \leq 2j\pi \leq x+t \leq (2j+1)\pi$ ;  $H(x, t) = -\cos(2x)\sin(2t) + 2t - 2(j-k)\pi$ , se  $(2k-1)\pi \leq x-t \leq 2k\pi < (2j-1)\pi \leq x+t \leq 2j\pi$ .

**4.7.** Como  $g \notin C^1([0, 1])$ , a solução obtida pela fórmula (4.6) não é de classe  $C^2$ , pois as derivadas de segunda ordem têm descontinuidades no conjunto  $\Gamma = \{(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty) : \exists k \in \mathbb{Z}. q. x \pm 2t = (2k+1)/2\}$ . O problema tem uma infinidade de soluções em  $C^2([0, 1] \times [0, +\infty) - \Gamma)$ , mas a solução é única em  $C^2([0, 1] \times [0, +\infty) - \Gamma) \cap C([0, 1] \times [0, +\infty))$  e coincide com a dada pela fórmula (4.6).

**5.1.** Fazendo a mudança de variável  $\xi = x+t$ ,  $\eta = x-t$ ,  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ , a equação diferencial fica  $(v_\eta + (\alpha/2)v)_\xi = 0$ , cuja solução geral é dada por  $v(\xi, \eta) = F(\eta) + G(\xi) \exp(-\alpha\eta/2)$ ,  $F$  e  $G$  arbitrárias. Portanto, a solução geral da EDP inicial

é  $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t) \exp(-\alpha(x - t)/2)$ . Impondo as condições iniciais vemos que, se  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  for solução, então

$$u(x, t) = \frac{[f(x - t) + f(x + t)e^{\alpha t}]}{2} + e^{-\alpha(x-t)/2} \int_{x-t}^{x+t} \left[ g(r) - \frac{\alpha}{2} f(r) \right] e^{\alpha r/2} dr;$$

como a expressão acima define, de fato, uma solução em  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , esta é a única solução neste espaço.

**5.3.** (i) Fazendo a mudança de variável  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$ ,  $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ , obtemos  $u_x = v_\xi + v_\eta$ ,  $u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$ ,  $u_t = cv_\xi - cv_\eta$ ,  $u_{tt} = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}$ , logo a equação diferencial  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t)$  fica  $-4c^2 v_{\xi\eta} = h((\xi + \eta)/2, (\xi - \eta)/(2c))$ . Se  $t = 0$ ,  $\xi = \eta = x$ , de modo que as condições iniciais satisfeitas por  $v$  são  $v(\xi, \xi) = f(\xi)$  e  $cv_\eta(\xi, \xi) - cv_\xi(\xi, \xi) = g(\xi)$ . Note que a mudança de variável leva o semi-plano  $t > 0$  no semi-plano  $\eta < \xi$ .

(ii) Vamos mostrar primeiro que  $v$  é solução do problema e está em  $C^2(H) \cap C(\overline{H})$ . Reescrevendo a integral dupla como integral iterada, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{D(\xi, \eta)} h\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right) drds &= \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^r h\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right) dsdr \\ &= \int_{\eta}^{\xi} \int_s^{\xi} h\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right) drds. \end{aligned}$$

Usando então a primeira expressão para derivar em relação a  $\xi$  e a segunda para derivar em relação a  $\eta$  obtemos, pelo teorema fundamental do cálculo, se  $(\xi, \eta) \in H$ ,

$$\begin{aligned} v_\xi(\xi, \eta) &= \frac{f'(\xi)}{2} + \frac{1}{2c} g(\xi) + \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} h\left(\frac{\xi+s}{2}, \frac{\xi-s}{2c}\right) ds, \\ v_\eta(\xi, \eta) &= \frac{f'(\eta)}{2} - \frac{1}{2c} g(\eta) - \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} h\left(\frac{r+\eta}{2}, \frac{r-\eta}{2c}\right) dr, \\ v_{\xi\eta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4c^2} h\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right). \end{aligned}$$

Como  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$  e  $h \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  é claro que  $v \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$  (de fato,  $v \in C^2(\overline{H})$ !) e, das expressões acima, um cálculo imediato mostra que  $v$  é solução.

Suponha que  $w \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$  é outra solução e seja  $z = v - w$ . Então  $z \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$  é solução de

$$\begin{aligned} z_{\xi\eta} &= 0, \quad (\xi, \eta) \in H, \\ z(\xi, \xi) &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ z_\xi(\xi, \xi) - z_\eta(\xi, \xi) &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como a solução geral da EDP acima é  $z = F(\xi) + G(\eta)$  e  $z \in C^2(H)$ , segue que  $F, G \in C^2(\mathbb{R})$  e, em particular,  $z$  é a restrição a  $\overline{H}$  de uma função em  $C^2(\mathbb{R}^2)$ .

Impondo as condições iniciais, obtemos

$$\begin{cases} F(\xi) = -G(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R} \\ F'(\xi) = G'(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow F(\xi) = -G(\xi) = \text{constante},$$

logo  $w \equiv v$  e a solução é única em  $C^2(H) \cap C(\overline{H})$ .

(iii) Observe que a mudança de variável  $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$  é uma bijeção entre  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  (respectivamente,  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ ) e  $H$  (respectivamente  $\overline{H}$ ); além disso, esta mudança é infinitamente diferenciável, logo, se  $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ ,  $v \in C^2(H) \cap C(\overline{H}) \Leftrightarrow u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ . Portanto,  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  é solução do problema original  $\Leftrightarrow v \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$  é solução do problema em (i). Então a única solução  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  do problema original é dada por

$$u(x, t) = v(x + ct, x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

onde  $v(\xi, \eta)$  é como em (ii). Para obter a expressão em (iii), basta fazer uma mudança de variável na integral dupla: fazendo  $\rho = (r + s)/2$ ,  $\sigma = (r - s)/(2c)$ , obtemos  $r = \rho + c\sigma$ ,  $s = \rho - c\sigma$  e

$$\begin{aligned} \iint_{D(\xi, \eta)} h\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right) drds &= \iint_{\tilde{D}(\xi, \eta)} h(\rho, \sigma) \left| \frac{\partial(r, s)}{\partial(\rho, \sigma)} \right| d\sigma \\ &= 2c \iint_{\tilde{D}(\xi, \eta)} h(\rho, \sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $\partial(r, s)/\partial(\rho, \sigma)$  é o jacobiano e  $\tilde{D}(\xi, \eta)$  é a imagem de  $D(\xi, \eta)$ , ou seja,  $\tilde{D}(\xi, \eta) = \{(\rho, \sigma) : \sigma \geq 0, \eta + c\sigma \geq \rho \geq \xi - c\sigma\}$ . Fazendo  $\xi = x + ct$  e  $\eta = x - ct$ ,  $\tilde{D}(x + ct, x - ct) = \Omega$  e a fórmula para  $u$  segue facilmente.

## 6 Separação de Variáveis e Séries de Fourier

**1.1.** Fazendo  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$  nos quatro primeiros itens, vemos que o método funciona e obtemos os pares de EDOs: (i)  $x\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$ ,  $\psi'(t) = -\lambda\psi(t)$ ; (ii)  $\varphi''(x) = \lambda x\varphi(x)$ ,  $\psi''(t) = -\lambda t\psi(t)$ ; (iii)  $\varphi''(x) - \lambda\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) = 0$ ,  $\psi'(t) + \lambda\psi(t) = 0$ ; (iv)  $(\rho(x)\varphi'(x))' - \lambda r(x)\varphi(x) = 0$ ,  $\psi''(t) = \lambda\psi(t)$ . O método não funciona para a equação (v) pois, se  $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ , a EDP fica

$$\varphi''(x)\psi(y) + x\varphi(x)\psi''(y) + y\varphi(x)\psi''(y) = 0$$

e não dá para separar as variáveis desta equação.

**1.3.** (i) Fazendo  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $v(r, \theta, t) = u(x, y, t)$  obtemos  $v_t = u_t$ ,  $v_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$ ,  $v_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$  e  $v_{\theta\theta} = u_{xx}r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy}r^2 \sin \theta \cos \theta + u_{yy}r^2 \cos^2 \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta$ ; portanto,  $v_{rr} + r^{-1}v_r + r^{-2}v_{\theta\theta} = \Delta u$  e  $v$  satisfaz  $v_t = \alpha^2(v_{rr} + r^{-1}v_r + r^{-2}v_{\theta\theta})$ . (ii) Substituindo  $v(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$  na EDP e dividindo por  $\alpha^2 R(r)\Theta(\theta)T(t)$ , podemos separar a variável temporal  $t$  das variáveis espaciais  $r$ ,  $\theta$ ; separando depois as variáveis  $r$  e  $\theta$ , obtemos as equações  $T'(t) = \alpha^2 \lambda T(t)$ ,  $\Theta''(\theta) = \eta \Theta(\theta)$  e  $r^2 R''(r) + r R'(r) - (r^2 \lambda + \eta)R = 0$ , onde  $\lambda$  e  $\eta$  são constantes.

**1.5.** (i)  $X'' + \lambda X = 0$ ,  $\rho T'' + \lambda ET = 0$ .

(ii) Como procuramos soluções que não são identicamente nulas,  $u(0, t) = 0$ ,  $\forall t > 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \forall t > 0 \Rightarrow X(0) = 0$ . Usando a EDO satisfeita por  $T$ ,  $EAu_x(l, t) + mu_{tt}(l, t) = 0 \forall t > 0 \Rightarrow EAX'(l)T(t) + mX(l)T''(t) = 0 \forall t > 0 \Rightarrow ET(t)\rho AX'(l) + \rho T''(t)mX(l) = 0 \forall t > 0 \Rightarrow ET(t)(\rho AX'(l) - \lambda mX(l)) = 0 \forall t > 0 \Rightarrow \rho AX'(l) - \lambda mX(l) = 0 \Rightarrow X'(l) - \gamma\lambda lX(l) = 0$ .

(iii) Em primeiro lugar, os autovalores são estritamente positivos, pois, usando as condições de contorno,  $\lambda(X|X) = (-X''|X) = -\gamma\lambda l|X(l)|^2 + (X'|X')$  (onde o produto interno  $(\cdot|\cdot)$  é o definido por (1.10)), logo  $\lambda = (X'|X')[((X|X) + \gamma l|X(l)|^2)^{-1}] > 0$ . Portanto, a solução geral da EDO é  $X(x) = a \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + b \cos(\sqrt{\lambda}x)$ ; como  $X(0) = 0$ ,  $b = 0$  e as auto-funções são da forma  $X_\lambda(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$ . Impondo a condição de contorno em  $x = l$ , os auto-valores satisfazem a equação  $\cot(\sqrt{\lambda}l) = \gamma\sqrt{\lambda}l$ . Geometricamente é fácil ver que a reta  $y = \gamma x$  intercepta o gráfico  $y = \cot x$  em uma infinidade de pontos: para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe um único  $x_n \in ((n-1)\pi, n\pi)$  tal que  $\gamma x_n = \cot x_n$ . Portanto os auto-valores são da forma  $\lambda_n = (x_n/l)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e as auto-funções associadas são  $X_n(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x)$ .

**2.1.** (i)  $2l\pi^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-1} \operatorname{sen}(n\pi x/l)$ ; (ii)  $2l\pi^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} \operatorname{sen}(n\pi x/l)$ ;

(iii)  $1/2 - \cos(2x)/2$ ; (iv)  $l - l^2/2 + 4l^2\pi^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-2} \cos((2k+1)\pi x/l)$ ;

(v)  $1/2 + 2\pi^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-1} \cos((2k+1)x)$ ; (vi)  $1/3 + 4\pi^{-2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-2} \cos(n\pi x)$ ;

(vii)  $a/2 + 2a\pi^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-1} \operatorname{sen}((2k+1)\pi x/l)$ .

**2.3.** (i)  $\widehat{f}(0) = 0$ ,  $\widehat{f}(n) = -i(-1)^n l\pi^{-1} n^{-1}$  se  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ ; (ii)  $\widehat{f}(0) = 0$ ,  $\widehat{f}(n) = -il\pi^{-1} n^{-1}$  se  $n \neq 0$ ; (iii)  $\widehat{f}(0) = 1/2$ ,  $\widehat{f}(2) = \widehat{f}(-2) = -1/4$ ,  $\widehat{f}(n) = 0$  se  $n \neq 0, \pm 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; (iv)  $\widehat{f}(0) = l - l^2/2$ ,  $\widehat{f}(2k+1) = \widehat{f}(-2k-1) = 2l^2(2k+1)^{-2}$  se  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\widehat{f}(2k) = \widehat{f}(-2k) = 0$  se  $k \in \mathbb{N}$ ; (v)  $\widehat{f}(0) = 1/2$ ,  $\widehat{f}(2k+1) = \widehat{f}(-2k-1) = (-1)^k \pi^{-1} (2k+1)^{-1}$  se  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\widehat{f}(2k) = \widehat{f}(-2k) = 0$  se  $k \in \mathbb{N}$ ; (vi)  $\widehat{f}(0) = 1/3$ ,  $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n) = 2(-1)^n \pi^{-2} n^{-2}$  se  $n \in \mathbb{N}$ ; (vii)  $\widehat{f}(0) = a/2$ ,  $\widehat{f}(2k+1) = -ia\pi^{-1} (2k+1)^{-1} = -\widehat{f}(-2k-1)$  se  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\widehat{f}(2k) = \widehat{f}(-2k) = 0$  se  $k \in \mathbb{N}$ .

**3.1.** Basta aplicar a desigualdade de Bessel: (i)  $2l^2/3$ ; (ii)  $2l^2/3$ ; (iii)  $3/4$ ; (iv)  $2l^2/3$ ; (v)  $1$ ; (vi)  $2l^4/5$ ; (vii)  $a^2$ .

## 7 Convergência das Séries de Fourier

**1.1.**  $S[f] = l - l^2/2 + 4l^2\pi^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-2} \cos((2k+1)\pi x/l)$ ; como  $\sum (2k+1)^{-2} < +\infty$  e  $|\cos y| \leq 1$  qualquer que seja  $y \in \mathbb{R}$ , podemos aplicar o teste  $M$  de Weierstrass e a série converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .

**1.3.** Novamente basta usar o teste  $M$  de Weierstrass.

**2.1.** (i) A extensão periódica de período  $2l$  de  $f$ , que denotaremos também por  $f$ , está em  $SC_{\text{per}}(2l)$ , é diferenciável em  $(-l, l)$  e é contínua exceto nos pontos da forma

$(2k+1)l$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Estamos portanto nas condições do Teorema 2.1 e a série de Fourier de  $f$  converge para  $f(x)$  se  $x \neq (2k+1)l$  e converge para zero se  $x = (2k+1)l$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Fazendo  $x = l/2$  obtemos  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-1} = \pi/4$ .

(iii) A série de Fourier de  $f$  converge pontualmente para a função  $x \mapsto (f(x^+) + f(x^-))/2$  que não é contínua e uma série de funções contínuas convergindo uniformemente converge para uma função contínua, logo a série de Fourier de  $f$  não converge uniformemente.

**2.3.** Pelo Teorema 2.1, a série de Fourier de  $f$  converge para a extensão de período  $2\pi$  de  $f$  fora dos pontos da forma  $(2k+1)\pi/2$  com  $k \in \mathbb{Z}$ ; nesses pontos a série converge para  $1/2$ .

**2.5.** A série converge para  $f(x)$  se  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  e converge para  $3/2$  se  $x \in \mathbb{Z}$ .

**3.1.** (i)  $S[f] = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} \operatorname{sen}(nx)$  converge pontualmente para  $f(x)$  se  $x \neq 2k\pi$  e converge para zero se  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . A convergência não é uniforme.

(ii) Embora a série de Fourier de  $f$  não converja uniformemente, esperamos que a série  $\sum n^{-2} \cos(nx)$  esteja relacionada com a série de Fourier da integral de  $f$ . De fato, como a integral de  $f$  de 0 a  $2\pi$  é igual a zero, a função  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  é uma função periódica de período  $2\pi$  (pelo Exercício 3.5 do Capítulo 5) e sua série de Fourier é dada por  $S[f] = \pi^2/6 - \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \cos(nx)$ . Como  $F \in C(\mathbb{R})$  é diferenciável em  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  e  $F' \in SC_{\operatorname{per}}(2\pi)$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \cos(nx)$  converge uniformemente para  $\pi^2/6 - F(x)$  em  $\mathbb{R}$ .

(iii) Fazendo  $x = 0$  na série de Fourier de  $F$ , obtemos  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ .

(iv) Aplicando a identidade de Parseval para  $F$ , obtemos  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-4} = \pi^4/90$ .

**3.3.** (i)  $S[f] = 2/\pi - (4/\pi) \sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - 1)^{-1} \cos(2nt)$ . A série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ , pois  $f \in C_{\operatorname{per}}(\pi)$  e  $f' \in SC_{\operatorname{per}}(\pi)$ .

(ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - 1)^{-1} = 1/2$ .

(iii) Aplicando a Proposição 3.1 duas vezes, vemos que, se  $x(t)$  for de classe  $C^2$ , então  $\widehat{x''}(n) = -4n^2 \widehat{x}(n)$ . Portanto, se  $x$  for solução da EDO,  $\widehat{x}(n) = -(4n^2 - w^2) \widehat{f}(n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Logo  $x(t) = 2\pi^{-1}w^{-2} + 4\pi^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - w^2)^{-1} (4n^2 - 1)^{-1} \cos(2nt)$ .

Observe que essa série e as séries obtidas derivando até duas vezes convergem absolutamente pelo teste  $M$  de Weierstrass; podemos então derivar a série termo a termo provando facilmente que  $x(t)$  é, de fato, solução da EDO.

(iv) A solução geral da equação homogênea associada é  $x_h(t) = A \cos(wt) + B \operatorname{sen}(wt)$ , portanto a solução geral da EDO não homogênea é  $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ , onde  $x_p(t)$  é a solução particular encontrada em (iii). Impondo as condições iniciais obtemos  $x(t) = 2\pi^{-1}w^{-2}(1 - \cos(wt)) + 4\pi^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - w^2)^{-1} (4n^2 - 1)^{-1} [\cos(2nt) - \cos(wt)]$ .

**4.1.** (i) Se  $x = 2k\pi$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{inx} = 1$ , logo  $D_N(2k\pi) = 2N + 1$ . Se  $x$  não for da forma  $2k\pi$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $e^{ix} \neq 1$ , portanto  $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N (e^{inx})^n = (e^{-iNx} - e^{i(N+1)x})(1 - e^{ix})^{-1} = (-e^{-ix/2} e^{-iNx} + e^{ix/2} e^{i(N+1)x})(-e^{-ix/2}) + (e^{ix/2})^{-1} = \text{sen}((N+1/2)x)[\text{sen}(x/2)]^{-1}$ .

(ii) Basta usar a definição de  $D_N$  e integrar diretamente.

**4.3.** (i) Como  $K_0 \equiv 1$ , o resultado é válido nesse caso. Vamos supor então que  $N \geq 1$ . Se  $x = 2k\pi$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{inx} = 1$  e, usando a fórmula de definição de  $K_N$ , obtemos facilmente que  $K_N(2k\pi) = N + 1$ . Se  $x \neq 2k\pi$  para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\text{sen}(x/2) \neq 0$ ; usando a fórmula  $\text{sen}^2(x/2) = (1 - \cos x)/2 = 1/2 - e^{ix}/4 - e^{-ix}/4$ , a definição de  $K_N(x)$  e um pouco de álgebra, obtemos  $\text{sen}^2(x/2)K_N(x) = (N+1)^{-1}(1/2 - e^{i(N+1)x}/4 - e^{-i(N+1)x}/4) = (N+1)^{-1}\text{sen}^2((N+1)x/2)$ , o que prova (i). (ii) de (i),  $K_N(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $K_N$  é uma combinação linear das funções  $e^{inx}$  que são contínuas e periódicas de período  $2\pi$  é claro que  $K_N$  é também contínua e periódica de período  $2\pi$ .

(iii) Basta usar a definição de  $K_N$  e integrar diretamente.

(iv) Seja  $\delta \in (0, \pi)$ . Como  $K_N$  é periódica de período  $2\pi$ , usando (i) e a Proposição 3.3 do Capítulo 5, obtemos  $0 \leq \int_{-\pi}^{-\delta} K_N(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} K_N(x) dx = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_N(x) dx \leq (N+1)^{-1} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} (\text{sen}(x/2))^{-2} dx = 4(N+1)^{-1} \cot(\delta/2) \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow +\infty$ .

**4.4.** Seja  $\varepsilon > 0$ . Use a continuidade uniforme de  $f$  para obter  $\delta > 0$  com  $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ . Mostre que existe  $M > 0$  com  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e use os resultados do Exercício 4.3 para obter  $N$  tal que  $n \geq N \Rightarrow \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_n(t) dt < \varepsilon/2$ .

Com isso,  $n \geq N \Rightarrow |(f * K_n)(x) - f(x)| < \varepsilon$  qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ .

**5.1.** Fazendo  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$  no problema de contorno (sem a condição inicial), obtemos  $\psi'(t) = -\lambda\psi(t)/4$ ,  $\psi''(t) + \lambda\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0 = \varphi(2)$ . Resolvendo o problema de auto-valores, temos que  $\lambda = n^2\pi^2/4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e obtemos as soluções  $u_n(x, t) = \text{sen}(n\pi x/2)\exp(-n^2\pi^2 t/16)$ . Impondo a condição inicial,  $u(x, t) = 2\text{sen}(\pi x/2)\exp(-\pi^2 t/16) - \text{sen}(\pi x)\exp(-\pi^2 t/4) + 4\text{sen}(2\pi x)\exp(-\pi^2 t)$ .

**5.3.** (i) Fazendo  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ , o problema de contorno fica  $\psi''(t) + \lambda c^2\psi(t) = 0$ ,  $\psi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0 = \varphi(l)$  e as soluções são da forma  $u_n(x, t) = \text{sen}(n\pi x/l)[A_n \cos(n\pi ct/l) + B_n \text{sen}(n\pi ct/l)]$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

(ii)  $u_t(x, 0) = 0 \Rightarrow B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}(n\pi x/l) \cos(n\pi ct/l)$ ;  
 $u(x, 0) = f(x) \Rightarrow b_n = (2/l) \int_0^l f(x) \text{sen}(n\pi x/l) dx$ .

(iii) Podemos derivar a série duas vezes termo a termo se  $\Sigma(n^2\pi^2 b_n/l^2)$  convergir: este é o caso se a série de Fourier de  $f''$  convergir uniformemente. Para isso, precisamos que  $f \in C^2([0, l])$  com  $f(0) = 0 = f(l) = f''(0) = f''(l)$  (pois a extensão ímpar de período  $2l$  tem que ser de classe  $C^2$ ) e que  $f''$  seja diferenciável em  $(0, l)$  a menos de um número finito de pontos com  $f'''$  seccionalmente contínua.

(iv) Usando as fórmulas para o seno da soma e diferença de dois ângulos, é fácil ver que  $\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\text{sen } a \cos b$ , portanto  $\text{sen}(n\pi x/l) \cos(n\pi ct/l) =$

$(1/2)[\sin(n\pi(x+ct)/l) + \sin(n\pi(x-ct)/l)]$ , logo  $u(x,t) = (1/2)[\sum_{n=1}^{+\infty} b_n [\sin(n\pi(x+ct)/l) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi(x-ct)/l)] = (1/2)[F(x+ct) + F(x-ct)]$ , onde  $F$  é a extensão ímpar periódica de período  $2l$  de  $f$ . Como vimos no Capítulo 5, para que a solução seja de classe  $C^2$  basta que  $f \in C^2([0,l])$  com  $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0$ .

**5.5.** (i)  $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \Rightarrow T'(t)/(\alpha^2 T(t)) = X''(x)/X(x) = -\lambda \Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0$ . Como procuramos soluções não triviais,  $u(0,t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0 \Rightarrow X(0) = 0$  e  $u_x(l,t) + \gamma u(l,t) = 0$   $\forall t \geq 0 \Rightarrow X'(l)T(t) + \gamma X(l)T(t) = 0$   $\forall t \geq 0 \Rightarrow X'(l) + \gamma X(l) = 0$ .

(ii) Usando o produto interno em  $[0,l]$  e integrando por partes,  $\lambda(X|X) = (-X''|X) = \gamma|X(l)|^2 + (X'|X') > 0$ , logo  $\lambda > 0$  e a solução geral da equação  $X'' + \lambda X = 0$  é  $X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$ . Impondo as condições de contorno obtemos  $a = 0$  e  $\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + \gamma \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ .

(iii) Graficamente (desenhe!), é fácil ver que, para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$ , existe um único  $x_n \in ((2n+1)\pi/2, (n+1)\pi)$  que está na interseção do gráfico das funções  $y = \tan x$  e  $y = -x/(\gamma l)$ ; além disso, o conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$  é exatamente o conjunto dos pontos de interseção com  $x > 0$ , logo os auto-valores são  $\lambda_n = (x_n/l)^2$  e  $\lambda_n \in (\sqrt{(2n+1)\pi/(2l)}, \sqrt{(n+1)\pi/l})$  e, portanto,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ .

(iv)  $u_n(x,t) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \exp(-\lambda_n \alpha^2 t)$ .

(v)  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \exp(-\lambda_n \alpha^2 t)$ .

## 8 A Equação de Laplace

**1.1.**  $u(x,t) = [\operatorname{senh}(\pi-x)\operatorname{sen} y + \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \operatorname{senh}(\pi-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y]/\operatorname{senh} \pi$ .

**1.3.** (i)  $u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}(k\pi x/a) \exp(-k\pi y/a)$ , onde os  $b_k$ 's são os coeficientes de Fourier (em senos) de  $f$ ; (ii)  $f$  diferenciável a menos de um número finito de pontos em  $(0,a)$  com  $f' \in SC([0,a])$ ,  $f \in C([0,a])$ ,  $f(0) = 0 = f(a)$ .

**1.5.** (i) Procurando uma solução da forma  $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ,  $Y$  satisfaz o problema  $Y'' = -\lambda Y$ ,  $Y'(0) = 0 = Y'(b)$  que tem auto-valores  $\lambda_n = n^2\pi^2/b^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , com auto-funções correspondentes  $Y_n = \cos(n\pi y/b)$ . Por outro lado,  $X$  é solução de  $X'' = \lambda X$ ,  $X'(0) = 0$ , logo  $X_n = \cosh(n\pi x/b)$ . Obtivemos, assim, o conjunto de soluções  $u_n(x,y) = c_n \cosh(n\pi x/b) \cos(n\pi y/b)$ ,  $x \in [0,a]$ ,  $y \in [0,b]$ , para o problema homogêneo. (ii) Impondo a solução da forma  $u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)$  para o problema não homogêneo e derivando, obtemos uma solução formal  $u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (ba_n/n\pi) [\cosh(n\pi x/b)/\operatorname{senh}(n\pi a/b)] \cos(n\pi y/b)$ , onde os  $a_n$ 's são os coeficientes de Fourier da extensão par e periódica de período  $2b$  de  $f$  com  $a_0 = 0$  (o que só é possível se a integral de  $f$  no intervalo  $[0,b]$  for zero).

**1.7.** Basta escrever  $F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F$  e usar a linearidade da integral e da derivada.

**2.1.** O problema pode ser transformado no problema (2.1) fazendo a mudança de variável  $\xi = x/R$ ,  $\eta = y/R$ . Portanto, pelo Teorema 2.1,  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(R \cos t, R \sin t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - t) + r^2} dt$$

se  $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $u(x, y) = f(x, y)$  se  $x^2 + y^2 = R^2$ , é solução do problema.

**2.3.**  $u(x, y) = Ax/R + By/R + C$ .

**2.5.** A solução limitada obtida pelo método de separação de variáveis é

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(R \cos t, R \sin t) \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - t) + r^2} dt$$

se  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r > R$  e  $u(x, y) = f(x, y)$  se  $x^2 + y^2 = R^2$ . Retirando a condição de limitação, a solução acima somada a  $\alpha \ln((x^2 + y^2)/R^2)$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  é arbitrário, é solução do novo problema.

## 9 O Método de Separação de Variáveis

**1.1.**  $u(x, t) = T + b \operatorname{sen}(\pi x/l) \exp(-\pi^2 y/l^2)$ ,  $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ .

**1.3.** (i) O fato da extremidade  $x = l$  estar isolada termicamente significa que  $u_x(l, t) = 0 \forall t \geq 0$ . Procurando uma solução  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$  para a equação do calor com as condições de contorno, obtemos os problemas  $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$  em  $(0, l)$ ,  $\varphi(0) = 0 = \varphi'(l)$  e  $\psi' + \lambda\alpha^2\psi = 0$ ,  $t > 0$ . Os autovalores são reais e positivos, pois  $\lambda(\varphi|\varphi) = (\varphi'|\varphi') > 0$ . Resolvendo o problema para  $\varphi$  e  $\psi$ , obtemos  $\lambda_n = [(2n-1)\pi/(2l)]^2$ ,  $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x)$  e  $\psi_n(t) = \exp[-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2t/(4l^2)]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , o que nos leva às soluções desejadas.

(ii) Procurando uma expansão em série para  $u$ , vemos que  $f$  tem que ter uma expansão da forma  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/(2l)]$ . Observe que esta série (se convergir, é claro) define uma função ímpar e periódica de período  $4l$ . Precisamos, portanto, estender  $f$  primeiro ao intervalo  $[0, 2l]$  e depois à reta toda de modo que  $f$  seja ímpar e periódica de período  $4l$  com  $b_{2k} = 0$  se  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}[k\pi x/(2l)]$ . Calculando  $b_{2k}$ , vemos que a extensão desejada satisfaz  $F(2l - x) = f(x)$  se  $x \in [0, l]$ . Para que exista solução, é preciso que  $f$  satisfaça a condição de compatibilidade  $f(0) = 0$ : neste caso, se  $f \in C([0, l])$ , a extensão  $F$  ímpar e periódica

de período  $4l$  é também contínua. Calculando os coeficientes, obtemos

$$c_n = b_{2n-1} = (2/l) \int_0^l f(x) \sin[(2k-1)\pi x/(2l)] dx.$$

(iii)  $f \in C([0, l])$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f$  diferenciável a menos de um número finito de pontos em  $[0, l]$  com  $f' \in SC([0, l])$ . Uma demonstração inteiramente análoga a do Teorema 2.1 mostra que a solução é única em  $C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ . (Aqui estamos supondo que a condição de contorno em  $x = l$  é válida para  $t > 0$ .)

(iv) Neste caso obtemos uma solução estacionária constante igual a  $T$  e a solução é a soma da solução do problema original com a solução estacionária.

**1.5.** (i) Procurando solução de forma  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ , obtemos  $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$  em  $\Omega$ ,  $\varphi = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\psi' + \lambda\alpha^2\psi = 0$ ,  $t > 0$ .

(ii) Procurando  $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$ , obtemos  $X'' + \eta X = 0$  em  $(0, l)$ ,  $X(0) = 0 = X(l)$ ,  $Y'' + (\lambda - \eta)Y = 0$  em  $(0, l)$ ,  $Y(0) = 0 = Y(l)$ , logo  $\eta_k = k^2\pi^2/l^3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X_k = \sin(k\pi x/l)$ ,  $\lambda_{km} = (m^2 + k^2)\pi^2/l^2$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $Y_m = \sin(m\pi y/l)$ ,  $\varphi_{km}(x, y) = X_k(x)Y_m(y)$ .

(iii)  $u(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{+\infty} C_{km} \sin(k\pi x/l) \sin(m\pi y/l) \exp(-(k^2+m^2)\pi^2 t/l^2)$ , onde  $C_{km} = (4/l^3) \int_0^l dy \sin(m\pi y/l) \int_0^l dx \sin(k\pi x/l) f(x, y)$ .

**2.1.**  $u = f$ .

**2.3.** Fixe  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, (4a)^{-1})$  e sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  constantes positivas tais que  $0 < \alpha < t_0 < \beta < (4a)^{-1}$  e  $|x_0| < \gamma$ . Seja  $F(x, y, t) = f(y)K(x - y, t)$ . Então  $F$  satisfaz a equação de calor  $\partial_t F = \partial_x^2 F$  e, quaisquer que sejam  $(x, y, t) \in [-\gamma, \gamma] \times \mathbb{R} \times [\alpha, \beta]$ ,  $|F(x, y, t)| \leq g_1(y)$ ,  $|\partial_x F(x, y, t)| \leq (2\alpha)^{-1}(\gamma g_1(y) + |y|g_1(y)) = g_2(y)$ ,  $|\partial_x^2 F(x, y, t)| \leq (4\alpha^2)^{-1}(2\alpha g_1(y) + \gamma^2 g_1(y) + 2\gamma|y|g_1(y) + y^2 g_1(y)) = g_3(y)$ ,  $|\partial_t F(x, y, t)| = |\partial_x^2 F(x, y, t)| \leq g_3(y)$ , onde  $g_1(y) = c(4\pi\alpha)^{-1/2} \exp[a\gamma^2(1 - 4a\beta)^{-1}] \exp[-(1 - 4a\beta)(4\beta)^{-1}h(y)^2]$  e  $h(y) = y + \gamma(1 - 4a\beta)^{-1}$  se  $y \leq -\gamma(1 - 4a\beta)^{-1}$ ,  $h(y) = 0$  se  $-\gamma(1 - 4a\beta)^{-1} < y < \gamma(1 - 4a\beta)^{-1}$  e  $h(y) = y - \gamma(1 - 4a\beta)^{-1}$  se  $y \geq \gamma(1 - 4a\beta)^{-1}$ . Como  $h \in C(\mathbb{R})$ , é claro que  $g_1, g_2, g_3 \in C(\mathbb{R})$ . Além disso,  $\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(y) dy < +\infty$ ,  $i = 1, 2$  ou  $3$ .

Aplicando, então, o Teorema 2.1, obtemos  $u$  satisfaz a equação do calor em  $[-\gamma, \gamma] \times [\alpha, \beta]$  e, em particular, no ponto  $(x_0, t_0)$ . Como o ponto  $(x_0, t_0)$  é arbitrário,  $u$  satisfaz a equação de calor na faixa  $\mathbb{R} \times (0, (4a)^{-1})$ . Para provar que  $u(x, t) \rightarrow f(x_0)$  quando  $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$ , basta mostrar

que o Lema 2.4 é válido (veja a demonstração do Teorema 2.5); procedendo como na demonstração do lema, a única dificuldade é mostrar que  $\int_{|x-y|\geq R} |f(y)-f(x)|K(x-y, t) dy \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$  qualquer que seja  $R > 0$ : usando que  $|f(x)| \leq c \exp(ax^2)$ , esta integral é menor ou igual a  $(C/\sqrt{\pi}) \exp(aM^2) \int_{|s|\geq R/\sqrt{4t}} \exp(-s^2) ds + (c/\sqrt{\pi}) \int_{A \cup B} \exp(-s^2) ds$ , onde  $A = \{s \leq -\sqrt{(1-4at)(4t)^{-1}} [R + 4atx(1-4at)^{-1}]\}$  e  $B = \{s \geq \sqrt{(1-4at)(4t)^{-1}} [R - 4atx(1-4at)^{-1}]\}$ ; o resultado segue tomando o limite quanto  $t \rightarrow 0^+$ .

2.5.  $u(x, t) = Ax^2 + Bx + C + 2At$ .

2.7.  $u(x, t) = [\operatorname{erf}((a-x)/\sqrt{4t}) - \operatorname{erf}((-a-x)/\sqrt{4t})]/2$ .

2.9. Observe que, para obter solução  $u \in C^2((0, +\infty) \times (0, +\infty)) \cap C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ ,  $f \in C([0, +\infty))$  tem que satisfazer a condição de compatibilidade  $f(0) = 0$ . Fazendo a extensão ímpar  $F$  de  $f$ , recaímos no problema de calor para a reta inteira, logo  $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)K(x-y, t) dy$ ,  $t > 0$ . Para que  $u$  seja, de fato, solução, precisamos que  $f$  seja limitada (ou pelo menos – veja o Exercício 2.3 acima –  $|f(x)| \leq ce^{ax^2}$ ,  $a$  e  $c$  constantes positivas). Note que, como  $F(y)$  é ímpar e  $K(-y, t)$  é par como função de  $y$ ,  $u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0$ . Portanto,  $u$  definida pela integral acima para  $x \geq 0$ ,  $t > 0$  e  $u(x, 0) = f(x)$  para  $x \geq 0$  é solução do problema.

## 10 A Transformada de Fourier

- 1.1. (i)  $(2/\pi)^{1/2}a(a^2+\xi^2)^{-1}$ ; (ii)  $(2a)^{-1/2}\exp(-\xi^2(4a)^{-1})$ ; (iii)  $2(2\pi)^{-1/2}\xi^{-2}(1-\cos\xi)$ ; (iv)  $a(2\pi)^{-1/2}[(a^2+(c+\xi)^2)^{-1}+(a^2+(c-\xi)^2)^{-1}]$ ; (v)  $-i(2a)^{-1/2}[\exp(-(c-\xi)^2(4a)^{-1})+\exp(-(c+\xi)^2(4a)^{-1})]$ .

- 1.3. (i)  $2(2\pi)^{-1/2}\xi^{-2}e^{-2i\xi}(1-\cos\xi)$ ; (ii)  $\exp(-i3\xi+\xi^2/2)$ ; (iii)  $2^{-1/2}\exp(-(\xi+1)^2/4)$ ; (iv)  $2(2\pi)^{-1/2}a^{-1}\xi^{-2}[1-\cos(a\xi)]$ .

- 1.5. (i) Fixe  $L > 0$  e defina  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2kL)$ . A série converge, pois  $|f(x+2kL)| \leq K[1+(x+2kL)^2]^{-1}$  e  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [1+(x+2kL)^2]^{-1} < +\infty$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Para mostrar que  $g$  é contínua, basta mostrar

que  $g$  é contínua em  $[-L, L]$ , pois  $g$  é periódica de período  $2L$ ; por outro lado, se  $x \in [-L, L]$ , a série converge uniformemente, pois, se  $k \geq 1$ ,  $(2k-1)^2L^2 \leq (x+2kL)^2$ , se  $k \leq -1$ ,  $(2k+1)^2L^2 \leq (x+2kL)^2$  e, portanto,

$$\sum |f(x+2kL)| \leq K \sum_{k=-\infty}^{-1} [1+(2k+1)^2L^2]^{-1} + K(1+x^2)^{-1} + K \sum_{k=1}^{+\infty} [1+(2k-1)^2L^2]^{-1} \leq K \left[ 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+(2k-1)^2L^2)^{-1} \right].$$

Como  $f$  é contínua,  $g$  é contínua em  $[-L, L]$ , logo em  $\mathbb{R}$ . De fato,  $g \in C^1(\mathbb{R})$ : um argumento análogo ao usado acima mostra que a série das derivadas  $\sum f'(x+2kL)$  também converge uniformemente e é periódica de período  $2L$ . Portanto, a série de Fourier converge  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2kL) = g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(n) \exp(in\pi x/L) = (2\pi)^{1/2}(2L)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n\pi/L) \exp(in\pi x/L)$ .

(ii) Fazendo  $L = \pi$  e  $x = 0$  na fórmula acima, como  $\widehat{f}(\xi) = (\pi/2)^{1/2}a^{-1}e^{-a|\xi|}$ , o resultado segue direto da fórmula.

**2.1.** Escrevendo  $e^{i\xi x} = \cos(\xi x) + i \sin(\xi x)$  na Equação (2.7), obtemos a fórmula desejada com  $A(\xi) = (2\pi)^{-1/2}[\widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(-\xi)] = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx$  e  $B(\xi) = i(2\pi)^{-1/2}[\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(-\xi)] = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) dx$ ,  $\xi > 0$ .

**2.3.** Pelo Exercício 10 da última seção do Capítulo 9, o Teorema 2.1 do Capítulo 9 é válido para funções complexas. Basta aplicar o teorema  $n$  vezes. (Note que, como  $f$  é contínua,  $x^n f \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1, \forall k = 0, 1, \dots, n$ .)

**3.1.** Já vimos que a integral existe; como  $f$  e  $g$  são contínuas,  $f * g$  também o é (veja a demonstração da continuidade no Teorema 2.1 do Capítulo 9). Para provar que  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ , basta proceder como na demonstração do Lema 3.1.

**3.3.** Subdividindo os intervalos de definição de  $f$  e de  $g$ , se necessário, existem números  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  tais que  $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{I_j}$  e  $g = \sum_{j=1}^n \mu_j \chi_{I_j}$ , onde  $I_j = [a_{j-1}, a_j]$ . Vamos denotar o tamanho de um intervalo  $I$  por  $|I|$ .

(i) Calculando diretamente obtemos  $(f * g)(x) = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k |\Delta_{jk}(x)|$ , onde

$\Delta_{jk}(x) = [a_{k-1}, a_k] \cap (x - a_j, x - a_{j-1}]$ . Como cada uma das funções  $|\Delta_{jk}(x)|$  é contínua de suporte compacto,  $f * g$  também o é.

(ii) O resultado segue de um cálculo direto utilizando a expressão para  $f * g$  acima.

(iii) De (i),  $f * g \in \mathcal{L}^1$ , logo  $\widehat{f * g}$  é contínua; para  $\xi$  longe da origem,  $|\widehat{f * g}(\xi)| \leq c\xi^{-2}$ ,  $c$  constante, que é integrável em  $|\xi| \geq M$ ,  $\forall M > 0$ , logo  $\widehat{f * g} \in \mathcal{L}^1$ .

(iv) Como  $\widehat{f * g} \in \mathcal{L}^1$  e  $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \sum \lambda_j \mu_k \int |\Delta_{jk}(x)| e^{-i\xi x} dx$ ,  $(2\pi)^{-1/2} \int \widehat{f * g}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-1} \sum \lambda_j \mu_k \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |\Delta_{jk}(x)| x^{-1} \sin(nx) dx$ , basta mostrar que, para cada par  $j, k$ , esta última integral tende a  $\pi |\Delta_{jk}(0)|$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Para isso, separe a integral em três usando a definição de  $|\Delta_{jk}(x)|$  e, nas integrais que têm  $x$  no denominador, faça uma mudança de variável  $y = nx$  e tome o limite.

(v) Use a Proposição 1.2, o fato de que  $(f * g)_{-x} = f * (g_{-x})$  e o resultado de (iv).

**3.5.** (i)  $\widehat{f}(\xi) = (2/\pi)^{1/2} \xi^{-1} \sin(a\xi)$  se  $\xi \neq 0$ ,  $\widehat{f}(0) = a(2/\pi)^{1/2}$ ; (ii)  $\pi/2$  (escolha  $a = 1$  e  $g = f$  em 3.3(ii) e 3.3(iv)).

**4.1.** Separe o problema em dois:  $v_{tt} = c^2 v_{xx} + h(x, t)$ ,  $v(x, 0) = 0 = v_t(x, 0)$  e  $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ ,  $w(x, 0) = f(x)$ ,  $w_t(x, 0) = g(x)$ ; o último foi resolvido no Capítulo 5; fazendo a transformada de Fourier no primeiro, obtemos  $\partial_t^2 \widehat{v} = -\xi^2 c^2 \widehat{v} + \widehat{h}(\xi, t)$ ,  $\widehat{v}(\xi, 0) = 0 = \partial_t \widehat{v}(\xi, 0)$ , cuja solução é  $\widehat{v}(\xi, t) = c^{-1} \int_0^t \xi^{-1} \sin(\xi c(t-s)) \widehat{h}(\xi, s) ds$ . Pelo Exercício 5(i) da Seção 3, se  $F(x, a) = (\pi/2)^{1/2}$  para  $|x| \leq a$  e 0 para  $|x| > a$ , então  $\widehat{F}(\xi, a) = \xi^{-1} \sin(a\xi)$  e, portanto, esperamos uma solução da forma

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (2\pi)^{1/2} \int \widehat{v}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi \\ &= c^{-1} \int_0^t [(2\pi)^{-1/2} \int \widehat{F}(\xi, c(t-s)) \widehat{h}(\xi, s) e^{i\xi x} d\xi] ds \\ &= c^{-1} (2\pi)^{-1/2} \int_0^t [F(\cdot, c(t-s)) * h(\cdot, s)](x) ds \\ &= (2c)^{-1} \int_0^t \left[ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(r, s) dr \right] ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} u(x, t) = & [f(x + ct) + f(x - ct)]/2 + (2c)^{-1} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \\ & + (2c)^{-1} \int_0^t \left[ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(r, s) dr \right] ds. \end{aligned}$$

(Compare com o Exercício 3 dos Exercícios Variados do Capítulo 5).

**4.3**  $u(x, t) = e^{\alpha t}(f * K_t)(x)$  se  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 11 As Identidades de Green

**2.1.** Se  $\lambda \neq 0$  e  $v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $\Delta v = -\lambda v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  e, em particular,  $v \in C^2(\bar{D})$ . Usando a equação e fazendo  $u = v$  na primeira identidade de Green, obtemos  $\int (-\lambda v^2 + |\nabla v|^2) dx dy = \int (v \nabla v + |\nabla v|^2) dx dy = \int (\partial v / \partial n) ds = 0$ , pois  $v = 0$  em  $\partial\Omega$ , logo  $\lambda \int v^2 dx dy = \int |\nabla v|^2 dx dy \geq 0$  e, se  $v \not\equiv 0$ ,  $\lambda \geq 0$ . Portanto o problema só tem solução não trivial se  $\lambda \geq 0$ .

**2.3.** Aplicando o Corolário 2.2, obtemos  $\int |\nabla v|^2 dx dy = 0$ , o que implica que  $v$  é constante.

## 12 Princípios do Máximo e Teoremas de Unicidade

**1.1.** (i) Fazendo  $B = B(\xi, R)$ , pelo Exercício 2 da primeira seção do Capítulo 11,  $\int_{\bar{B}} \Delta u(\eta) d\eta = \int_{\partial B} (\partial u / \partial n) ds$ ; aplicando então a terceira identidade de Green e a definição de  $F_\xi$  (veja a demonstração do Teorema 1.1), obtemos  $u(\xi) = \int_{\partial B} [u(\partial F_\xi / \partial n) - F_\xi(\partial u / \partial n)] ds + \int_{\bar{B}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta \leq \int_{\partial B} [u(2\pi R)^{-1} - (2\pi)^{-1} \ln R(\partial u / \partial n)] ds + (2\pi)^{-1} \ln R \int_{\partial B} (\partial u / \partial n) ds = (2\pi R)^{-1} \int_{\partial B} u ds$ .

(ii) A demonstração é inteiramente análoga a do Teorema 1.2 (use (i)).

(iii) Em (i), tanto no enunciado como na demonstração, basta trocar  $\leq$  por  $\geq$ ; quanto a (ii), basta trocar máximo por mínimo no enunciado e  $\leq$  por  $\geq$  na demonstração.

(iv) Note que  $u - v$  é subharmônica em  $\Omega$  pois  $\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v = \Delta u \geq 0$ . Como  $u - v \in C(\bar{\Omega})$  e  $\Omega$  é limitada,  $u - v$  atinge seu máximo  $M$  em  $\bar{\Omega}$ . É claro que  $M \geq 0$  pois  $u - v = 0$  em  $\partial\Omega$ . De fato,  $M = 0$ , pois, se  $M > 0$ ,  $u - v$  atingiria seu máximo em  $\Omega$  e, pelo item (ii),  $u - v$  seria constante igual a  $M > 0$  em  $\Omega$ , contrariando a continuidade em  $\bar{\Omega}$ . Se  $u$  for superharmônica,  $u - v$  é superharmônica e  $u \leq v$  em  $\bar{\Omega}$ .

**1.3**  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz  $\Delta v = 0$  em  $\Omega$  e  $v = (x^2 + y^2)/4$  em  $\partial\Omega$ . Como  $v$  é harmônica,  $v$  atinge seu máximo e eu mínimo em  $\partial\Omega$ , logo  $(1/4) \leq v(0,0) = u(0,0) \leq (1/2)$ .

**1.5** Pelo Teorema 1.1, se  $0 < r < R$  e  $B = B(\xi_0; r)$ , então  $u(\xi_0) = (2\pi r)^{-1} \int_{\partial B} u \, ds = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(\xi_0 + (r \cos \theta, r \sin \theta)) \, d\theta$ . Como  $\Omega$  é limitado e  $u \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u$  é uniformemente contínua em  $\bar{\Omega}$ , logo podemos passar o limite para dentro da integral quando  $r \rightarrow R^-$ , obtendo o resultado desejado.

**1.7** A função não é contínua em  $x^2 + y^2 = 1$  pois o denominador se anula em  $(1,0)$ .

**1.9** Se  $\lambda \neq 0$ ,  $\Delta v = -\lambda v \in C(\bar{D})$ , logo  $v \in C^2(\bar{D})$  e, pelo Exercício 1 da Seção 2 do Capítulo 11, o problema só tem solução não trivial se  $\lambda > 0$ . Se  $\lambda = 0$ , pelo Corolário 1.3,  $v \equiv 0$  é a única solução.

**2.1.** O enunciado do teorema é obtido fazendo  $\Omega = A \times (0, T)$ , onde  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  é um domínio limitado, e substituindo-se  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  por  $(\partial A \times [0, T]) \cup (\overline{A} \times \{0\})$  e  $\Gamma_4$  por  $A \times \{T\}$ . Para demonstrar esse teorema note, em primeiro lugar, que um resultado análogo ao Lema 2.1 é válido, ou seja, se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  for aberto e se  $v \in C^2(\Omega)$  satisfizer  $Lv > 0$  em  $\Omega$ , então  $v$  não terá máximo local em  $\Omega$ : de fato, se  $(x_0, y_0, t_0) \in \Omega$  fosse um ponto de máximo,  $\nabla v(x_0, y_0, t_0) = 0$  de modo que, em particular,  $\partial_t v(x_0, y_0, t_0) = 0$  e  $\Delta v(x_0, y_0, t_0) > 0$ ; por continuidade,  $\Delta v(x, t, y_0) > 0$  para  $(x, y)$  em alguma vizinhança de  $(x_0, y_0)$  em  $\mathbb{R}^2$  com  $(x, y, t_0) \in \Omega$ , logo  $(x, y) \mapsto v(x, y, t_0)$  seria subharmônica em alguma vizinhança de  $(x_0, y_0)$  e teria máximo em  $(x_0, y_0)$  o que implicaria, pelo Exercício 1 da seção anterior, que  $v(x, y, t_0) = \text{constante}$  nesta vizinhança, uma contradição, pois  $\Delta v(x, y, t_0) > 0$ . Com esse lema, a demonstração do teorema é análoga a do Teorema 2.4, com as seguintes modificações:

$w(x, y) = (M - m)(8R^2)^{-1}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$ ,  $(x, y) \in \overline{A}$ ,  $R > 0$  tal que  $A \subseteq B(0; R) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; em um ponto de máximo  $(x_1, y_1, T) \in A \times \{T\}$  da função  $v$ ,  $\Delta v(x_1, y_1, T) \leq 0$  pois, caso contrário,  $(x, y) \mapsto v(x, y, T)$  seria subharmônica e não constante em uma vizinhança de  $(x_1, y_1)$  em  $A$  e não poderia ter máximo em  $(x_1, y_1)$ .

**2.3.** (i) Calcule diretamente  $Lu$ .

(ii)  $u$  não tem máximos nem mínimos locais (tem apenas um ponto de sela na origem), logo em cada uma das regiões  $\overline{\Omega}_i$  o máximo e o mínimo de  $u$  são atingidos em  $\partial\Omega_i$ . Em  $\overline{\Omega}_1$ , o máximo é  $u(-1/2, 1/2) = 1/4$  e o mínimo é  $u(1, 1/2) = -2$ ; em  $\overline{\Omega}_2$ , max =  $u(-1/2, 1/2) = 1/4$ , min =  $u(1/2, 1/2) = -3/4$ ; em  $\overline{\Omega}_3$ , max =  $u(-1/2, 1/2) = 1/4$ , min =  $u(2, 1/2) = -6$ ; em  $\overline{\Omega}_4$ , max =  $u(a, 0) = -a^2$ , min =  $u(b, T) = -b^2 - 2bT$  (note que, se  $a = 0$ , o máximo zero é atingido em  $\{0\} \times [0, T]$ ).

Que obra de arte é o ser humano:  
tão nobre no raciocínio; tão vário na  
capacidade; em forma e movimento,  
tão preciso e admirável, na ação é  
como um anjo; no entendimento é  
como um Deus; a beleza do mundo,  
o exemplo dos animais.

Hamlet - William Shakespeare

## Apêndice

### Métodos Numéricos

Nem todos os problemas envolvendo EDPs podem ser facilmente resolvidos por métodos algébrico-analíticos. É o caso, por exemplo, da equação do calor em uma dimensão (1) do Exemplo 1.6, quando  $\alpha^2$ , que representa o coeficiente de difusão, não é constante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Para tais casos usamos os chamados métodos numéricos, que nos permitem encontrar soluções aproximadas para o problema em questão, sem que seja necessário descobrir explicitamente a função  $u(x, t)$  que satisfaz a EDP.

#### 1. Método de Diferenças Finitas

Primeiramente, vamos considerar a derivada de uma função de uma única variável,  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , para em seguida tratar de funções  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .

A derivada de uma função real  $u(x)$  em um valor  $x^0$  será dada pelo limite

$$u'(x^0) = \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{u(x) - u(x^0)}{x - x^0}, \quad (1.1)$$

se e somente se este limite existir [1].

A definição (1.1) permite a obtenção de uma aproximação para  $u'(x^0)$ ,

$$u'(x^0) \simeq \frac{u(x) - u(x^0)}{x - x^0}. \quad (1.2)$$

A estratégia apresentada é conhecida como aproximação por *diferenças finitas* para  $u'(x^0)$  e também pode ser representada da seguinte maneira:

$$u'(x^0) \simeq \frac{u(x^0 + \Delta x) - u(x^0)}{\Delta x}. \quad (1.3)$$

O Método das Diferenças Finitas se baseia na discretização do intervalo de interesse, ou seja, o intervalo contínuo  $I \in \mathbb{R}$  é dividido em um intervalo discreto  $I_D = \{x_k \in I : x_k = x^0 + k\Delta x, k \in \mathbb{Z}\}$ , de forma que  $x_0 = x^0$ ,  $x_1 = x^0 + \Delta x$ ,  $x_2 = x^0 + 2\Delta x$ , e assim por diante. Analogamente, temos  $u(x_1) = u_1$ ,  $u(x_2) = u_2$ , e assim por diante. Com estas definições, a derivada  $u'(x^0)$  pode ser representada basicamente de três maneiras distintas, chamadas, respectivamente, de *diferença avançada*, *diferença retrógrada* e *diferença centrada*:

$$u'(x^0) \simeq \frac{u_1 - u_0}{\Delta x}, \quad (1.4)$$

$$u'(x^0) \simeq \frac{u_0 - u_{-1}}{\Delta x}, \quad (1.5)$$

$$u'(x^0) \simeq \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x}. \quad (1.6)$$

Como as Equações (1.4), (1.5) e (1.6) tratam de aproximações para  $u'(x^0)$ , algum *erro* é introduzido pelo processo de discretização. Para a Equação (1.4), da diferença avançada, o erro “ $\epsilon$ ” pode ser calculado expandindo o termo  $u_1$  em série de Taylor em torno de  $x^0$ ,

$$u_1 = u(x^0 + \Delta x) = u(x^0) + u'(x^0)\Delta x + \frac{u''(\bar{x})(\Delta x)^2}{2}, \quad x^0 < \bar{x} < x^0 + \Delta x. \quad (1.7)$$

Substituindo (1.7) em (1.4), obtemos

$$u'(x^0) \simeq u'(x^0) + \frac{u''(\bar{x})\Delta x}{2}, \quad x^0 < \bar{x} < x^0 + \Delta x. \quad (1.8)$$

A Equação (1.8) informa que o erro de truncamento produzido pela aproximação (1.4) é proporcional a  $\Delta x$ , ou seja,  $\epsilon = O(\Delta x)$ . Deve-se observar a partir deste resultado que, à medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ , temos

$\epsilon \rightarrow 0$ . Fica como exercício ao leitor demonstrar que os erros dos métodos da diferença retrógrada e da diferença centrada são, respectivamente,  $O(\Delta x)$  e  $O(\Delta x^2)$ .

Até agora calculamos as aproximações via diferenças finitas para a derivada de primeira ordem  $u'(x^0)$ . Apresentamos a seguir a aproximação por diferenças finitas para  $u''(x^0)$ :

$$u''(x^0) \simeq \frac{u'_1 - u'_0}{\Delta x} = \frac{\frac{u_1 - u_0}{\Delta x} - \frac{u_0 - u_{-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta x^2}. \quad (1.9)$$

Fica como exercício ao leitor calcular a ordem do erro de truncamento introduzido pela Equação (1.9).

A derivada de uma função  $u(x, t)$  em relação a  $x$  no ponto  $(x^0, t)$  é definida como

$$u_x(x^0, t) = \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{u(x, t) - u(x^0, t)}{x - x^0}, \quad (1.10)$$

se este limite existir. Como no caso em que a função  $u$  depende apenas de  $x$ , ou seja,  $u = u(x)$ , podemos definir a variável discreta  $U_k^m$  para aproximar as funções  $u = u(x, t)$  como

$$U_k^m = u(k\Delta x, m\Delta t), \quad (1.11)$$

para  $k \in \mathbb{Z}$  e  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Analogamente, podemos estender a definição para o caso  $u = u(x, y, t)$ , ou seja, duas variáveis espaciais  $x, y$  e uma variável temporal  $t$ , da forma

$$U_{k,l}^m = u(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta t), \quad (1.12)$$

para  $k, l \in \mathbb{Z}$  e  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

Com a mesma estratégia usada para obter (1.4) e (1.9), podemos definir as seguintes aproximações por diferenças finitas:

$$u_x(x^0, t) \simeq \frac{U_1^m - U_0^m}{\Delta x}, \quad (1.13)$$

$$u_t(x, t^0) \simeq \frac{U_0^{m+1} - U_0^m}{\Delta t}, \quad (1.14)$$

$$u_{xx}(x^0, t) \simeq \frac{U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2}, \quad (1.15)$$

$$u_{tt}(x, t^0) \simeq \frac{U_0^{m+1} - 2U_0^m + U_0^{m-1}}{\Delta t^2}. \quad (1.16)$$

As Equações (1.13) e (1.14) são a discretização por diferenças avançadas para  $u_x(x^0, t)$  e  $u_t(x, t^0)$ , respectivamente. Fica como exercício obter as diferenças retrógrada e centrada para as mesmas derivadas parciais.

### Consistência, Convergência e Estabilidade

Vamos considerar  $L[ ]$  um operador diferencial que represente de forma compacta uma EDP. Tomemos como exemplo a equação do calor considerada anteriormente. Podemos definir  $L[ ] = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , de modo que (1) pode ser escrita como

$$L[u(x, t)] = 0. \quad (1.17)$$

O processo de discretização por diferenças finitas, para este exemplo, substituirá o operador diferencial  $L[ ]$  pelo operador de diferenças

$$D[U_0^m] = \frac{U_0^{m+1} - U_0^m}{\Delta t} - \alpha^2 \frac{U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2}. \quad (1.18)$$

No momento oportuno, mostraremos que o operador definido por (1.18) é chamado de Método Totalmente Explícito para a equação do calor. Veremos também que existem outros operadores para a mesma EDP. Por enquanto, é importante observar que a aplicação de um operador de diferenças introduz um erro de truncamento, como visto no caso do operador definido em (1.4). Assim,

$$D[U_0^m] = \epsilon. \quad (1.19)$$

O operador  $D[U_0^m]$  é dito *consistente* com a equação diferencial em questão se

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \epsilon = 0. \quad (1.20)$$

Veremos que há métodos de discretização que são incondicionalmente consistentes, outros incondicionalmente inconsistentes, e ainda há os que são condicionalmente consistentes. Esses últimos apresentam, geralmente, alguma condição que relaciona  $\Delta x$  com  $\Delta t$  para que haja consistência.

Para definir a convergência de um método numérico, vamos considerar  $u(x, t)$  a solução exata de uma determinada EDP e  $U_0^m$  a solução obtida pelo esquema numérico proposto. O método é considerado *convergente* se

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} |U_0^m - u(x, t)| = 0. \quad (1.21)$$



O leitor atento já deve ter notado que provar a convergência de um esquema numérico é muito difícil, porque, em geral, não conhecemos a solução exata  $u(x, t)$  da EDP em questão. Este problema será resolvido pela aplicação do Teorema da Equivalência de Lax (1954), que afirma:

**Teorema 1.1** (Lax). *Dado um problema de valor de contorno/inicial bem posto e um esquema de diferenças finitas consistente com ele, a estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência.*

Este teorema permite que possamos garantir a convergência de um determinado método, através da prova da estabilidade do mesmo. Para considerar a estabilidade, suponha que  $E^m$  seja o erro ou perturbação introduzido pelo operador de discretização  $D[\ ]$ . Esta perturbação se propaga à medida que  $m \rightarrow \infty$ , de acordo com

$$D[E^m] = 0. \quad (1.22)$$

O método é dito *estável* se existe um majorante  $M \in \mathbb{R}$  e um inteiro positivo  $J$ , tal que

$$|E^m| < M, \forall m > J. \quad (1.23)$$

Em outras palavras, o método será *estável* se a perturbação  $E^m$  for uniformemente limitada à medida que  $m \rightarrow \infty$ .

Usaremos ao longo do texto dois critérios diferentes para verificar a estabilidade de um determinado esquema numérico de discretização: (1) o Critério de von Neumann, ou de Fourier; (2) o Critério Matricial.

Um método de diferenças  $D[\ ]$  será considerado *von Neumann estável* se cada solução de  $D[U_k^m] = 0$ , onde  $U_k^m = \xi^m e^{Ik\beta}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\xi(\beta) \in \mathbb{C}$ ,  $I = \sqrt{-1}$ , tiver  $|\xi| \leq 1 + O(\Delta t)$ . Como este método baseia-se na transformada de Fourier, sugerimos que o leitor esteja familiarizado com o que foi apresentado nos capítulos 6, 7 e 10.

Além disso, para um método de discretização de segunda ordem, o critério de von Neumann é condição necessária e suficiente para a estabilidade. Demonstraremos mais adiante, como exemplo, que o método definido por (1.18) só é *von Neumann estável* quando  $0 \leq \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2$ .

Para o critério matricial, consideramos a relação

$$E^{m+1} = CE^m, \quad (1.24)$$

onde  $E^m$  é o vetor formado pelos erros  $E_j^m$ ,  $j = 1, \dots, N$  e  $C$  é uma matriz  $N \times N$ . Para satisfazer o critério de estabilidade definido por

(1.23), a matriz  $C$  deve possuir todos os autovalores menores ou iguais a  $1 + O(\Delta t)$ , em módulo. Em outras palavras, se  $\rho(C) \leq 1 + O(\Delta t)$ , onde  $\rho$  é o maior valor absoluto dos autovalores, então o método de discretização que produziu a matriz  $C$  é dito *estável pelo critério da matriz*.

Uma observação que deve ser feita é que o critério de von Neumann deve ser aplicado somente a equações lineares com coeficientes constantes, pois tal critério se baseia no princípio da superposição (Proposição 2.2 - Capítulo 1). Além disso, o critério de von Neumann ignora as condições de contorno, diferentemente do critério da matriz, mas os resultados obtidos por ambos são geralmente iguais. Isto mostra que a estabilidade é mais dependente do esquema de discretização do que das condições de contorno (DuCHATEAU & ZACHMANN, 1986).

## 2. Equações Parabólicas

A principal representante para as equações parabólicas é a chamada equação do calor, apresentada no Capítulo 9, usada para modelar problemas de difusão. Para uma dimensão espacial, esta equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u_t &= f(x, t)u_{xx} + g(x, t), \quad f(x, t) > 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), \\ u(0, t) &= p(t), \\ u(l, t) &= q(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $f(x, t)$  é o coeficiente de difusão,  $g(x, t)$  é a fonte de calor,  $h(x)$  é a condição inicial e as funções  $p(t)$  e  $q(t)$  são as condições de contorno para  $x = 0$  e  $x = l$ , respectivamente.

Por questões de simplicidade, vamos considerar  $f(x, t)$  constante positiva ( $\alpha^2$ ) e  $g(x, t) = 0$ , obtendo:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), \\ u(0, t) &= p(t), \\ u(l, t) &= q(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Conforme visto em capítulos anteriores, (2.2) tem solução que pode ser obtida explicitamente, mas vamos estudar este problema por ser mais

simples e porque os métodos numéricos são essencialmente os mesmos para qualquer equação parabólica, logo não há perda de generalidade.

### Método Totalmente Explícito

Vamos substituir os termos  $u_t$  em (2.2) por  $\frac{U_0^{m+1} - U_0^m}{\Delta t}$ , definido em (1.14), e  $u_{xx}$  por  $\frac{U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2}$ , definido em (1.22). Assim, a EDP em questão fica

$$\frac{U_0^{m+1} - U_0^m}{\Delta t} - \alpha^2 \frac{U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2} = 0, \quad (2.3)$$

conforme (1.18). Explicitando o termo  $U_0^{m+1}$  temos:

$$U_0^{m+1} = \sigma U_1^m + (1 - 2\sigma) U_0^m + \sigma U_{-1}^m, \quad \sigma = \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (2.4)$$

A relação acima mostra que, dados os valores de  $U$  em um determinado instante de tempo, digamos “ $m$ ”, é possível obter os valores de  $U$  para o instante seguinte “ $m + 1$ ”.

Para a construção de um exemplo concreto, vamos tomar (2.2) e fazer  $l = 1$ ,  $\Delta x = 0.25$ ,  $\alpha^2 = 1$  e  $\Delta t = 0.01$ . (Usamos ponto, em vez de vírgula, para separar a parte decimal da inteira porque os programas e computadores usam esta notação.) Assim, os pontos nodais na direção  $x$  são  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.25$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = 0.75$ ,  $x_4 = 1$ , de modo que  $x_k = k \times \Delta x = k \times 0.25$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Para uma condição inicial, digamos  $h(x) = \sin(\pi x)$ , temos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x), \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os seguintes valores de  $U_k^0$  são obtidos pela aplicação da condição inicial:

$$\begin{aligned} U_0^0 &= 0, \\ U_1^0 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \simeq 0.7071, \\ U_2^0 &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ U_3^0 &= \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \simeq 0.7071, \\ U_4^0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Com base nestes valores, podemos calcular os próximos valores  $U_1^1$ ,  $U_2^1$ ,  $U_3^1$  aplicando (2.4):

$$\begin{aligned}\sigma &= \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1 \frac{0.01}{0.25^2} = 0.16, \\ U_0^1 &= 0, \\ U_1^1 &= 0.640828, \\ U_2^1 &= 0.906272, \\ U_3^1 &= 0.640828, \\ U_4^1 &= 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

É importante ressaltar que os valores de  $U_k^0$  são obtidos diretamente pela condição inicial  $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ , enquanto os valores de  $U_k^1$  são aproximações para os valores de  $u(x, 0.01)$  para  $0 < x < 1$ , com  $\Delta x = 0.25$ .

A solução exata  $u(x, t)$  para (2.5) é

$$u(x, t) = \operatorname{sen}(\pi x) e^{-t\pi^2},\tag{2.8}$$

que pode ser obtida pelos métodos discutidos nos capítulos anteriores. Vamos usar a solução exata (2.8) para realizar comparações com os valores aproximados, obtidos pelo esquema de diferenças (2.4).

A seguir, um programa feito na linguagem de programação nativa do software matemático Maple 12<sup>(TM)</sup>. O programa apresentado resolve o problema (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.001$  e  $T = 1$ . O resultado pode ser visto na Figura 1. O gráfico contínuo representa a solução exata e os pontos, a solução aproximada obtida pelo programa.

Os valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  e  $T$  podem ser mudados, basta efetuar pequenas modificações nas linhas 4, 5 e 6, respectivamente. Também podem ser alterados o valor de  $\alpha^2$  e a função  $h(x)$  da condição inicial nas linhas 3 e 12.

Listing 1: Método Explícito para a Equação do Calor

```

1 restart;
2 Digits := 10;
3 alpha := 1;
4 dx := 0.1;
5 dt := 0.01;
```

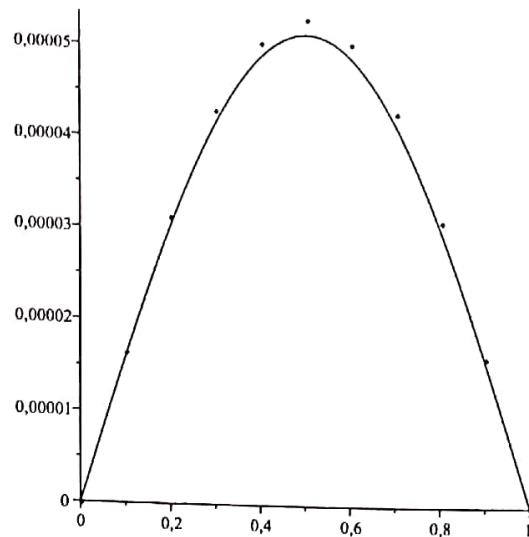


Figura 1: Solução da equação (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.001$  e  $T = 1$

```

6 Tf := 0.1:
7 np := round (1/dx + 1):
8 nT := round (Tf/dt):
9 sig := alpha*(dt/(dx^2)):
10 for i from 0 to (np-1) do
11     x := dx*i:
12     U[ i ] := sin (Pi*x):
13 end:
14 for m from 1 to nT do
15     t := dt*m:
16     V[0] := 0.0:
17     V[np-1] := 0.0:
18     E[0] := 0.0:
19     E[np-1] := 0.0:
20     for i from 1 to (np-2) do
21         x := dx*i:
22         V[ i ] := sig*U[ i -1 ] + (1 - 2*sig)*U[ i ] + sig*U[ i +1]:
23         E[ i ] := abs (U[ i ] - sin (Pi*x)*exp(-t*Pi^2)):
24     end:
25
26     for i from 0 to (np-1) do
27         U[ i ] := V[ i ]:
28     end:
29 end:
30 for i from 0 to (np-1) do
31     print (U[X=i*dx , T=t] = evalf(V[ i ])):
32 end;
33 print ();
34 print (ALPHA = alpha);

```

```

35 print (DeltaT = dt);
36 print (DeltaX = dx);
37 print (sigma = sig);
38 print (T_final = t);
39 print (Pontos = np);

```

O mesmo resultado apresentado na Figura 1 está representado na Tabela 1, onde comparamos o valor exato de  $u(x, t)$  com o valor aproximado  $U_0^m$  e o erro absoluto definido por  $|u(x, t) - U_0^m|$ .

Tabela 1:

x	$U_i^m$	$u(x, t)$	Erro Absoluto
x = 0.0	0.0	0.0	0.0
x = 0.1	0.00001651436420	0.00001598334349	$6.9427284 \cdot 10^{-7}$
x = 0.2	0.00003141218738	0.00003040212597	0.00000132058541
x = 0.3	0.00004323516679	0.00004184493652	0.00000181762990
x = 0.4	0.00005082598685	0.00004919167315	0.00000213675209
x = 0.5	0.00005344160518	0.00005172318605	0.00000224671411
x = 0.6	0.00005082598685	0.00004919167314	0.00000213675209
x = 0.7	0.00004323516679	0.00004184493650	0.00000181762990
x = 0.8	0.00003141218738	0.00003040212596	0.00000132058542
x = 0.9	0.00001651436421	0.00001598334345	$6.9427287 \cdot 10^{-7}$
x = 1.0	0.0	0.0	0.0

### Consistência e Estabilidade

Para a análise de consistência do método, expandimos em série de Taylor cada termo de (2.3) em torno de  $U_0^m = u(x^0, t_0)$ :

$$\begin{aligned}
U_0^{m+1} &= u(x^0, t_0) + \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2), \\
U_1^m &= u(x^0, t_0) + \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \\
U_{-1}^m &= u(x^0, t_0) - \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \\
U_0^m &= u(x^0, t_0).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Substituindo os resultados de (2.9) em (2.3) temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t + \Delta x^2) = 0. \tag{2.10}$$

Este resultado deve ser interpretado da seguinte maneira: o esquema de discretização (2.3) resolve a Equação (2.2), introduzindo um erro de truncamento  $\epsilon = O(\Delta t + \Delta x^2)$ , o que mostra que o método é consistente com a EDP em questão, pois

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \epsilon = 0. \quad (2.11)$$

Para verificar a estabilidade, vamos usar o critério de von Neumann, fazendo as seguintes substituições em (2.4):

$$\begin{aligned} U_0^n &= \xi^n, \\ U_0^{n+1} &= \xi^{n+1}, \\ U_1^n &= \xi^n e^{I\beta}, \\ U_{-1}^n &= \xi^n e^{-I\beta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Desta forma, obtemos

$$\xi^{n+1} = \sigma \xi^n e^{I\beta} + (1 - 2\sigma) \xi^n + \sigma \xi^n e^{-I\beta}. \quad (2.13)$$

Dividindo toda a equação por  $\xi^n$ , temos

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma e^{I\beta} + (1 - 2\sigma) + \sigma e^{-I\beta} \\ \Rightarrow \xi &= \sigma(e^{I\beta} + e^{-I\beta}) + (1 - 2\sigma) \\ \Rightarrow \xi &= 2\sigma \cos \beta + 1 - 2\sigma \\ \Rightarrow \xi &= 1 - 2\sigma(1 - \cos \beta) = 1 - 4\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

de onde podemos concluir que  $-1 \leq \xi \leq 1$  se e somente se  $\sigma \leq 1/2$ , ou seja,

$$-1 \leq \xi \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2. \quad (2.15)$$

O resultado (2.15) estabelece a condição necessária à estabilidade e, consequentemente, à convergência do método totalmente explícito para a equação do calor. Observe, na Figura 2, o que acontece com o método quando tentamos executá-lo com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $\sigma = 1$ . Quando existe alguma condição para que um método seja estável (convergente), dizemos que tal método é *condicionalmente convergente*.

A oscilação que pode ser notada é resultado de valores espúrios, introduzidos por conta do não cumprimento da condição de estabilidade.

Vamos usar o critério da matriz para verificar a estabilidade e concluir que a condição necessária será a mesma obtida pelo critério de

von Neumann. Considerando  $U^n = V^n + E^n$ , onde  $V^n$  é a solução da EDP em um determinado instante e  $E^n$  é a perturbação introduzida pelo método numérico, o método totalmente explícito para o problema (2.5) pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{aligned} U^{m+1} &= AU^m, \\ U^{m+1} &= E^{m+1} + V^{m+1} = A(E^m + V^m), \\ E^{m+1} &= AE^m, \end{aligned} \quad (2.16)$$

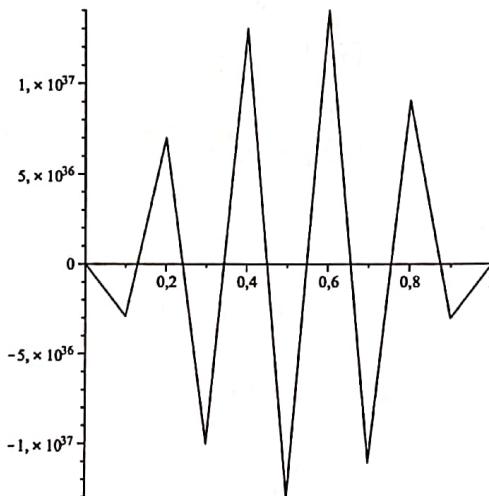


Figura 2: Solução da equação (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $T = 1$ .

onde

$$A_{(N-1,N-1)} = \begin{pmatrix} 1 - 2\sigma & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 1 - 2\sigma & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma & 1 - 2\sigma & \sigma \\ 0 & \dots & 0 & \sigma & 1 - 2\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

de forma que a escolha de  $\Delta x$  divide o intervalo  $0 \leq x \leq 1$  em  $N + 1$  pontos.

Para satisfazer o critério, todos os autovalores  $\lambda$  da matriz  $A$  devem satisfazer  $|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t)$ , ou seja,  $\rho(A) \leq 1 + O(\Delta t)$ . Desta forma, o erro  $E^{m+1}$  não é amplificado pelo método, satisfazendo a relação (1.23). Para fazer esta demonstração, vamos recorrer ao seguinte teorema:

**Teorema 2.1** (Gershgorin). Para uma matriz  $A_{(N,N)}$ , o maior autovalor em módulo é sempre menor do que o maior valor de  $S_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ .

Para a matriz  $A$  do método, podemos concluir que todos os autovalores estão no intervalo  $[1 - 4\sigma, 1]$ , o que nos leva à condição

$$1 - 4\sigma \geq -1 \Rightarrow \sigma \leq 1/2, \quad (2.18)$$

que é a mesma condição obtida pelo critério de von Neumann.

### Método Totalmente Implícito

A discretização do termo  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  pode ser efetuada no instante de tempo  $m+1$ , em vez de no instante  $m$ , como no método explícito. Quando esta estratégia é escolhida, temos o chamado método totalmente implícito, e o esquema de discretização fica:

$$\begin{aligned} \frac{U_0^{m+1} - U_0^m}{\Delta t} - \alpha^2 \frac{U_1^{m+1} - 2U_0^{m+1} + U_{-1}^{m+1}}{\Delta x^2} &= 0 \\ \Rightarrow -U_0^m &= \sigma U_1^{m+1} - (2\sigma + 1)U_0^{m+1} + \sigma U_{-1}^{m+1}, \quad \sigma = \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para ilustrar a utilização do método, vamos usar o problema definido em (2.5) com  $\Delta x = 0.25$ . Assim, temos que avaliar cada  $U_k^{m+1}$ , dados os valores de  $U_k^m$ , para  $k = 1, 2, 3$ . Vale lembrar que, pela condição de contorno de Dirichlet,  $U_0^{m+1} = U_4^{m+1} = 0$ .

Os seguintes valores de  $U_k^0$ , são obtidos pela aplicação da condição inicial:

$$\begin{aligned} U_0^0 &= 0, \\ U_1^0 &= \text{sen}(\frac{\pi}{4}) \simeq 0.7071, \\ U_2^0 &= \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1, \\ U_3^0 &= \text{sen}(\frac{3\pi}{4}) \simeq 0.7071, \\ U_4^0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para avaliar cada  $U_k^1$ , temos que montar todas as equações que surgem para cada valor de  $k = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} -U_1^0 &= \sigma U_2^1 - (2\sigma + 1)U_1^1 + \sigma U_0^1, \quad j = 1, \\ -U_2^0 &= \sigma U_3^1 - (2\sigma + 1)U_2^1 + \sigma U_1^1, \quad j = 2, \\ -U_3^0 &= \sigma U_4^1 - (2\sigma + 1)U_3^1 + \sigma U_2^1, \quad j = 3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Podemos escrever estas equações como um sistema linear  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 2\sigma + 1 & -\sigma & 0 \\ -\sigma & 2\sigma + 1 & -\sigma \\ 0 & -\sigma & 2\sigma + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^0 + \sigma U_0^1 \\ U_2^0 \\ U_3^0 + \sigma U_4^1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Fazendo  $\Delta t = 0.01$ , obtemos  $\sigma = 0.016$  e os seguintes valores de  $U_k^1$ :

$$\sigma = \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1 \frac{0.001}{0.25^2} = 0.016,$$

$$\begin{aligned} U_0^1 &= 0, \\ U_1^1 &= 0.7005409037, \\ U_2^1 &= 0.9907144468, \\ U_3^1 &= 0.7005409037, \\ U_4^1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para se obter os valores  $U_k^2, U_k^3, U_j^4 k, \dots, U_k^m, k = 1, 2, 3$ , basta repetir o processo de resolução do sistema linear  $3 \times 3$ . Podemos também escrever este sistema da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma + 1 & -\sigma & 0 \\ -\sigma & 2\sigma + 1 & -\sigma \\ 0 & -\sigma & 2\sigma + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1^{m+1} \\ U_2^{m+1} \\ U_3^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^m + \sigma U_0^{m+1} \\ U_2^m \\ U_3^m + \sigma U_4^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Para valores de  $\Delta x$  que dividem o intervalo  $0 \leq x \leq 1$  em  $N + 1$  pontos, temos o seguinte sistema  $(N - 1) \times (N - 1)$ :

$$\begin{pmatrix} 2\sigma + 1 & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2\sigma + 1 & -\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & -\sigma & 2\sigma + 1 & -\sigma \\ 0 & \dots & 0 & -\sigma & 2\sigma + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1^{m+1} \\ U_2^{m+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{m+1} \\ U_{N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^m + \sigma U_0^{m+1} \\ U_2^m \\ \vdots \\ U_{N-2}^m \\ U_{N-1}^m + \sigma U_N^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

A seguir, a listagem de um programa em Maple 12 <sup>TM</sup>, para resolver a equação do calor pelo método totalmente implícito. O programa está

preparado para os valores  $\alpha^2 = 1$ ,  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $T = 1$  e condição inicial  $h(x) = \sin(\pi x)$ , mas estes podem ser mudados nas linhas 2, 3, 4, 5 e 13, respectivamente.

Listing 2: Método Implícito para a Equação do Calor

```

1 Digits := 10:
2 alpha := 1:
3 dx := 0.1:
4 dt := 0.001:
5 Tf := 1.0:
6 np := round (1/dx + 1):
7 nT := round (Tf/dt):
8 sig := alpha*(dt/(dx^2)):
9 U := Matrix(np-2,1):
10 V := Matrix(np-2,1):
11 for i from 1 to np-2 do
12     x := dx*(i):
13     U[i] := sin (Pi*x):
14 end:
15 A := Matrix(np-2):
16 A[1,1] := 1 + 2*sig:
17 A[1,2] := -sig:
18 for i from 2 to (np-3) do
19     x := dx*i:
20     A[i,i-1] := -sig:
21     A[i,i] := 1 + 2*sig:
22     A[i,i+1] := -sig:
23 end:
24 A[np-2,np-3] := -sig:
25 A[np-2,np-2] := 1 + 2*sig:
26 for m from 1 to nT do
27     t := dt*m:
28     V := LinearSolve(A,U):
29     U := V;
30 end:
```

O resultado da execução deste programa pode ser visualizado na Figura 3 (para valores distintos de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  e  $T$  ), onde o gráfico contínuo é a solução exata e os pontos, a solução aproximada.

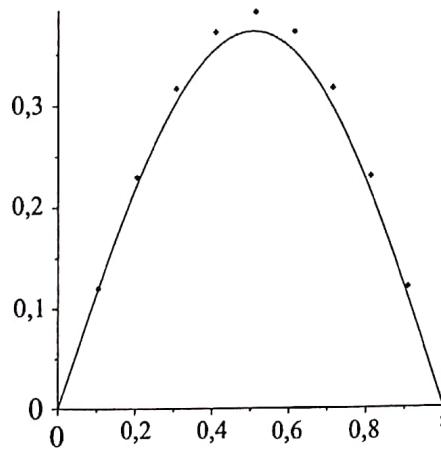


Figura 3: Solução da Equação (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $T = 0.1$ .

## Consistência e Estabilidade

Para a análise de consistência, usaremos a mesma estratégia que foi adotada para o método totalmente explícito, mas desta vez devemos expandir em série de Taylor os termos  $U_0^{m+1}$ ,  $U_1^{m+1}$  e  $U_{-1}^{m+1}$  em torno de  $u(x^0, t_0)$ .

$$\begin{aligned}
 U_0^{m+1} &= u(x^0, t_0) + \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial t^3} \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \\
 U_1^{m+1} &= u(x^0, t_0) + \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 \\
 &\quad + \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x^2 \partial t} \Delta x^2 \Delta t \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x \partial t^2} \Delta x \Delta t^2 + O(\Delta t^3 + \Delta x^4), \\
 U_{-1}^{m+1} &= u(x^0, t_0) + \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial t} \Delta t - \frac{\partial u(x^0, t_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 \\
 &\quad - \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x^0, t_0)}{\partial t^2} \Delta t^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x^2 \partial t} \Delta x^2 \Delta t \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u(x^0, t_0)}{\partial x \partial t^2} \Delta x \Delta t^2 + O(\Delta t^3 + \Delta x^4), \\
 U_0^m &= u(x^0, t_0).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Substituindo os resultados de (2.26) em (2.19), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t + \Delta x^2) = 0, \quad (2.27)$$

o que prova que o método é consistente com a EDP em questão e o erro de truncamento é proporcional a  $\Delta t$  e  $\Delta x^2$ .

Para verificar a estabilidade, vamos usar o critério de von Neumann,

$$\begin{aligned} U_0^m &= -\sigma U_1^{m+1} + (2\sigma + 1)U_0^{m+1} - \sigma U_{-1}^{m+1} = \xi^m, \\ U_0^{m-1} &= -\sigma U_1^m + (2\sigma + 1)U_0^m - \sigma U_{-1}^m = \xi^{m-1}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

de onde temos:

$$\begin{aligned} \xi^{m-1} &= -\sigma \xi^m e^{I\beta} + (2\sigma + 1)\xi^m - \sigma \xi^m e^{-I\beta} \\ \Rightarrow \xi^{-1} U_0^m &= -\sigma U_0^m + (1 + 2\sigma)U_0^m - \sigma e^{I\beta} U_0^m \\ \Rightarrow \xi^{-1} &= -\sigma e^{-I\beta} + (1 + 2\sigma) - \sigma e^{I\beta} \\ \Rightarrow \xi^{-1} &= -\sigma(e^{-I\beta} + e^{I\beta}) + (1 + 2\sigma) \\ \Rightarrow \xi^{-1} &= -2\sigma \cos \beta + 1 + 2\sigma \\ \Rightarrow \xi^{-1} &= 1 + 4\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \\ \Rightarrow \xi &= \frac{1}{1 + 4\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

É possível observar que  $|\xi| \leq 1$  para qualquer valor de  $\beta$ , o que prova a estabilidade do método. Na Figura 3, temos a execução do método para  $\sigma = 1$  que, no método totalmente explícito, causaria instabilidade, mas, no implícito, não. Se, no mesmo exemplo, aumentarmos o tempo final para  $T = 1$ , poderemos observar que a solução aproximada não é muito precisa, mas, mesmo assim, o método se comporta de forma estável (Figura 4).

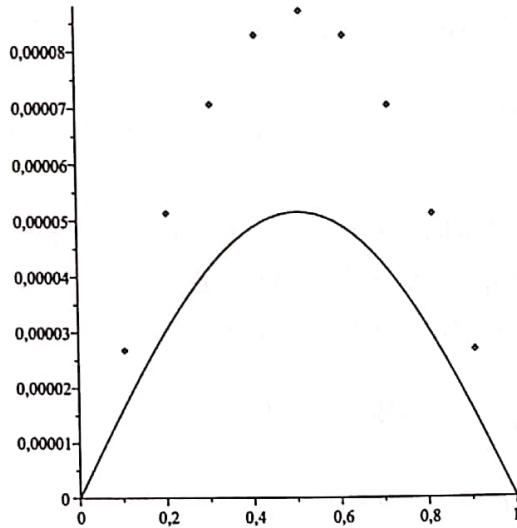


Figura 4: Solução da equação (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $T = 1$ .

### Método Implícito de Crank-Nicolson

Este método consiste em usar a aproximação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{U_1^{m+1} - 2U_0^{m+1} + U_{-1}^{m+1} + U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2} \right), \quad (2.30)$$

que é a média aritmética entre os métodos explícito e implícito. Desta forma, o esquema de discretização para a equação do calor fica:

$$\begin{aligned} \frac{U_0^{m+1} - U_0^m}{\Delta t} - \alpha^2 \frac{1}{2} \left( \frac{U_1^{m+1} - 2U_0^{m+1} + U_{-1}^{m+1} + U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow -\sigma U_1^{m+1} + (2 + 2\sigma) U_0^{m+1} - \sigma U_{-1}^{m+1} &= \sigma U_1^m + (2 - 2\sigma) U_0^m + \sigma U_{-1}^m, \\ \sigma &= \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

O método definido em (2.31), aplicado ao problema (2.5), produz o sistema linear  $(N - 1) \times (N - 1)$  a seguir, considerando que o intervalo

$0 \leq x \leq 1$  foi dividido em  $N + 1$  pontos:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccccc} 2+2\sigma & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma \\ 0 & \dots & 0 & -\sigma & 2\sigma+1 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} U_1^{m+1} \\ U_2^{m+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{m+1} \\ U_{N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \\ & \left( \begin{array}{ccccc} 2-2\sigma & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 2-2\sigma & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma & 2-2\sigma & \sigma \\ 0 & \dots & 0 & \sigma & 2\sigma+1 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} U_1^m \\ U_2^m \\ \vdots \\ U_{N-2}^m \\ U_{N-1}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma U_0^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma U_N^m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

A exemplo dos métodos explícito e implícito, listamos mais adiante o código em Maple 12<sup>TM</sup> para o método de Crank-Nicolson.

A Figura 5 mostra a solução aproximada para o Problema (2.5) obtida pelo método de Crank-Nicolson. Vale a pena obsevar que os valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  e  $T$  são os mesmos usados no exemplo da Figura 4 pelo método totalmente implícito. Repare que o método de Crank-Nicolson tem uma precisão melhor que os métodos explícito e implícito, pois, como veremos adiante, o erro introduzido é  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ .

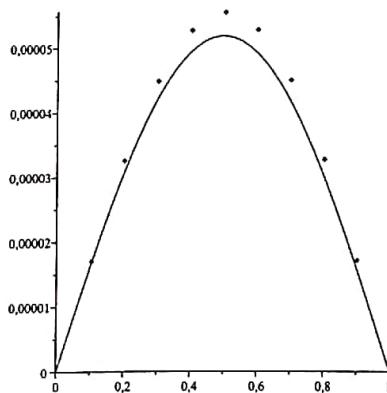


Figura 5: Solução da equação (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $T = 1$ .

## Consistência e Estabilidade

Para verificar a consistência, usaremos a mesma estratégia dos métodos explícito e implícito, ou seja, expandir em série de Taylor os termos  $U_0^{m+1}$ ,  $U_{-1}^{m+1}$ ,  $U_1^{m+1}$ ,  $U_0^m$ ,  $U_{-1}^m$  e  $U_1^m$  em torno de  $u(x^0, t_0)$  e substituir em (2.30). A expansão destes termos já foi mostrada em (2.9) para o método explícito e em (2.26) para o método implícito. Fazendo as substituições, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2 + \Delta x^2) = 0. \quad (2.33)$$

Assim, o método é consistente e o erro de truncamento introduzido é  $\epsilon = O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ , que é menor que o erro dos métodos explícito e implícito, que produzem um erro  $\epsilon = O(\Delta t + \Delta x^2)$ .

Para a análise de estabilidade, vamos usar o critério de von Neumann. Substituindo  $U_j^m = \xi^m e^{Ij\beta}$  em (2.31) obtemos a relação

$$\xi = \frac{1 - 2\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 2\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}, \quad (2.34)$$

de onde podemos deduzir que  $|\xi| \leq 1$ ,  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ . Assim o método é incondicionalmente estável.

Listing 3: Método de Crank-Nicolson para a Equação do Calor

```

1 Digits := 10:
2 alpha := 1:
3 dx := 0.1:
4 dt := 0.01:
5 Tf := 1:
6 np := round (1/dx + 1):
7 nT := round (Tf/dt):
8 sig := alpha*(dt/(dx^2)):
9 W := Matrix(np-2,1):
10 U := Matrix(np-2,1):
11 V := Matrix(np-2,1):
12 for i from 1 to np-2 do
13     x := dx*(i):
14     U[i] := sin (Pi*x):
15 end:
16 A := Matrix(np-2):
17 A[1,1] := 2 + 2*sig:
18 A[1,2] := -sig:
19 for i from 2 to (np-3) do
20     x := dx*i:
21     A[i,i-1] := -sig:
22     A[i,i] := 2 + 2*sig:
23     A[i,i+1] := -sig:
24 end:
25 A[np-2,np-3] := -sig:
26 A[np-2,np-2] := 2 + 2*sig:
27 B := Matrix(np-2):
28 B[1,1] := 2 - 2*sig:
29 B[1,2] := sig:
30 for i from 2 to (np-3) do
31     x := dx*i:
32     B[i,i-1] := sig:
33     B[i,i] := 2 - 2*sig:
34     B[i,i+1] := sig:
35 end:
36 B[np-2,np-3] := sig:
37 B[np-2,np-2] := 2 - 2*sig:
38 for m from 1 to nT do
39     t := dt*m:
40     W := Multiply(B,U):
41     V := LinearSolve(A,W):
42     U := V;
43 end:

```

### Condição de Contorno de Neumann

Até o presente momento, todos os exemplos usados basearam-se no problema definido em (2.2), no qual as condições de contorno são de Dirichlet, ou seja, os valores informados na fronteira são valores da função  $u(x, t)$  que desejamos determinar. Se, em vez disso, o problema estipular os valores da derivada  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  na fronteira, temos a chamada condição de contorno de Neumann.

Nesta seção, vamos definir um problema com condição de contorno de Neumann e mostrar como resolvê-lo pelo método de Crank-Nicolson. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), \\ u_x(0, t) &= p(t), \\ u_x(1, t) &= q(t). \end{aligned} \tag{2.35}$$

É possível perceber na definição do problema (2.35) que os valores da função  $u(x, t)$  não são conhecidos em  $x = 0$  e  $x = 1$ , logo tais valores deverão aparecer como incógnitas no esquema de discretização. Assim, nosso problema agora é obter os valores  $(U_0^{m+1}, U_1^{m+1}, \dots, U_{N-1}^{m+1}, U_N^{m+1})^T$ , dados  $(U_0^m, U_1^m, \dots, U_{N-1}^m, U_N^m)^T$ , de forma que agora temos  $N + 1$  variáveis a determinar, em vez de  $N - 1$ , como nos problemas de Dirichlet. Para incluir  $U_0$  e  $U_N$  no problema, vamos usar a seguinte aproximação para as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t_m)}{\partial t} &= \frac{U_1 - U_{-1}}{2\Delta x} = p(t_m) = p(m\Delta t), \\ \frac{\partial u(1, t_m)}{\partial t} &= \frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2\Delta x} = q(t_m) = q(m\Delta t). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Estas condições levam às seguintes relações:

$$\begin{aligned} U_{-1}^m &= U_1^m - 2\Delta x p(t_m), & U_{N-1}^m &= U_{N+1}^m - 2\Delta x q(t_m), \\ U_{-1}^{m+1} &= U_1^m - 2\Delta x p(t_{m+1}), & U_{N-1}^{m+1} &= U_{N+1}^m - 2\Delta x q(t_{m+1}). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Montando o sistema  $(N + 1) \times (N + 1)$ ,  $j = 0, \dots, N$ , temos:

$$\begin{aligned} -\sigma U_{-1}^{m+1} + (2 + 2\sigma)U_0^{m+1} - \sigma U_1^{m+1} &= \sigma U_{-1}^m + (2 - 2\sigma)U_0^m + \sigma U_1^m \\ -\sigma U_0^{m+1} + (2 + 2\sigma)U_1^{m+1} - \sigma U_2^{m+1} &= \sigma U_0^m + (2 - 2\sigma)U_1^m + \sigma U_2^m \\ \vdots \\ -\sigma U_N^{m+1} + (2 + 2\sigma)U_{N-1}^{m+1} - \sigma U_{N-2}^{m+1} &= \sigma U_N^m + (2 - 2\sigma)U_{N-1}^m + \sigma U_{N-2}^m \\ -\sigma U_{N+1}^{m+1} + (2 + 2\sigma)U_N^{m+1} - \sigma U_{N-1}^{m+1} &= \sigma U_{N+1}^m + (2 - 2\sigma)U_N^m + \sigma U_{N-1}^m \end{aligned} \quad (2.38)$$

Substituindo (2.37) em (2.38), e representando o sistema na forma matricial, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 + 2\sigma & -2\sigma & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2 + 2\sigma & -\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & -\sigma & 2 + 2\sigma & -\sigma \\ 0 & \dots & 0 & -\sigma & 2\sigma + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_0^{m+1} \\ U_1^{m+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{m+1} \\ U_N^{m+1} \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 2 - 2\sigma & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 2 - 2\sigma & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma & 2 - 2\sigma & \sigma \\ 0 & \dots & 0 & \sigma & 2\sigma + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_0^m \\ U_1^m \\ \vdots \\ U_{N-1}^m \\ U_N^m \end{pmatrix} &+ \\ + \begin{pmatrix} 2\sigma\Delta x R(t_{m+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\sigma\Delta x S(t^{m+1}) \end{pmatrix} & \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$R(t_{m+1}) = p(t_{m+1}) - p(t_m), \quad S(t_{m+1}) = q(t_{m+1}) - q(t_m)$$

A Figura 6 mostra a solução para o problema definido em (2.35) com  $p(t) = 0$  e  $q(t) = 0$  pelo método de Crank-Nicolson, com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $T = 1$ , obtida pela execução do programa em Maple 12<sup>TM</sup>, apresentado. Os pontos representam a solução aproximada e o gráfico contínuo, a solução exata.

A solução exata foi obtida considerando-se  $t \rightarrow \infty$ , pois, dadas as condições de contorno  $p(t) = 0$  e  $q(t) = 0$ , a função  $u(x, t)$  tende a se “estabilizar” com o passar do tempo, ou seja, as trocas de calor deixam de

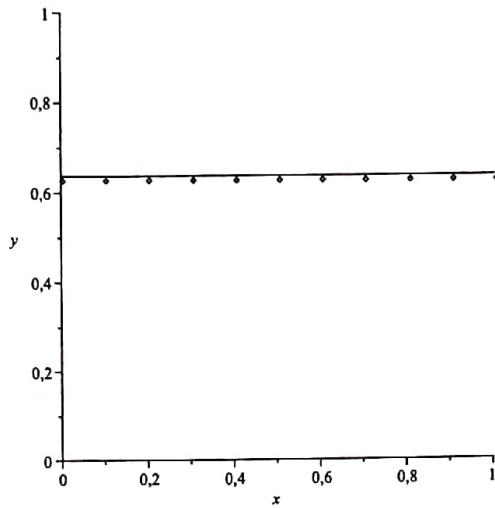


Figura 6: Solução da Equação (2.5) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  e  $T = 1$ .

acontecer. Na realidade, isto corresponde à equação  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , conhecida como equação de Laplace (veja o Capítulo 8) e cujos métodos numéricos veremos em detalhes mais adiante. Por enquanto, basta sabermos que a solução para  $t \rightarrow \infty$  pode ser obtida por:

$$u(x) = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}. \quad (2.40)$$

Listing 4: Método de Crank-Nicolson para a Equação do Calor

```

1 alpha := 0.1:
2 Digits := 30:
3 dx := 0.1: dt := 0.01: Tf := 1:
4 np := round (1/dx + 1):
5 nT := round (Tf/dt):
6 sig := alpha*(dt/(dx^2)):
7 W := Matrix(np,1):
8 U := Matrix(np,1):
9 V := Matrix(np,1):
10 for i from 2 to (np-1) do
11     x := dx*(i-1):
12     U[i] := sin (Pi*x):
13 end:
14 U[1] := 0: U[np] := 0:
15 A := Matrix(np):
16 A[1,1] := 2 + 2*sig:
17 A[1,2] := -2*sig:
18 for i from 2 to (np-1) do

```

```

19      x := dx*i:
20      A[i,i-1] := -sig:
21      A[i,i]   := 2 + 2*sig:
22      A[i,i+1] := -sig:
23  end:
24  A[np,np-1] := -2*sig:
25  A[np,np]   := 2 + 2*sig:
26  B := Matrix(np):
27  B[1,1]   := 2 - 2*sig:
28  B[1,2]   := 2*sig:
29  for i from 2 to (np-1) do
30      x := dx*i:
31      B[i,i-1] := sig:
32      B[i,i]   := 2 - 2*sig:
33      B[i,i+1] := sig:
34  end:
35  B[np,np-1] := 2*sig:
36  B[np,np]   := 2 - 2*sig:
37  for m from 1 to nT do
38      t := dt*m:
39      W := Multiply(B,U):
40      V := LinearSolve(A,W):
41      U := V;
42  end:

```

### 3. Equações Elíticas

Em primeiro lugar, vamos considerar a equação de Laplace em uma dimensão espacial  $u_{xx} = 0$ , com condição de contorno de Dirichlet, para em seguida tratarmos da equação de Poisson em duas dimensões espaciais,  $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ , ainda com condição de contorno de Dirichlet.

#### A Equação de Laplace em Dimensão 1

Esta equação pode ser escrita como  $u_{xx} = 0$  e, com as devidas condições de contorno, pode formar o problema a seguir:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= A, \quad A \in \mathbb{R}, \\ u(1) &= B, \quad B \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aplicando o operador de diferenças finitas para o termo  $u_{xx}$ , temos:

$$\frac{U_1 - 2U_0 + U_{-1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{3.2}$$

É importante observar que, como dito anteriormente, a equação de Laplace modela problemas de difusão no caso limite  $t \rightarrow \infty$ , logo as condições iniciais de distribuição de temperatura, bem como o coeficiente de difusão  $\alpha^2$  não influenciam no resultado final do problema, pelo menos para condições de contorno de Dirichlet.

Para resolver o problema (3.1), vamos tomar como exemplo  $A = 0$ ,  $B = 1$ . Fazendo  $\Delta x = 0.25$ , temos os seguintes pontos no intervalo discreto:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.25$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = 0.75$  e  $x_4 = 1$ . Assim, temos as seguintes equações obtidas de (3.2):

$$\begin{aligned} U_2^\infty - 2U_1^\infty + U_0^\infty &= 0, \quad j = 1, \\ U_3^\infty - 2U_2^\infty + U_1^\infty &= 0, \quad j = 2, \\ U_4^\infty - 2U_3^\infty + U_2^\infty &= 0, \quad j = 3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pelas condições de contorno,  $U_0^\infty = A$  e  $U_4^\infty = B$ , de modo que o sistema (3.3) pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1^\infty \\ U_2^\infty \\ U_3^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Fazendo  $A = 0$ ,  $B = 1$  e resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{aligned} U_1^\infty &= 0.25, \\ U_2^\infty &= 0.50, \\ U_3^\infty &= 0.75. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Podemos generalizar este problema para o caso de um valor de  $\Delta x$  que divida o intervalo  $0 \leq x \leq 1$  em  $N + 1$  pontos, de modo que teremos um sistema  $(N - 1) \times (N - 1)$  a resolver:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1^\infty \\ U_2^\infty \\ \vdots \\ U_{N-2}^\infty \\ U_{N-1}^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Percebe-se facilmente que a resolução do problema (3.1) depende apenas da resolução de um sistema linear uma única vez, logo a taxa de convergência depende do método escolhido para solucionar o sistema. No

caso de (3.6), temos uma matriz tridiagonal, simétrica e diagonalmente dominante, logo o sistema tem solução única (GOLUB & LOAN, 1989).

Vários métodos estão disponíveis para a resolução de sistemas lineares, classificados em duas categorias. (1) Os chamados métodos diretos encontram a solução exata do sistema através de um número finito de operações algébricas. Entre eles, temos o método da eliminação de Gauss, a fatoração LU e outros. (2) Os métodos iterativos encontram soluções aproximadas, através de sequências convergentes à solução exata. Entre eles, temos os métodos de Gauss-Seidel, de Jacobi, Successive Overrelaxation (SOR) e outros. Mais detalhes sobre resolução de sistemas lineares podem ser encontrados em (GOLUB & LOAN, 1989) e (DUCHATEAU & ZACHMANN, 1986).

## A Equação de Poisson em Dimensão 2

Consideremos a equação  $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ , conhecida como equação de Poisson, com a qual vamos montar um problema de Dirichlet em um retângulo.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f(x, y), \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \\ u(0, y) &= p(y), \\ u(1, y) &= q(y), \\ u(x, 0) &= r(x), \\ u(x, 1) &= s(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aplicando o operador de diferenças para  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$  definido em (1.22), temos:

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1,k} - 2U_{j,k} + U_{j-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,k+1} - 2U_{j,k} + U_{j,k-1}}{\Delta y^2} &= f(x_j, y_k), \\ U_{0,k} = p(k\Delta y), \quad U_{1,k} = q(k\Delta y), \quad U_{j,0} = r(j\Delta x), \quad U_{j,1} = s(j\Delta x), \\ 0 \leq j \leq N_x, \quad 0 \leq k \leq N_y. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se fizermos  $\Delta x = \Delta y = h$ , podemos escrever (3.8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_{j+1,k} + U_{j-1,k} + U_{j,k+1} + U_{j,k-1} - 4U_{j,k} &= h^2 f(x_j, y_k), \\ U_{0,k} = p(kh), \quad U_{1,k} = q(kh), \quad U_{j,0} = r(jh), \quad U_{j,1} = s(jh), \\ 0 \leq j \leq N_x, \quad 0 \leq k \leq N_y. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Vamos tomar como exemplo para o problema (3.9) os valores  $h = 0.25$ ,  $L_x = L_y = 1$  e as seguintes condições de contorno:  $p(y) = 1$ ,  $q(y) = 1$ ,  $r(x) = 1$ ,  $s(x) = 1$  e  $f(x, y) = 2$ . Assim temos  $N_x = N_y = 5$ , de forma que teremos um sistema  $9 \times 9$  para determinar os valores do seguinte vetor:

$$(U_{1,1}, U_{2,1}, U_{3,1}, U_{1,2}, U_{2,2}, U_{3,2}, U_{1,3}, U_{2,3}, U_{3,3})^T.$$

Vale ressaltar que os valores  $U_{0,k} = 1$ ,  $U_{4,k} = 1$ ,  $U_{j,0} = 3$  e  $U_{j,4} = 3$  são conhecidos pela condição de contorno de Dirichlet. Desta forma, o sistema que temos a resolver fica:

$$\begin{aligned} -U_{1,0} + 4U_{1,1} - U_{1,2} - U_{2,1} - U_{0,1} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 1, \quad k = 1, \\ -U_{2,0} + 4U_{2,1} - U_{2,2} - U_{3,1} - U_{1,1} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 2, \quad k = 1, \\ -U_{3,0} + 4U_{3,1} - U_{3,2} - U_{4,1} - U_{2,1} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 3, \quad k = 1, \\ -U_{1,1} + 4U_{1,2} - U_{1,3} - U_{2,2} - U_{0,2} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 1, \quad k = 2, \\ -U_{2,1} + 4U_{2,2} - U_{2,3} - U_{3,2} - U_{1,2} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 2, \quad k = 2, \\ -U_{3,1} + 4U_{3,2} - U_{3,3} - U_{4,2} - U_{2,2} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 3, \quad k = 2, \\ -U_{1,2} + 4U_{1,3} - U_{1,4} - U_{2,3} - U_{0,3} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 1, \quad k = 3, \\ -U_{2,2} + 4U_{2,3} - U_{2,4} - U_{3,3} - U_{1,3} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 2, \quad k = 3, \\ -U_{3,2} + 4U_{3,3} - U_{3,4} - U_{4,3} - U_{2,3} &= -(0.25)^2 \times 2, \quad j = 3, \quad k = 3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial:

$$\left( \begin{array}{ccccccccc} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{pmatrix} = -(0.25)^2 \times \begin{pmatrix} 2 + U_{1,0} + U_{0,1} \\ 2 + U_{2,0} \\ 2 + U_{3,0} + U_{4,1} \\ 2 + U_{0,2} \\ 2 \\ 2 + U_{4,2} \\ 2 + U_{1,4} + U_{0,3} \\ 2 + U_{2,4} \\ 2 + U_{3,4} + U_{4,3}. \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Substituindo as condições de contorno, podemos montar e resolver o sistema com os seguintes comandos Maple  $TM$ :

Listing 5: Equação de Poisson em 2D

```

1 > with(LinearAlgebra):
2
3 > A := Matrix(9, [4,-1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0,
4           -1, 4,-1, 0, -1, 0, 0, 0, 0,
5           0, -1, 4, 0, 0, -1, 0, 0, 0,
6           -1, 0, 0, 4, -1, 0, -1, 0, 0,
7           0, -1, 0, -1, 4,-1, 0,-1, 0,
8           0, 0, -1, 0, -1, 4, -1, 0,-1,
9           0, 0, 0, -1, 0, 0, 4, -1, 0,
10          0, 0, 0, 0, -1, 0,-1, 4,-1,
11          0, 0, 0, 0, 0,-1, 0,-1, 4]);
12
13
14 > B:= Matrix(9,1, [4,3,4,3,2,3,4,3,4]);
15
16 > U := LinearSolve(A,-0.25^2*B);

```

Obtemos assim, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
U_{1,1} &= -0.152522935779816515, \\
U_{2,1} &= -0.181407683486238536, \\
U_{3,1} &= -0.163417431192660556, \\
U_{1,2} &= -0.178684059633027526, \\
U_{2,2} &= -0.222190366972477072, \\
U_{3,2} &= -0.222262041284403689, \\
U_{1,3} &= -0.152522935779816543, \\
U_{2,3} &= -0.181407683486238563, \\
U_{3,3} &= -0.163417431192660556.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Fica como exercício montar a formulação geral do método de diferenças finitas para o problema (3.7), com valores arbitrários de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .

### Consistência

De forma análoga aos métodos para equações parabólicas, basta fazer a expansão em série de Taylor dos termos  $U_{j+1,k}$ ,  $U_{j-1,k}$ ,  $U_{j,k+1}$ ,  $U_{j,k-1}$  e substituir em (3.8). Com este procedimento, encontramos o erro de truncamento  $\epsilon = O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ , que prova a consistência do método.

#### 4. Equações Hiperbólicas

O principal protótipo para as equações hiperbólicas é a equação de onda,  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  que, em uma dimensão espacial, fica

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (4.1)$$

Com esta equação vamos definir o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u(x, 0) &= \sin(x), \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vamos tratar este problema pelo método explícito e fazer a análise de consistência e estabilidade do mesmo.

#### Método Explícito

Aplicando os operadores de diferença definidos em (1.22) e (1.23), temos:

$$\frac{U_0^{m+1} - 2U_0^m + U_0^{m-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m}{\Delta x^2}. \quad (4.3)$$

De onde deduzimos

$$U_0^{m+1} = c^2 s^2 (U_1^m - 2U_0^m + U_{-1}^m) + 2U_0^m - U_0^{m-1}, \quad (4.4)$$

sendo  $s = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

Para aplicar (4.4) na resolução do problema (4.2), deve-se fazer  $U_0^1 = U_0^0$ , devido à condição inicial  $u_t(x, 0) = 0$ . A seguir, a listagem do programa em Maple <sup>TM</sup> que resolve o problema (4.2) com  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c^2 = 1$  e  $T = \pi$ , no intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Listing 6: Equação da Onda 1D

```

1  a := 0; b := 2*Pi;
2  dx := 0.1; dt := 0.01;
3  c := 1; Tf := Pi;
4  np := round ((b - a)/dx + 1);
5  s := dt/dx;
6  nT := round(Tf/dt);
7  for i from 0 to np-1 do
8    x := dx*i;
9    U[i] := sin(x);
10   V[i] := sin(x);
11 end;
12 W[0] := 0;
13 W[np-1] := 0;
14 for i from 0 to nT do
15   t := dt*i;
16   for j from 1 to np-2 do
17     W[j] := c*s^2*(V[j+1] - 2*V[j] + V[j-1]) + 2*V[j] - U[j];
18   end;
19   for k from 0 to (np-1) do
20     U[k] := V[k];
21   end;
22   for k from 0 to (np-1) do
23     V[k] := W[k];
24   end;
25 end;

```

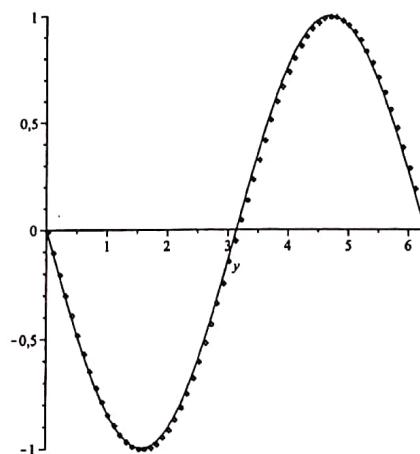


Figura 7: Equação de Onda.

O resultado da execução deste programa pode ser visto na Figura 7, onde os pontos correspondem à solução numérica e o gráfico contínuo à solução exata  $u(x, t) = \sin(x) \cos(t)$ .

## Consistência e Estabilidade

De forma análoga aos métodos para equações parabólicas e elíticas, basta fazer a expansão em série de Taylor dos termos  $U_0^{m+1}$ ,  $U_0^{m-1}$ ,  $U_1^m$  e  $U_{-1}^m$  em torno de  $U_0^m = u(x^0, t^0)$  e substituir em (4.3), de onde encontramos

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2), \quad (4.5)$$

que mostra que o erro de truncamento introduzido pelo esquema de discretização é  $\epsilon = O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$ . Em outras palavras, o método é estável, pois  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .

Quanto à estabilidade, basta fazer em (4.3) as substituições

$$\begin{aligned} U_0^m &= \xi^m, \\ U_0^{m+1} &= \xi^{m+1}, \\ U_0^{m-1} &= \xi^{m-1}, \\ U_1^m &= \xi^m e^{I\beta}, \\ U_{-1}^m &= \xi^m e^{-I\beta}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

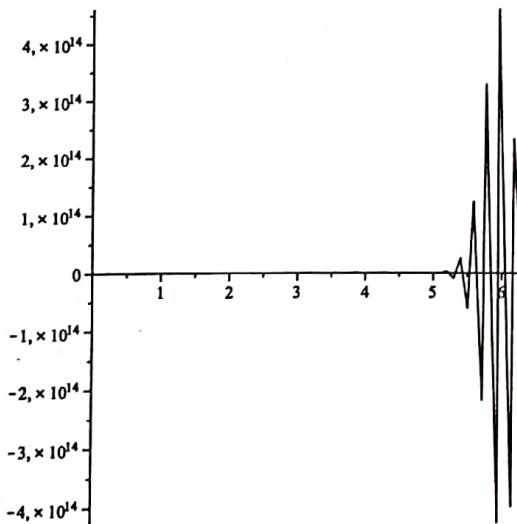


Figura 8: Equação de Onda - Instabilidade.

de onde conclui-se que o método só é estável se  $c^2 s^2 \leq 1$ , ou seja, o método é condicionalmente estável. Como exemplo, temos a Figura 8, onde o método foi aplicado ao problema (4.2) com  $\Delta x = 0.1$  e  $\Delta t = 0.2$ . Com estes valores, temos  $c^2 s^2 = 4$ , gerando instabilidade.

## 5. Exercícios

1. Obtenha o erro de truncamento introduzido pela diferença retrógrada

$$u'(x^0) \simeq \frac{u_0 - u_{-1}}{\Delta x}.$$

2. Obtenha o erro de truncamento introduzido pela diferença centrada

$$u'(x^0) \simeq \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x}.$$

3. Obtenha o erro de truncamento introduzido pela diferença

$$u''(x^0) \simeq \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta x^2}$$

para a derivada de segunda ordem.

4. Execute o programa da Listagem 1 (Método Explícito para Equação do Calor) com valores variados de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  e  $T$ . Que conclusões podemos tirar em relação ao valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ?

5. Execute os programas das Listagens 2 e 3 com os mesmos valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  e  $T$ , usados no Exercício 4. Compare os resultados.

6. Use o programa da Listagem 6 para obter a solução do problema (4.2) para os seguintes valores de  $T$ :  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$  e  $2\pi$ . Compare os resultados obtidos com os gráficos da Figura 20 (Exemplo 2.1 do Capítulo 5).

## Referências

LIMA, E L. **Curso de Análise**. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Projeto Euclides.

LAX, P D. **Weak Solutions of Non-linear Equations and their Numerical Computation**. Comm. Pure and Applied Mathematics n. 7, 1959, p. 159-193.

DUCHATEAU, P; ZACHMANN, D W. **Theory and Problems of Partial Differential Equations**. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1986.

GOLUB G; LOAN C V. **Matrix Computations**. Baltimore and London: The John Hopkins Univ. Press, 1989.

BURDEN, R L; FAIRES, D. **Análise Numérica**. Trad. São Paulo: Thomson, 2003.

# Bibliografia

- APOSTOL, T M. **Calculus**, vol. 1 & 2. 2<sup>nd</sup> ed. Waltham, Massachusetts: Blaisdell Publishing Company, 1967 & 1969.
- APOSTOL, T M. **Mathematical Analysis**. Reading, Massachussets: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- ANTMAN, S S. **The Equation for Large Vibrations of Strings**. Amer. Math. Monthly n. 85, 1980, p. 359-370.
- BOYCE, W E; DIPRIMA, R C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 10<sup>a</sup> ed. Trad. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- CHERNOFF, P R. **Pointwise Convergence of Fourier Series**. Amer. Math. Monthly n. 87, 1980, p. 399-400.
- CARSLAW, H S. **An Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals**. New York: Dover Publications, 1950. (Reprinted from the 3<sup>rd</sup> rev. ed., 1930.)
- CHURCHILL, R V. **Séries de Fourier e Problemas de Valores de Contorno**. 2a. ed. Trad. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.
- DYM, H; McKEAN, H P. **Fourier Series and Integrals**. New York: Academic Press, 1972.
- FIGUEIREDO, D G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. Projeto Euclides.
- FOLLAND, G B. **Introduction to Partial Differential Equations**. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.
- FOSTER, J; RICHARDS, F B. **The Gibbs Phenomenon for Piecewise-Linear Approximation**. Amer. Math. Monthly, n. 98, 1991, p. 47-49.
- FULKS, W. **Advanced Calculus, An Introduction to Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1961.
- HARDY, G H; LITTLEWOOD, J E; PÓLYA, G. **Inequalities**. Cam-

- bridge: Cambridge University Press, 1973. (Reprinted from the 2<sup>nd</sup> ed., 1952.)
- IORIO, V M. **Séries de Fourier.** Mat. Univ. n. 3, 1986, p. 92-111.
- IORIO, R J, Jr; IORIO, V M. **Equações Diferenciais Parciais:** uma introdução. Rio de Janeiro: IMPA, 1988. Projeto Euclides.
- KATZNELSON, Y. **An Introduction to Harmonic Analysis.** New York: John Wiley & Sons, 1968.
- LIMA, E L. **Análise Real.** Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. Coleção Matemática Universitária.
- LAX, P D. **The formation and decay of shock waves.** Amer. Math. Monthly n. 79, 1972, p. 227-241.
- LIGHTHILL, M J. **Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions.** Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958.
- LOOMIS, L H. **An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.** Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company, 1953.
- MAIN, I G. **Vibrations and Waves in Physics.** 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- PURCELL, E M. **Electricity and Magnetism.** Berkeley Physics Course, vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.
- PROTTER, M H; WEINBERGER, H F. **Maximum Principles in Differential Equations.** Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1967.
- RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis.** 3<sup>rd</sup> ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1976.
- RUDIN, W. **Fourier Analysis on Groups.** New York: John Wiley & Sons, 1963.
- SHELUPSKY, D. **Derivation of the Gibbs Phenomenon.** Amer. Math. Monthly n. 87, 1980, p. 210-212.
- SIMMONS, G F. **Differential Equations with Applications and Historical Notes.** New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.
- SMOLLER, J. **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.** New York: Springer-Verlag, 1983.
- SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Rio de Janeiro: IMPA, 1979. Projeto Euclides.
- STAKGOLD, I. **Green's Functions and Boundary Value Problems.** New York: John Wiley & Sons, 1979.
- STEWART, J. **Cálculo.** Vol. II, 4<sup>a</sup> ed. Trad. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

- SYMON, K R. **Mechanics**. Reading, Massachussets: Addison-Wesley Publishing Company, 1960.
- WEISS, G. **Harmonic Analysis**. IN: MAA Studies in Math. vol. 3, Studies in Real and Complex Analysis, ed. by HIRSCHMAN, I I, Jr, 1965, p. 124-178.
- WHITHAM, G B. **Linear and Nonlinear Waves**. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- ZACHMANOGLOU, E D; THOE, D. **Introduction to Partial Differential Equations with Applications**. Williams and Wilkins, 1976.
- ZYGMUND, A. **Notes on the Theory of Fourier Series**. IN: MAA Studies in Math. vol. 13, Studies in Harmonic Analysis, ed. by ASH, J M, 1976, p. 1-19.

# Índice Remissivo

- $\bar{A}$ , 2  
 $\hat{A}$ , 2  
Abel somável, 166  
aberto,  
    em  $\mathbb{R}^n$ , 2  
    em  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , 249  
auto-função, 117  
auto-valor, 117  
 $B(x_0; r)$ , 1  
Bernoulli, Daniel, 85  
Bessel  
    desigualdade, 136-138  
    Equação, 216  
    funções, 217  
bola aberta, 1  
bordo, 2  
Bunyakowski, 133  
Burger, equação, 5, 59-60  
  
 $(c - 1)$ -somável, 166  
 $\mathbb{C}$ , 1  
 $C(\Omega), C^k(\Omega)$ , 7  
 $C_{\mathbb{C}}(\Omega), C_{\mathbb{C}}^k(\Omega)$ , 8  
 $C_{\mathbb{C}}([0, l])$ , 117  
 $C_{\text{per}}(2l)$ , 148  
campo vetorial, 250  
Cauchy, 133  
Cauchy, problema, 12, 26-35,  
    48-56  
  
Cauchy-Kowalewski,  
    teorema, 56  
CBS, desigualdade, 133, 233  
Chernoff, Paulo R., 150  
coeficientes de Fourier, 122-130  
condição  
    de compatibilidade, 13  
    de contorno, 11  
    de Dirichlet, 12  
    de Neumann, 12  
    de salto, 65  
    inicial, 12  
conjunto  
    conexo, 249  
    ortogonal, 124  
continuidade uniforme, 158-160  
convergência  
    pontual, 143  
        de séries de Fourier,  
        148-154  
    uniforme, 143  
        de séries de Fourier,  
        154-158  
convolução, 158-167, 230-235  
curva  
    característica, 44, 49, 77,  
    78-82  
    característica plana, 25, 28,  
    59  
    regular, 45

- suave, 27
- $\delta_{jk}$ , 130
- $\partial A$ , 2
- $\partial/\partial x$ , 2
- $\partial_x$ , 2
- $D_1, D_2$ , 2
- d'Alembert, 85
- delta de Kronecker, 130
- dependência
  - contínua, 18
  - nos dados iniciais, 17
  - nos dados de contorno, 17
- desigualdade
  - CBS, 133, 233
  - de Bessel, 136-138
  - de Cauchy-Bunyakowski-Schwartz, 133
  - triangular, 133, 233
- Dirichlet
  - condição, 12
  - núcleo, 165
  - problema, 16, 173-195
- disco unitário, 183
- discriminante, 74
- distância, 1
- distribuições, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*
- divergência, 250
- divergência, teorema, 253
- domínio, 249
  - de dependência, 56, 89
- EDO, *Prefácio da 1a edição*, 3
- EDP, *Prefácio da 1a edição*, 2
  - forma canônica, 78-79
  - forma normal, 78
  - linear, 3
  - linear homogênea, 3
  - não linear, 3
- ordem, 3
- parte principal, 4
- semi-linear, 4
- entropia, 67
- equação
  - a derivadas parciais, 2
  - de Bessel, 216
  - de Burger, 5, 59-60
  - de calor, 5, 196-218
  - de Euler, 186
  - de Korteweg-deVries, 4
  - de Laplace, 5, 173-195
  - de onda, 6, 84-114
  - de Poisson, 5
  - de Sine-Gordon, 5
  - de tipo misto, 74
  - de Tricomi, 74
  - diferencial parcial, 2
  - de potencial, 173
  - elíptica, 74
  - hiperbólica, 74
  - homogênea, 3
  - homogênea associada, 8
  - KdV, 4
  - linear, 3
  - não linear, 3
  - parabólica, 74
  - semi-linear, 4, 73-83
- erf, 217
- espaço de Schwartz, 224-230
- Euler, 85
- Euler, equação, 186
- Euler-Fourier, fórmulas, 126
- existência de solução, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*, 17
- expansão em auto-funções, 116, 205
- extensão periódica, 96, 100

- ímpar, 96, 100
- par, 98, 100
- família ortogonal, 124
- fechado
  - em  $\mathbb{R}^n$ , 2
  - em  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , 249
- fecho, 2
- Féjer, núcleo, 166
- forma
  - bilinear simétrica, 132
  - canônica, 78-79
  - normal, 78
- fórmula de inversão, 220
- fórmulas de Euler-Fourier, 126
- Fourier
  - coeficientes, 122-130
  - Joseph B., 116
  - método, 116
  - séries, 115, 122, 126, 130, 143-172
  - transformada, 205, 219-248
- fronteira, 2
- função
  - analítica, 192, 266
  - analítica real, 243
  - característica, 107, 245
  - de classe  $C^k$ , 250
  - de quadrado integrável, 247
  - de suporte compacto, 224
  - erro, 217
  - escada, 246
  - gama, 257
  - harmônica, 192, 243, 250, 266, 267
  - ímpar, 93-104
  - par, 24, 93-104
  - periódica, 93-104
- proveniente de um potencial, 250
- seccionalmente contínua, 131
- subharmônica, 279
- superharmônica, 279
- funções
  - de Bessel, 216
  - de Green, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*
  - de Hermite, 230
  - generalizadas, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*
  - ortogonais, 119, 124
- $\Gamma(x)$ , 257
- Gomes, Jonas de Miranda, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*
- gradiente, 250
- Green
  - funções, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*
  - identidades, 254-263
  - teorema, 250
- Hadamard, 18
- Hermite, funções, 230
- Im  $f$ , 7
- identidade de Parseval, 156, 234
- identidades de Green, 254-263
- índice de rotação, 251
- integrais de energia, 199, 273-279
- interior, 2
- intervalo de dependência, 89
- KdV, equação, 4
- Korteweg-deVries, equação, 4
- Kronecker, delta, 130
- Lagrange, 85
- Laplace,

- equação, 5, 196-218  
 Pierre-Simon, 173  
 Lax, Peter, 67  
 Lema de Riemann-Lebesgue, 138, 222  
 Lewy, H., 8  
 Lighthill, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*  
 Lima, Elon Lages, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*  
 Maia, Maria Celano, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*  
*Maple*, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*  
*Mathematica*, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*  
 método  
     de Fourier, 116  
     de separação de variáveis, 115-122  
 Moraes, Vinícius de, pág. com dedicatória  
 N, 1  
 Newmann,  
     condição, 12  
     problema, 17  
 norma, 233  
 normal  
     externa, 252  
     unitária, 253  
 núcleo  
     de Dirichlet, 165  
     de Féjer, 166  
     de Poisson, 167, 187, 240  
     de calor, 197, 210, 213, 236  
 ondas de choque, 48, 61-67  
 operador, 7  
     de tipo misto, 74  
     diferencial parcial, 8  
     elíptico, 74  
     hiperbólico, 74  
     linear, 8  
     parabólico, 74  
 Operário da Construção, O, pág.  
     com dedicatória  
 ordem de uma EDP, 3  
 ortogonais, funções, 119, 124  
 ortogonal, conjunto, 124  
 Parseval, identidade, 156, 234  
 parte  
     imaginária, 7  
     principal, 4  
     real, 7  
 período, 95, 100  
     fundamental, 101  
 Picard, teorema, *Prefácio da 1<sup>a</sup> edição*, 28  
 Pitágoras, teorema, 134  
 Poisson,  
     equação, 5  
     núcleo, 167, 187, 240  
     somatório, 245  
     polinômio trigonométrico, 166  
     princípio da superposição, 8, 10  
     princípio do máximo  
         forte, 269  
         para a equação do calor, 269-273  
         para funções harmônicas, 265-269  
     princípio do mínimo, 269  
     princípios de máximo, 265-282  
 problema  
     bem posto, 18  
     de Cauchy, 12, 26-35, 48-56  
     de contorno, 11  
     de Dirichlet, 16, 173-195

- de Neumann, 17
- de Sturm-Liouville, 202
- de valor inicial, 12
- de valores de contorno, 11
- mal posto, 18
- misto, 12
- produto interno, 117
- propagação de singularidades, 56-61, 90
- Protter, 265
  
- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ , 1
- $\operatorname{Re} f$ , 7
- região de influência, 56, 90
- Riemann-Lebesgue, lema, 138, 222
  
- $SC[-l, l]$ , 131
- $SC_{\text{per}}(2l)$ , 148
- Schwartz, 133
- Schwartz, espaço, 224-230
- semi-norma, 133, 220
- série de Fourier, 115, 122, 126, 130, 143-172
- Sine-Gordon, equação, 5
- singularidades, propagação, 56-61, 90
- solução, 9
  - clássica, 3
  - fundamental, 257
  - geral, 11, 35-41, 84-87
  - global, 61
- somabilidade
  - no sentido de Abel, 166
  - no sentido de Cèsaro, 166
- somatório de Poisson, 245
- Sturm-Liouville, problema, 202
- superfície solução, 32
- suporte compacto, 224
  
- Teorema
  - da divergência, 253
  - de aproximação de Weierstrass, 166
  - de Cauchy-Kowalewski, 56
  - de Green, 250
  - de Picard, *Prefácio da 1ª edição*, 28
  - de Pitágoras, 134
  - do valor médio, 266
  - teoremas de unicidade, 265
  - teste M de Weierstrass, 144
  - TEX, *Prefácio da 1ª edição*
  - transformação, 7
  - transformada
    - cosseno, 244
    - de Fourier, 205, 219-248
    - seno, 244
  - Tricomi, equação, 74
  
  - $u_x$ , 2
  - unicidade de solução, *Prefácio da 1ª edição*, 17, 265
  
  - valor médio, teorema, 266
  - variáveis independentes, 2
  - variável dependente, 2
  
  - Weierstrass
    - teorema de aproximação, 166
    - teste M, 144
  - Weinberger, 265
  
  - $\mathbb{Z}$ , 1
  - $\mathbb{Z}^+$ , 1