$x + y + z = 8$ e o plano xy.

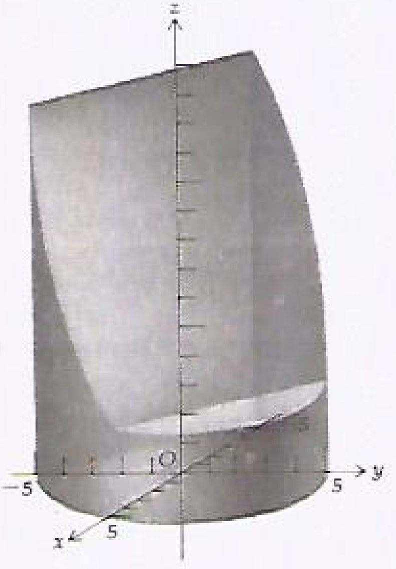

Figura 18.6.3

$x^2 + y^2 = 25$. Então, os limites de y são de $-\sqrt{25 - x^2}$ a $\sqrt{25 - x^2}$. Os limites de x são de -5 a 5. Se V unidades cúbicas é o volume procurado, temos

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \iiint_S dV \\
&= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8 - x - y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-5}^{5} \Big[(8 - x)y - \tfrac{1}{2}y^2 \Big]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\
&= 2 \int_{-5}^{5} (8 - x)\sqrt{25 - x^2}\, dx \\
&= 16 \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx + \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}(-2x)\, dx \\
&= 16\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + \tfrac{25}{2} \operatorname{arc\,sen} \tfrac{1}{5}x\right) + \tfrac{2}{3}(25 - x^2)^{3/2} \Big]_{-5}^{5} \\
&= 200\pi
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume é 200π unidades cúbicas.

EXEMPLO 4: Encontre a massa do sólido acima do plano xy limitado pelo cone $9x^2 + z^2 = y^2$ e o plano $y = 9$, se a medida da densidade do volume em qualquer ponto (x, y, z) no sólido é proporcional à medida da distância do ponto ao plano xy.

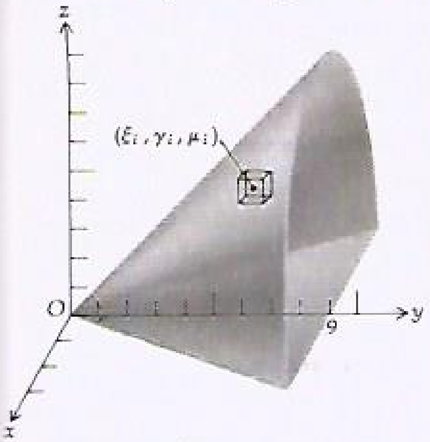

Figura 18.6.4

SOLUÇÃO: A Figura 18.6.4 mostra o sólido. Seja M quilogramas a massa do sólido e seja a distância medida em metros. Então, a densidade do volume em qualquer ponto (x, y, z) no sólido é kz kg/m^3, onde k é uma constante. Assim, se (ξ_i, γ_i, μ_i) é qualquer ponto no i-ésimo paralelepípedo retangular da partição, temos

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\mu_i\, \Delta_i V = \iiint_S kz\, dV \\
&= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\, dz\, dx\, dy \\
&= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \Big[\tfrac{1}{2}z^2 \Big]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dx\, dy \\
&= k \int_0^9 \int_0^{y/3} (y^2 - 9x^2)\, dx\, dy \\
&= \tfrac{2}{9}k \int_0^9 y^3\, dy = \tfrac{729}{2}k
\end{aligned}
$$

Portanto, a massa é $\frac{729}{2}k$ kg.

Exercícios 18.6

Nos Exercícios de 1 a 4, calcule a integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x\, dz\, dy\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} y e^z\, dz\, dx\, dy$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos \frac{y}{z}\, dy\, dx\, dz$
4. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^y \int_0^{\sqrt{3}z} \frac{z}{x^2 + z^2}\, dx\, dz\, dy$

Nos Exercícios de 5 a 10, calcule a integral tripla.

5. $\displaystyle\iiint_S y\,dV$ se S é a região limitada pelo tetraedro formado pelo plano $12x + 20y + 15z = 60$ e os planos coordenados.

6. $\displaystyle\iiint_S (x^2 + z^2)\,dV$ se S é a mesma região do Exercício 5.

7. $\displaystyle\iiint_S z\,dV$ se S é a região limitada pelo tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$.

8. $\displaystyle\iiint_S yz\,dV$ se S é a mesma região do Exercício 7.

9. $\displaystyle\iiint_S (xz + 3z)\,dV$ se S é a região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e os planos $x + y = 3$, e $z = 0$ e $y = 0$ acima do plano xy.

10. $\displaystyle\iiint_S xyz\,dV$ se S é a região limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios de 11 a 21 use integração tripla.

11. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado inferiormente pelo plano xy, acima pelo plano $z = y$ e lateralmente pelo cilindro $y^2 = x$ e o plano $x = 1$.

12. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 16$, pelo plano $x + y = 2$ e pelos três planos coordenados.

13. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + 2z = 4$ e pelos três planos coordenados.

14. Encontre o volume do sólido limitado pelo cone elíptico $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ e o plano $z = 1$.

15. Encontre o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ e abaixo do cilindro $x^2 + z = 4$.

16. Encontre o volume do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

17. Encontre o volume do sólido limitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

18. Encontre a massa do sólido limitado pelo tetraedro formado pelo plano $100x + 25y + 16z = 400$ e os planos coordenados, se a densidade de volume varia com a distância ao plano yz. A densidade de volume é medida em kg/m^3.

19. Encontre a massa do sólido limitado pelos cilindros $x = z^2$ e $y = x^2$, e os planos $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$. A densidade de volume varia com o produto das distâncias aos três planos coordenados e é medida em kg/m^3.

20. Encontre a massa do sólido limitado pela superfície $z = 4 - 4x^2 - y^2$ e o plano xy. A densidade de volume em qualquer ponto é ρ kg/m^3 e $\rho = 3z|x|$.

21. Encontre a massa do sólido limitado pela superfície $z = xy$ e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 0$. A densidade de volume em qualquer ponto é ρ kg/m^3 e $\rho = 3\sqrt{x^2 + y^2}$.

18.7 A INTEGRAL TRIPLA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Se uma região S em R_3 tem um eixo de simetria, as integrais triplas em S são mais fáceis de se calcularem se usarmos coordenadas cilíndricas. Se existe simetria em relação a um ponto, muitas vezes é conveniente escolhermos pontos como a origem, e usarmos coordenadas esféricas. Nessa secção, discutimos a integral tripla nestas coordenadas e aplicações em problemas físicos.

Para definirmos a integral tripla em coordenadas cilíndricas construímos uma partição da região S traçando planos através do eixo z, perpendiculares ao eixo z e cilindros retos tendo o eixo z, como eixo. Uma sub-região deste tipo é mostrada na Fig. 18.7.1. Os elementos da partição construída encontram-se totalmente em S. Chamamos esta partição de uma *partição cilíndrica*. A medida de comprimento da "maior diagonal" de qualquer uma das sub-regiões é a *norma* da partição. Seja n o número de sub-regiões da partição e seja $\Delta_i V$ a medida do volume de *i*-ésima sub-região. A medida da

Exercícios 18.7

Nos Exercícios de 1 a 4, calcule a integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{a}\int_0^{r\cos\theta} r\sec^3\theta\,dz\,dr\,d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{2\,\text{sen}\,\theta}^{2\cos\theta}\int_0^{r\,\text{sen}\,\theta} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi$

4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\phi}\int_0^{a\,\text{cosec}\,\theta} \rho^3\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

5. Encontre o volume do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, usando (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

6. Se S é o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e os planos coordenados, calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_S xyz\,dV$ pelos métodos: (a) Usando coordenadas esféricas; (b) Usando coordenadas retangulares; (c) Usando coordenadas cilíndricas.

Nos Exercícios de 7 a 10, use coordenadas cilíndricas.

7. Encontre a massa do sólido limitado por uma esfera de raio a m se a densidade de volume varia com o quadrado da distância ao centro. A densidade de volume é medida em kg/m^3.

8. Encontre a massa do sólido no primeiro octante interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. A densidade do volume varia com a distância ao plano xy e é medida em kg/m^3.

9. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo limitado pelo cilindro $r = 5$, o cone $z = r$ e o plano xy. A densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

10. Encontre o momento de inércia do sólido limitado por um cilindro circular reto de altura h m e raio a m, em relação ao eixo do cilindro. A densidade de volume varia com a distância ao eixo do cilindro, e é medida em kg/m^3.

Nos Exercícios de 11 a 14 use coordenadas esféricas.

11. Encontre o centro de massa do sólido limitado pelo hemisfério do Exemplo 5. A densidade de volume é a mesma do Exemplo 5.

12. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo, limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. A densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

13. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo interior ao cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, abaixo do cone $x^2 + y^2 = z^2$, e acima do plano xy. A densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

14. Encontre a massa de um sólido esférico de raio a m se a densidade de volume em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto em relação ao centro da esfera. A densidade de volume é medida em kg/m^3.

Nos Exercícios de 15 a 18 use o sistema de coordenadas mais conveniente para o problema.

15. Encontre o centro de massa do sólido interior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$. A densidade de volume constante é k kg/m^3.

16. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo do Exercício 15.

17. Encontre o momento de inércia em relação a um diâmetro do sólido que está entre duas esferas concêntricas com raios a m e $2a$ m. A densidade de volume varia inversamente com o quadrado da distância ao centro, e é medida em kg/m^3.

18. Encontre a massa do sólido do Exercício 17. A densidade de volume é a mesma do Exercício 17.

Nos Exercícios de 19 a 22 calcule a integral iterada usando coordenadas cilíndricas ou esféricas.

19. $\displaystyle\int_0^4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\,dz$

20. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$

21. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$

22. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx$

Exercícios de Revisão (Capítulo 18)

Nos Exercícios de 1 a 8 calcule a integral iterada dada.

1. $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} x^2y\,dy\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r\cos^2\theta\,dr\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{3(1+\cos\theta)} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^{y+z} e^x e^y e^z\, dx\, dy\, dz$

6. $\displaystyle\int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 \rho^3 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

8. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} zre^{-r^2}\, dr\, d\theta\, dz$

Nos Exercícios de 9 a 12 calcule a integral múltipla.

9. $\displaystyle\iint_R xy\, dA$; R é a região no primeiro quadrante limitada pela circunferência $x^2+y^2=1$ e os eixos coordenados.

10. $\displaystyle\iint_R (x+y)\, dA$; R é a região limitada pela curva $y=\cos x$ e o eixo x, de $x=-\frac{1}{2}\pi$ a $x=\frac{1}{2}\pi$.

11. $\displaystyle\iiint_S z^2\, dV$; S é a região limitada pelos cilindros $x^2+z=1$ e $y^2+z=1$ e o plano xy.

12. $\displaystyle\iiint_S y\cos(x+z)\, dV$; S é a região limitada pelo cilindro $x=y^2$, e os planos $x+z=\frac{1}{2}\pi$, $y=0$ e $z=0$.

13. Calcule por coordenadas polares a integral dupla

$$\iint_R \frac{1}{x^2+y^2}\, dA$$

onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas duas circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

14. Calcule, por coordenadas polares, a integral iterada $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$.

Nos Exercícios 15 e 16, calcule a integral iterada invertendo a ordem de integração.

15. $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen} y^2\, dy\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\operatorname{arc\,cos} y} e^{\operatorname{sen} x}\, dx\, dy$

Nos Exercícios 17 e 18 calcule a integral iterada mudando para coordenadas cilíndricas ou esféricas.

17. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx$

18. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4-x^2-y^2}\, dz\, dy\, dx$

19. Use integração dupla para encontrar a área da região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x^2=4y$ e $x^2=8-4y$ por dois métodos: (a) integre primeiro em relação a x; (b) integre primeiro em relação a y.

20. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido sobre o plano xy limitado pelo cilindro $x^2+y^2=16$ e o plano $z=2y$ por dois métodos: (a) Integre primeiro em relação a x; (b) integre primeiro em relação a y.

21. Encontre o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2=4y$, $y^2=4x$ e $x^2=z-y$.

22. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y=x^2$ e a reta $x-y+2=0$, se a densidade de área em qualquer ponto for x^2y^2 kg/m^2.

23. Encontre a área da superfície do cilindro $x^2+y^2=9$ situada no primeiro octante, entre os planos $x=z$ e $3x=z$.

24. Encontre a área da superfície da parte do cilindro $x^2+y^2=a^2$ interior ao cilindro $y^2+z^2=a^2$.

25. Use integração dupla para encontrar a área da região interior à circunferência $r=1$ e à direita da parábola $r(1+\cos\theta)=1$.

26. Encontre a massa da lâmina na forma da região exterior ao limaçon $r=3-\cos\theta$ e interior à circunferência $r=5\cos\theta$ se a densidade de área em qualquer ponto é $2|\operatorname{sen}\theta|$ kg/m^2.

27. Encontre o centro de massa da lâmina retangular limitada pelas retas $x=3$ e $y=2$ e pelos eixos coordenados, se a densidade de área em qualquer ponto é xy^2 kg/m^2.

28. Encontre o centro de massa da lâmina na forma da região limitada pelas parábolas $x^2=4+4y$ e $x^2=4-8y$ se a densidade de área em qualquer ponto é kx^2 kg/m^2.

29. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pelo eixo polar e pela curva $r=\cos 2\theta$, onde $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{4}\pi$. A densidade de área em qualquer ponto é $r\theta$ kg/m^2.

30. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo x da lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2+y^2=a^2$ se a densidade de área em qualquer ponto é $k\sqrt{x^2+y^2}$ kg/m^2.

31. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo x da lâmina na forma da região limitada pela curva $y=e^x$, a reta $x=2$ e os eixos coordenados, se a densidade de área em qualquer ponto é xy kg/m^2.

32. Encontre o momento de inércia da lâmina do Exercício 31 em relação ao eixo y.

Exercícios 18.7

Nos Exercícios de 1 a 4, calcule a integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{a}\int_0^{r\cos\theta} r\sec^3\theta\, dz\, dr\, d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{2\,\text{sen}\,\theta}^{2\cos\theta}\int_0^{r\,\text{sen}\,\theta} r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi$

4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\phi}\int_0^{a\,\text{cosec}\,\theta} \rho^3\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

5. Encontre o volume do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, usando (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

6. Se S é o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e os planos coordenados, calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_S xyz\, dV$ pelos métodos: (a) Usando coordenadas esféricas; (b) Usando coordenadas retangulares; (c) Usando coordenadas cilíndricas.

Nos Exercícios de 7 a 10, use coordenadas cilíndricas.

7. Encontre a massa do sólido limitado por uma esfera de raio a m se a densidade de volume varia com o quadrado da distância ao centro. A densidade de volume é medida em kg/m^3.

8. Encontre a massa do sólido no primeiro octante interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. A densidade do volume varia com a distância ao plano xy e é medida em kg/m^3.

9. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo limitado pelo cilindro $r = 5$, o cone $z = r$ e o plano xy. A densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

10. Encontre o momento de inércia do sólido limitado por um cilindro circular reto de altura h m e raio a m, em relação ao eixo do cilindro. A densidade de volume varia com a distância ao eixo do cilindro, e é medida em kg/m^3.

Nos Exercícios de 11 a 14 use coordenadas esféricas.

11. Encontre o centro de massa do sólido limitado pelo hemisfério do Exemplo 5. A densidade de volume é a mesma do Exemplo 5.

12. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo, limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. A densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

13. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo interior ao cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, abaixo do cone $x^2 + y^2 = z^2$, e acima do plano xy. A densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

14. Encontre a massa de um sólido esférico de raio a m se a densidade de volume em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto em relação ao centro da esfera. A densidade de volume é medida em kg/m^3.

Nos Exercícios de 15 a 18 use o sistema de coordenadas mais conveniente para o problema.

15. Encontre o centro de massa do sólido interior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$. A densidade de volume constante é k kg/m^3.

16. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo do Exercício 15.

17. Encontre o momento de inércia em relação a um diâmetro do sólido que está entre duas esferas concêntricas com raios a m e $2a$ m. A densidade de volume varia inversamente com o quadrado da distância ao centro, e é medida em kg/m^3.

18. Encontre a massa do sólido do Exercício 17. A densidade de volume é a mesma do Exercício 17.

Nos Exercícios de 19 a 22 calcule a integral iterada usando coordenadas cilíndricas ou esféricas.

19. $\displaystyle\int_0^4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx\, dz$

20. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dx\, dy$

21. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz\, dx\, dy$

22. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx$

Exercícios de Revisão (Capítulo 18)

Nos Exercícios de 1 a 8 calcule a integral iterada dada.

1. $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} x^2y\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r\cos^2\theta\, dr\, d\theta$

4. $\int_0^{\pi}\int_0^{3(1+\cos\theta)} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta$

5. $\int_0^1\int_0^2\int_0^{y+z} e^x e^y e^z \, dx \, dy \, dz$

6. $\int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$

7. $\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 \rho^3 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

8. $\int_0^a\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} zre^{-r^2} \, dr \, d\theta \, dz$

Nos Exercícios de 9 a 12 calcule a integral múltipla.

9. $\iint_R xy \, dA$; R é a região no primeiro quadrante limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e os eixos coordenados.

10. $\iint_R (x+y) \, dA$; R é a região limitada pela curva $y = \cos x$ e o eixo x, de $x = -\frac{1}{2}\pi$ a $x = \frac{1}{2}\pi$.

11. $\iiint_S z^2 \, dV$; S é a região limitada pelos cilindros $x^2 + z = 1$ e $y^2 + z = 1$ e o plano xy.

12. $\iiint_S y\cos(x+z) \, dV$; S é a região limitada pelo cilindro $x = y^2$, e os planos $x + z = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$ e $z = 0$.

13. Calcule por coordenadas polares a integral dupla

$$\iint_R \frac{1}{x^2+y^2} \, dA$$

onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas duas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

14. Calcule, por coordenadas polares, a integral iterada $\int_0^1\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2) \, dx \, dy$.

Nos Exercícios 15 e 16, calcule a integral iterada invertendo a ordem de integração.

15. $\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx$

16. $\int_0^1\int_0^{\arccos y} e^{\operatorname{sen} x} \, dx \, dy$

Nos Exercícios 17 e 18 calcule a integral iterada mudando para coordenadas cilíndricas ou esféricas.

17. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dz \, dy \, dx$

18. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4-x^2-y^2} \, dz \, dy \, dx$

19. Use integração dupla para encontrar a área da região no primeiro quadrante limitada pelas parábolas $x^2 = 4y$ e $x^2 = 8 - 4y$ por dois métodos: (a) integre primeiro em relação a x; (b) integre primeiro em relação a y.

20. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido sobre o plano xy limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e o plano $z = 2y$ por dois métodos: (a) Integre primeiro em relação a x; (b) integre primeiro em relação a y.

21. Encontre o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ e $x^2 = z - y$.

22. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $x - y + 2 = 0$, se a densidade de área em qualquer ponto for x^2y^2 kg/m^2.

23. Encontre a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ situada no primeiro octante, entre os planos $x = z$ e $3x = z$.

24. Encontre a área da superfície da parte do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ interior ao cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.

25. Use integração dupla para encontrar a área da região interior à circunferência $r = 1$ e à direita da parábola $r(1 + \cos\theta) = 1$.

26. Encontre a massa da lâmina na forma da região exterior ao limaçon $r = 3 - \cos\theta$ e interior à circunferência $r = 5\cos\theta$ se a densidade de área em qualquer ponto é $2|\operatorname{sen}\theta|$ kg/m^2.

27. Encontre o centro de massa da lâmina retangular limitada pelas retas $x = 3$ e $y = 2$ e pelos eixos coordenados, se a densidade de área em qualquer ponto é xy^2 kg/m^2.

28. Encontre o centro de massa da lâmina na forma da região limitada pelas parábolas $x^2 = 4 + 4y$ e $x^2 = 4 - 8y$ se a densidade de área em qualquer ponto é kx^2 kg/m^2.

29. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pelo eixo polar e pela curva $r = \cos 2\theta$, onde $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{4}\pi$. A densidade de área em qualquer ponto é $r\theta$ kg/m^2.

30. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo x da lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ se a densidade de área em qualquer ponto é $k\sqrt{x^2+y^2}$ kg/m^2.

31. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo x da lâmina na forma da região limitada pela curva $y = e^x$, a reta $x = 2$ e os eixos coordenados, se a densidade de área em qualquer ponto é xy kg/m^2.

32. Encontre o momento de inércia da lâmina do Exercício 31 em relação ao eixo y.

33. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ da lâmina homogênea na forma da região limitada pela curva $r^2 = 4 \cos 2\theta$, se a densidade de área em qualquer ponto é k kg/m^2.

34. Encontre a massa da lâmina do Exercício 33.

35. Encontre o momento polar de inércia e o correspondente raio de giração da lâmina do Exercício 33.

36. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo y da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e a reta $x + y = 0$, se a densidade de área em qualquer ponto é $(x + y)$ kg/m^2.

37. Encontre a massa do sólido limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ se a densidade de volume em qualquer ponto é $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kg/m^3.

38. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido do Exercício 37.

39. O sólido homogêneo limitado pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$ tem uma densidade de volume em qualquer ponto de k kg/m^3. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z para este sólido.

40. Encontre o centro de massa do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$, e acima do cone se a densidade de volume em qualquer ponto é k kg/m^3.

Para mais exercícios referentes a este capítulo, veja exercícios suplementares no final do volume.