Métodos Numéricos

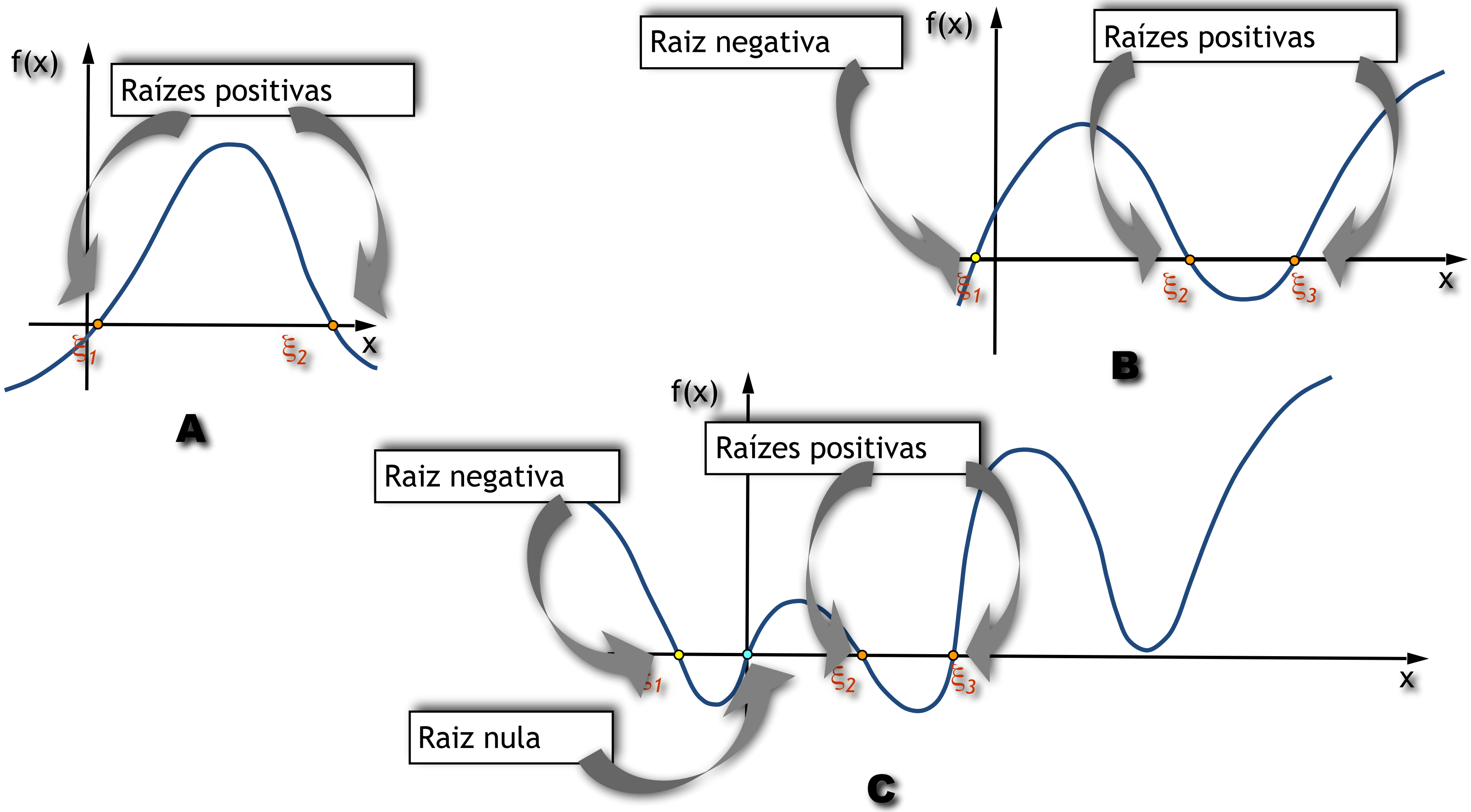
Prof. Carlos Eduardo Mello
Ciência da Computação
UFRRJ - *Campus* Nova Iguaçu

Raízes de Funções Reais

Métodos Numéricos

Cálculo Numérico – Motivação

- Zeros *reais* podem ser *positivos*, *nulos* ou *negativos*.



Cálculo Numérico – Motivação

- $ax^2 + bx + c = 0$ → fórmulas explicitas para a determinação das raízes em função de a, b e c.

$$x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a$$

- Polinômios de graus mais elevados e funções com maior grau de complexidade:
  - *Impossibilidade* de determinação *exata* dos zeros.

Cálculo Numérico – Métodos

MÉTODOS

FASE I

Localização ou isolamento das raízes

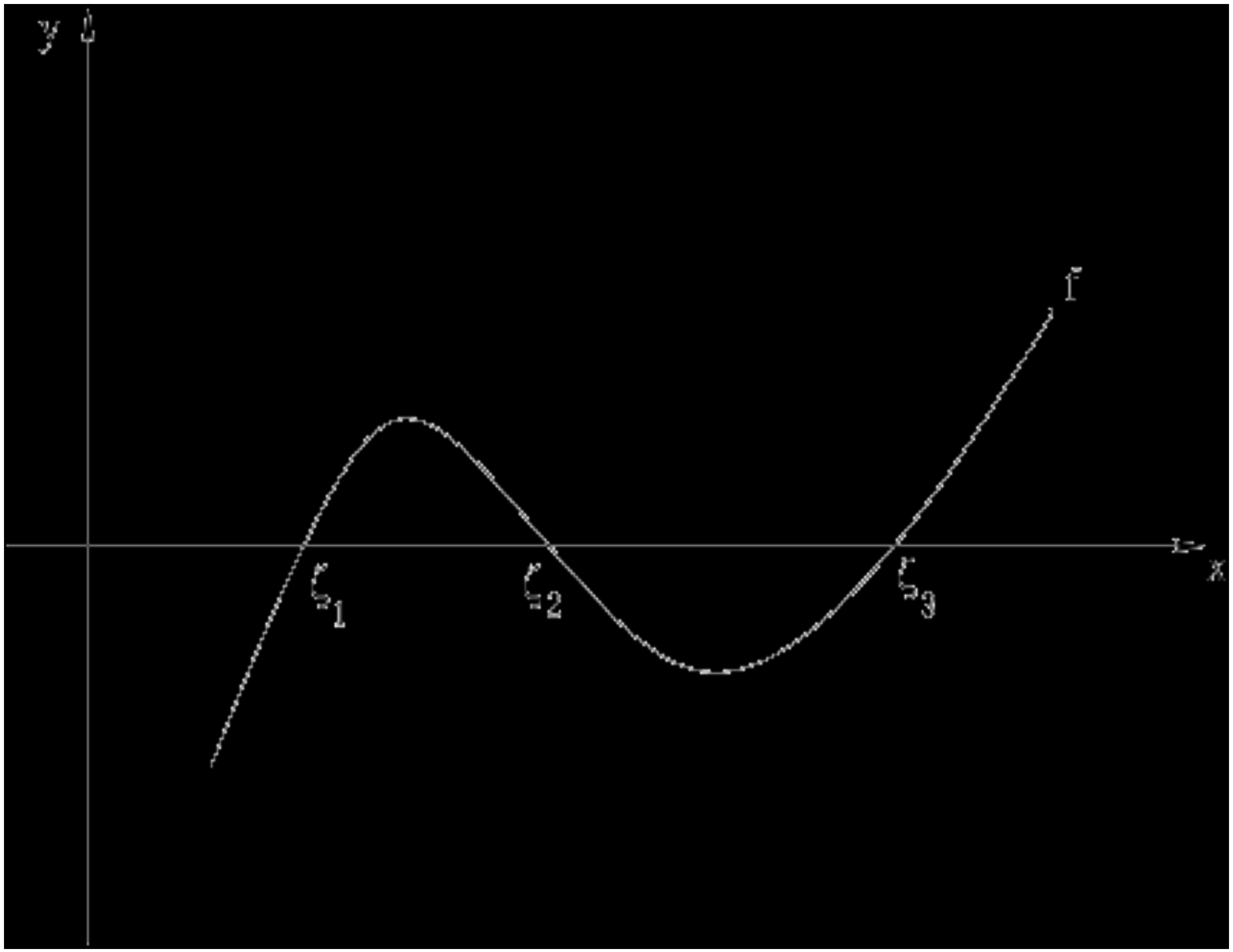
Determinação de intervalos que contêm as raízes

FASE II

Refinamento

Melhoramento sucessivo das aproximações iniciais até a obtenção de uma aproximação com uma precisão pré-fixada

Objetivo: Resolver $f(x) = 0$, isto é, encontrar números ξ_i tais que $f(\xi_i)=0$



Cálculo Numérico – Métodos

- FASE I: *ISOLAMENTO DAS RAÍZES*

  Realização de análises *teórica* e *gráfica* da função de interesse.

  Precisão das análises relevantes para o sucesso da fase posterior.

Cálculo Numérico – Métodos

- **TEOREMA** de Cauchy-Bolzano :

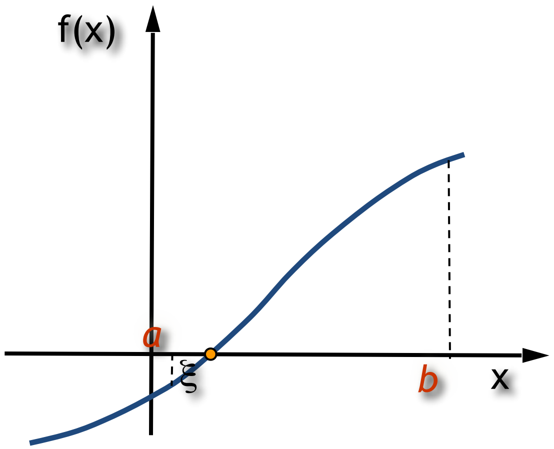
  Sendo f(x) contínua em um intervalo [a, b], se f(a).f(b) < 0 então existe pelo menos um ponto x = ξ entre a e b que é zero de f(x).

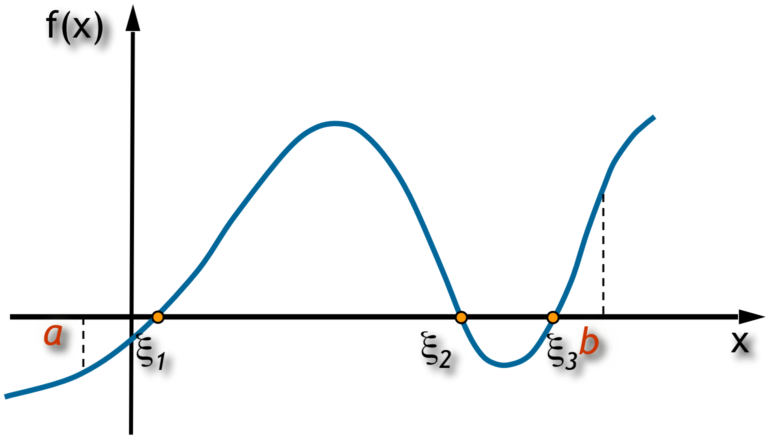
- **TEOREMA:**

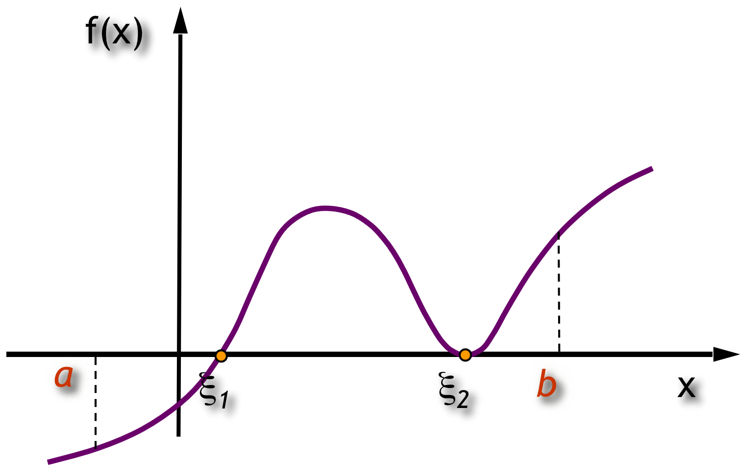
  Se *f'(x)* preservar o sinal em *[a, b]*, então a raiz ξ é única.

Cálculo Numérico – Métodos

- ANÁLISE GRÁFICA:







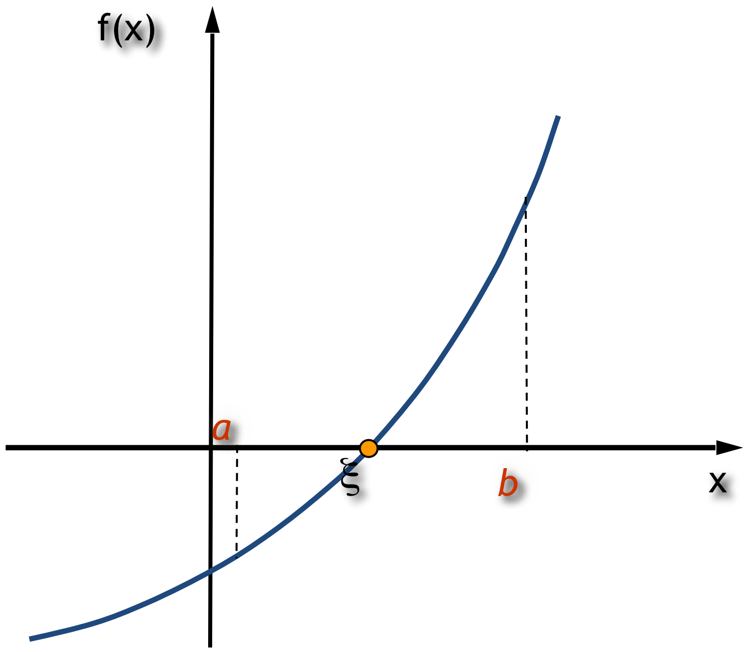
Cálculo Numérico – Métodos

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

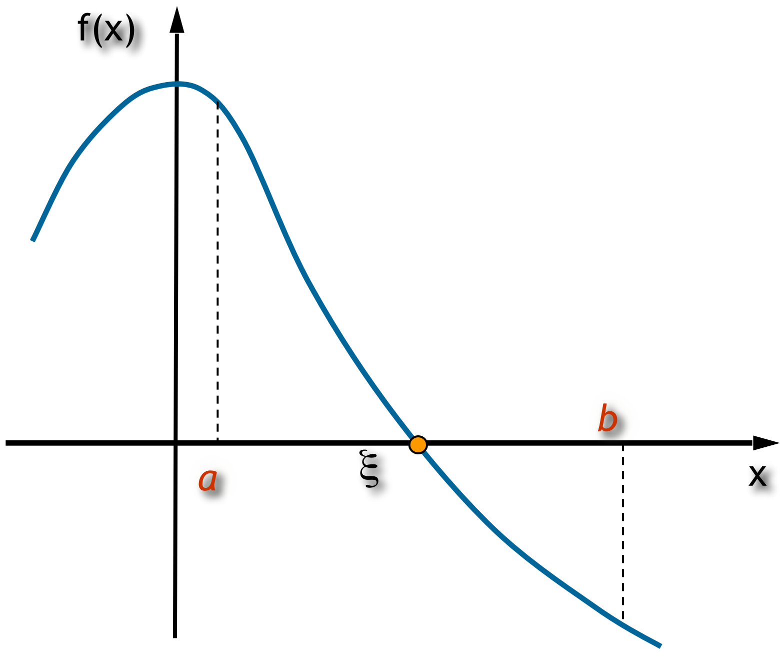
Sob as hipóteses do TEOREMA de Cauchy-Bolzano, se $f'(x)$ existir e preservar sinal em (a,b), então este intervalo conterá um único zero.

Cálculo Numérico – Métodos

ANÁLISE GRÁFICA:



f'(x) > 0, ∀x ∈ [a,b]



f'(x) < 0, ∀x ∈ [a,b]

Cálculo Numérico – Métodos

- Forma de isolamento das raízes de uma função de interesse a partir de resultados anteriores:
  - *Tabulação* da função para vários valores da variável independente; e
  - *Análise* das mudanças de sinal da função e do sinal da derivada nos intervalos em que houve alteração no sinal da função.

Cálculo Numérico – Métodos

Exemplo: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

- $f(x)$ é contínua para $\forall x \in R$.
- $I_1 = [-5, -3]$
- $I_2 = [0, 1]$
- $I_3 = [2, 3]$

Cada um dos intervalos contém <u>pelo menos</u> um zero.

Cálculo Numérico – Métodos

Exemplo: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

x	0	1	2	3	...
f(x)	-	-	+	+	...

- *f(x) admite pelo menos um zero no intervalo [1, 2]*

o zero é único?

Análise do sinal de f'(x)

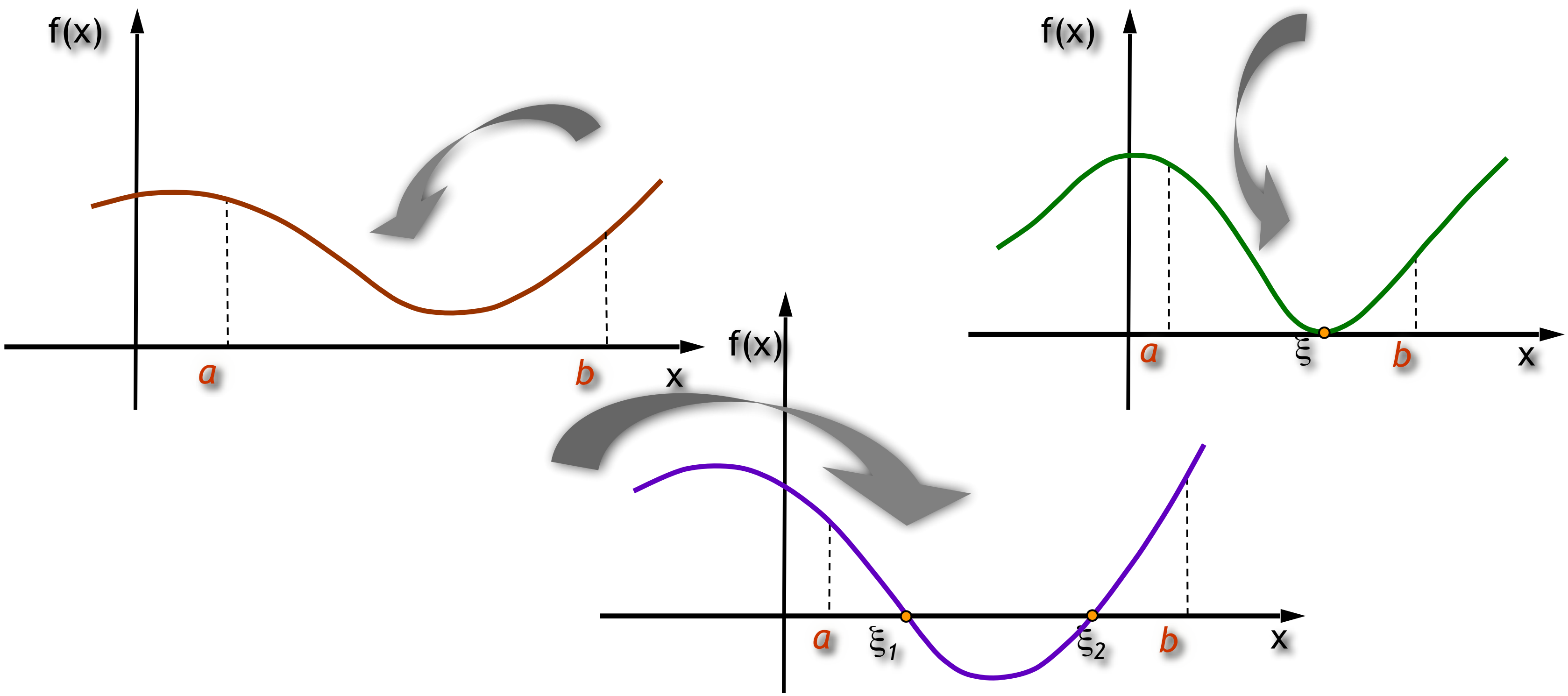
- $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + 5e^{-x} > 0, \forall x > 0$

f(x) admite um único zero em todo seu domínio de definição, localizado no intervalo [1, 2] .

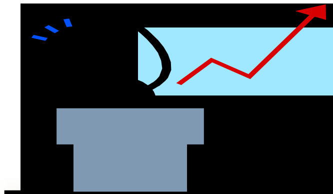
Cálculo Numérico – Métodos

- OBSERVAÇÃO:

  Se $f(a)f(b) > 0$, então pode-se ter diversas situações no intervalo $[a, b]$.



Cálculo Numérico – Métodos



ANÁLISE GRÁFICA

I

Construção do gráfico de f(x)

Localização das abscissas dos pontos nos quais a curva intercepta o eixo ox

II

Obtenção da equação equivalente g(x) = h(x) a partir da equação f(x) = 0

Construção dos gráficos de g(x) e h(x) no mesmo sistema cartesiano

Localização dos pontos x nos quais g(x) e h(x) se interceptam

$(f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = h(\xi))$

III

Uso de programas para traçado de gráficos de funções

Estudo detalhado do comportamento de uma função a partir do esboço de seu gráfico:

- *Domínio da função*
- *Pontos de descontinuidade*
- *Intervalos de crescimento e decrescimento*
- *Pontos de máximo e mínimo*
- *Concavidade*
- *Pontos de inflexão*
- *Assíntotas da função*

Método I (Esboço do gráfico - varredura): Determinar um ponto inicial, um passo *h* e um ponto final de busca.

Ex: Isolar a(s) raíz(es) positiva(s) de $f(x) = 2x - \cos(x) = 0$;

Façamos $a = 0$, $h=1$, $b = 10$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	-1	1.00	3.00	5.00	7.00	9.00	11.01	...	...	...	19.02

Conclusão: Há raiz $\xi \in [0,1]$.

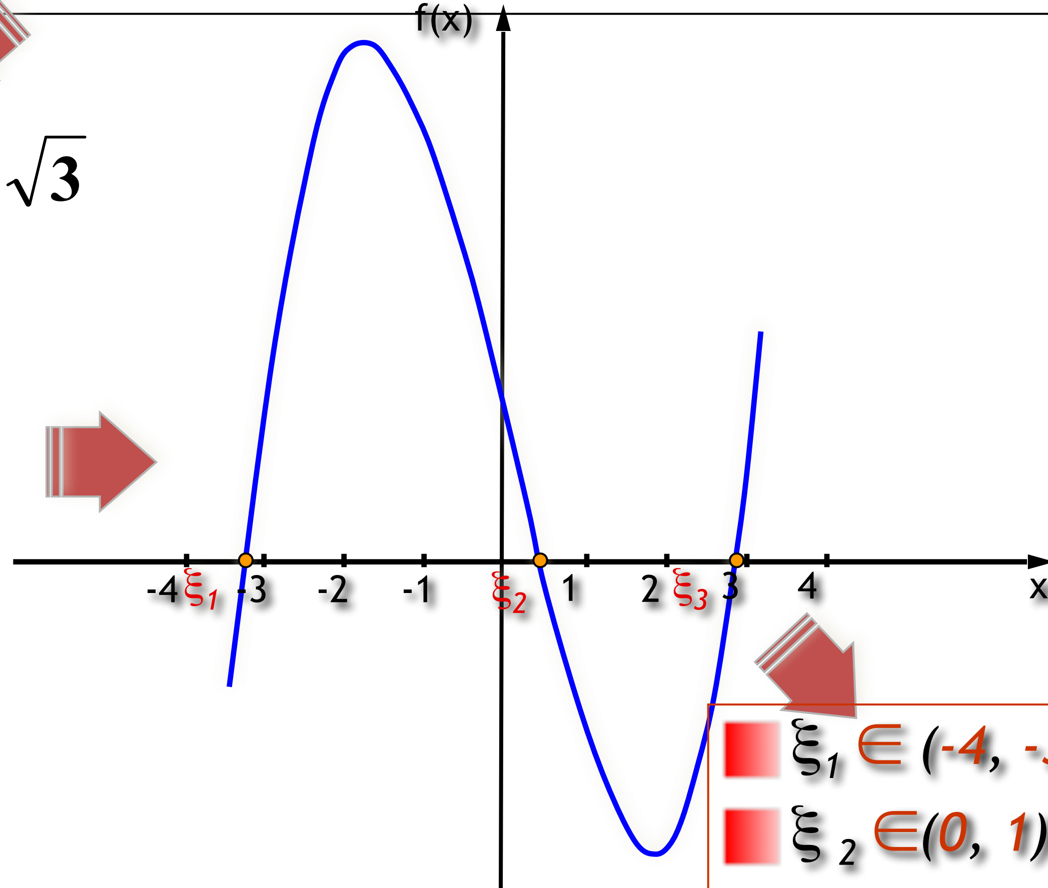
Como $f'(x) = 2 + \text{sen}(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]$ então ξ é única.

Cálculo Numérico – Métodos

Exemplo: $f(x) = x^3 - 9x + 3$ *(Uso do método I)*

- $f'(x) = 3x^2 - 9$
- $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

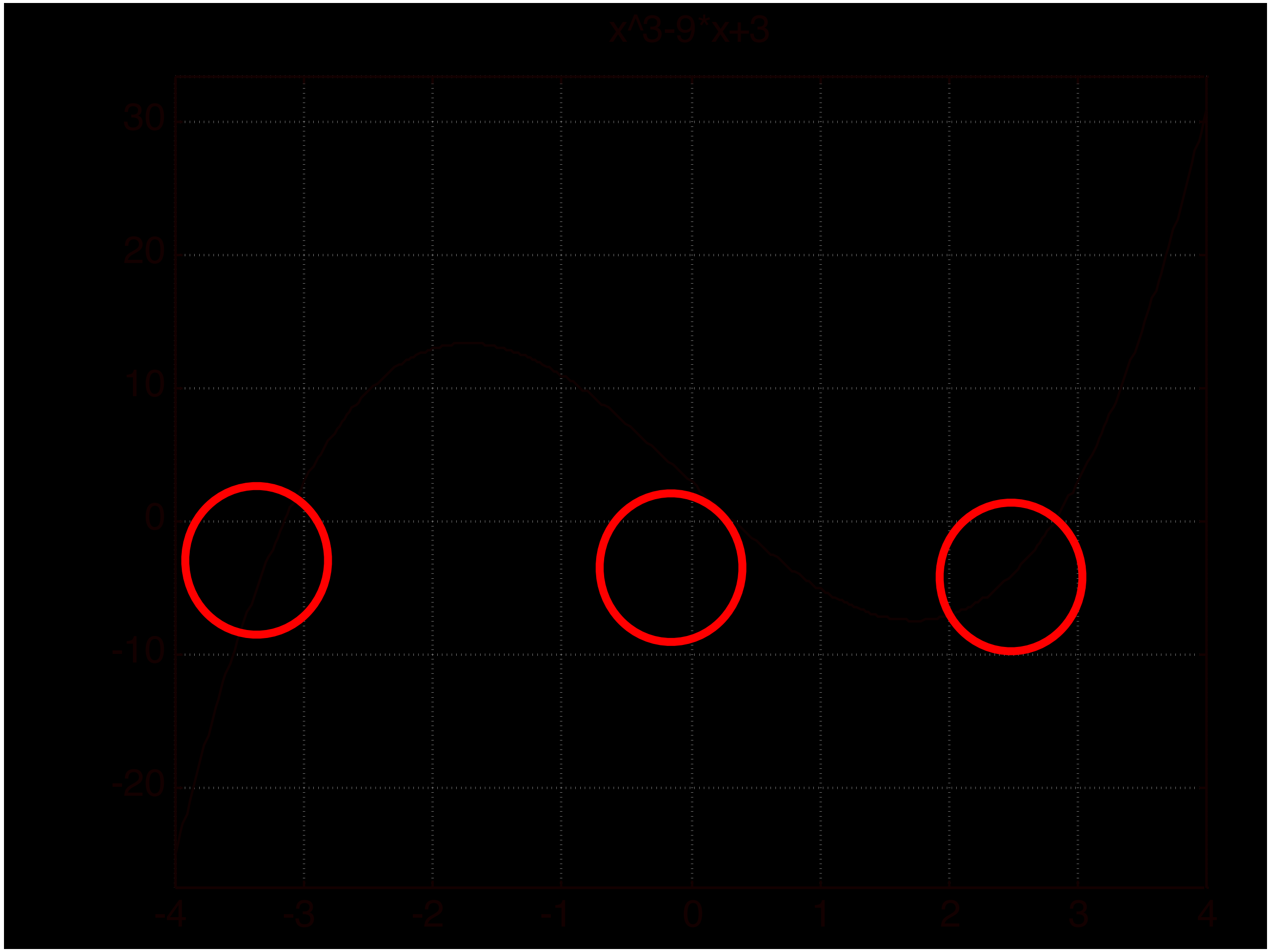
x	f(x)
-4	-25
-3	3
-	13,3923
-1	11
0	3
1	-5
√	-7,3923
2	-7
3	3



- $\xi_1 \in (-4, -3)$
- $\xi_2 \in (0, 1)$
- $\xi_3 \in (2, 3)$

Cálculo Numérico – Métodos

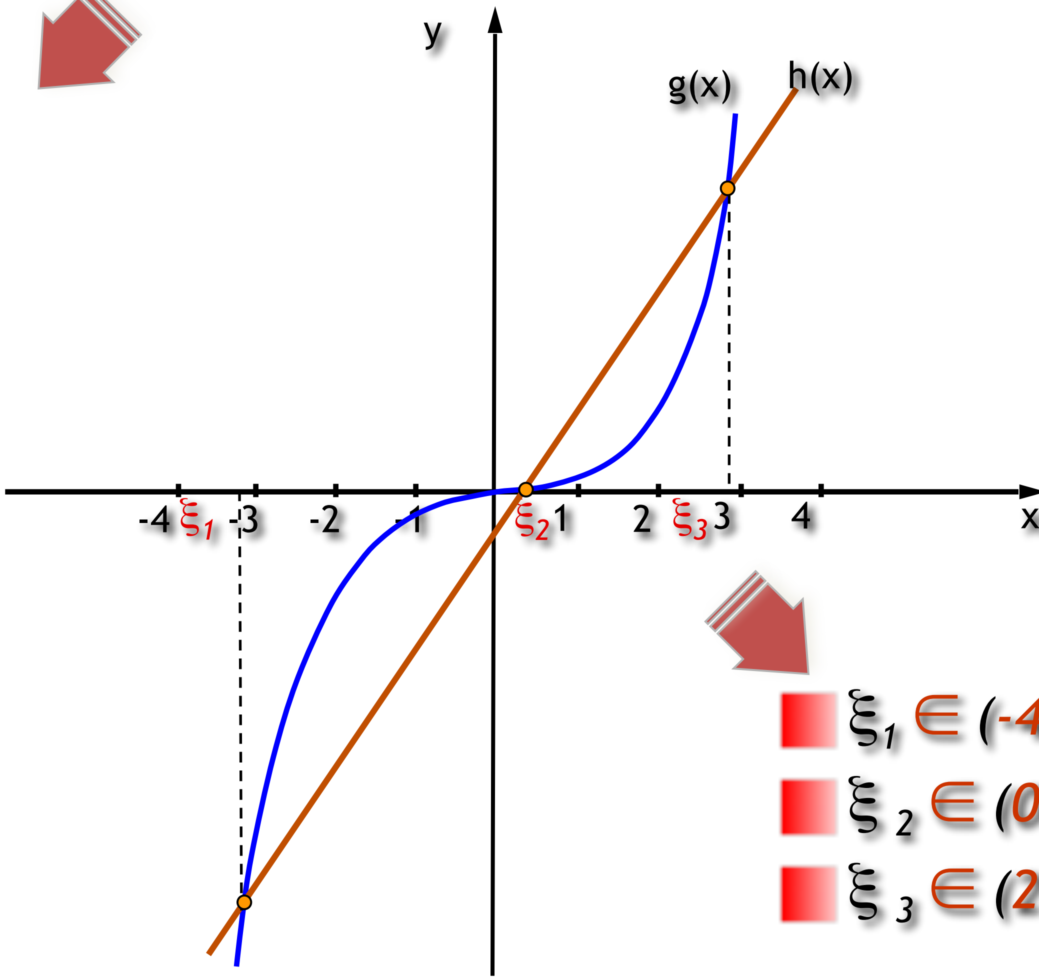
MATLAB: ezplot('x^3-9*x+3',[-4,4])



Cálculo Numérico – Métodos

Exemplo: $f(x) = x^3 - 9x + 3$ *(Uso do Método II)*

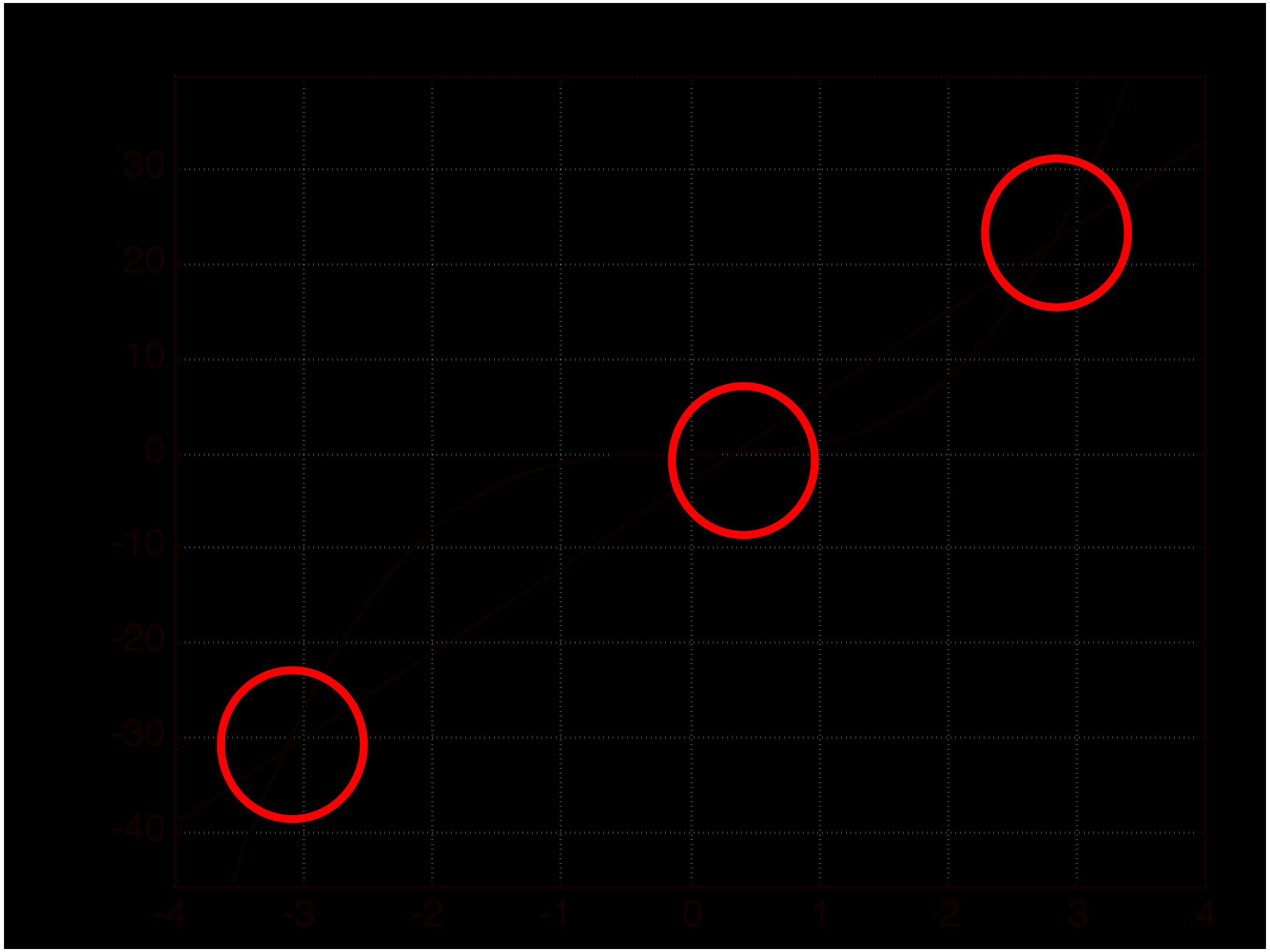
- $g(x) = x^3$
- $h(x) = 9x - 3$



- $\xi_1 \in (-4, -3)$
- $\xi_2 \in (0, 1)$
- $\xi_3 \in (2, 3)$

Cálculo Numérico – Métodos

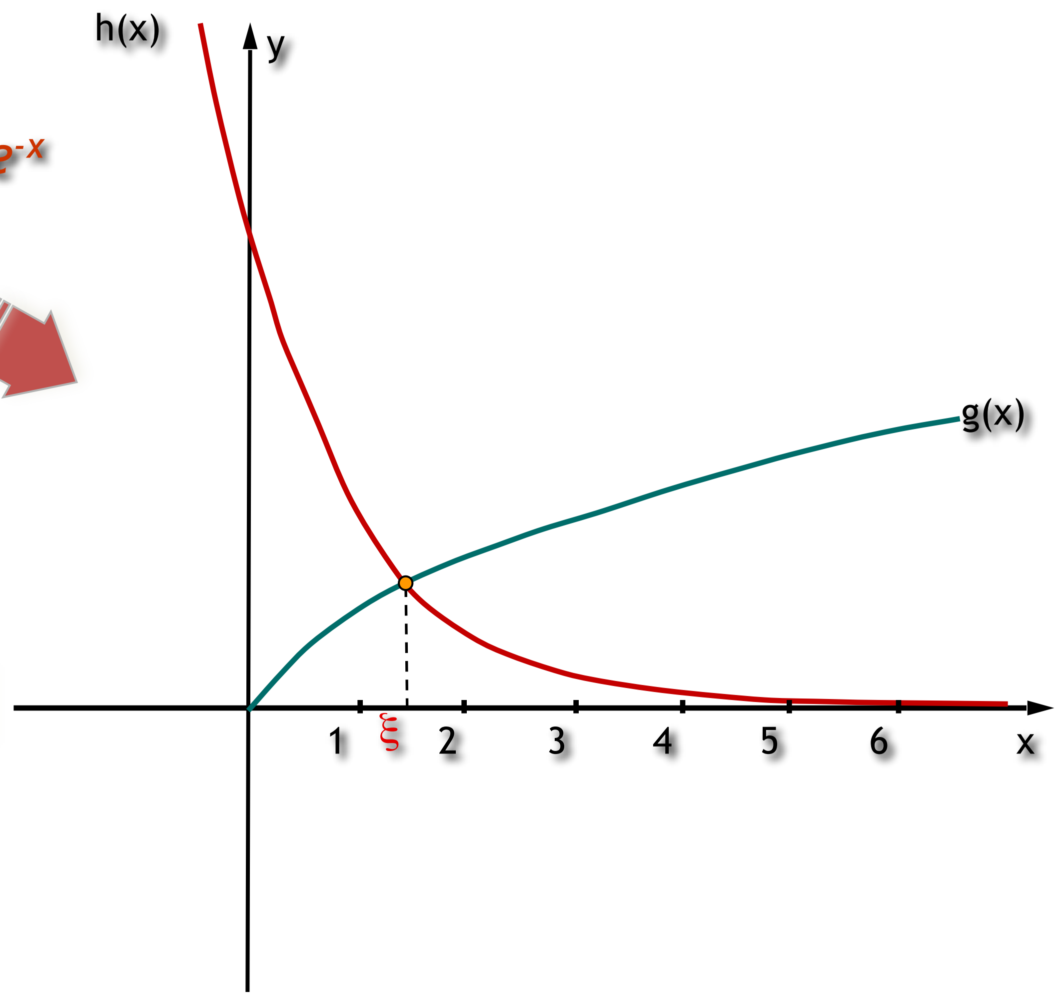
MATLAB



Cálculo Numérico - Métodos

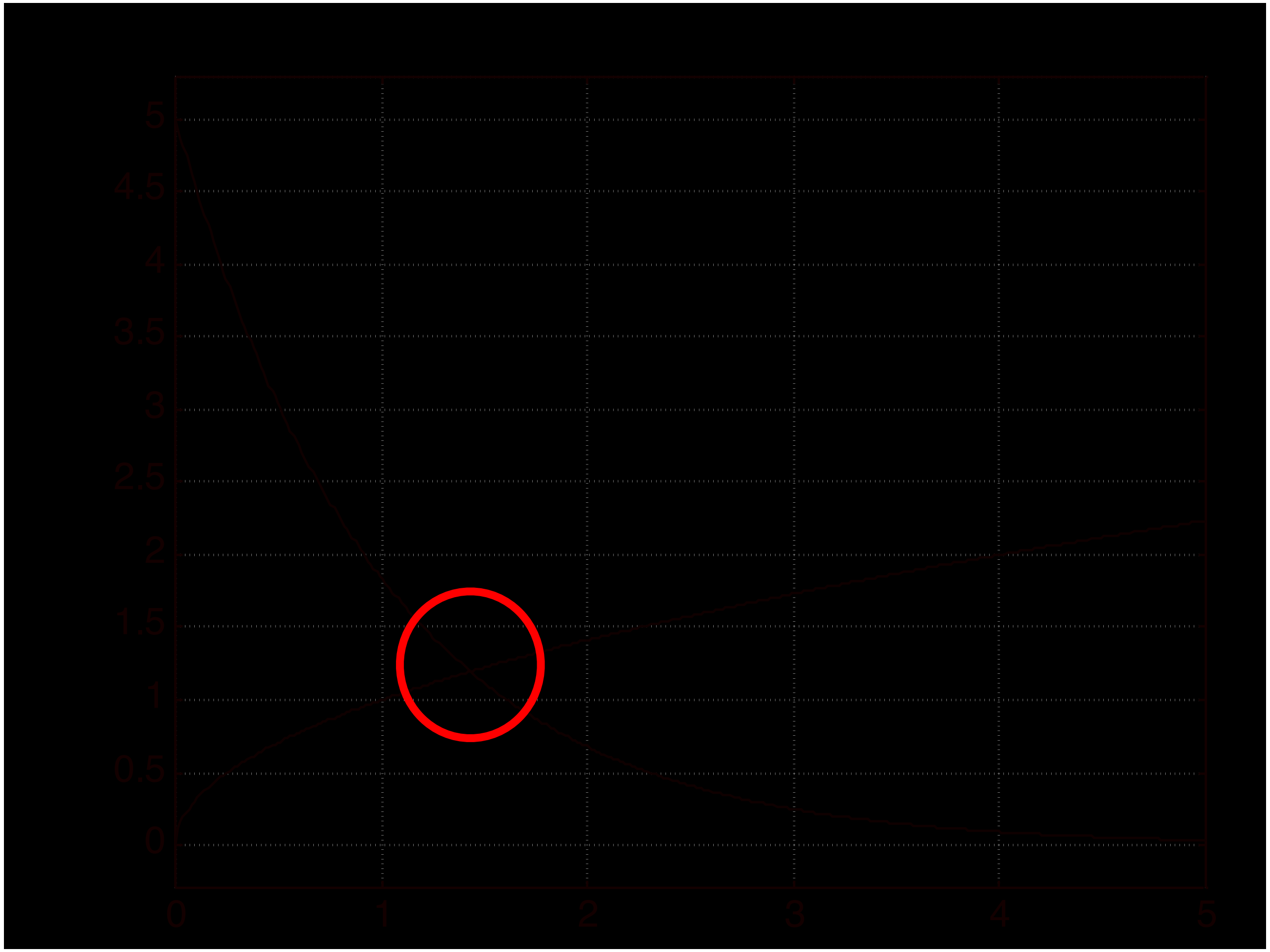
Exemplo: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$ (*Uso do Processo II*)

- $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0 \iff \sqrt{x} = 5e^{-x}$
- $g(x) = \sqrt{x}$
- $h(x) = 5e^{-x}$



- $\xi \in (1, 2)$

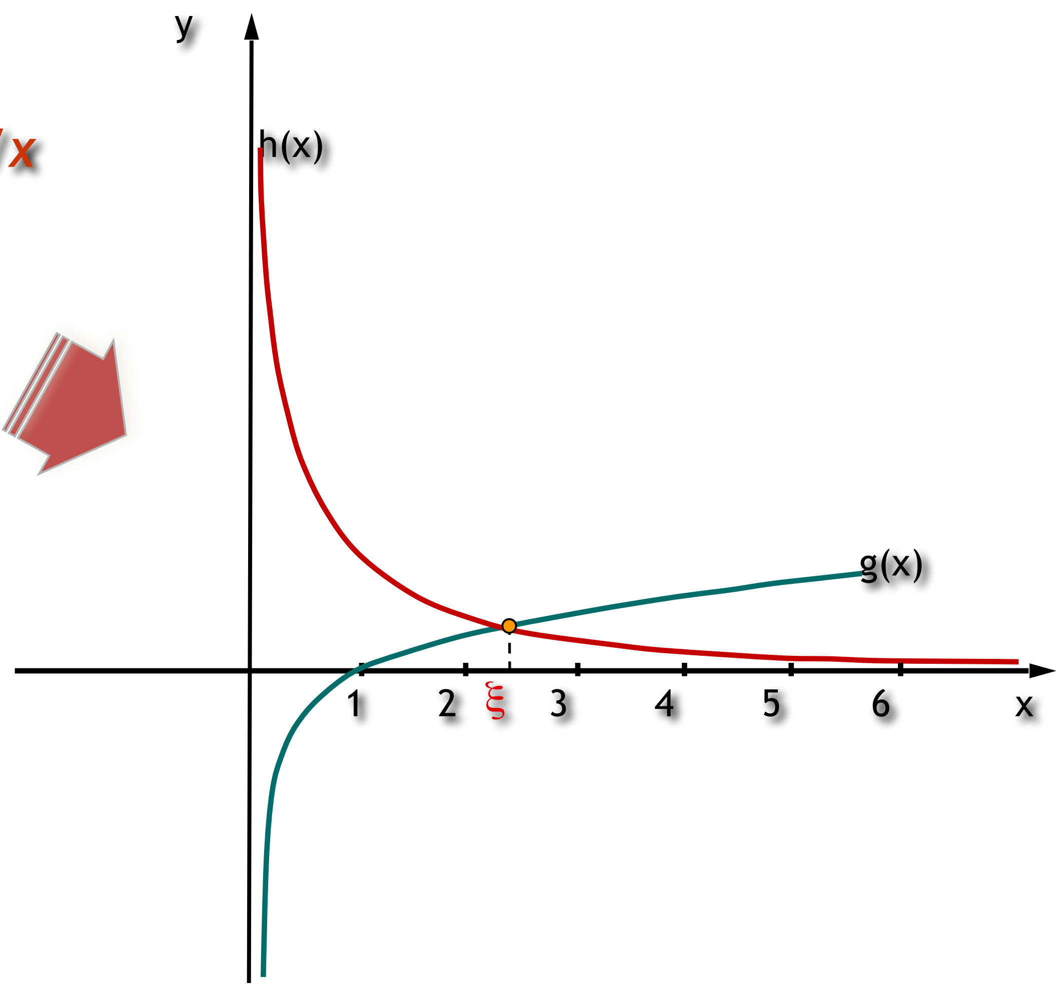
MATLAB



Cálculo Numérico – Métodos

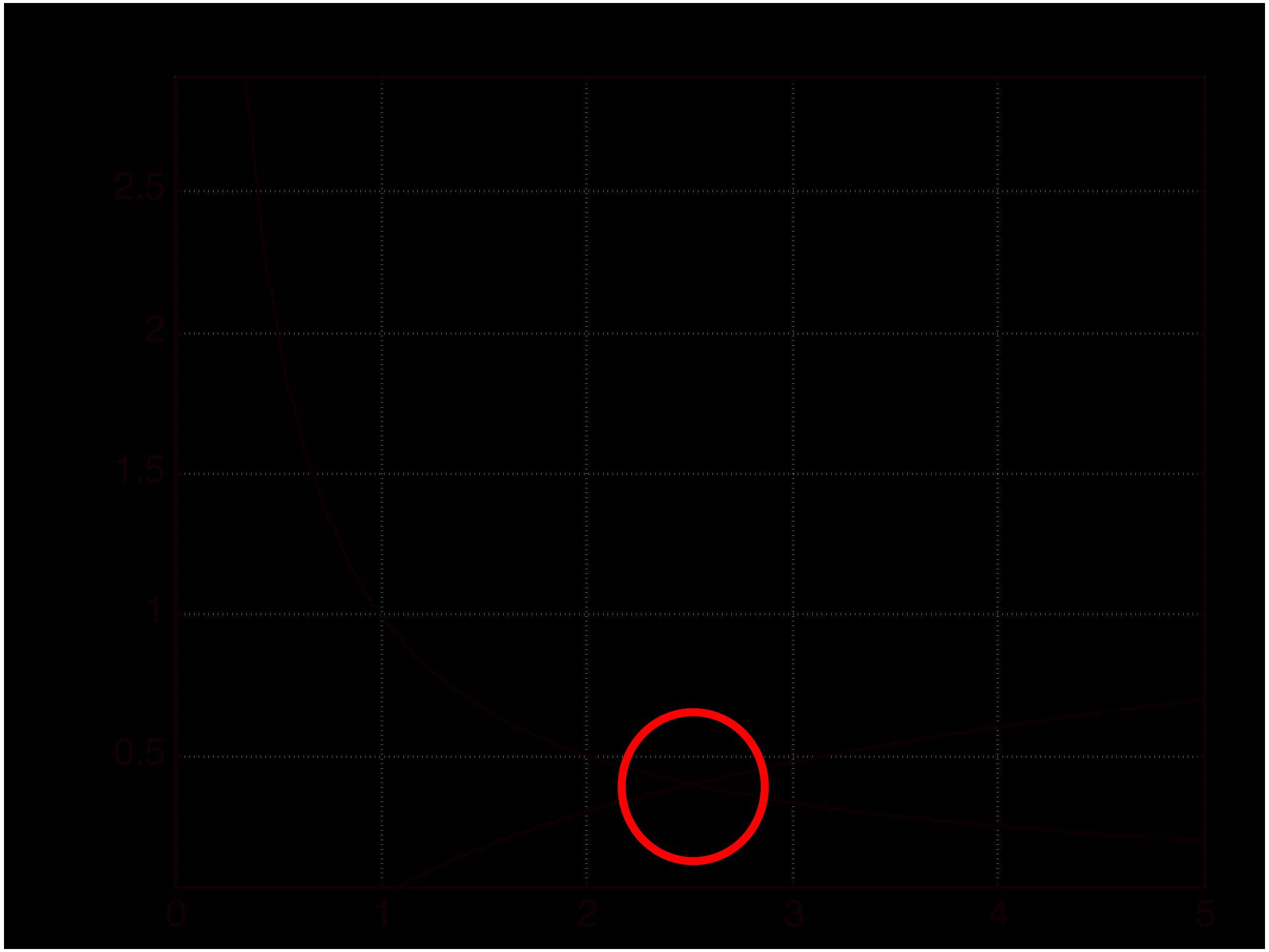
Exemplo: $f(x) = x\,logx - 1$ *(Uso do Processo II)*

- $xlog(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow log(x) = 1/x$
- $g(x) = log(x)$
- $h(x) = 1/x$



- $\xi \in (2, 3)$

MATLAB



Equações Polinomiais

- Teorema Fundamental da Álgebra

  Se $p_n(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, i.e., $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, então $p_n(x)$ tem pelo menos um zero, i.e., existe um número complexo ξ tal que $p_n(\xi) = 0$.

- Regra de sinal de Descartes

  Dado um polinômio com coeficientes reais, o número de zeros reais positivos, *p*, desse polinômio não excede o número *v* de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais, $v - p$ é inteiro, par, não negativo.

Equações Polinomiais

Exemplo:

$p5(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$v = 2$

$v - p \geq 0 \rightarrow p = 0$ ou $p = 2$

Equações Polinomiais

Exemplo: (raízes negativas)

$p5(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$p5(-x) = 2(-x)^5 - 3(-x)^4 - 4(-x)^3 + (-x) + 1$

$p5(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 1$

$v = 3$

$v - p \geq 0 \rightarrow p = 1$ ou $p = 3$

Equações Polinomiais

Exemplo:

(positivas)

$p5(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1$

$v = 3$

$v - p \geq 0 \rightarrow p = 1$ ou $p = 3$

(negativas)

$p5(-x) = 4(-x)^5 - (-x)^3 + 4(-x)^2 - (-x) - 1$

$p5(-x) = -4x^5 + x^3 + 4x^2 + x - 1$

$v = 2$: $v - n \geq 0 \rightarrow n = 0$ ou $p = 2$

Equações Polinomiais

Exemplo:

(positivas)

$p7(x) = x^7 + 1$

$v = 0$

$v - p \geq 0 \rightarrow p = 0$

(negativas)

$p7(-x) = -x^7 + 1$

$v = 1 \;:\; v - n \geq 0 \rightarrow n = 1$

Cálculo Numérico – Métodos

- FASE II: ***REFINAMENTO***

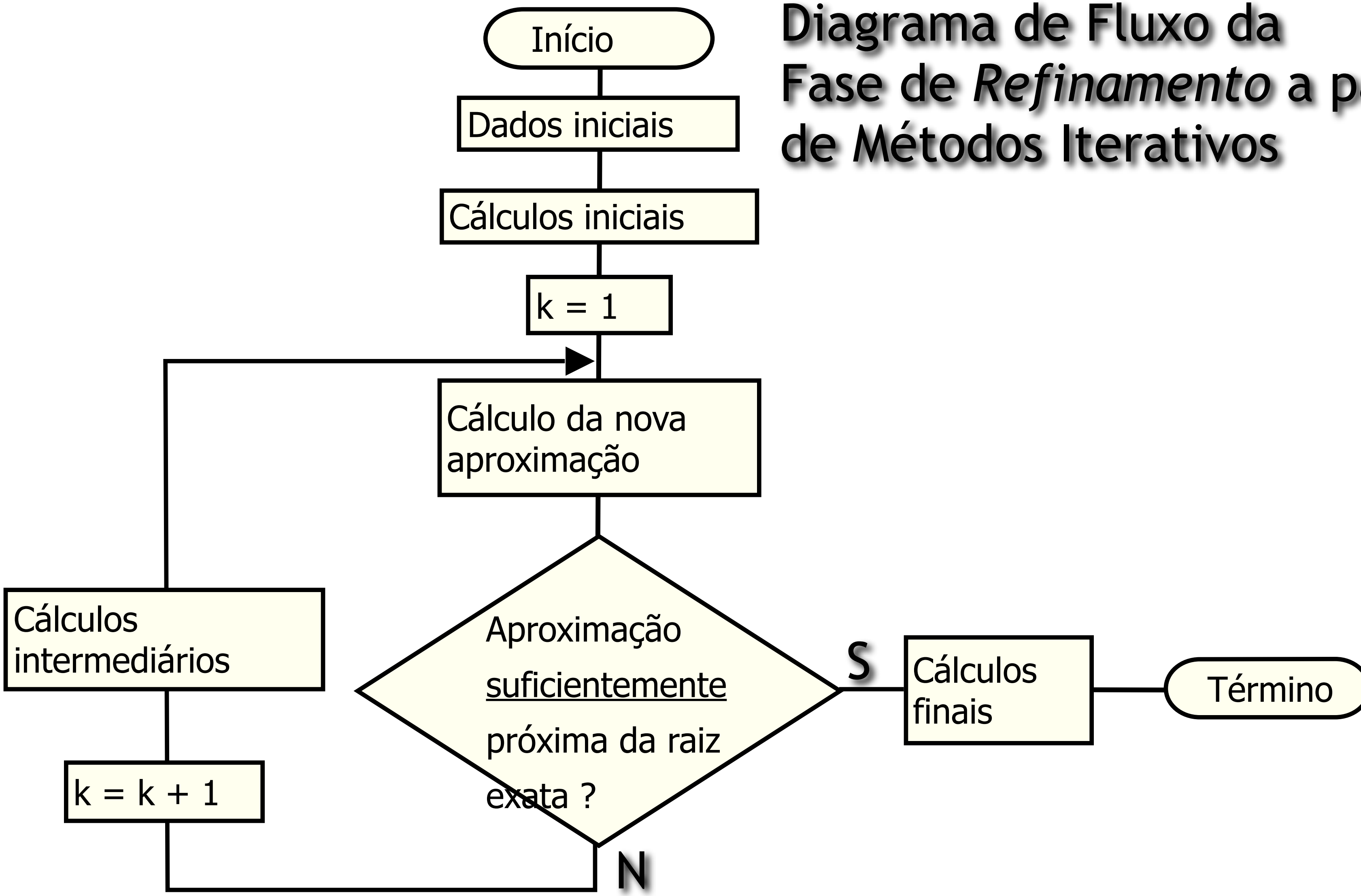
  - Aplicação de métodos numéricos destinados ao refinamento de raízes

    - Diferenciação dos métodos $\Rightarrow$ Modo de refinamento

    - Método *iterativo* $\Rightarrow$ caracterizado por seqüência de instruções executáveis passo a passo, algumas das quais repetidas em ciclos (*iterações*)

Cálculo Numérico – Métodos

Diagrama de Fluxo da Fase de *Refinamento* a partir de Métodos Iterativos



Cálculo Numérico – Métodos

CRITÉRIOS DE PARADA

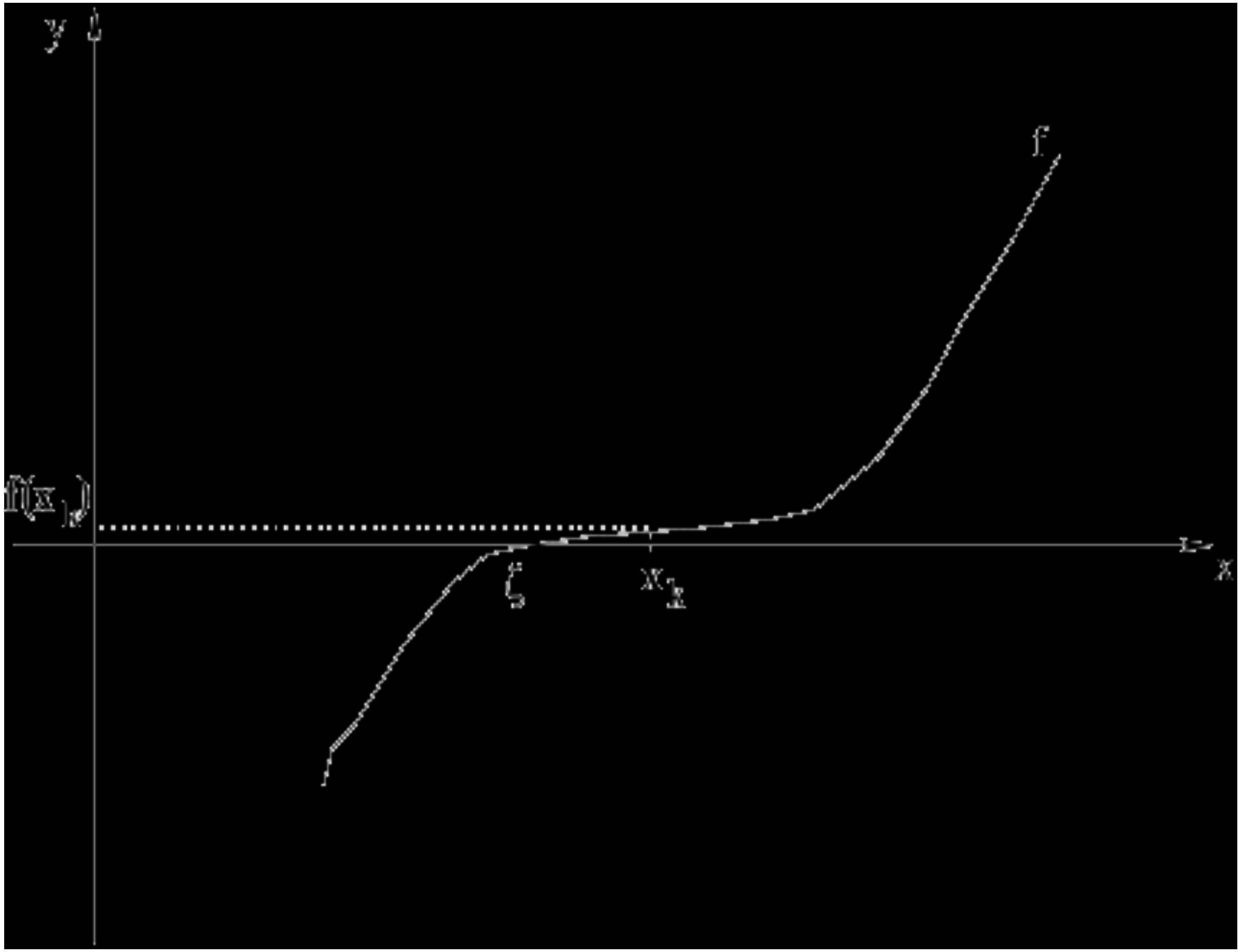
- Teste: $\mathbf{x_k}$ *suficientemente* próximo da raiz exata?
- *Como* verificar tal questionamento?
- Interpretações para *raiz aproximada*
  - $\bar{\mathbf{x}}$ é *raiz aproximada* com precisão ε se:
    i. $|\bar{\mathbf{x}} - \xi| < \varepsilon$

       ou

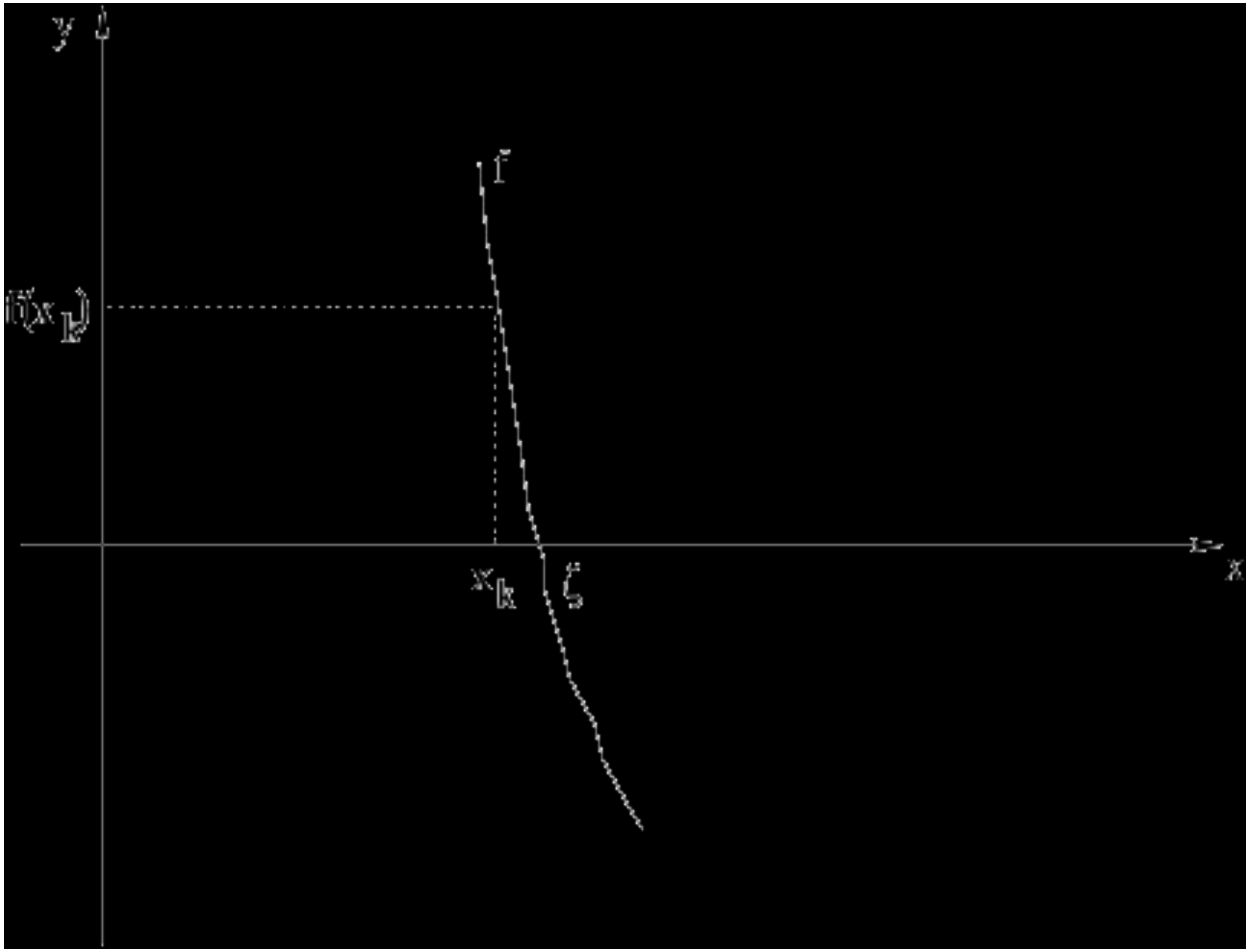
    ii. $|f(\bar{\mathbf{x}})| < \varepsilon$

Como proceder se não se conhece ξ ?

Esses dois critérios não são equivalentes!



$|f(x_k)| < \varepsilon$, mas $|x_k - \xi| >> \varepsilon$



$|x_k - \xi| < \varepsilon$, mas $|f(x_k)| >> \varepsilon$

Solução: Impor os dois critérios:

i) $|f(x_k)| < \varepsilon$

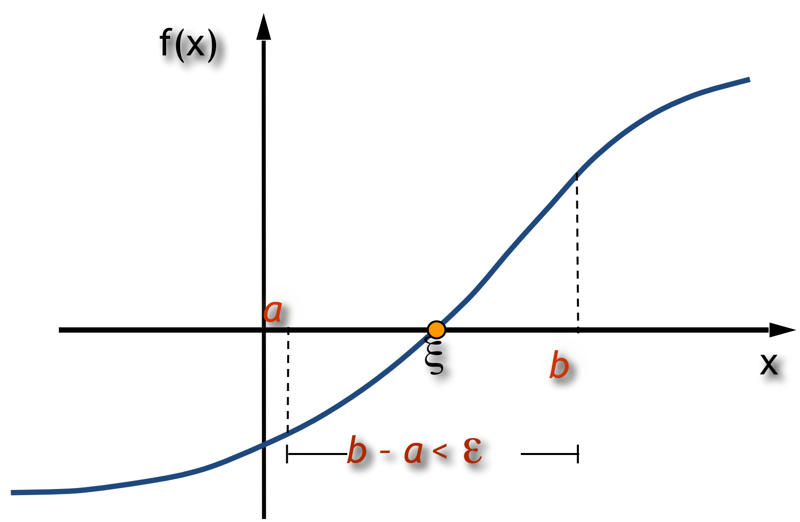
ii) $|x_k - \xi| < \varepsilon$

Cálculo Numérico – Métodos

- Redução do intervalo que contém a raiz a cada iteração:
  - Obtenção de um intervalo ***[a,b]*** tal que:
    - $\xi \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$

      e
    - $\mathbf{b - a} < \varepsilon$

$$|\bar{\mathbf{x}} - \xi| < \varepsilon \quad , \forall\ \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$



$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ pode ser tomado como $\bar{\mathbf{x}}$

Cálculo Numérico – Métodos

$|\overline{\mathbf{x}} - \xi| < \varepsilon$

$|f(\overline{\mathbf{x}})| < \varepsilon$

Nem sempre é possível satisfazer *ambos* os critérios

Métodos numéricos são desenvolvidos de modo a satisfazer *pelo menos* um dos critérios.

Cálculo Numérico – Métodos

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Teste de Parada

Estipulação do *número máximo de iterações*

Prevenção contra *loopings*

- *erros do programa*
- *inadequação do método ao problema*

Cálculo Numérico – **Métodos**

- **Métodos Iterativos para a Obtenção de Zeros Reais de Funções**
  - ***Bissecção* (ou de *Bolzano*)**
  - ***Falsa Posição***
  - ***Ponto Fixo***
  - ***Newton-Raphson***
  - ***Secante***

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Método da *Bissecção*** **(ou de *Bolzano*)**

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz subdividindo sucessivas vezes o intervalo que a contém pelo ponto médio de a e b.

Cálculo Numérico – Bissecção

- **Definição do intervalo inicial**
  - Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial*
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - Condições de aplicação
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - Sinal da derivada *constante*

Cálculo Numérico – Bissecção

Definição dos subintervalos

- Subdivide-se o intervalo pelo *ponto médio* de *a* e *b*
  - $x_1 = (a+b)/2$
- Verifica-se se x_1 é uma *aproximação da raiz* da equação
  - Se *verdadeiro* $\Longrightarrow$ x_1 é a *raiz* procurada
  - *Caso contrário* $\Longrightarrow$ define-se um *novo* intervalo

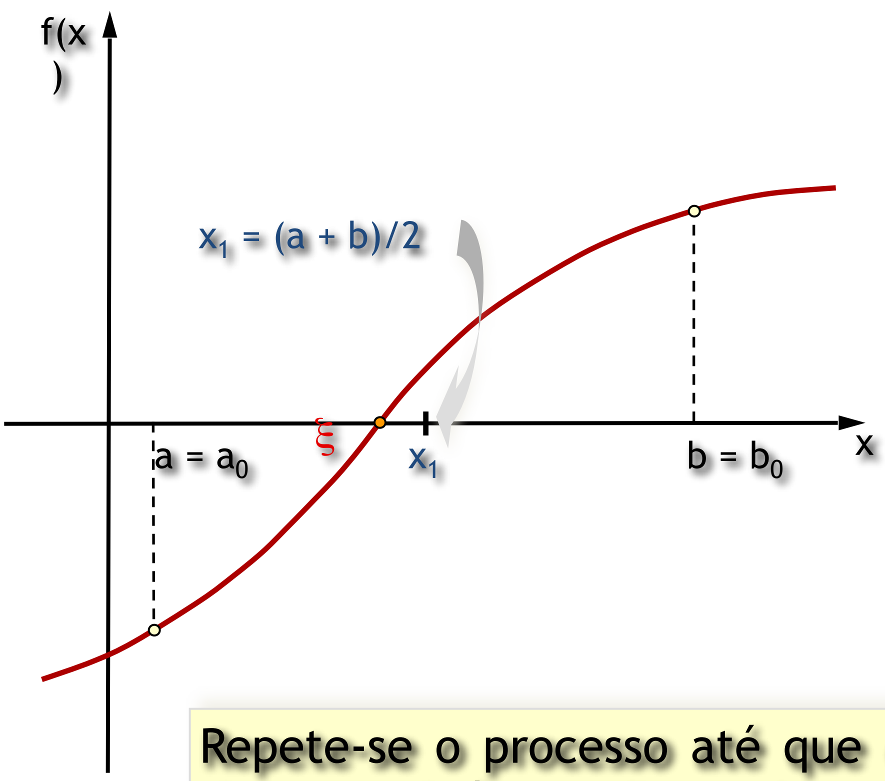
Cálculo Numérico – Bissecção

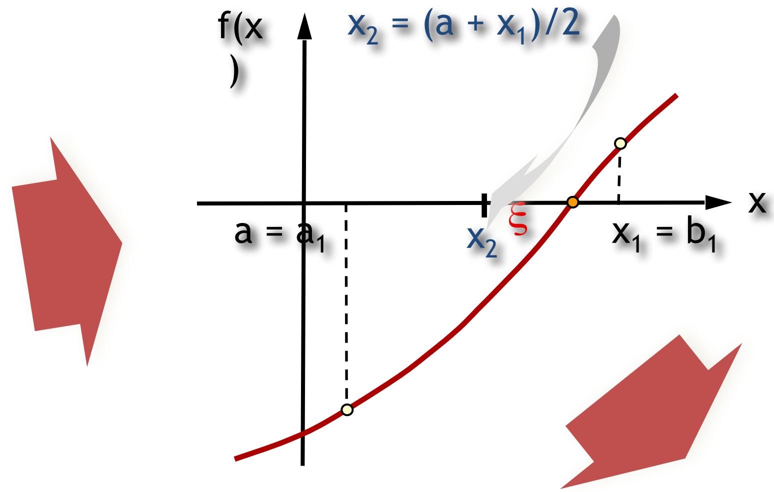
Definição do novo intervalo

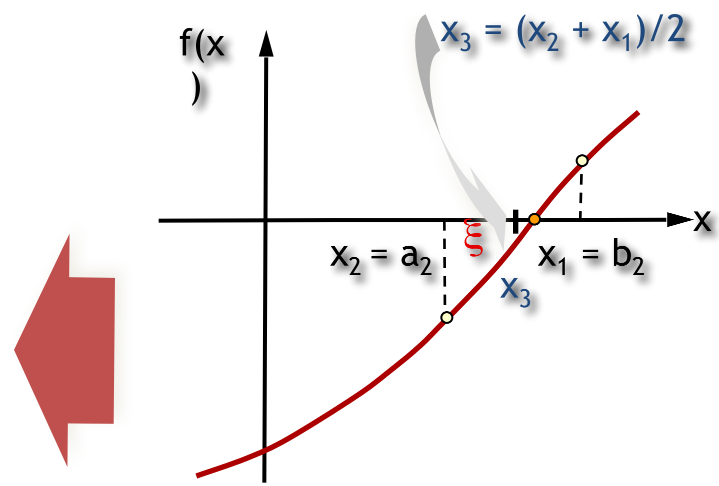
- Determina-se em qual dos subintervalos - *$[a, x_1]$* ou *$[x_1, b]$* - se encontra a *raiz*
  - Calcula-se o produto *$f(a)*f(x_1)$*
  - Verifica-se se *$f(a)*f(x_1) < 0$*
    - Se *verdadeiro* $\Rightarrow \xi \in (a, x_1)$ (Logo a = *a* e b = x_1)
    - *Caso contrario* $\Rightarrow \xi \in (x_1, b)$ (Logo a = x_1 e b = *b*)
- Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – Bissecção

Análise gráfica







Repete-se o processo até que o valor de ***x*** atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – Bissecção

Condições de parada

- Se os valores fossem *exatos*
  - $f(x) = 0$
  - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
- *Não o sendo*
  - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
  - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – Bissecção

Tolerância

- Aproximação de zero dependente do equipamento a ser utilizado e da precisão necessária para a solução do problema.

Cálculo Numérico – Bissecção

Algoritmo

$k := 0;\ a_0 := a;\ b_0 := b;\ x_0 := a;$

$x_{k+1} := (a_k + b_k)/2;$

while critério de convergência não satisfeito **and** $k \leq L$

  if $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$ **then** /* raiz em $[a_k\ ,\ x_{k+1}]$ */

    $a_{k+1} := a_k;\ b_{k+1} := x_{k+1};$

  else /* raiz em $[x_{k+1}, b_k]$ */

    $a_{k+1} := x_{k+1};\ b_{k+1} := b_k\ ;$

  endif

  $k := k + 1;\ x_{k+1} := (a_k + b_k)/2;$

endwhile

if $k > L$

  convergência falhou

endif

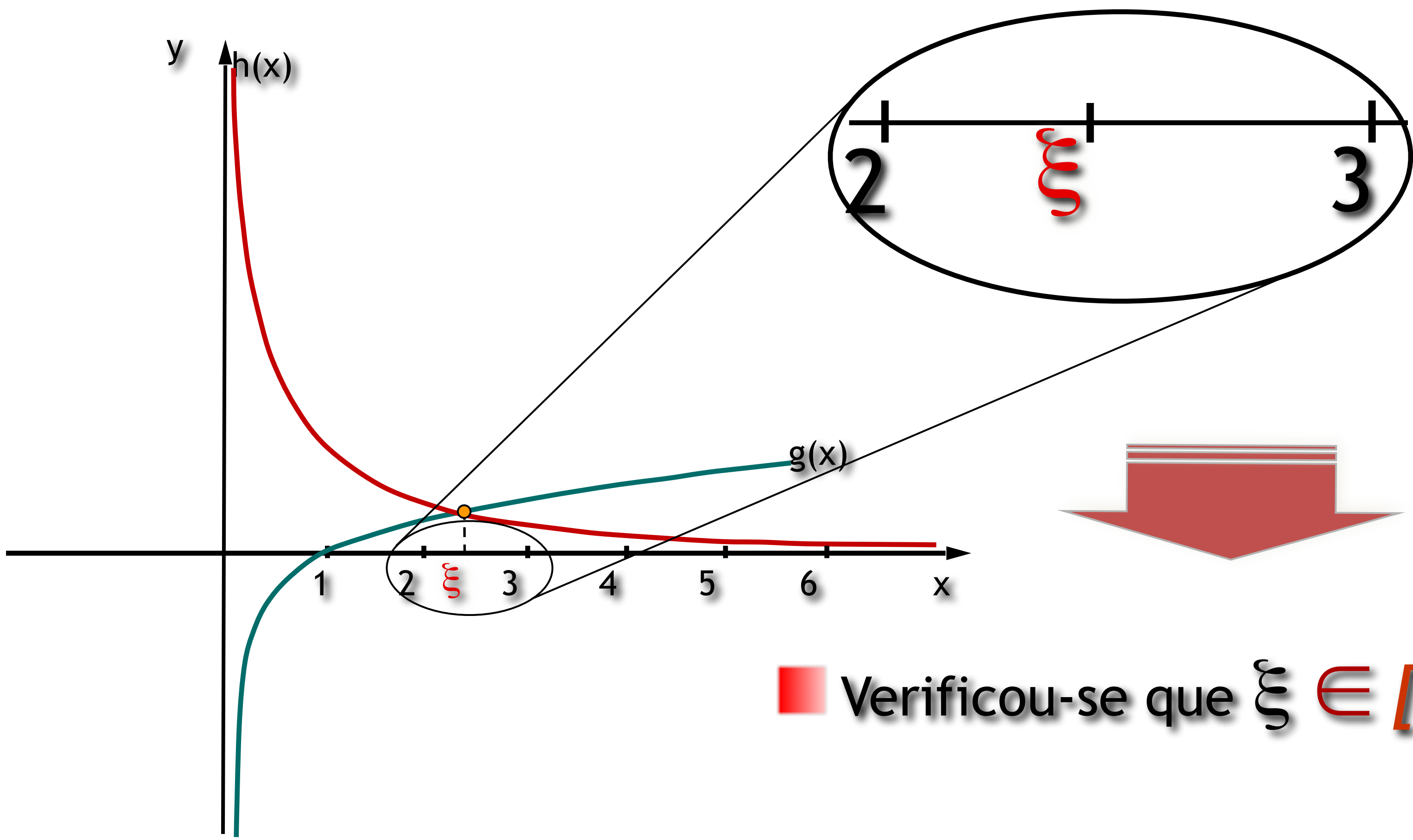
Método da Bissecção

<u>Idéia</u>: Reduzir o intervalo que contém a raiz, dividindo-o ao meio a cada iteração.

```
procedimento Bissecao(a,b, ε, ITERMAX,x);
k ← 0;
x ← (a + b)/2;
enquanto ((b − a ≥ ε   ou   f(x) ≥ ε)   e   k ≤ ITERMAX) faça
    se (f(a) × f(x) < 0)
        então b ← x
        senão a ← x;
    x ← (a + b)/2;
    k ← k + 1;
fim-enquanto;
se (k ≤ ITERMAX)
    então Retorne x como aproximação para a raiz;
    senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
                        requerida em k iterações;
fim Bissecao;
```

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo: $f(x) = x\log x - 1$



- Verificou-se que $\xi \in [2, 3]$

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo: Considerando o *método da bissecção* e adotando **[2, 3]** como *intervalo inicial*.

- $x_1 = (2 + 3)/2 = 2,5$
  - $f(2) = -0,3979 < 0$
  - $f(3) = 0,4314 > 0$
  - $f(2,5) = -5,15.10^{-3} < 0$
- $\xi \in [2,5 \,;\, 3]$
  - $a_1 = x_1 = 2,5$
  - $b_1 = b_0 = 3$

- $x_2 = (2,5 + 3)/2 = 2,75$
  - $f(2,5) = -5,15.10^{-3} < 0$
  - $f(3) = 0,4314 > 0$
  - $f(2,75) = 0,2082 > 0$
- $\xi \in [2,5 \,;\, 2,75]$
  - $a_2 = a_1 = 2,5$
  - $b_2 = x_2 = 2,75$

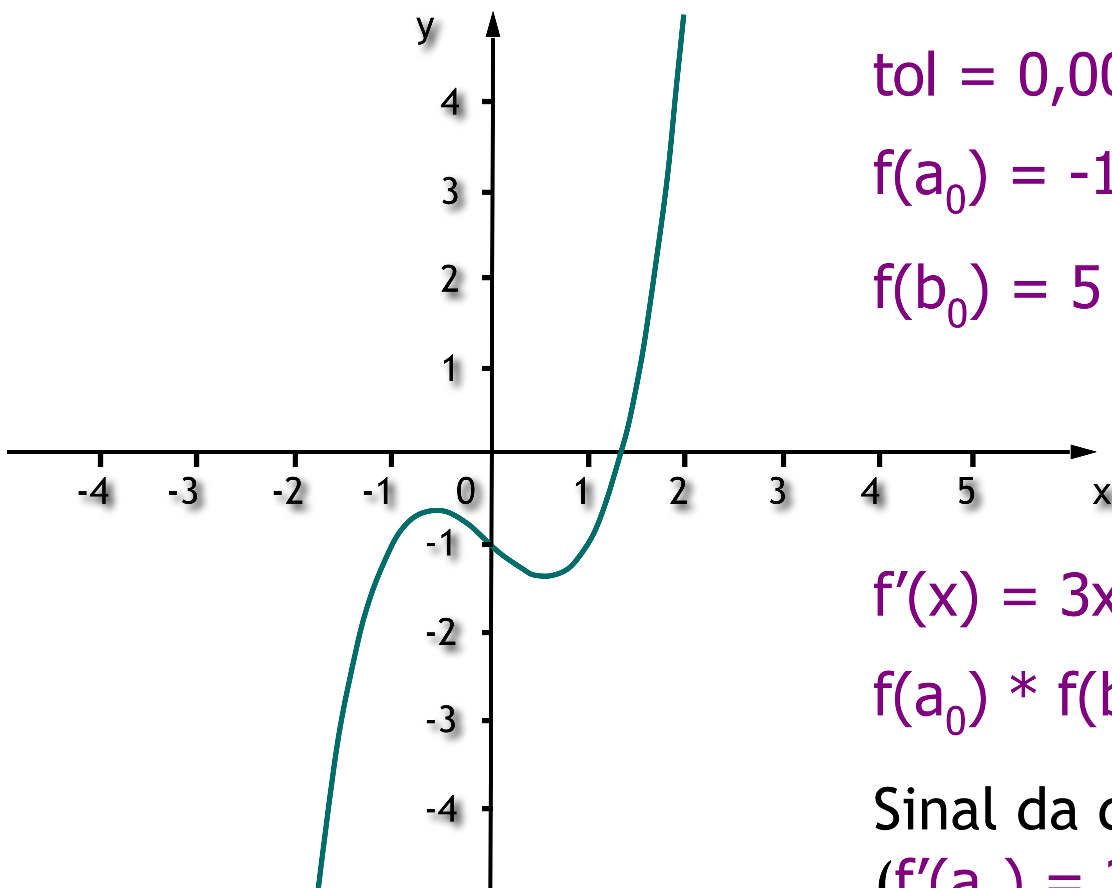
Cálculo Numérico – Bissecção

- $x_3 = (2,5 + 2,75)/2 = 2,625$
  - $f(2,5) = -5,15.10^{-3} < 0$
  - $f(2,75) = 0,2082 > 0$
  - $f(2,625) = 0,1002 > 0$
- $\xi \in [2,5 ; 2,625]$
  - $a_3 = a_2 = 2,5$
  - $b_3 = x_3 = 2,625$
- $x_4 = (2,5 + 2,625)/2 = 2,5625$
  - $f(2,5) = -5,15.10^{-3} < 0$
  - $f(2,625) = 0,1002 > 0$
  - $f(2,5625) = 0,0472 > 0$
- $\xi \in [2,5 ; 2,5625]$
  - $a_3 = a_2 = 2,5$
  - $b_3 = x_4 = 2,5625$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo: $f(x) = x^3 - x - 1$



Intervalo inicial atribuído: [1, 2]

tol = 0,002

$f(a_0) = -1$

$f(b_0) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante
($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)

Cálculo Numérico – Bissecção

- Cálculo da 1ª aproximação
  - $x_1 = (a_0 + b_0)/ 2 = (1 + 2)/2 = 1,5$
  - $f(x_1) = \mathbf{1{,}5^3 - 1{,}5 - 1 = 0{,}875}$
  - Teste de Parada
    - $|f(x_1)| = |0{,}875| = 0{,}875 > 0{,}002$
  - Escolha do novo intervalo
    - $f(a_0).f(x_1) = (-1).0{,}875 = -0{,}875$

      logo: $a_1 = a_0 = 1{,}0$ e $b_1 = x_1 = 1{,}5$

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo

k	a	b	f(a	f(b	x	f(x
0	1,0000000	2,0000000	-1,000000	5,000000	1,50000000	0,875000
1	1,0000000	1,5000000	-1,000000	0,875000	1,25000000	-0,296875
2	1,2500000	1,5000000	-0,296875	0,875000	1,37500000	0,224609
3	1,2500000	1,3750000	-0,296875	0,224609	1,31250000	-0,051514
4	1,3125000	1,3750000	-0,051514	0,224609	1,34375000	0,082611
5	1,3125000	1,3437500	-0,051514	0,082611	1,32812500	0,014576
6	1,3125000	1,3281250	-0,051514	0,014576	1,32031250	-0,018711
7	1,3203125	1,3281250	-0,018700	0,014576	1,32421875	-0,002128

tol = 0,002

Determinar com precisão $\varepsilon < 0,01$ e com um máximo de 10 iterações, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$.

Solução:

(a) Isolamento da raiz:

Já foi visto que $\xi \in [0, 1]$.

(a) Refinamento da solução:

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$b-a$	Conclusão
0	0	1	0.500	0.122	1	$\xi \in [0.000, 0.500]$
1	0	0.500	0.250	-0.469	0.500	$\xi \in [0.250, 0.500]$
2	0.250	0.500	0.375	-0.181	0.250	$\xi \in [0.375, 0.500]$
3	0.375	0.500	0.438	-0.031	0.125	$\xi \in [0.438, 0.500]$
4	0.438	0.500	0.469	0.045	0.063	$\xi \in [0.438, 0.469]$
5	0.438	0.469	0.453	0.007	0.031	$\xi \in [0.438, 0.453]$
6	0.438	0.453	0.445	-0.012	0.016	$\xi \in [0.445, 0.453]$
7	0.445	0.453	0.449	-0.002	0.008	Pare! pois $b - a < \varepsilon$ e $\|f(x_k)\| < \varepsilon$

Na iteração 7, tanto a amplitude do intervalo $[a, b]$ quanto a imagem, em módulo, de x_7 são menores que a precisão requerida, isto é, $b - a = 0.453 - 0.445 = 0.008 < \varepsilon = 0.01$ e $|f(x_7)| = 0.008 < \varepsilon = 0.01$. Desta forma, dizemos que $x_7 = 0.449$ é uma aproximação para a raiz ξ da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ com uma precisão $\varepsilon < 0.01$.

Cálculo Numérico – Falsa Posição

- **Método da *Falsa Posição***

  Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz a partir de subdivisões sucessivas do intervalo que a contém, substituindo f(x) no intervalo [a,b] de cada iteração por uma reta e tomando como aproximação da raiz a intersecção da reta com o eixo das abscissas.

Método da Falsa Posição

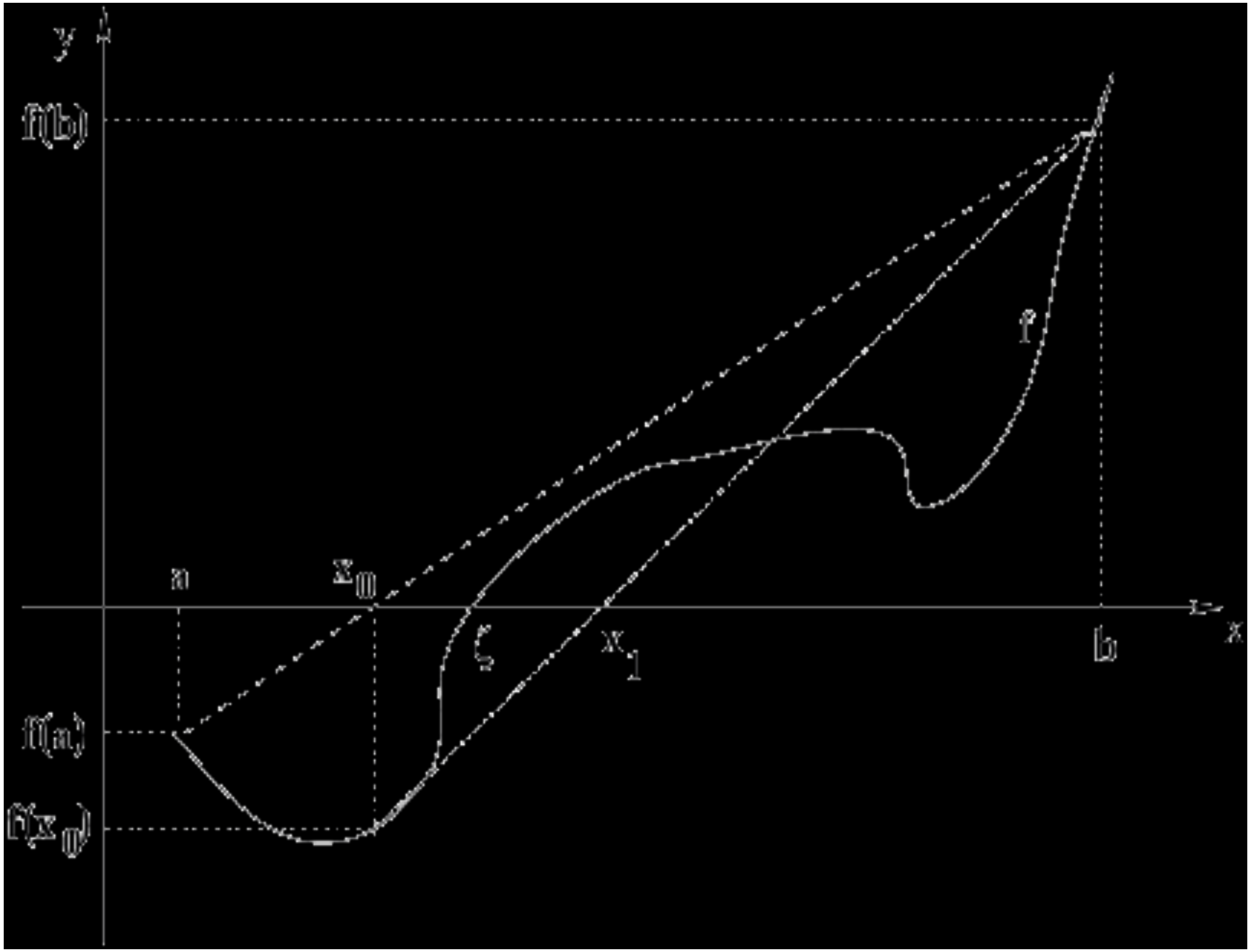
Idéia: Tomar como aproximação x para a raiz ξ a média ponderada dos extremos do intervalo [a,b] com pesos |f(b)| e |f(a)| respectivamente.

$$x = \frac{a\,|\,f(b)\,| + b\,|\,f(a)\,|}{|\,f(b)\,| + |\,f(a)\,|}$$

Desta forma, x estará mais próximo do extremo cuja imagem for menor.

Simplificação:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$



y
f(b)
f
a
x_0
ζ
x_1
b
x
f(a)
$f(x_0)$

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Método da *Falsa Posição (MFP)*
x
Método *da Bissecção (MB)*

MB: calcula a média aritmética entre a e b.

MFP: calcula a média ponderada entre a e b com pesos |f(b)| e |f(a)|, respectivamente.

Cálculo Numérico – Falsa Posição

- ***MFP*: *calcula a média ponderada entre a e b com pesos lf(b)l e lf(a)l*, *respectivamente*.**

- X = (a lf(b)l + b lf(a)l) / (lf(b)l + lf(a)l)

- = (a f(b) - b f(a)) / (f(b) - f(a))

- **Observe que f(a) e f(b) têm sinais opostos.**

Cálculo Numérico – Falsa Posição

- **Definição do intervalo inicial**
  - Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial*
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - Condições de aplicação
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - Sinal da derivada *constante*

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Definição dos subintervalos

- Subdivide-se o intervalo pelo ***ponto de intersecção*** da reta que liga ***f(a)*** a ***f(b)*** e o eixo das abscissas.

- Verifica-se se x_1 é uma ***aproximação da raiz*** da equação (ξ)

    - Se ***verdadeiro*** $\Rightarrow$ x_1 é a ***raiz*** procurada.

    - ***Caso contrário*** $\Rightarrow$ define-se um ***novo*** intervalo.

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Definição do novo intervalo

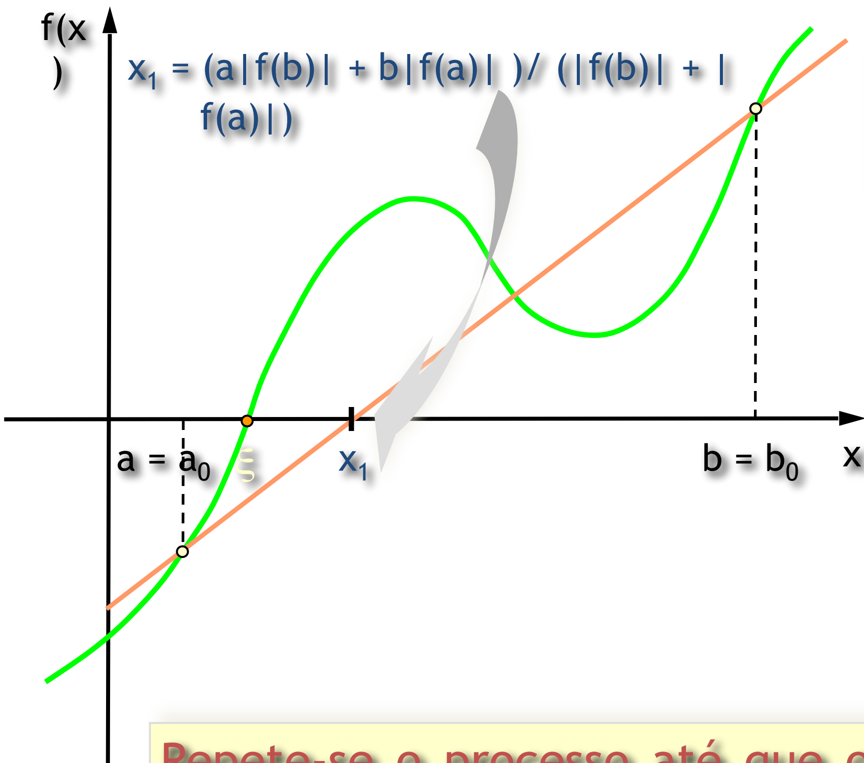
- Determina-se em qual dos subintervalos, $[a_0, x_1]$ ou $[x_1, b_0]$, se encontra a raiz ξ.
  - Calcula-se o produto $f(a)*f(x_1)$.
  - Verifica-se se $f(a)*f(x_1) < 0$.
    - Se *verdadeiro* $\Longrightarrow \xi \in (a_0, x_1)$

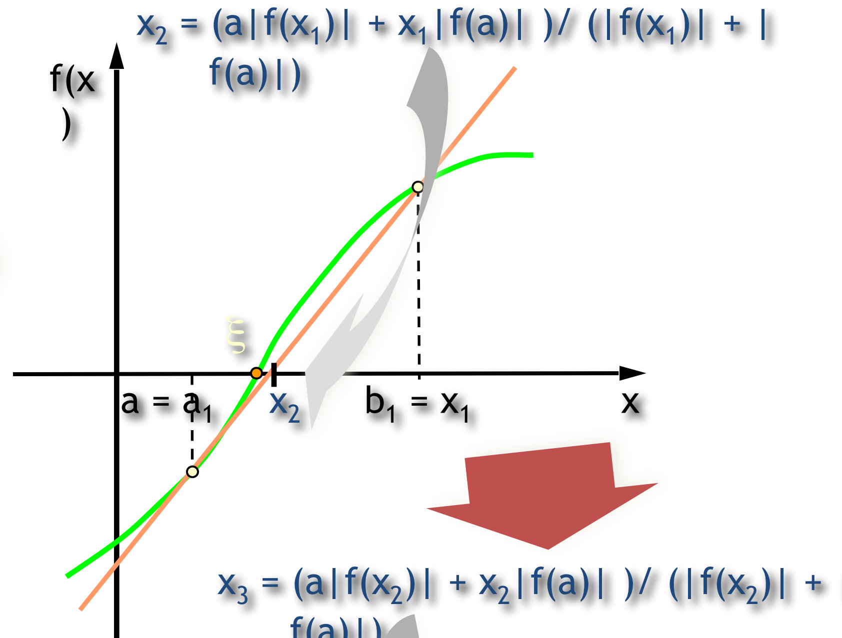
      Logo: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$
    - *Caso contrario* $\Longrightarrow \xi \in (x_1, b_0)$

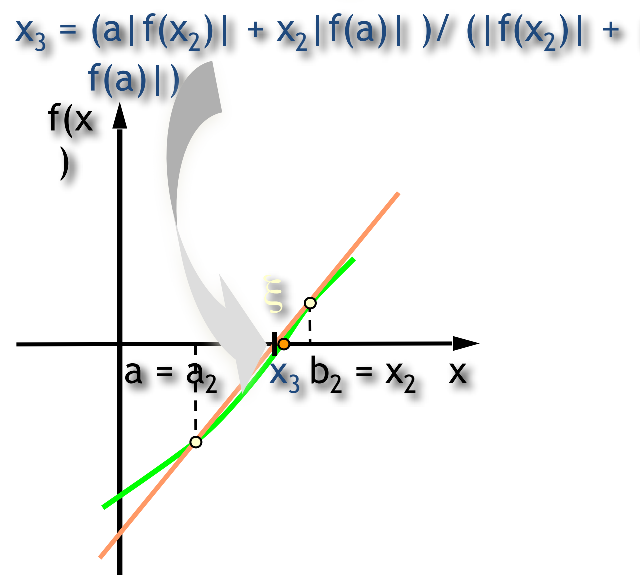
      Logo $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$)
- Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Análise gráfica







Repete-se o processo até que o valor de ***x*** atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Condições de parada

- Se os valores fossem *exatos*
  - $f(x) = 0$
  - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
- *Não o sendo*
  - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
  - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

procedimento *FalsaPosicao(a,b, ε, ITERMAX,x)*;

$k \leftarrow 0$;
$x_{\text{ant}} \leftarrow a$;
$x \leftarrow \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$;
enquanto $(|x - x_{\text{ant}}| \geq \varepsilon$ ou $|f(x)| \geq \varepsilon)$ e $k \leq ITERMAX$ faça
    se $(f(a) \times f(x) < 0)$
        então $b \leftarrow x$
        senão $a \leftarrow x$;
    $x_{\text{ant}} \leftarrow x$;
    $x \leftarrow \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$;
    $k \leftarrow k + 1$;
fim-enquanto;
se $(k \leq ITERMAX)$
    então Retorne x como aproximação para a raiz;
    senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
                requerida em k iterações;

fim *FalsaPosicao*;

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Exemplo: Considerando *$f(x) = xlogx - 1$*

Utilizando o *método da falsa posição* e adotando *$[a_0, b_0] = [2, 3]$* como *intervalo inicial*

1ª iteração

- $a_0 = 2$ $b_0 = 3$

  $f(a_0) = -0,3979 < 0$

  $f(b_0) = 0,4314 > 0$

  - $x_1 = [2.0,4314 - 3.(-0,3979)]/[0,4314 - (-0,3979)] =$

    $= 2,4798$

  - $f(x_1) = -0,0219 < 0$

Cálculo Numérico – Falsa Posição

2ª iteração

- $a_1 = x_1 = 2,4798$ $b_1 = b_0 = 3$

  $f(a_1) = -0,0219 < 0$

  $f(b_1) = 0,4314 > 0$

  - $x_2 = [2,4798.0,4314 - 3.(-0,0219)]/[0,4314 - (-0,0219)] =$
    $= 2,5049$
  - $f(x_2) = -0,0011 < 0$

Cálculo Numérico – Falsa Posição

3ª iteração

- $a_2 = x_2 = 2{,}5049$ $\qquad b_1 = b_0 = 3$

  $f(a_2) = -0{,}0011 < 0$

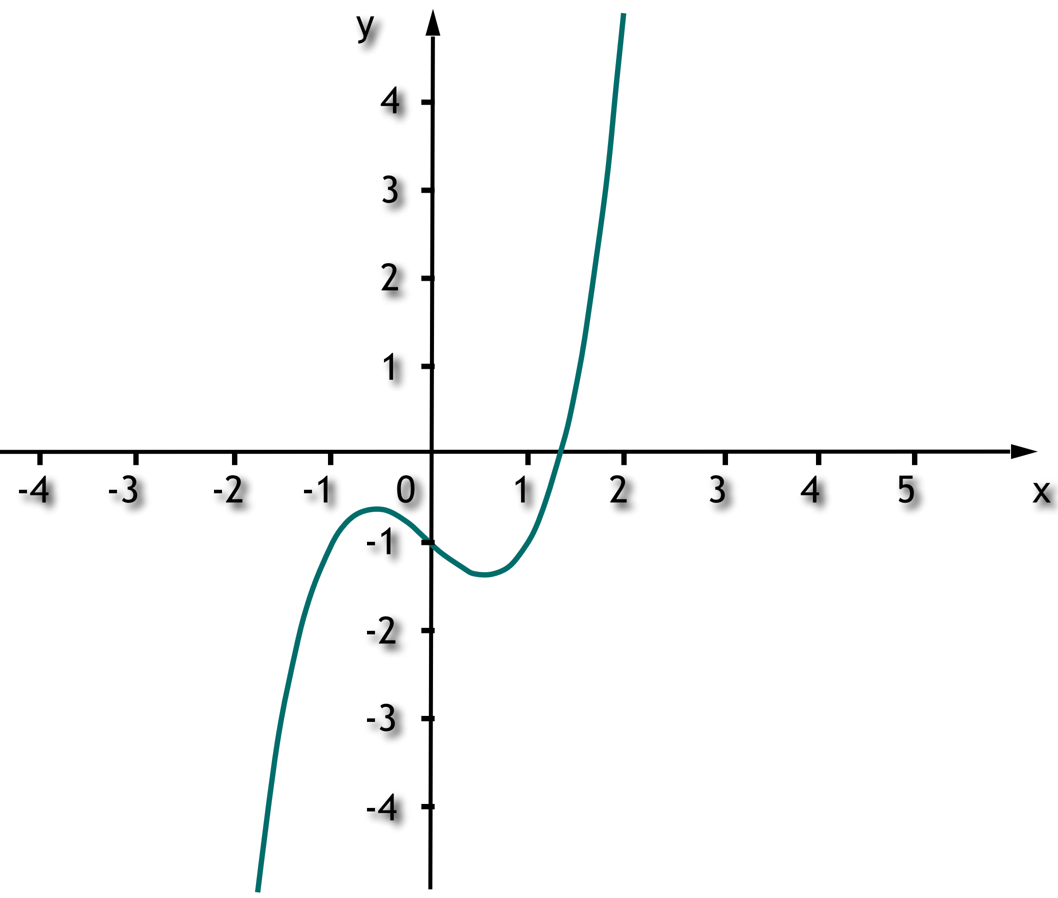
  $f(b_2) = 0{,}4314 > 0$

  - $x_3 = [2{,}5049.0{,}4314 - 3.(-0{,}0011)]/[0{,}4314 - (-0{,}0011)] =$
    $= 2{,}5061$
  - $f(x_3) = -7{,}0118.10^{-5} < 0$

$\vdots$

Cálculo Numérico – Falsa Posição

Exemplo: $f(x) = x^3 - x - 1$



Intervalo inicial atribuído: *[1, 2]*

tol = 0,002

$f(a_0) = -1$ e $f(b_0) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante

($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)

Cálculo Numérico – Falsa Posição

- Cálculo da 1ª aproximação
  - $x_1 = [(a_0.f(b_0) - b_0.f(a_0)] / [f(b_0) - f(a_0)]$
    $= [1.5 – 2.(-1)]/[5 – (-1)] = 1,166667$
  - $f(x_1) = 1,166667^3 – 1,166667 – 1 = -0,578703$
  - Teste de Parada
    - $|f(x_1)| = |-0,578703| = 0,578703 > 0,002$
  - Escolha do novo intervalo
    - $f(a_0).f(x_1) = (-1).(-0,578703) = 0,578703$
      logo: $a_1 = x_1 = 1,166667$ e $b_1 = b_0 = 2$

Cálculo Numérico – Falsa Posição

k	a	b	f(a	f(b	x	f(x
0	1,00000000	2,00000000	-1,00000000	5,00000000	1,16666667	-0,57870370
1	1,16666667	2,00000000	-0,57870370	5,00000000	1,25311203	-0,28536303
2	1,25311203	2,00000000	-0,28536303	5,00000000	1,29343740	-0,12954209
3	1,29343740	2,00000000	-0,12954209	5,00000000	1,31128102	-0,05658849
4	1,31128102	2,00000000	-0,05658849	5,00000000	1,31898850	-0,02430375
5	1,31898850	2,00000000	-0,02430375	5,00000000	1,32228272	-0,01036185
6	1,32228272	2,00000000	-0,01036185	5,00000000	1,32368429	-0,00440395
7	1,32368429	2,00000000	-0,00440395	5,00000000	1,32427946	-0,00186926

tol = 0,002

Método da Falsa Posição Modificado

- *Dada uma função **f(x)** contínua no intervalo **[a,b]**, o qual contém uma raiz única, é possível determinar tal raiz a partir de subdivisões sucessivas do intervalo que a contém, evitando, ao mesmo tempo, que as aproximações geradas pela fórmula de iteração se aproximem da raiz por um único lado.*

Falsa Posição Modificado

- **Definição do intervalo inicial**
  - Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial*
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - Condições de aplicação
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - Sinal da derivada *constante*

Falsa Posição Modificado

Definição dos subintervalos

- Subdivide-se o intervalo pelo *ponto de intersecção* da reta que liga *f(a)* a *f(b)* e o eixo das abscissas

- Verifica-se se x_1 é uma *aproximação da raiz* da equação (ξ)

  - Se *verdadeiro* $\Longrightarrow$ x_1 é a *raiz* procurada

  - *Caso contrário* $\Longrightarrow$ define-se um *novo* intervalo

Falsa Posição Modificado

Definição do novo intervalo

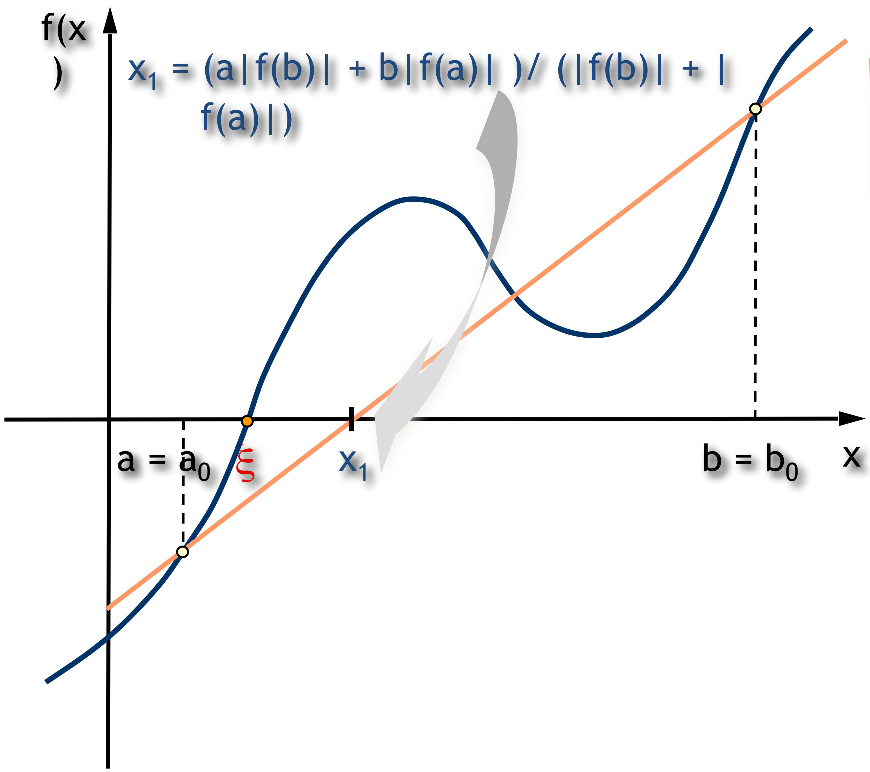
- Determina-se em qual dos subintervalos - $[a_0, x_1]$ ou $[x_1, b_0]$ - se encontra a raiz ξ
  - Calcula-se o produto $f(a)*f(x_1)$
  - Verifica-se se $f(a)*f(x_1) < 0$
    - Se *verdadeiro* $\Longrightarrow \xi \in (a_0, x_1)$

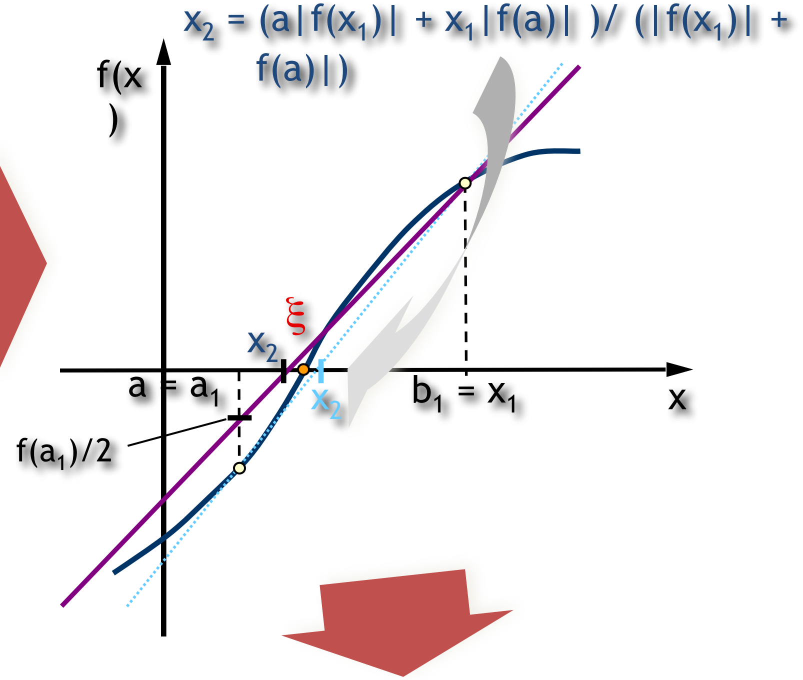
      Logo $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$
    - *Caso contrario* $\Longrightarrow \xi \in (x_1, b_0)$

      Logo $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$
- Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.

Falsa Posição Modificado

Análise gráfica





Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Falsa Posição Modificado

Condições de parada

- Se os valores fossem *exatos*
  - $f(x) = 0$
  - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
- *Não o sendo*
  - $|f(x)| \leq tolerância$
  - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq tolerância$

Método do Ponto Fixo (MPF)

Dizemos que um número ξ é um ponto fixo de uma função de iteração $\boldsymbol{g}$, se

$$\boldsymbol{g}(\xi) = \xi.$$

Método do Ponto Fixo (MPF)

Interpretação Geométrica

Ponto Fixo

Método do Ponto Fixo (MPF)

O problema de encontrar o ponto fixo de uma função **g**(x) é equivalente a encontrar uma das raízes de **f(x)**, se **g**(x) é da forma

$$\mathbf{g}(x) = x + \mathbf{A}(x)\mathbf{f}(x),\ \mathbf{A}(x) \neq 0.$$

Ou seja, $\mathbf{f}(\xi) = 0$.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Exemplo: $\mathbf{f(x) = x^2 - x - 2}$

Podemos reescrever $f(x) = g(x) - x$, logo temos que $g(x) = f(x) + x \quad x^2 - 2$. Para $g(x) = x^2 - 2$ temos como ponto fixo $\xi = 2$, visto que $g(2) = 2$.

Portanto, o ponto fixo será a raiz de $f(x)$, *i.e.*, $f(2) = 0$.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Ideia Geral do Método

A função **g(x)** é conhecida como **função de iteração** para **f(x) = 0**.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Fundamento Teórico

Teorema 1: *Se $g \in \mathcal{C}[a, b]$ e $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$, g terá um ponto fixo em $[a, b]$.*

Além disso, se $g'(x)$ existir em (a, b) e existir uma constante positiva $c < 1$ tal que $|g'(x)| \leq c$, para todo $x \in (a, b)$, então o ponto fixo em $[a, b]$ será único.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Exemplo: Seja a equação $f(x) = x^2 + x - 6$.

Funções de iteração possíveis:

$g_1(x) = 6 - x^2$

$g_2(x) = (6 - x)^{½}$

$g_3(x) = 6/x - 1$

$g_4(x) = 6/(x + 1)$

Dada uma equação $f(x) = 0$, há mais de uma função de iteração $g(x)$, tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Método do Ponto Fixo (MPF)

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$, temos $\xi_1 = -3$ and $\xi_2 = 2$

Para $g_2(x) = (6 - x)^{½}$, temos $g_1(\xi_1) = -3$ e $g_1(\xi_2) = 2$.

Considerando as iterações e tomando $x_0 = 1{,}5$, temos

$x_1 = g(x_0) = (6 - 1{,}5)^{½} = 2{,}121320343$

$x_2 = g(x_1) = 6 - 2{,}121320343^2 = 1{,}969436380$

$x_3 = g(x_2) = 6 - (1{,}969436380)^2 = 2{,}007626364$

$x_4 = g(x_3) = 6 - (2{,}007626364)^2 = 1{,}998092499$

$x_5 = g(x_4) = 6 - (1{,}998092499)^2 = 2{,}000476818$

Conclui-se que $\{x_k\}$ tende a convergir para $\xi_2 = 2$ a partir de $x_0 = 1{,}5$.

Método do Ponto Fixo (MPF)

No gráfico:

Método do Ponto Fixo (MPF)

<u>Exemplo:</u> $f(x) = x^2 + x - 6$, temos $\xi_1 = -3$ and $\xi_2 = 2$

Para $g_1(x) = 6 - x^2$, temos $g_1(\xi_1) = -3$ e $g_1(\xi_2) = 2$.

Considerando as iterações e tomando $x_0 = 1,5$, temos

$x_1 = g(x_0) = 6 - 1,5^2 = 3,75$

$x_2 = g(x_1) = 6 - 3,75^2 = -8,0625$

$x_3 = g(x_2) = 6 - (-8,0625)^2 = -59,003906$

$x_4 = g(x_3) = 6 - (-59,003906)^2 = -3475,4609$

Conclui-se que $\{x_k\}$ não irá convergir para $\xi_2 = 2$ a partir de $x_0 = 1,5$.

Método do Ponto Fixo (MPF)

No gráfico:

Método do Ponto Fixo (MPF)

Fundamento Teórico sobre Convergência

Teorema 2: *Seja* $g \in \mathcal{C}[a,b]$ *tal que* $g(x) \in [a,b]$*, para todo* $x \in [a,b]$*.*
Suponha que $g'(x)$ *exista em* (a,b) *e que exista uma constante* $0 < c < 1$
com $|g'(x)| \leq c$*, para todo* $x \in (a,b)$*.*

Então, para qualquer número $p_0 \in [a,b]$*, a sequência definida por*
$p_k = g(p_{k-1})$*,* $k \geq 1$*, converge para o único ponto fixo* p *em* $[a,b]$*.*

Corolário 1: *Se g satisfizer as hipóteses do* Teorema 2, *então os limitantes para o erro envolvido na utilização de p_k para a aproximação de p são dados por*

$$\boxed{|p_k - p| \leq c^k \max\{p_0 - a, b - p_0\}}$$

e

$$\boxed{|p_k - p| \leq \frac{c^k}{1-c}|p_0 - p|,}$$

para todo $k \geq 1$.

As duas desigualdades do Corolário 1 relacionam a taxa com a qual a sequência $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge, com o limitante c para a primeira derivada.

A taxa de convergência depende do valor c^k. Quanto menor for o valor de c, mais rápida será a convergência. Quanto mais próximo de 1, mais lenta.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Critérios de Parada

- Valores exatos
  - $f(x_k) = 0$
  - $|x_k - x_{k-1}| = 0$
- Valores aproximados
  - $|f(x_k)| \leq$ tolerância
  - $|x_k - x_{k-1}| \leq$ tolerância

Método do Ponto Fixo (MPF)

- Vantagens
  - Rapidez na convergência
  - Desempenho regular e previsível
- Desvantagens
  - Inconveniente de encontrar uma função de iteração g(x)
  - Difícil sua implementação

Método de Newton-Raphson

- Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b], onde existe uma única raiz, é possível encontrar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.
- x_0 – atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Método de Newton-Raphson

- Considerações:
  - Método do Ponto Fixo
    - Uma das condições de convergência é que $|g'(x)| < 1$, para todo x em [a,b] centrado na raiz.
    - Quanto menor for $|g'(x)|$, mais rápida será a convergência
  - O Método de Newton-Raphson busca garantir e acelerar a convergência do MPF
    - Escolher $g(x)$, tal que $g'(\xi) = 0$, como função de iteração

Método de Newton-Raphson

Dada $f(x) = 0$ e partindo-se da forma geral

$$g(x) = x + A(x)f(x),\ A(x) \neq 0.$$

Busca-se obter $A(x)$ tal que $g'(\xi) = 0$, ie.

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

$$g'(x) = 1 + A'(x)\, f(x) + A(x)\, f'(x).$$

Em $x = \xi$, temos

$$g'(\xi) = 1 + A'(\xi)\, f(\xi) + A(\xi)\, f'(\xi).$$

Aplicando-se a equação $g'(\xi) = 0$,

$$g'(\xi) = 1 + A'(\xi)\, f(\xi) + A(\xi)\, f'(\xi) = 0$$

$$g'(\xi) = 1 + A(\xi)\, f'(\xi) = 0 \iff A(\xi) = -1/f'(\xi).$$

Portanto, temos que

Método de Newton-Raphson

- Logo, a partir de x_0, a sequencia de raízes para o Método de Newton-Raphson é pela função de iteração

Método de Newton-Raphson

- Geometria

Método de Newton-Raphson

- Fundamentação teórica

Método de Newton-Raphson

Critérios de Parada

- A cada iteração, observa-se os valores aproximados e a tolerância desejada para
  - $|f(x_k)| \leq$ tolerância
  - $|x_k - x_{k-1}| \leq$ tolerância

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

- Vantagens
  - Rapidez no processo de convergência
  - Desempenho elevado
- Desvantagens
  - Necessidade de obter-se f'(x), o que pode ser inviável para alguns casos
  - Cálculo do valor número de f'(x) a cada iteração
  - Difícil implementação

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Geometria

Método da Secante

Geometria

Método da Secante

Critérios de Parada

- A cada iteração, observa-se os valores aproximados e a tolerância desejada para
  - $|f(x_k)| \leq$ tolerância
  - $|x_k - x_{k-1}| \leq$ tolerância

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

Método da Secante

- Vantagens
  - Rapidez no processo de convergência
  - Cálculos mais convenientes que do Método de Newton-Raphson
  - Desempenho elevado