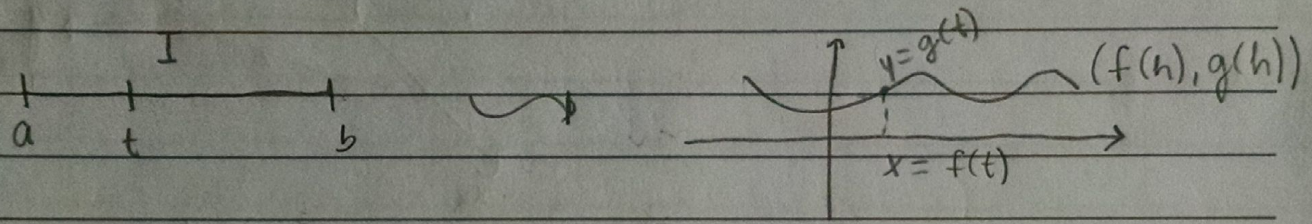
2ª parte:

① Curvas planas e curvas no espaço

Def.: Sejam f e g duas funções contínuas em um intervalo $I \in \mathbb{R}$. O conjunto dos pares ordenados $(f(t), g(t))$, onde $t \in I$, é dito uma curva plana C.

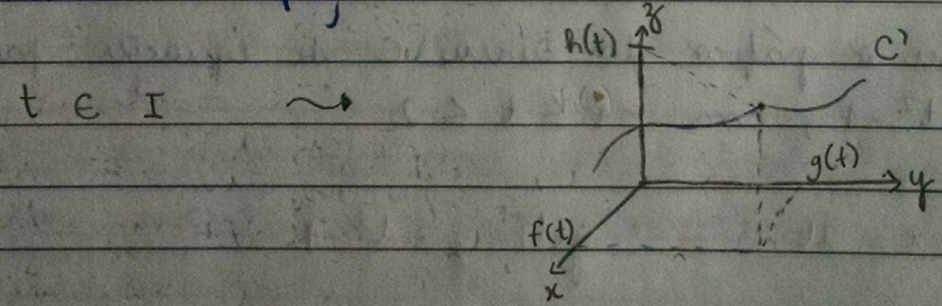
$$C = \{ (f(t), g(t)), t \in I \}$$



As equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $t \in I$, são as equações paramétricas de C e t é o parâmetro.

Analogamente,

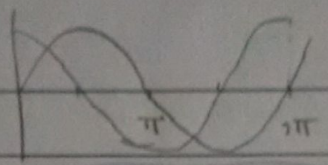
Def.: Se f, g, h são funções contínuas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então o conjunto de pontos $(f(t), g(t), h(t))$, onde $t \in I$, é uma curva no espaço C'.

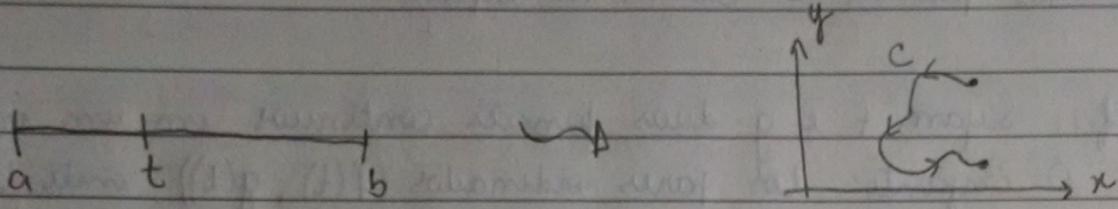


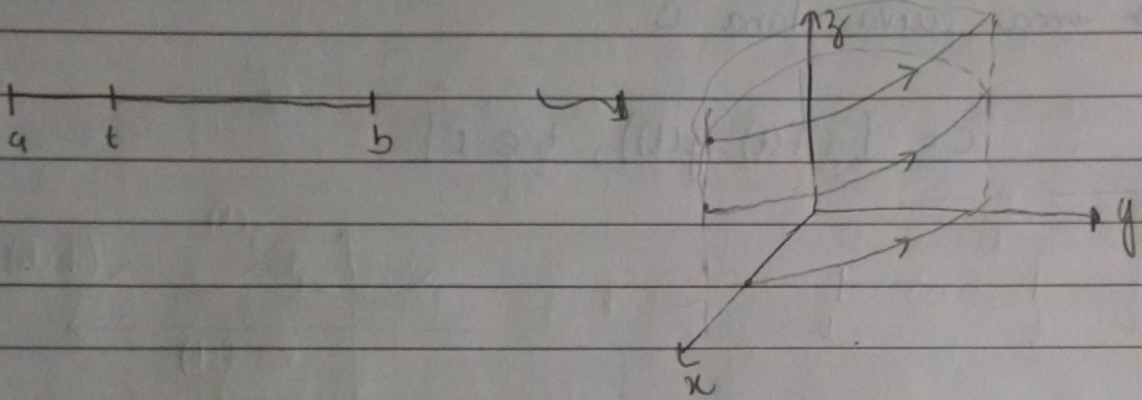
As equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$, com $t \in I$, são as equações paramétricas de C' e t é o parâmetro.

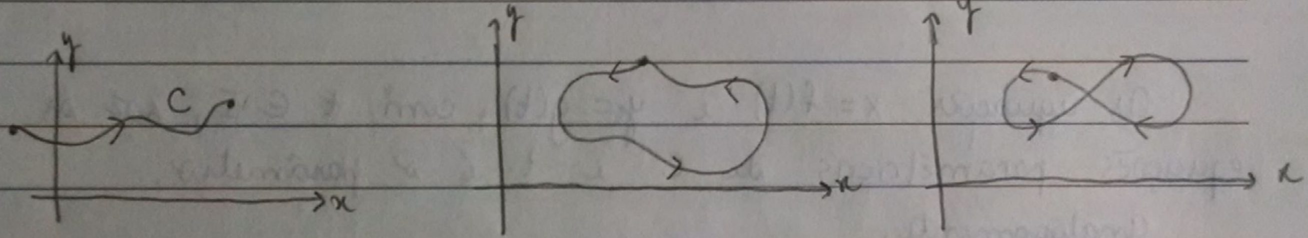
Obs.: Utilizando valores crescentes de t, a curva é percorrida em uma certa direção. Essa direção é chamada de orientação da curva.

$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$









Curva fechada simples

curva fechada

Ex: Trace o gráfico da curva C de equações paramétricas $x = 2t$, $y = t^2 - 1$, com $-1 \leq t \leq 2$.

$f(t) = x = 2t$ $\qquad$ $g(t) = y = t^2 - 1$

$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$

$y = t^2 - 1$

$t = \sqrt{y+1}$

Construindo a curva

t	$(f(t), g(t)) = (2t, t^2 - 1)$
-1	$(-2, 0)$
0	$(0, 1)$
1	$(2, 0)$
2	$(4, 3)$

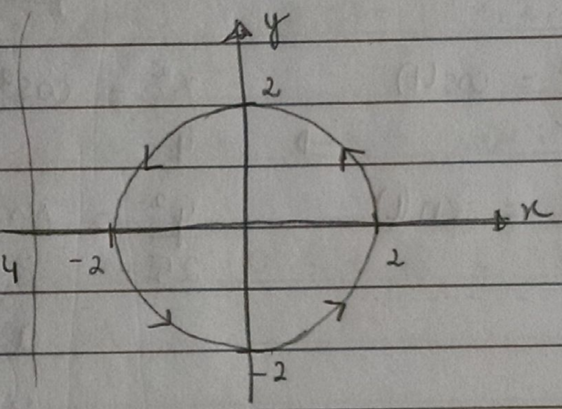
Ex. 2: Um ponto se move de tal forma que sua posição $P(x,y)$ no instante t é dada por $x = 2\cos(t)$, $y = 2\,sen(t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Descreva o movimento desse ponto.

Curva no plano, onde eqs. paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(t) = 2\cos(t) \\ y = g(t) = 2\,sen(t) \end{cases}$$

$t = I = [0, 2\pi]$

t	$(f(t), g(t)) = 2\cos(t), 2\,sen(t)$
0	$(2,0)$
$\pi/2$	$(0,2)$
π	$(-2,0)$
$3\pi/2$	$(0,2)$
2π	$(2,0)$



$x^2 + y^2 = 4\cos^2(t) + 4\,sen^2(t) = 4$

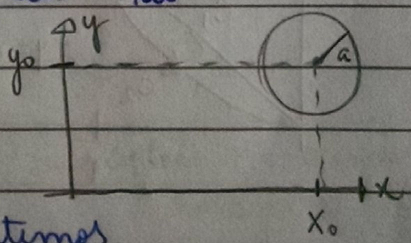
$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$

→ circunferência centrada em $(0,0)$ com raio $r = 2$ e, nesse caso, P percorre a circunferência no sentido anti-horário //

Obs.: Se a circunferência está centrada em (x_0, y_0) e tem raio $r = a$, as eqs paramétricas são

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos(t) \\ y = y_0 + a\,sen(t) \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$



De fato, com essa parametrização temos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (a\cos(t))^2 + (a\,sen(t))^2 =$$
$$= a^2\cos^2(t) + a^2\,sen^2(t) = a^2$$

$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$

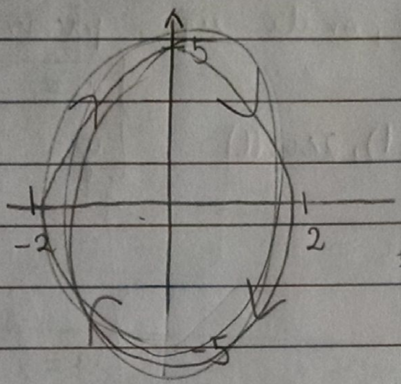
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Cálculo 1 4/9

Ex. 3) Trace o gráfico da curva dada por $x = 2\cos(t)$, $y = -5\sin(t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Curva no plano, onde equações paramétricas: $\begin{cases} x = 2\cos(t) = f(t) \\ y = -5\sin(t) = g(t) \end{cases}$

t	
0	
$\pi/2$	
π	
$3\pi/2$	
2π	



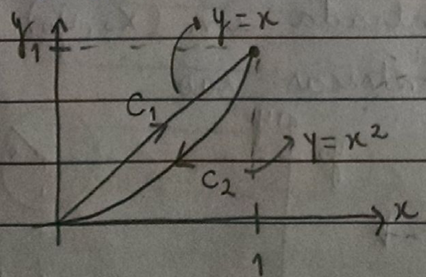
$t \in I = [0, 2\pi]$

ELIPSE $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos(t) \\ \frac{-y}{5} = \sin(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \cos^2 t$, $\frac{y^2}{25} = \sin^2 t$ $\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1} \rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

a curva C é uma elipse com eixo maior y percorrida no sentido horário

Ex. 4: Escreva as equações paramétricas da curva ilustrada no gráfico abaixo:



C_1: $y = x \quad 0 \le x \le 1$

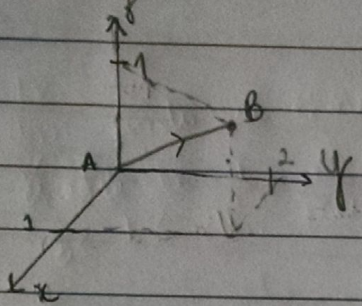
$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 1$

C_2: $y = x^2 \quad 0 \le x \le 1$

$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = (1-t)^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$

testar no ponto inicial/final p/ ver se atende à direção.

Ex. 5: Encontre as equações paramétricas da reta da figura abaixo:



CURVA NO ESPAÇO: $A = (0,0,0)$
$B = (1,2,1)$

Equação da reta que passa por $A \to B$

$$\boxed{X = A + t\overrightarrow{AB}}, \text{ onde}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,1) - (0,0,0) = (1,2,1)$$

Logo, $X = (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,2,1) = (t, 2t, t)$

As equações param. da reta $A \to B$ são:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

Se a orientação fosse $B \to A$, então a equação da reta seria:

$$X = B + t\overrightarrow{BA}, \text{ onde } \overrightarrow{BA} = A - B = (-1,-2,-1)$$

$$X = B + t\overrightarrow{BA} \Rightarrow (x,y,z) = (1,2,1) + t(-1,-2,-1) =$$
$$(1-t, 2-2t, 1-t)$$

As equações paramétricas de $B \to A$

$x = 1 - t$ $t = 1 - x$ → aplica o intervalo da variação de x (0,1)

$y = 2 - 2t$, com $0 \leq t \leq 1$ #

$z = 1 - t$

credeal

~~As equações~~

Exercício: Prove que as equações paramétricas da hipérbole $x^2 - y^2 = a^2$ são $x = a\sec(t)$

$y = a\,tg(t)$

Exercício: Desenhe a curva no espaço dada pelas equações paramétricas $x = 4\cos(t)$, $y = 4\,\mathrm{sen}(t)$ e $z = t$, com $0 \leq t \leq 4\pi$

② Funções Vetoriais

Def.: Uma função $r: I \subset \mathbb{R} \to V_2$ da forma

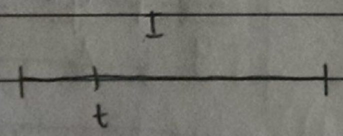
$$r(t) = f(t)i + g(t)j$$

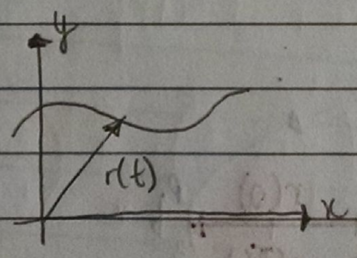
é chamada de uma função com valores vetoriais (no plano), onde as componentes $f(t)$ e $g(t)$ são funções reais no parâmetro $t \in I$, chamadas equações paramétricas de $r(t)$.

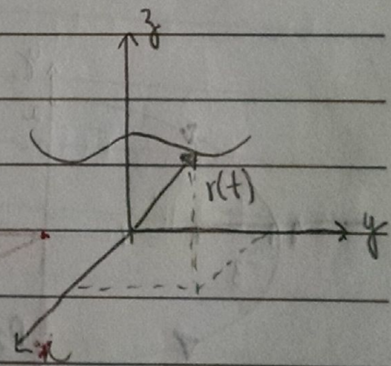
Def.: Uma função $r: I \subset \mathbb{R} \to V_3$ da forma

$$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

é chamada função com valores vetoriais (no espaço), onde as componentes $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são as funções reais no parâmetro $t \in I$, chamadas equações paramétricas de $r(t)$.



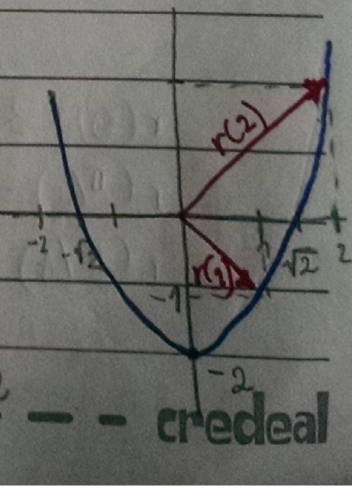




Ex.: Se $r(t) = ti + (t^2 - 2)j$, então

$r(1) = 1i - 1j$

$r(2) = 2i + 2j$



A função tem eq. paramétricas:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow y = x^2 - 2$$

Apareceu i, j(t), vetor!

Obs.: Podemos usar uma função com valores vetoriais para traçar o gráfico de uma curva. O ponto final do vetor r(t) coincide com o vetor (x,y) na curva dada pelas equações paramétricas

$$x = f(t) \quad e \quad y = g(t) \quad (\text{caso do plano})$$

ou com o vetor (x,y,z), onde

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t) \quad (\text{caso do espaço}).$$

Ex.: Esboce a curva plana representada por

$$r(t) = 3\cos(t)\,i - 2\,\text{sen}(t)\,j, \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

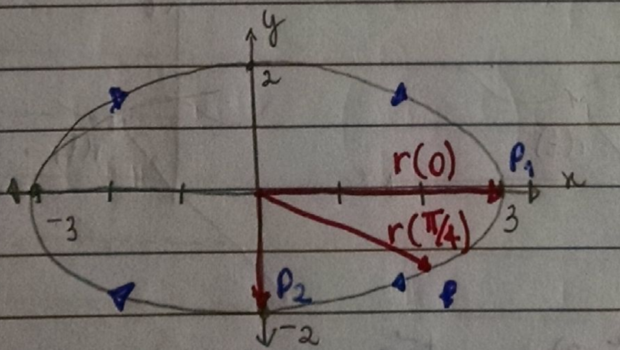
Eq. paramétricas

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \Rightarrow x^2 = 9\cos^2(t) \\ y = -2\,\text{sen}(t) \Rightarrow y^2 = 4\,\text{sen}^2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{x^2}{9} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{4} = \text{sen}^2(t) \end{array}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$$



Elipse com eixo maior em x

(P/ ver a direção)

t	$(x,y) = (3\cos t, -2\,\text{sen}\,t)$
$P_1 = 0$	(3, 0)
$P_2 = \pi/2$	(0, -2)

$r(0) = 3i - 0j$

$r(\pi/2) = 0i - 2j$

$r(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{2\sqrt{2}}{2}\,j$

Exercício: ① A interseção entre as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$ determina uma curva. Escreva a função vetorial $r(t)$ que representa essa curva.

(Sugestão: Como são superfícies, então

$$r(t) = \underbrace{f(t)\,i}_{x} + \underbrace{g(t)\,j}_{y} + \underbrace{h(t)\,k}_{z}$$

Resolva $x^2 + y^2 = 2 + y$ (para encontrar a curva de interseção)

② Trace a curva C definida por

$$r(t) = 6\,\mathrm{sen}(t)\,i + 4j + 25\cos(t)\,k, \; -2\pi \le t \le 2\pi$$

e indique a sua orientação.

③ Limite e Continuidade

Def.: Seja $r(t) = f(t)i + g(t)j$. O limite de $r(t)$ quando $t \to a$ é:

$$\lim_{t \to a} r(t) = \left(\lim_{t \to a} f(t)\right) i + \left(\lim_{t \to a} g(t)\right) j,$$

se os limites de $f(t)$ e $g(t)$ existirem.

Analogamente, se $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$, então

$$\lim_{t \to a} r(t) = \left(\lim_{t \to a} f(t)\right) i + \left(\lim_{t \to a} g(t)\right) j + \left(\lim_{t \to a} h(t)\right) k,$$

se os limites de $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ existirem.

Ex.: Se $r(t) = ti + (t^2+1)j - \cos(2t)k$, então:

$$\lim_{t \to \pi} r(t) = \left(\lim_{t \to \pi} t\right) i + \left(\lim_{t \to \pi} (t^2+1)\right) j - \left(\lim_{t \to \pi} \cos(2t)\right) k =$$

$$\pi i + (\pi^2+1) j - 1k.$$

#

(que é $= r(\pi)$. Logo, contínua no ponto π)

Def.: Uma função vetorial r(t) é contínua em $t = a$ se

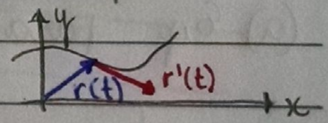
$$\lim_{t \to a} r(t) = r(a)$$

Obs.: Uma função vetorial é contínua se, e somente se, suas componentes forem contínuas.

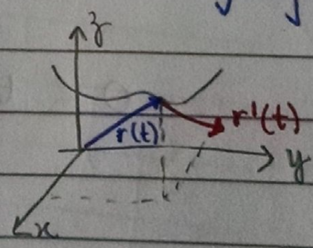
Ex.: a função do exemplo anterior é contínua, e $r(t) = \cos t\, i + \operatorname{sen} t\, j + t k$ é contínua pois suas componentes
$x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = t$ são funções contínuas. //

④ Derivada - Interpretação Geométrica

Def.: Se $r(t) = f(t)\, i + g(t)\, j$, onde f e g são funções deriváveis, então $\boxed{r'(t) = f'(t)\, i + g'(t)\, j}$



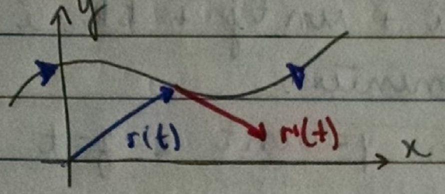
Analogamente, se $r(t) = f(t) i + g(t) j + h(t) k$, com $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ deriváveis, então: $r'(t) = f'(t) i + g'(t) j + h'(t) k$



Outras notações para $r'(t)$: $\dfrac{dr}{dt}$, $D_t(r(t))$

Obs: 1. O vetor $r'(t)$ é o vetor tangente à curva C no ponto $(f(t), g(t))$. Representaremos $r'(t)$ por um vetor com ponto inicial $P = (f(t), g(t))$ sobre a curva C.

2. O vetor $r'(t)$ aponta na direção da orientação de C.



Ex. 1: Seja $r(t) = 2\cos(t)\,i + 2\,\text{sen}(t)\,j$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Esboce a curva C determinada por $r(t)$

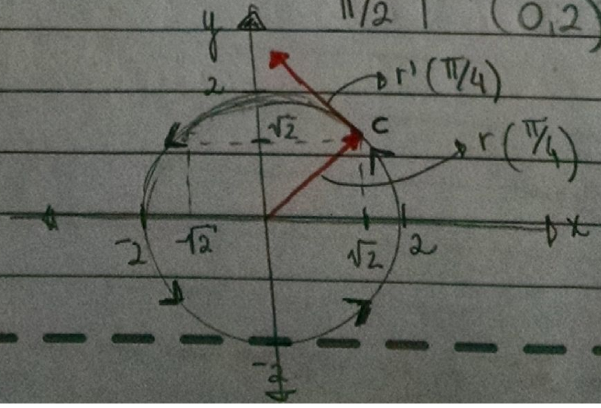
(b) Ache $r'(t)$ e esboce $r(t)$ e $r'(t)$ no ponto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(a) Eq. paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\text{sen}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4\cos^2(t) \\ y^2 = 4\,\text{sen}^2(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

t	$(x,y) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$
0	(2,0)
$\pi/2$	(0,2)



08 06 15

(b) $r'(t) = -2\sin(t)\,i + 2\cos(t)\,j$

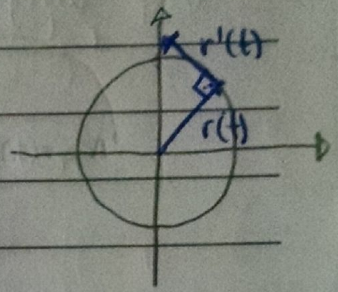
$P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$: $\Rightarrow \sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j \in r(t) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = 2\cos(t) \\ \sqrt{2} = 2\sin(t) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boxed{t = \dfrac{\pi}{4}}$

$r(\pi/4) = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\,i + \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\,j = \boxed{\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j}$

$r'(\pi/4) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\,i + \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\,j = \boxed{-2\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j}$

Da geometria, sabe-se que uma reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Assim, se um ponto move-se ao longo de uma circunferência que está centrada na ~~região~~ origem, então o raio vetor e o vetor tangente são ortogonais.



$\vec{v} = ai + bj + ck \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Teorema: Se $r(t)$ for uma função vetorial e $\|r(t)\| = k = cte$ $\forall t$, então $r(t) \cdot r'(t) = 0$, ou seja, $r(t)$ e $r'(t)$ são ortogonais.

Ex.: Seja $r(t) = 2\cos(t)\,i - 2\,sen(t)\,j$, com $0 \le t \le 2\pi$. Mostre que o vetor tangente a qualquer ponto da curva C determinada por $r(t)$ é ortogonal a $r(t)$

1ª forma: $r(t) = 2\cos(t)\,i - 2\,sen(t)\,j$

$$\|r(t)\| = \sqrt{(2\cos(t))^2 + (-2\cos(t))^2} = 2, \ \forall t \in [0, 2\pi]$$

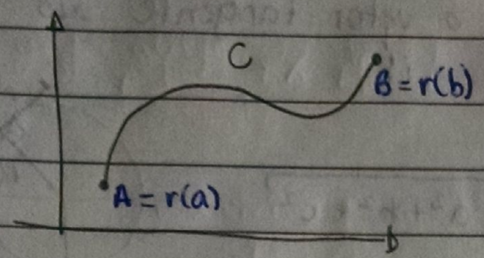
$$\overset{\text{Teorema}}{\Rightarrow} \quad r(t) \perp r'(t), \ \forall\ 0 \le t \le 2\pi.$$

2ª forma: $r(t) = 2\cos(t)\,i - 2\,sen(t)\,j$

$$= -4\cos(t)\,sen(t) + 4\,sen(t)\cos(t) = 0$$

$$\Rightarrow r(t) \perp r'(t), \ \forall\ 0 \le t \le 2\pi.$$

<u>Comprimento de arco</u>: Seja c uma curva dada pela eq. vetorial $r(t) = f(t)i + g(t)j$, $t \in [a, b]$



Então $r(t) = f'(t)i + g'(t)j$ e o comprimento do arco $\widehat{AB}$ da figura dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \| r'(t) \|\, dt$$

Obs.: ① Se a curva C é dada pela equação vetorial $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$, com $a \leq t \leq b$, então:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \| r'(t) \|\, dt.$$

② Se a curva C é dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, então $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ são as equações paramétricas de C e

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Ex.: Calcule o comprimento da curva dada por $r(t) = 3\cos(t)i + 3\sin(t)j$, quando $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$L = \int_0^{2\pi} \| r'(t) \|\, dt.$$

como $r'(t) = 3\,\text{sen}(t)\,i + 3\cos(t)\,j$, então:

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{(-3\,\text{sen}(t))^2 + (3\cos(t))^2} = \sqrt{9\,\text{sen}^2(t) + 9\cos^2(t)} = 3$$

$$L = \int_0^{2\pi} 3\,dt = 3t\Big|_0^{2\pi} = 6\pi \text{ u.c}$$ #

Exercícios: ① Calcule o comprimento da curva dada por $r(t) = \cos(t)\,i + \text{sen}(t)\,j + tk$, quando $0 \leq t \leq 2\pi$

② Calcule o comprimento da curva $y = x^2$, quando $0 \leq x \leq 2$.

Def.: Uma curva C (no plano) é suave se possui uma parametrização $x = f(t)$ e $y = g(t)$ em um intervalo I tal que as derivadas $f'(t)$ e $g'(t)$ sejam contínuas e não simultaneamente nulas (exceto possivelmente nos pontos extremos de I).

Uma curva C é parcialmente suave se o intervalo I pode ser subdividido em intervalos fechados tal que C é suave em cada intervalo.

Obs.: Curva suave não tem "bicos" nem pontos de reversão. Analogamente para curvas no espaço.

Scanned by CamScanner

Def.: Seja $r(t)$ uma função vetorial tal que a curva C determinada por $r(t)$ seja suave. Então $r'(t)$ é um vetor tangente à C que aponta sempre na direção determinada pela ~~direção~~ orientação de C.
se $r'(t) \neq 0$, define-se:

a) vetor tangente unitário: $T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$

b) vetor unitário normal principal: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$

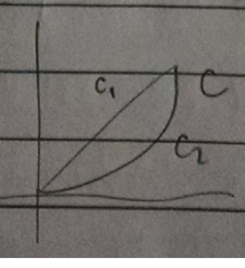
Exercício:

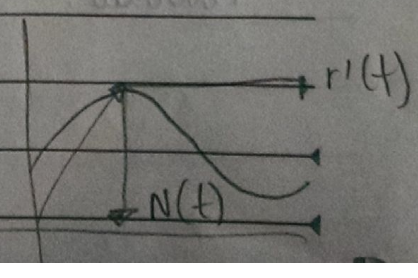
① Seja C a curva plana definida por $r(t) = t^2 i + t j$

a) ache $T(t)$ e $N(t)$

b) esboce C, $T(1)$ e $N(1)$

② Seja C determinada por $r(t) = 4\cos(t)\, i + 4\,\mathrm{sen}(t)\, j + 3t\, k$, $t \geq 0$. Esboce C e ache $T(t)$ e $N(t)$.





⑤ Integral

Def.: Seja $r(t) = f(t)i + g(t)j$ uma função vetorial com f e g integráveis em $[a,b]$. Então:

$$\int_a^b r(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right] i + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right] j$$

Analogamente, se $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$, então:

$$\int_a^b r(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right] i + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right] j + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right] k.$$

Ex. Se $r(t) = 2\cos(t) i + e^{2t} j$, calcule $\int_0^\pi r(t)\,dt$.

$$\int_0^\pi r(t) = \left[\int_0^\pi 2\cos(t)\,dt\right] i + \left[\int_0^\pi e^{2t}\,dt\right] j.$$

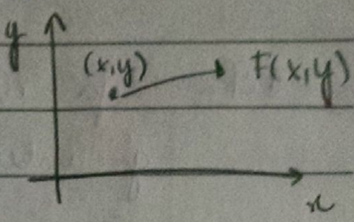
$$= \left(2\,\text{sen}(t)\Big|_0^\pi\right) i + \left(\frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^\pi\right) j$$

$$= 2\,(0-0)\,i + \left(\frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2}\right) j$$

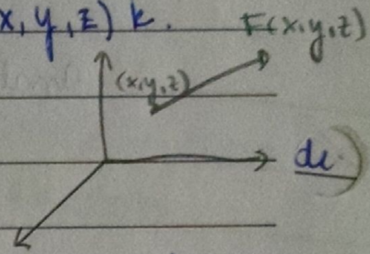
$$= \emptyset i + \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2}\right) j$$

Funções Vetoriais de várias variáveis : campos vetoriais

$$F: D \subset \mathbb{R}^2 \to V_2$$
$$(x,y) \mapsto M(x,y)\,i + M(x,y)\,j$$



$$F: D \subset \mathbb{R}^3 \to V_3$$
$$(x,y,z) \mapsto M(x,y,z)\,i + M(x,y,z)\,j + M(x,y,z)\,k.$$



Vimos que funções de números reais tomando valores vetoriais são úteis para representar curvas e movimentos ao longo das curvas. O que veremos agora são outros dois tipos de funções vetoriais: funções que a cada ponto do plano (ou do espaço) associam um vetor.

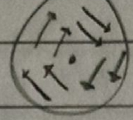
Def.: Sejam M e N funções escalares de duas variáveis x e y definidas em uma região $R \subset \mathbb{R}^2$. A função $F: R \subset \mathbb{R}^2 \to V_2$ dada por
$$F(x,y) = M(x,y)\,i + N(x,y)\,j$$
é chamada <u>campo vetorial</u> (ou função vetorial) <u>em R</u> (no plano).

Def.: Sejam M, N e P funções escalares de três variáveis x,y,z definidas em um sólido $Q \subset \mathbb{R}^3$. A função $F: Q \subset \mathbb{R}^3 \to V_3$ definida por
$$F(x,y,z) = M(x,y,z)\,i + N(x,y,z)\,j + P(x,y,z)\,k$$
é chamada <u>campo vetorial em Q</u>.

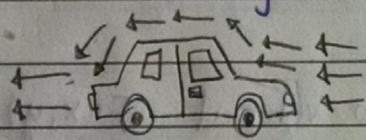
As funções <u>M e N</u> (ou M, N e P) são chamadas <u>componentes</u> ou funções coordenadas de F.

Ex. 1: Campos de velocidade descrevem o movimento de um sistema de partículas no plano ou no espaço:

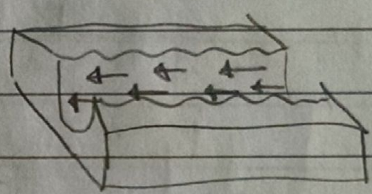
- Campo vetorial de velocidade determinado por uma roda girando em um eixo



- Campo de velocidade determinado pelo fluxo de ar em torno de um objeto em movimento



- Campo de velocidade determinado pelo fluxo de líquidos passando por um recipiente:



Ex. 2: O gradiente de uma função de duas ou mais variáveis é um exemplo de campo vetorial chamado campo gradiente, já que ele pode ser descrito da seguinte maneira:

Se $z = f(x,y)$, então gradiente de f é

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j$$

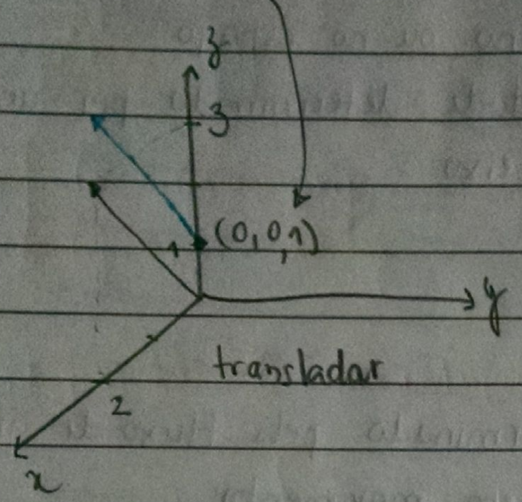
Ex. 3: Se $f(x,y,z) = x^2yz + 2y\,\text{sen}(x) + z\cos(y) + z^2 e^{2zx}$, então o gradiente de f é:

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,i + f_y(x,y,z)\,j + f_z(x,y,z)\,k.$$

$$= (2xyz + 2y\cos(x) + z^2 e^{2zx} \cdot 2z)\,i +$$

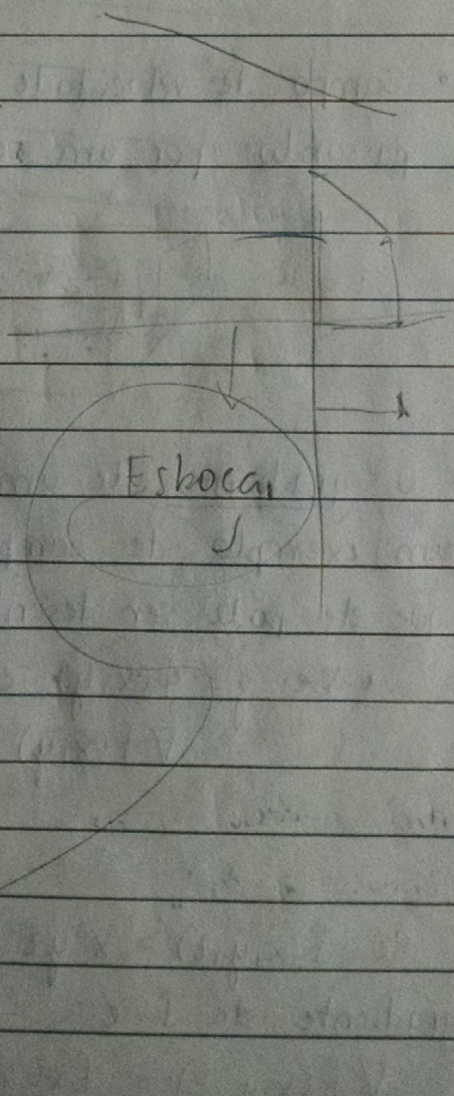
$$(x^2z + 2\,\text{sen}(x) - z\,\text{sen}(y))\,j + (x^2y + \cos(y) + 2z e^{2zx} + z^2 \cdot e^{2zx}\,2x)\,k$$

$\nabla f(0,0,1) = 2i + 0j + 3k$



Ex4: Descrever o campo vetorial $F(x,y) = -yi + xj$

(x,y)	$F(x,y) = -yi + xj$
$(1,0)$	$0i + 1j$
$(-1,0)$	$0i + 1j$
$(0,1)$	$-1i + 0j$
$(0,-1)$	$1i + 0j$
$(1,1)$	$-1i + 1j$
$(2,3)$	$-3i + 2j$



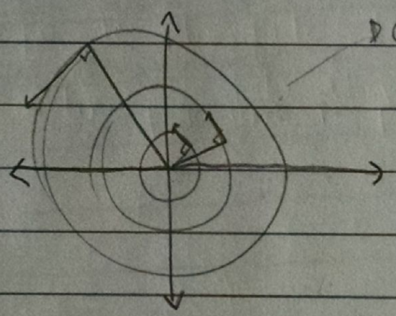
Para chegarmos a uma descrição geral do campo F, consideramos um ponto arbitrário $P(x,y)$ e seja $r(x,y) = xi + yj$ o vetor posição. Note que:

(i) $r(x,y) \cdot F(x,y) = (xi + yj) \cdot (-yi + xj) = -xy + yx = 0$

Prod. Interno (escalar) $\Rightarrow r(x,y) \perp F(x,y)$

(ii) $\|F(x,y)\| = \sqrt{(-y)^2 + (x)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|r(x,y)\|$

Logo, quando o ponto $P = (x,y)$ afasta-se da origem, o módulo de $F(x,y)$ aumenta.



Considerando isso como círculos, risos.

Ex. 5: Desenhe alguns vetores do campo vetorial $F(x,y) = 2xi + yj$.
Note que $\|F(x,y)\| = \sqrt{4x^2 + y^2}$

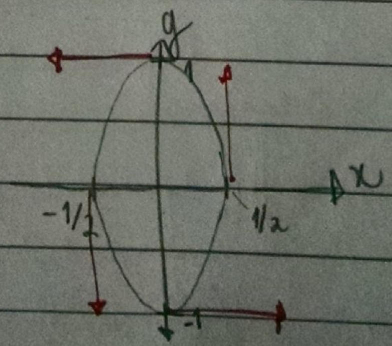
Se $\|F(x,y)\| = c = cte$ (vetores com mesmo comprimento), temos:

$$4x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1/4} + y^2 = c^2 \Rightarrow \text{ELIPSE}$$

Se $c = 1$, $\frac{x^2}{1/4} + y^2 = 1$

Eq da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Campos Vetoriais Conservativos

Def: Um campo vetorial F é conservativo se existe uma função diferenciável f tal que:

$$F = \nabla f$$

onde f é chamada função potencial para F.

(i) no plano: $F(x,y) = \nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j$

(ii) no espaço: $F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,i + f_y(x,y,z)\,j + f_z(x,y,z)\,k$.

Ex. 1: O campo vetorial dado por $F(x,y) = 2y\,i + (2x+2y)\,j$ é conservativo pois considerando a função potencial $f(x,y) = 2xy + y^2$, temos:

$f_x(x,y) = 2y$

$f_y(x,y) = 2x + 2y$

$\nabla f(x,y) = \nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j = (2y)\,i + (2x+2y)\,j = F(x,y)$

F é conservativo.

Ex. 2: Seja $f(x,y) = 2xy\,i + x^2 j$. Verifique se F é conservativo encontrando uma função potencial f p/ F.

como $F(x,y) = 2xy\,i + x^2 j$, então F é conservativo se $\exists$ f tal que:

$$F(x,y) = \nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 2xy & (1) \\ f_y(x,y) \ x^2 & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) em relação a x, temos:

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int 2xy\,dx = \frac{2x^2y}{2} + h(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y + h(y) \quad (3)$$

Derivando (3) em relação a y:

$$f(x,y) = x^2 + h'(y) \overset{(2)}{=} x^2 \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{h(y) = C} \quad (4)$$

constante

Substituindo (4) em (3), obtemos:

$f(x,y) = x^2y + c$ é uma função potencial para F.

$\Rightarrow$ F é conservativo

Se a pergunta for apenas "é conservativo?", o teorema abaixo basta!

O próximo teorema nos dá uma condição para que um campo vetorial no plano seja conservativo.

Teorema: Suponha que M e N têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um disco aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. O campo vetorial $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ é conservativo se, e só se, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ $(N_x = M_y)$.

Ex. 1: O campo $F(x,y) = x^2y\,i + xy\,j$ é conservativo?

Como $F(x,y) = x^2y\,i + xy\,j = M(x,y)\,i + N(x,y)\,j$, então

$$M(x,y) = x^2y \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x^2$$

$$\neq \Rightarrow \boxed{F \text{ não é conservativo}}$$

$$N(x,y) = xy \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y$$

Ex. 2: Verifique que $F(x,y) = 2xy\,i + (x^2-y)\,j$ é conservativo e encontre uma função potencial f para F.

Como $F(x,y) = 2xy\,i + (x^2-y)\,j = M(x,y)i + M(x,y)\,j$, então:

$$\Rightarrow \begin{cases} M(x,y) = 2xy \\ N(x,y) = x^2-y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$\Leftrightarrow$ É conservativo

Como F é conservativo, vamos encontrar f tal que $F = \nabla f$

$F(x,y) = \nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$

$2xyi + (x^2 - y)j$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 2xy & (1) \\ f_y(x,y) = x^2 - y & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) em relação a x:

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + h(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = x^2y + h(y)} \quad (3)$$

Derivando (3) em relação a y:

$$f_y(x,y) = x^2 + h'(y) \overset{(2)}{=} x^2 - y \Rightarrow h'(y) = -y \Rightarrow$$

$$h(y) = \int h'(y)\,dy = \int -y\,dy = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{h(y) = -\frac{y^2}{2} + c} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3), temos que:

$$\boxed{f(x,y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + c}$$ é uma função potencial para $\vec{F}$

//

Cálculo 5

29 ▸ 05 ▸ 15

Rotacional de um campo vetorial

(i) O operador ∇ aplicado a uma função escalar $f: Q \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nos fornece o gradiente de f.

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)i + f_y(x,y,z)j + f_z(x,y,z)k.$$

(ii) O operador ∇ aplicado a um campo vetorial $F(x,y,z) = Mi + Nj + Pk$ nos fornece outro campo vetorial chamado de rotacional de F dado.

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ M & N & P & M & N \end{array}\right|$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)k.$$

Se $\text{rot } F = \vec{0}$, dizemos que F é irrotacional.

Ex. 1: Encontre o rot F para $F(x,y,z) = xy^2z^4 i + 2xz j + y^2z^3 k$.

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$M = xy^2z^4$

$N = 2xz$

$P = y^2z^3$

$$\text{rot } F = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z & \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ M & N & P & M & N \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} i + \frac{\partial M}{\partial z} j + \frac{\partial N}{\partial x} k - \frac{\partial P}{\partial x} j - \frac{\partial N}{\partial z} i - \frac{\partial M}{\partial y} k =$$

29 05 15

6/6

$= 2yz^3 i + 4xy^2z^3 j + 2zk + 0j - 2x i - 2xyz^4 k$

$= (2yz^3 - 2x) i + (4xy^2z^3 - 0) j + (2z - 2xyz^4) k.$

$\neq$

Exercício: Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $F(x,y,z) = \vec{v} = 10x i - 10y j + 30k$.
Verifique se o escoamento é irrotacional.

O seguinte teorema nos fornece uma condição para que um campo vetorial no espaço seja conservativo.

Teorema: Suponha que M, N e P têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas no interior de uma esfera Q. O campo vetorial $F = Mi + Nj + Pk$ é conservativo se, e só se, $\text{rot } F = \vec{0}$, ou seja, F é conservativo $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$, e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$.

Ex.: Seja $F(x,y,z) = (yz+2)i + (xz+1)j + (xy+2z)k$.

(a) Mostre que F é conservativo;

(b) Encontre uma função potencial para F, ou seja, tal que $\nabla f = F$.

(a) Pelo teorema anterior, F é conservativo se, e só se, $\text{rot } F = \vec{0}$

Como $F = (yz+2)i + (xz+1)j + (xy+2z)k$, então

$$\begin{cases} M = yz+2 \\ N = xz+1 \\ P = xy+2z \end{cases}$$

cai na prova

$$\text{rot } F = \nabla \times F \left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z & \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ M & N & P & M & N \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} i + \frac{\partial M}{\partial z} j + \frac{\partial N}{\partial x} k - \frac{\partial P}{\partial x} j - \frac{\partial N}{\partial z} i - \frac{\partial M}{\partial y} k =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k =$$

$= (x-x)\,i + (y-y)\,j + (z-z)\,k = 0i + 0j + 0k = \vec{0}$

$\Rightarrow$ rot $F = \vec{0} \Rightarrow F$ é conservativo //

(b) Existe $f(x,y,z)$ tal que $F = \nabla f = f_x\, i + f_y\, j + f_z\, k$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y,z) = yz + 2 & (1) \\ f_y(x,y,z) = xz + 1 & (2) \\ f_z(x,y,z) = xy + 2z & (3) \end{cases}$$

Integrando (1) em relação à x:

$$f(x,y,z) = \int f_x(x,y,z)\,dx = \int yz + 2\,dx = yzx + 2x + g(y,z)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = xyz + 2x + g(y,z)} \quad (4)$$

Derivando (4) em relação à y:

$$f_y(x,y,z) = xz + g_y(y,z) \underset{(2)}{=} xz + 1 \Rightarrow \boxed{g_y(y,z) = 1} \quad (5)$$

Integrando (5) em relação à y:

$$g(y,z) = \int g_y(y,z)\,dy = \int 1\,dy = y + h(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(y,z) = y + h(z)} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (4), temos:

$$\boxed{f(x,y,z) = xyz + 2x + y + h(z)} \quad (7)$$

02 / 06 / 15

2b/6

Derivando (7) em relação à z:

$$f_z(x,y,z) = xy + h'(z) \overset{(8)}{=} xy + 2z \Rightarrow \boxed{h'(z) = 2z} \quad (8)$$

Integrando (8) em relação à z:

$$\boxed{h(z) = z^2 + c} \quad (9)$$

Substituindo (9) em (7), temos que:

$$\boxed{f(x,y,z) = xyz + 2x + y + z^2 + c}$$ é uma função potencial p/ F.

Obs.: Vimos que se F é o campo de velocidade de um fluido ou gás em movimento em um sistema xyz, então rot F nos dá informações sobre aspectos rotacionais do movimento.

Divergência de um campo vetorial

A divergência mede a taxa do fluxo de partículas por unidade de volume em um ponto.

Def.: A divergência de $F(x,y) = Mi + Nj$ é a função escalar

$$\text{div } F(x,y) = \nabla \cdot F(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{(no plano)}$$

↑ produto escalar

A divergência de $F(x,y,z) = Mi + Nj + Pk$ é a fç escalar

$$\text{div } F(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{(no espaço)}$$

Ex.: Se $F = x^3y^2z\, i + x^2z\, j + x^2y\, k$, calcule:

(a) div F; (b) div de F em $(2,1,-1)$

(a) Como $F = x^3y^2z\, i + x^2z\, j + x^2y\, k$, então $\begin{cases} M = x^3y^2z \\ N = x^2z \\ P = x^2y \end{cases}$

$$\text{div } F = \nabla \cdot F(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 3x^2y^2z + 0 + 0 = \boxed{3x^2y^2z}$$

(b) $\text{div } F(2,1,-1) = 3 \cdot (2)^2 \cdot (1)^2 \cdot (-1) = -12$ #

Obs.: a notação de produto escalar $\nabla . F$ na definição anterior deve-se pelo fato de podermos considerar ∇ como um operador diferencial:

$$\operatorname{div} F = \nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) . (Mi + Nj + Pk) =$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad //$$

Exercício: Sejam $F(x,y,z) = M_1 i + N_1 j + P_1 k$ e $G(x,y,z) = M_2 i + M_2 j + P_2 k$ funções vetoriais e $g(x,y,z)$ uma função escalar.

Mostre que: (i) $\operatorname{div}(F+G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$

Produto escalar

(ii) $\operatorname{div}(gF) = g \operatorname{div} F + (\nabla g) \circ F$

OPERADOR LAPLACIANO: Seja $f(x,y,z)$. Suponha que existam as derivadas de 2ª ordem de f. Então podemos calcular:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \rightarrow \text{Operador Laplaciano}$$

Ex.: Se $f(x,y,z) = x^2y + xz^2 + \operatorname{sen}(y)z^2$, calcule ∇f e $\nabla^2 f$. (gradiente e laplaciano, resp.)

GRADIENTE: $\nabla f(x,y,z) = f_x\, i + f_y\, j + f_z\, k =$

$= (2xy + z^2)i + (x^2 + \cos(y)z^2)j + (2xz + 2\operatorname{sen}(y)z)k$

LAPLACIANO: $\nabla^2 f(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$

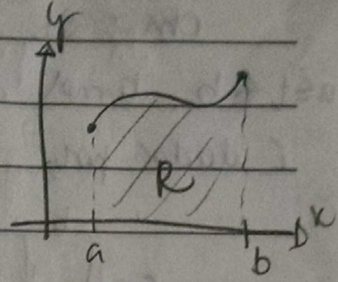
$= 2y + (-\operatorname{sen}(y)z^2) + (2x + 2\operatorname{sen}(y))$

$= 2y - \operatorname{sen}(y)z^2 + 2x + 2\operatorname{sen}(y)$ #

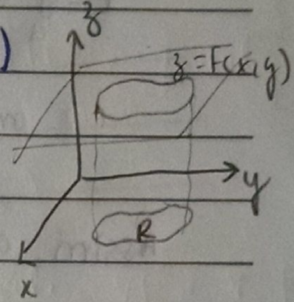
Integrais de Linha

Sabemos que:

i) $y = f(x) \overset{\geq 0}{} \Rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx = \text{ÁREA}(R)$



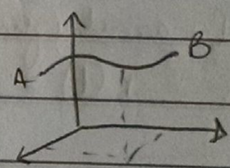
ii) $z = f(x,y) \Rightarrow I = \iint_R f(x,y)\,dA = \text{VOLUME}(G)$



① Integrais de Linha de Campos Escalares

Vamos introduzir o conceito de Integral de Linha onde a integração é feita sobre uma curva C.

A integral de linha constitui uma generalização simples natural do conceito de integral definida. Vamos considerar o problema de determinar a massa de um arame de comprimento finito descrito por uma curva C no plano ou no espaço.



Seja $w = f(x,y,z)$ a densidade linear de massa (massa por unidade de comprimento) do arame no ponto (x,y,z).

$$\text{Densidade Linear} = \frac{\text{Massa}}{\text{Comprimento}}$$

$$\boxed{\text{Massa} = \text{Densidade} \times \text{Comprimento}}$$

Pode se mostrar que massa $= \int_C \overset{\text{densi}}{f(x,y,z)}\ \overset{\text{comp}}{dr}$

Como calcular essa integral?

Obs.: Se a curva é dada por $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$
$a \leq t \leq b$, temos que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ da curva C
é dado por

$$r = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt,$$

onde $r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$.

Assim, a função comprimento do arco é dada por

$$r(t) = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \int_a^t \|r'(t)\|\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}(t) = s'(t) = \|r'(t)\| \Rightarrow ds = \|r'(t)\|\, dt$$

Ex₁: Encontre a massa de um fio cuja parametrização é $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, com densidade $f(x,y,z) = 1 + z$.

Parametrização de C

$$r(t) = \cos(t)i + \sin(t)j + tk, \text{ com } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow r'(t) = -\sin(t)i + \cos(t)j + 1k.$$

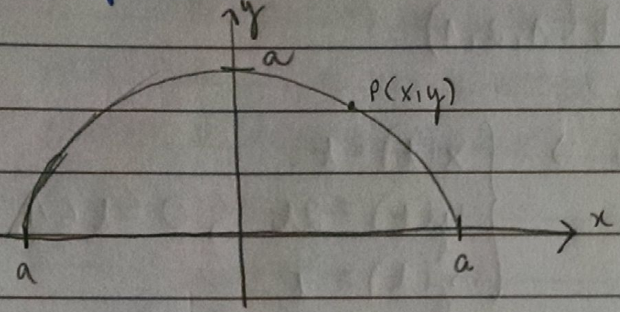
$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Logo, com $f(x,y,z) = 1 + z$

$$\text{massa} = \int_C f(x,y,z)\, ds = \int_0^{\pi/2} f(\cos(t), \sin(t), t) \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1+t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} (1+t)\, dt = \sqrt{2}\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) \text{u.m.}$$

Ex. 2: Um arame delgado é vergado na forma de um semicírculo de raio a. Se a densidade de massa em um ponto P é diretamente proporcional à distância de P até a reta que passa pelas extremidades do fio, calcule a massa desse fio.



$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = a\,\text{sen}(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$r(t) = a\cos(t)\,i + a\,\text{sen}(t)\,j$$

$$\text{massa} = \int_C f(x,y)\,ds = \int_0^{\pi} f(a\cos(t), a\,\text{sen}(t))\,\|r'(t)\|\,dt$$

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{(-a\,\text{sen}(t))^2 + (a\cos(t))^2} = a$$

Pelo enunciado, a densidade é:

$$f(x,y) = k \ \text{dist}\,(p=(x,y), \text{eixo } x) \Rightarrow f(x,y) = k \cdot y \ \text{p/ algum } k > 0.$$

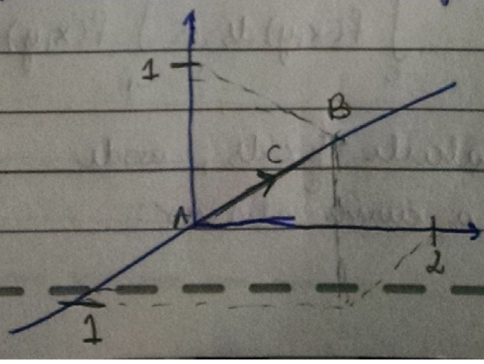
Logo:

$$\text{massa} = \int_0^{\pi} f(a\cos(t), a\,\text{sen}(t))\,\|r'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi} (k\,a\,\text{sen}(t)\,a\,dt =$$

$$= k a^2 \int_0^{\pi} \text{sen}(t)\,dt = ka^2(-\cos(t))\Big|_0^{\pi} = ka^2(-\underbrace{\cos(\pi)}_{-(-1)} - (-\underbrace{\cos\phi}_{(-1)}) =$$

$$2ka^2 \ \text{u.m.}$$

Ex. 3: Calcule $\int_C (x^2 + y + 3z)\,ds$, onde C é o segmento de reta ilustrado:



Chamando de $A = (0,0,0)$ e $B = (1,2,1)$, a equação do segmento ao todo é:

$$(x,y,z) = x = A + t\,\vec{AB}, \text{ onde } \vec{AB} = B - A = (1,2,1)$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,2,1)$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (t, 2t, t) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = t \end{cases},\ 0 \leq t \leq 1$$

Parametrização de c:

$$r(t) = t\,i + 2t\,j + t\,k, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow r'(t) = 1i + 2j + 1k \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{t^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Logo, com $f(x,y,z) = x^2 - y + 3z$

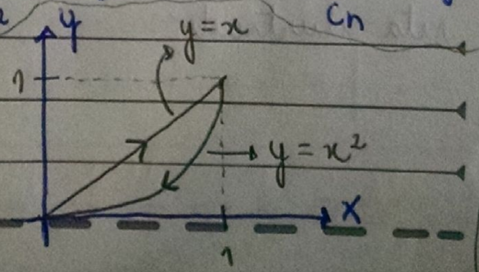
$$\int_c (x^2 - y + 3z)\,ds = \int_0^1 f(x(t), y(t), z(t))\,\|r'(t)\|\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t)\sqrt{6}\,dt = \sqrt{6}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \sqrt{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Obs.: Se a curva c é composta de curvas suaves $c_1, c_2, \dots c_n$ e se f é contínua em c, então

$$\int_c f(x,y)\,ds = \int_{c_1} f(x,y)\,ds + \int_{c_2} f(x,y)\,ds + \dots + \int_{c_n} f(x,y)\,ds$$

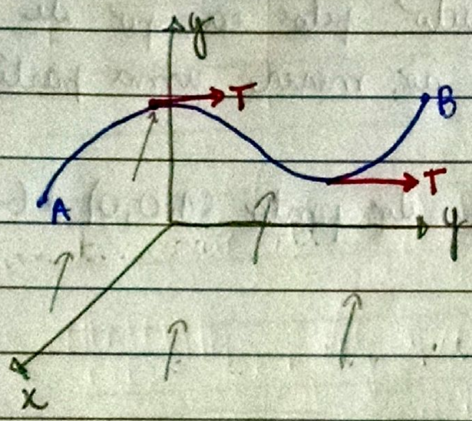
Exercício: Calcule $\int_c x\,ds$, onde c é a curva abaixo:



② INTEGRAIS DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS

Uma das aplicações físicas mais importantes de integrais de linha é encontrar o trabalho realizado por um objeto movendo-se em um campo de forças.

Consideremos um objeto movendo-se ao longo de uma ~~traj~~ trajetória c e um campo de forças $F = Mi + Nj + Pk$, como mostra a figura abaixo:



Pode-se mostrar que o trabalho total realizado pelo campo de forças F quando o objeto move-se sobre a curva c é

$$W = \int_c F(x,y,z) \cdot T(x,y,z)\, ds$$

(Produto Escalar)

onde $T(x,y,z)$ é o vetor tangente unitário a c no ponto (x,y,z)

Se $r(t)$ é uma parametrização de c, $a \leq t \leq b$, então sabemos que

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \quad e \quad ds = \|r'(t)\|\, dt, \text{ assim}$$

$$F \cdot T\, ds = F \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot \|r'(t)\|\, dt = F \cdot r'(t)\, dt = F\, dr.$$

D

Def.: Seja F um campo contínuo definido em uma curva suave C dada por $r(t)$, $a \leq t \leq b$.

A integral de linha do campo F em C é dada por:

$$\int_C F\, dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt,$$

onde $r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$, com $a \leq t \leq b$.

Exemplo: Encontre o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y,z) = x\,i - xy\,j + z^2 k$, ao mover uma partícula ao longo da hélice dada por

$r(t) = \cos(t)\,i + \operatorname{sen}(t)\,j + t\,k$, do ponto $(1,0,0)$ à $(-1,0,3\pi)$.

$$F = x\,i - xy\,j + z^2 k$$

$$\boxed{r(t) = \cos(t)\,i + \operatorname{sen}(t)\,j + t\,k} \Rightarrow \boxed{r'(t) = -\operatorname{sen}(t)\,i + \cos(t)\,j + 1k}$$

do ponto $(1,0,0) \to (-1,0,3\pi)$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 3\pi$$

Calcular o trabalho:

$$W = \int_C F\, dr = \int_0^{3\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{3\pi} (\cos(t)\,i - \cos(t)\operatorname{sen}(t)\,j + t^2 k) \cdot (-\operatorname{sen}(t)\,i + \cos(t)\,j + 1k)\, dt$$

$$= \int_0^{3\pi} -\cos(t)\operatorname{sen}(t) - \cos^2(t)\operatorname{sen}(t) + t^2\, dt =$$

$$-\frac{2}{3} \quad 9\pi^3$$

$$= -\int_0^{3\pi} \cos(t)\sin(t)\,dt - \int_0^{3\pi} \cos^2(t)\sin(t)\,dt + \int_0^{3\pi} t^2\,dt$$

$u = \sin(t)$
$du = \cos(t)\,dt$

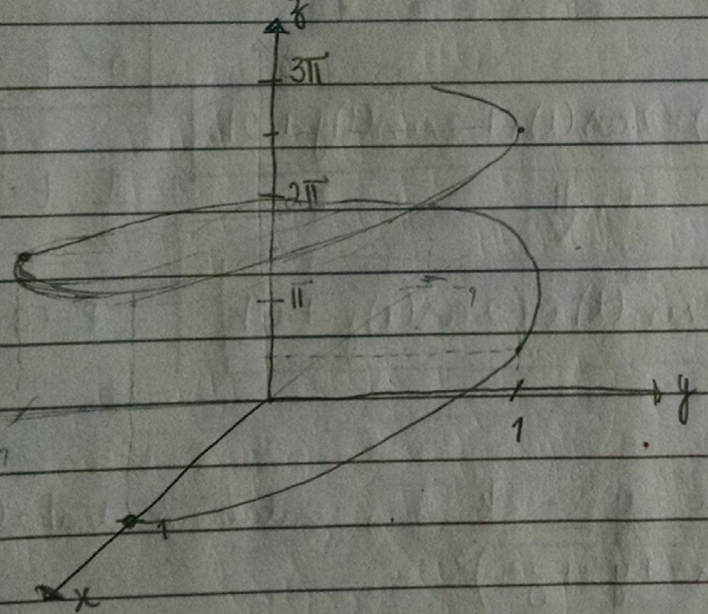
$$= -\int u\,du - \int w^2(-dw) + \int_0^{3\pi} t^2\,dt$$

$w = \cos(t)$
$dw = -\sin(t)\,dt$

$$= -\frac{u^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \frac{t^3}{3}\Big|_0^{3\pi} =$$

$$= -\frac{\sin^2(t)}{2}\Big|_0^{3\pi} + \frac{\cos^3(t)}{3}\Big|_0^{3\pi} + 9\pi^3 =$$

$$= -(0-0) + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{1^3}{3} + 9\pi^3 = \boxed{-\frac{2}{3} + 9\pi^3} \ \boxed{N.m}$$



Param. C

$$W = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

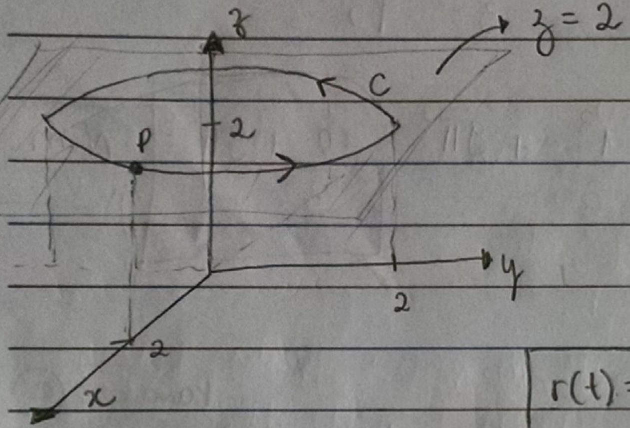
Obs.: Se c é uma curva fechada, isto é, r(a) = r(b), a integral de linha é denotada por

$$\oint F\,dr$$

Ex.: Uma partícula move-se ao longo da circunferência $x^2+y^2=4$, $z=2$ sob a ação do campo de forças

$$F(x,y,z) = \frac{-\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \text{onde } \vec{r} = xi + yj + zk.$$

Determinar o trabalho realizado por F se a posição inicial da partícula é $P=(2,0,2)$ e ela se move no sentido anti-horário completando uma volta.



Parametrização de C:
$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\text{sen}(t) \\ z = 2 \text{ (por hipótese)} \end{cases}$$

$$\boxed{0 \leq t \leq 2\pi}$$

$$\boxed{r(t) = 2\cos(t)i + 2\,\text{sen}(t)j + 2k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r'(t) = -2\,\text{sen}(t)i + 2\cos(t)j + 0k}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad t \leq 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$P=(0,2,2)$

Como $F(x,y,z) = \dfrac{-xi - yj - zk}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$, então o trabalho é:

$$W = \int_C F\,dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-2\cos(t)i - 2\,\text{sen}(t)j - 2k)}{\sqrt{(2\cos(t))^2 + (2\,\text{sen}(t))^2 + 2^2}^{\,3}} \cdot (-2\,\text{sen}(t)i + 2\cos(t)j + 0k)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4\cos(t)\,\text{sen}(t) - 4\,\text{sen}(t)\cos(t) + 0}{(\sqrt{x})^3}\,dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

Obs.: Se $F = Mi + Nj + Pk$ e $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, com $a \leq t \leq b$, então

$$\int_c F\,dr = \int_a^b \overbrace{(Mi + Nj + Pk)}^{F} \cdot (x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k)\,dt$$

$$= \int_a^b (Mi + Nj + Pk) \cdot \left(\frac{dx}{\cancel{dt}} i + \frac{dy}{\cancel{dt}} j + \frac{dz}{\cancel{dt}} k\right) \cancel{dt}$$

$$= \boxed{\int_c (M\,dx + N\,dy + P\,dz)}$$ Forma Diferencial no Espaço

No plano, $\boxed{\int_c F\,dr = \int_c M\,dx + N\,dy}$

Ex.: Calcule $\int_c F\,dr$, onde c é a curva dada por $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$ e $F(x,y) = (x^2 - 2xy)i + (x^3 + y)j$

SOLUÇÃO: Nesse caso,

$M = x^2 - 2xy$, $N = x^3 + y$

$$\begin{cases} x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt \\ y = t^3 \Rightarrow dy = 3t^2\,dt \end{cases}$$

$$\boxed{0 \leq t \leq 1}$$

assim:

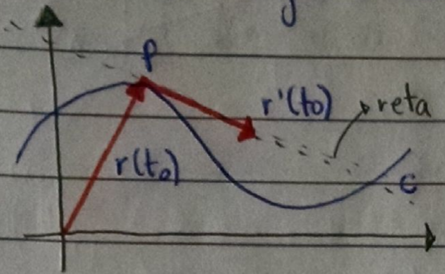
$$\int_C F\,dr = \int_C M\,dx + N\,dy = \int_0^1 \overbrace{(t^4 - 2t^5)}^{M(t)}\, 2t\,dt + \overbrace{(t^6 + t^3)}^{N(t)}\, 3t^2\,dt =$$

$$\int_0^1 2t^5 - 4t^6\,dt + \int_0^1 3t^8 + 3t^5\,dt = \left(\frac{t^6}{3} - \frac{4t^2}{7}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{t^9}{3} + \frac{t^6}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{14 - 24 + 14 + 21}{42} = \frac{25}{42}$$

RETA TANGENTE: Seja $r(t) = f(t)\vec{i} + g(t)j$.

Como $r'(t)$ é um vetor tangente à curva determinada por $r(t)$ no ponto $P = r(t_0)$, então a equação vetorial da reta tangente à c no ponto $r(t_0)$ é dado por

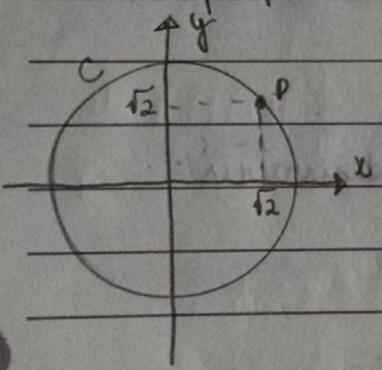


$$X = q(x) = r(t_0) + \lambda r'(t_0),$$

onde λ é o parâmetro

Ex.: Determinar a equação vetorial da reta tangente à curva $r(t) = 2\cos(t)\,i + 2\sin(t)\,j$ no ponto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Eq. paramétricas de $r(t)$: $x = 2\cos(t)$, $y = 2\sin(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$



$$\boxed{r'(t) = -2\sin(t)\,i + 2\cos(t)\,j}$$

$$P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in C = \begin{cases} x = \sqrt{2} = 2\cos t_0 = \cos(t_0) = \sqrt{2}/2 \\ y = \sqrt{2} = 2\sin t_0 = \sin(t_0) = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t_0 = \frac{\pi}{4}}$$

Como $\boxed{r(\pi/4) = \sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j}$ $(= P)$

e

$$r'(\pi/4) = -2\sin(\pi/4)\,i + 2\cos(\pi/4)\,j$$
$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,i + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,j = \boxed{-\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j}$$

Então a eq. vetorial da reta tangente à curva c no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ é

$$X = q(\lambda) = r(\pi/4) + \lambda r'(\pi/4) = (\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j) + \lambda(-\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}\,j)$$

$$X = q(\lambda) = (\sqrt{2} - \lambda\sqrt{2})\,i + (\sqrt{2} + \lambda\sqrt{2})\,j$$

as equações paramétricas da reta tangente são: $\begin{cases} x = \sqrt{2} - \lambda\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} + \lambda\sqrt{2} \end{cases}$

Exercício: Dada a cúbica curva $r(t) = ti + t^2 j + t^3 k$, encontre a equação vetorial e as equações paramétricas da reta tangente à curva no ponto $r(1)$

Teorema: Se $r_1(t)$ e $r_2(t)$ são funções vetoriais deriváveis e $a \in \mathbb{R}$, então:

(i) $\frac{d}{dt}(r_1(t) + r_2(t)) = r'_1(t) + r'_2(t)$

(ii) $\frac{d}{dt}(a r_1(t)) = a r'_1(t)$

(iii) $\frac{d}{dt}[r_1(t) \cdot r_2(t)] = r'_1(t) \cdot r_2(t) + r_1(t) \cdot r_2'(t)$

Prod. Escalar

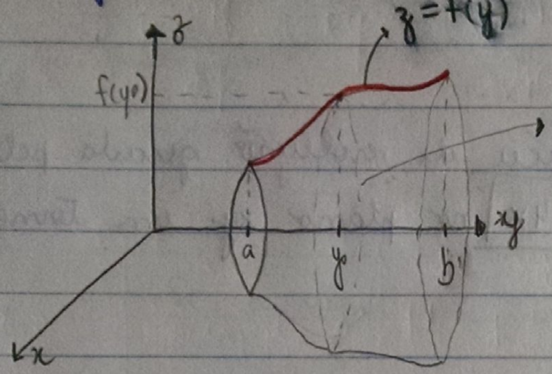
(iv) $\frac{d}{dt}[r_1(t) \times r_2(t)] = r'_1(t) \times r_2(t) + r_1(t) \times r'_2(t)$

Prod. Vetorial

19/06/15

Superfície de Revolução

Def.: Se uma curva plana é girada em torno de uma reta fixa situada no plano da curva, a superfície gerada é chamada superfície de revolução. A reta fixada é chamada eixo da superfície de revolução e a curva plana é chamada geratriz.



me dá em torno de quem estou girando

① Se $z = f(y)$ é uma curva no plano xy, então a equação da superfície de revolução gerada em torno do eixo y é:

$$\boxed{x^2+z^2 = f(y)^2} \Rightarrow z = f(y) = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

eleva os dois ao quadrado e adiciona a variável que está faltando, também ao quadrado

② Se $y = g(z)$ é uma ~~sq~~ curva no plano xz e for girada em torno do eixo z do eixo, a equação da sup. de rev. gerada é

faltando

$$\boxed{x^2+y^2 = g(z)^2} \Rightarrow y = g(z) = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

reescrito (± pq tirou a raiz)

③ Se $y = f(x)$ é uma curva no plano xy e for girada em torno do eixo x, a equação da sup. de rev. é

$$\boxed{y^2+z^2 = f(x)^2} \Rightarrow y = f(x) = \pm\sqrt{y^2+z^2}$$

Obs.: analogamente:

(i) $x = g(y)$ em torno de $y \Rightarrow x^2 + z^2 = g(y)^2 \Rightarrow x = g(y) = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

(ii) $x = f(z)$ em torno de $z \Rightarrow x^2 + y^2 = f(z)^2 \Rightarrow x = f(z) = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

(iii) $z = f(x)$ em torno de $x \Rightarrow z^2 + y^2 = f(x)^2 \Rightarrow z = f(x) = \pm\sqrt{z^2+y^2}$

Ex.: Encontre a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da parábola $\boxed{y^2 = 4x}$ no plano xy em torno de x.

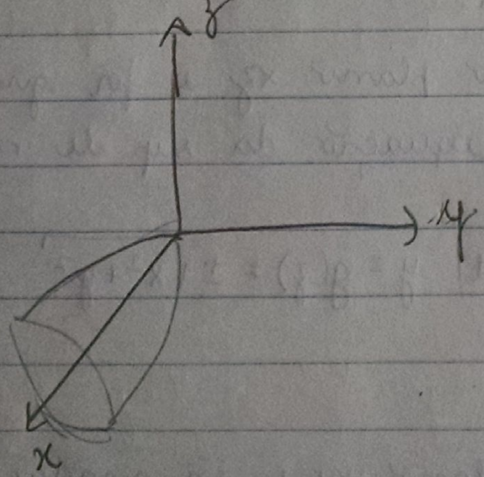
Como a rotação é em torno de x e $\boxed{y^2 = 4x = f(x)}$ (*),

então (iii) basta trocar y por $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ em (*)

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 = 4x \Rightarrow \boxed{y^2 + z^2 = 4x}$$

EQ. da superfície de revolução

Parabolóide de revolução



$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

23 / 06 / 15

1/

Ex. 3. Trace um esboço da superfície $x^2 + y^2 - 4y^2 = 0$.

Note que podemos reescrever essa equação da seguinte maneira:

- $x^2 + y^2 = 4y^2 = (2y)^2 = f(y)^2$, onde $f(y) = 2y$

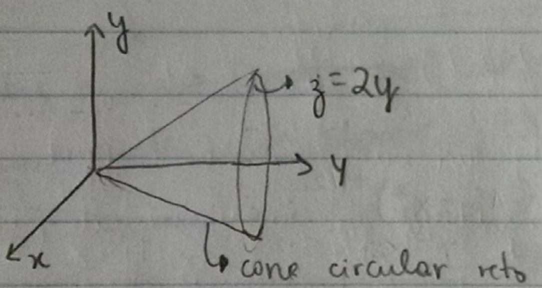
$\Rightarrow$ eixo de revolução é o eixo y.

Pelo que vimos, $x^2 + y^2 = (2y)^2 = 2y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e pelos casos vistos, a geratriz pode ser:

$\boxed{x = 2y} = f(y)$ ou $\boxed{z = 2y} = f(y)$

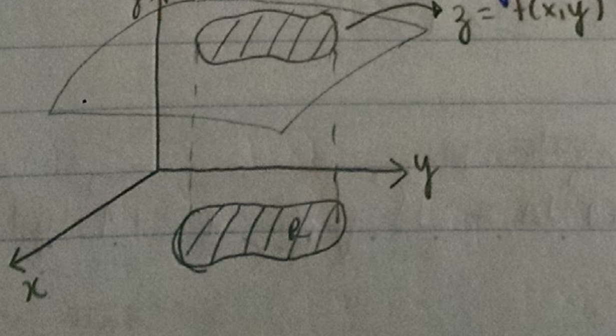
↳ no plano xy ↳ no plano yz

Então, a superfície é:



ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

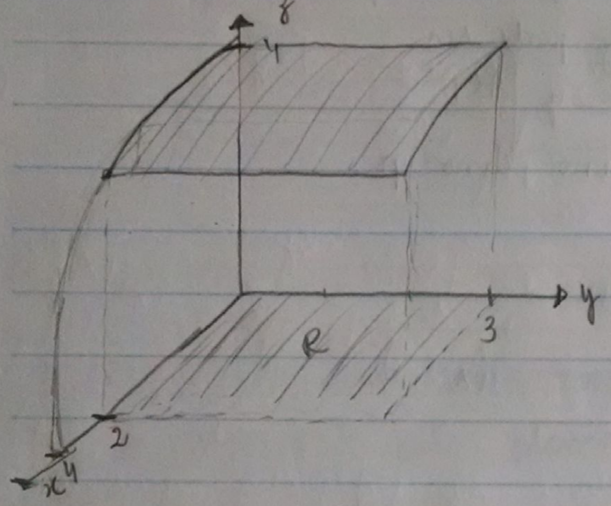
A integral dupla pode ser utilizada para encontrarmos a área de uma superfície $z = f(x,y)$ que está sobre uma região fechada R no plano xy.



Teorema: Suponha que $z = f(x,y)$ e suas derivadas parciais de 1ª ordem sejam contínuas na região fechada R no plano xy. Se σ é a medida da área da superfície $z = f(x,y)$ que está sobre R, então:

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\, dA$$

EX. 1: Encontre a área da superfície do cilindro $x^2+y^2=16$, limitadas pelos planos $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=3$.



Superfície:

$x^2 + z^2 = 16$

$\Rightarrow z = \pm\sqrt{16-x^2}$ → somente a parte positiva porque só estamos na parte positiva de z

$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt{16-x^2}$

$$f(x,y) = z = (16-x^2)^{+1/2}$$

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{\cancel{2}}(16-x^2)^{-1/2} \cdot (\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}} \\ f_y = 0 \end{cases}$$

Essa f_x é contínua por causa do intervalo 0, 2 que está contido no intervalo $]-4, 4[$, que é o intervalo onde ela é contínua

f_x e f_y são contínuas em
$$R = \overset{x}{[0,2]} \times \overset{y}{[0,3]}$$

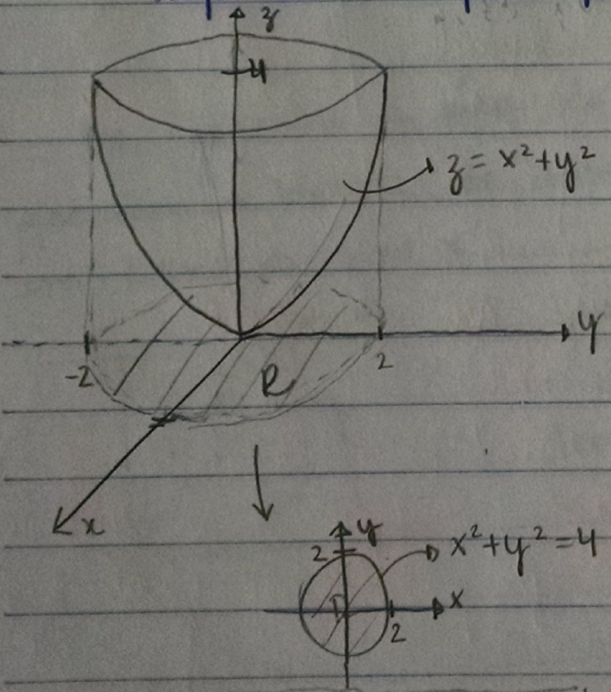
Logo, a área procurada é dada por:

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\, dA = \int_0^2\int_0^3 \sqrt{\frac{x^2}{16-x^2} + 0 + 1}\, dy\, dx$$

$= 2\pi$

terminar continhas! =)

Ex. 2: Encontre a área (~~dada por~~) do parabolóide $z = x^2+y^2$ limitado superiormente pelo plano $z=4$



Superfície: $z = x^2+y^2 = f(x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases} \to$ Contínuas em R

Logo, a área procurada é dada por

$$\sigma = \iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA =$$

$$\iint_R \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dA$$

Polares:	
$x = r\cos\theta$	$0 \le r \le 2$
$y = r\sin\theta$	$0 \le \theta \le 2\pi$
$x^2+y^2 = r^2$	

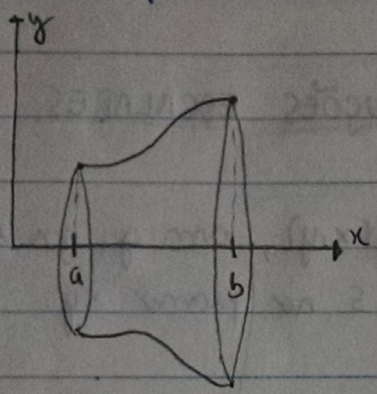
$\longrightarrow$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

#substituição#

Exercício: Encontre a área da metade superior $(z > 0)$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

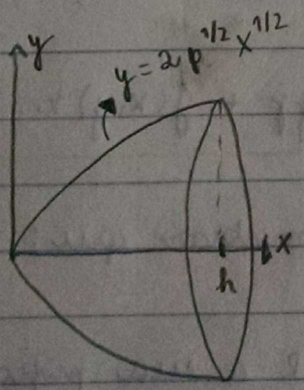
Consideremos a curva $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$, tal que $f(x) > 0$ em $[a, b]$ contínua e f' é contínua em $[a, b]$. Pode-se mostrar que:



Se σ é a medida da área da superfície de revolução obtida ao giramos a curva $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x, então:

$$\boxed{\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx}$$

Ex.: Encontre a área do parabolóide de revolução gerado ao giramos a metade da parábola $y^2 = 4px$, com $p > 0$, $0 \leq x \leq h$, em torno do eixo x.



Temos

$$y^2 = 4px \Rightarrow y = \pm 2\, p^{1/2} x^{1/2}$$

tomando a metade $y > 0$,

$$y = f(x) = 2\, p^{1/2} x^{1/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = p^{1/2}\, x^{-1/2} = \sqrt{\frac{p}{x}}$$

A área é dada por:

$$\sigma = 2\pi \int_0^h f(x) \sqrt{f'(x) + 1}\, dx =$$

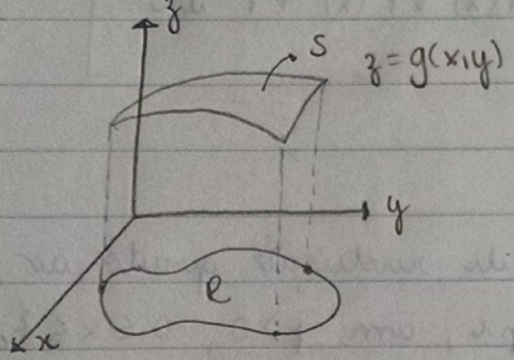
6|

$$= 2\pi \int_0^h 2\sqrt{p}\,\sqrt{x} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{\frac{p}{x}}\right)^2 + 1}\; dx =$$

$$= 2\pi \int_0^h 2\sqrt{p}\,\cancel{\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{p+x}}{\cancel{\sqrt{x}}}\; dx = \frac{8}{3}\sqrt{p}\left((h+p)^{3/2} - p^{3/2}\right)$$

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES DE FUNÇÕES ESCALARES

Seja S uma superfície dada por $z = g(x,y)$, com g, g_x e g_y contínuas em R, onde R é a projeção de S no plano xy.



Se $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é contínua
$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$

em S; vamos definir uma integral de $f(x,y,z)$ sobre S.

Note que a superfície S dada por $z = g(x,y)$ pode ser parametrizada por

$$\boxed{r(x,y) = x\,i + y\,j + g(x,y)\,k.}$$

Com essa parametrização de S, podemos mostrar que:

Teorema: Sejam S a superfície $z = g(x,y)$ e R a sua projeção no plano xy. Se g, g_x e g_y são contínuas em R e $f(x,y,z)$ é contínua em S, então a integral de f em S é

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{g_x(x,y)^2 + g_y(x,y)^2 + 1}\; dA.$$