google.com/+VictorPedro

Cálculo Aplicado

TM406

Aleksandro • 2015.1 • UFRRJ

Last Revision: 21 de abril de 2015

Sumário

Resumo

Este documento apresenta notas sobre a cadeira de Cálculo Aplicado no curso de Ciência da Computação.

1 Organização do Curso

$$\begin{aligned} Unidade\, 0 &: DerivadasParciais \\ 1 &: IntegraisMltiplas \\ 2 &: Tpicosdeclculovetorial \end{aligned}$$

2 Derivadas Parciais

Seja $f : D(f) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n varáveis. O conceito de derivada parcial segue do fato de tratarmos de uma função de n variáveis como uma função de uma variável considerando as demais fixas (constantes).

Definition 2.1 (n=2)**.** Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis x e y.

(a) a derivada parcial de f em relação à x é a função:

$$D_1 f : D(f) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

. Se este existir.

(b) Analogamente, a derivada parcial de f em relação à y é a função $D_2 f : D(f) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$D_2 f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Se este existir.

OBS.: outras notações:

$$D_1 f, fx, f1, \frac{\delta f}{\delta x}$$

Example 2.1. Dada $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, encontre $D_1 f(x, y)$ e $D_2 f(x, y)$ utilizando a definição anterior.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \end{aligned}$$

3 Exercícios Sobre Integral Dupla

1. Encontre o volume do sólido limitado pela superfície $f(f, x) = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}$, os planos $x = 3$, $y = 2$ e os planos coordenados. **Resposta**

$$V = \int_R \int f(x,y)dA \tag{3.1}$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} dydx \tag{3.2}$$

$$= \int_0^3 4y - \frac{x^2y}{9} - \frac{y^3}{48} |_0^2 dx \tag{3.3}$$

$$= \int_0^3 8 - \frac{2x^2}{9} - \frac{8}{48} - (0-0-0)dx \tag{3.4}$$

$$= \int_0^3 \frac{2x^2}{9} + \frac{47}{6} dx \tag{3.5}$$

$$= \frac{2x^3}{27} + \frac{47x}{6} |_0^3 \tag{3.6}$$

$$= -2 + \frac{47}{2} - 0 = \frac{43}{2} \tag{3.7}$$

4 Teorema de Fubini

Seja R o retângulo $R = [a.b]$ e $[c,d]$. Se f é contínua em R, então

$$\int_R \int f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \tag{4.1}$$

Ex. Calcule $\int_R \int y^2 x dA$ no retângulo $-3 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$.

5 Integrais Duplas em Regiões não-retangulares

As Integrais iteradas podem apresentar limites de integração não-ctes, como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \tag{5.1}$$

E

$$\int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dydx \tag{5.2}$$

6 Integrais Triplas

A Integral tripla de uma função $f(x,y,z)$ é definida de forma análoga a integral dupla, nesse caso, $f(x,y,z)$ deve ser contínua em um sólido G do espaço 3D.
As propriedades de integral tripla são análogas às de integral dupla.
Integrais triplas em "caixas"retangulares:

Theorem 6.1. Seja G uma caixa retangular definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ e $l \leq z \leq m$, ou seja,

$$G = [a,b] * [c,d] * [l,m]. \tag{6.1}$$

Se f é uma função em G, então:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \int_l^m \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{6.2}$$

não importando a ordem de integração

Example 6.1. Calcule $\iiint_G 12xy^2z^3dv$, onde G é a caixa $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ e $0 \leq z \leq 2$.
Solução.

$$\begin{aligned} &\iiint_G 12xy^2z^3\,dV \\ &= \int_- 1^2 \int_0^3 \int_0^2 dz\,dy\,dx \\ &\dots \end{aligned}$$

6.1 Integrais triplas em Sólidos mais gerais

(1) G é um sólido do tipo xy simples

Theorem 6.2. Seja G um sólido xy simples com superfície inferior $z = g_1(x,y)$ e superfície superior $z = g_2(x,y)$. Seja R a projeção de um G no plano xy. Se f é uma função contínua em G, então.

$$\begin{aligned} &\iiint_G f(x,y,z)dv \\ &\iint_G \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA \end{aligned}$$

(2) G é um sólido do tipo xz simples:

Theorem 6.3. Seja G um sólido xy simples, limitado à esquerda pela superfície $y = a_1(x,y)$ e pela direita pela superfície $y = g_2(x,y)$. Seja $\underline{R}$ A projeção de G no plano xy se f é contínua em G, então:

$$\begin{aligned} &\iiint_G f(x,y,z)\,dv \\ &= \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA \end{aligned}$$

(3) G É um sólido xy simples:

Theorem 6.4. Seja G um sólido xy simples limitado atrás pela superfície $x = g_1(x,z)$, à frente pela superfície $x = g_2(x,z)$. Seja $\underline{R}$ a projeção de G no plano xz. Se f é contínua em G, então:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dv = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$

Example 6.2. Seja G a cunha do primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$, pelos planos $= y = x$ e $x = 0$. Calcule $\iiint_G z\,dV$

OBS Podemos utilizar uma integral tripla para determinar o volume de um sólido G da seguinte maneira:

$$V(G) = \iiint_G 1\, dV$$

Example 6.3. Demonstre através de uma integral tripla que o volume do cilindro circular reto, de altura H e raio da base R é.

$$V = \pi R^2 H$$

<u>Sólido xy simples</u>

$\underline{regiopolar}$	$0 \leq z \leq H$
$0 \leq \theta \leq H$	$V(G) = \iiint_G 1\, dV$
$0 \leq r \leq R$	$= \iint_R \left[\int_0^H 1\, dV\right] dA$

Example 6.4. Idem ao anterior, mas usando integral dupla:

$$V(G) = \iint_R H\, dA = \cdots = \pi R^2 H.$$

7 Coordenadas Ciliíndricas

As coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de um ponto (x, y, z) são definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{x = r} \cos\theta \\ \mathrm{y = r} \sin\theta \\ \mathrm{z = z} \end{array} \right\} \tag{7.1}$$

Onde $r \leq 0$ e θ é um ângulo que pode variar de zero à 2π,insto é, $\theta \in [0, 2\pi]$
OBS: Com as igualdades acima, temos:

- $x^2 + y^2 r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2.$

- $\tan\theta$

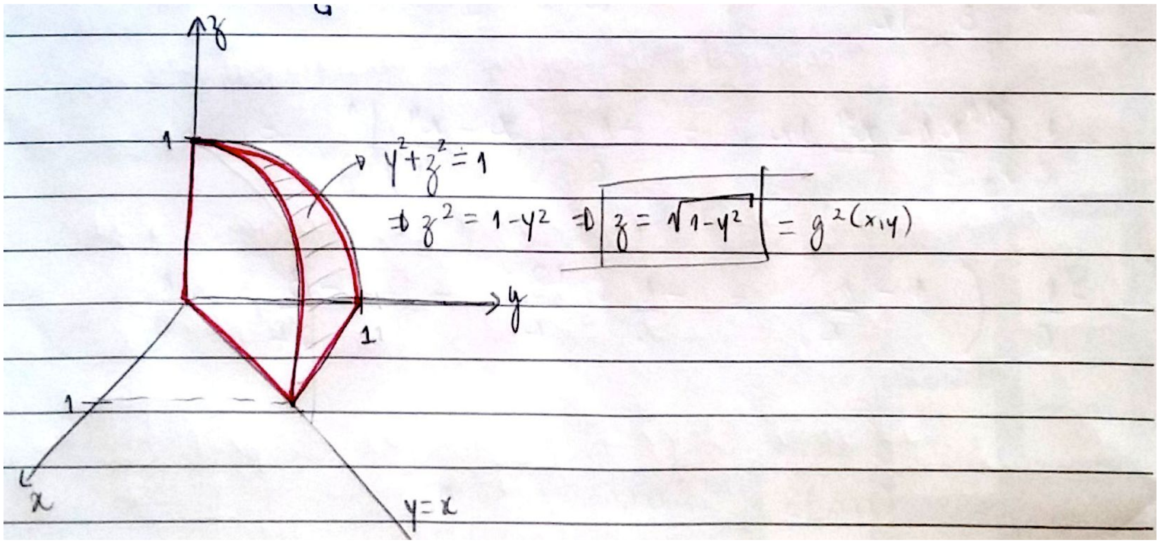
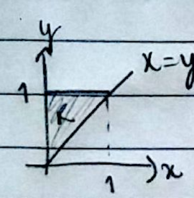


Figura 6.1: Solução - Parte 1

(a) G sólido xy simples



$$g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \Rightarrow 0 \le z < \sqrt{1-y^2}$$

R = Rx

$0 \le x \le 1$

$x \le y \le 1$

$$\iiint_G z\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} z\,dV\right] dA$$

$$\int_0^1\int_x^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz\right] dy\,dx$$

$$\int_0^1\int_x^1 \left[\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}\right] dy\,dx \Rightarrow \iint_G \left[\frac{(\sqrt{1-y^2})^2}{2} - 0\right] dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_x^1 \frac{-y^2}{2}\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_x^1 y^2\,dy\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_x^1 dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^3)\,dx$$

$$-\frac{1}{6}\int_0^1 1-x^3\,dx = -\frac{1}{6}\cdot\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$