Cálculo Aplicado
Aleksandro Mello
aleksandromello@yahoo.com.br (assunto: URGENTEEEE)

Unidade 0 : Derivadas Parciais } Leithold ~~vol 2~~
1 : Integrais múltiplas }
Cálc Aplic 2 : Tópicos de cálculo vetorial } Sowckowiski Cálculo c/ GA

Derivadas Parciais

Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. O conceito de derivada parcial segue do fato de tratarmos de uma função de n variáveis como uma função de uma variável considerando as demais fixas (constantes).

Definição ($n=2$): Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis x e y.

(a) a derivada parcial de f em relação à x é a função $D_1 f : D(f) \to \mathbb{R}$ definida por

$$D_1 f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

se este existir.

Analogamente,

(b) a derivada parcial de f em relação à y é a função $D_2 f : D(f) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$D_2 f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

se este existir.

Obs.: outras notações:

$$D_1 f, \; f_x, \; f_1, \; \frac{\partial f}{\partial x}$$

Ex.: Dada $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$, encontre $D_1 f(x,y)$ e $D_2 f(x,y)$ utilizando a definição anterior.

$$D_1 f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)y + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 2xy - 2(\Delta x)y + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)y}{\Delta x} = 2x - 2y$$

$$D_2 f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, \Delta y + y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 - 2x(\Delta y + y) + (\Delta y + y)^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{x^2} - 2x(\Delta y) - \cancel{2xy} + \Delta y + 2y(\Delta y) + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + \cancel{2xy} - \cancel{y^2}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x(\Delta y) + \Delta y + 2(\Delta y)y}{\Delta y} = -2x + 2y$$

Obs.: Se (x_0, y_0) é um ponto particular de $D(f)$, então:

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

se o limite existir, e

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (4)$$

se o limite existir.

ou

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (5)$$

se o limite existe.

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (6)$$

se o limite existe.

Ex.: Dada $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$, encontre a $D_1 f(1, -4)$

a) aplicando (3)

b) (5)

c) subitituindo $(1, -4)$ na expressão $D_1 f(x,y)$ encontrada no exemplo 1.

$x_0 = 1$, $y_0 = -4$

a) $D_1 f(1, -4) = \lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{(1+\Delta x)^2 - 2(1+\Delta x)(-4) + (-4)^2 - (1^2 - 2.1(-4) + (-4)^2)}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{\cancel{1} + 2\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{8} + 8\Delta x + \cancel{16} - \cancel{1} - \cancel{8} - \cancel{16}}{\Delta x}$

$2 + \cancel{\Delta x}^{0} + 8 = 10$

$x^2 - 2xy + y^2$

b) $D_1 f(1,-4) = \lim_{x \to 1} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x(-4) + (-4)^2 - (1^2 - 2 \cdot 1 (-4) + (-4)^2)}{x - 1}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 8x + \cancel{16} - 1 - 8 - \cancel{16}}{x - 1}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 8x - 9}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+9)}{\cancel{(x-1)}} = 10$

c) $D_1 f(1,-4) = 2x - 2y = 2 + 8 = 10$

Obs.: podemos achar as derivadas parciais sem utilizar limites como segue:

Seja $f: D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função nas variáveis x e y. Fazendo $x = y_0$ e definindo uma função g de uma variável x por:

$g(x) = f(x, y_0)$, temos:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0) = D_1 f(x, y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = D_1 f(x, y_0) = D_1 f(x, y)$$

Assim:

- Para calcular $D_1 f(x,y)$, consideramos y como uma constante e derivamos $f(x,y)$ em relação à x.
- Para calcular $D_2 f(x,y)$, consideramos x como uma constante e derivamos $f(x,y)$ em relação à y.

Exemplo:

Dada $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y + 6x + 7$, encontre:

a) $D_1 f(x,y) = 3x^2y^2 - 4xy + 6$

$D_2 f(x,y) = 2x^3y - 2x^2$

b) $D_1 f(2,-1) = 12 + 8 + 6 = 26$

$D_2 f(2,-1) = -24$

$$\int_0^{?}\int_0^{2} x^3y + y + 2 \; dx\, dy = \int_0^{1}$$

Integrais Duplas

Obs.: Interpretações geométricas de derivadas parciais de uma função de duas variáveis são análogas àquelas de função de uma variável.

- O gráfico da função $f: D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma superfície de equação

$$z = f(x,y)$$

- Se y é considerada constante $= y_0$, então $z = f(x, y_0)$ é a equação de uma curva c que é a interseção entre a superfície $z = f(x,y)$ e o plano $y = y_0$.

- Então $D_1 f(x_0, y_0)$ é a declividade da reta tangente à curva (que é a interseção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano) c no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ no plano $y = y_0$.

- Analogamente, $D_2 f(x_0, y_0)$ é a declividade da reta tangente à curva

$x = x_0$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ //ver desenho no livro

credeal

Ex.: Encontre a declividade da reta tangente à curva de interseção da superfície:

$$z = f(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

com o plano $y = 2$ no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$

Solução: como $y = 2$ (constante), então a declividade procurada é $D_1 f(x_0, y_0)$.

$\boxed{x_0 = 2,\ y_0 = 2}$

como $f(x,y) = \frac{1}{2}(24 - x^2 - 2y^2)^{1/2}$, então

derivada de dentro

lopital?

$$D_1 f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24 - x^2 - 2y^2)^{-1/2} \cdot (0 - 2x - 0) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}} \frac{1}{(24 - x^2 - 2y^2)^{1/2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

$$\Rightarrow D_1 f(x,y) = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

$$\Rightarrow D_1 f(2,2) = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{24 - 4 - 8}} = \frac{-1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{-2\sqrt{3}}{12} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

↳ É A DECLIVIDADE PROCURADA.

Ex.: Mostre que $D_1 f(0,0)$ e $D_2 f(0,0)$ existem, onde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D_1 f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

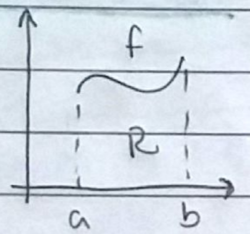
$$D_2 f(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

Exercício: Mostre que a função f acima não é contínua

Integrais Múltiplas

① Integrais duplas:

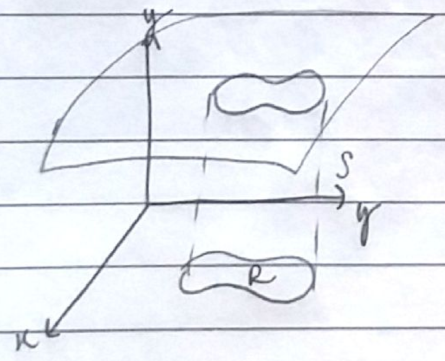
a integral de uma função de uma variável originou-se do problema de determinar áreas sob curvas



$$\int_a^b f(x)\,dx = A(R)$$

↳ área

Da mesma forma, a integral dupla de uma função de duas variáveis originou-se do problema de determinar volumes sob superfícies:



Def.: seja f uma função de duas variáveis que é contínua em uma região fechada R no plano xy e $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in R$

Define-se a integral dupla de $f(x,y)$ em R como

$$\iint_R f(x,y)\,dA = V(S)$$

↳ volume

onde S é o sólido que tem como base R e uma altura de medida $f(x,y)$ no ponto $(x,y) \in R$.

5 6 9

27 03 15

Várias propriedades de integral dupla são análogas às da integral de uma variável:

Teorema 18.1.5: se c é uma constante e f é uma função de duas variáveis integrável numa região R, então cf é integrável e

$$\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$$

Teorema 18.1.6: Se f e g são integráveis numa região R, então $f+g$ é integrável e

$$\iint_R (f+g)\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA$$

Teorema 18.1.7: se f e g são integráveis em R e $g(x,y) \leq f(x,y)$, $\forall (x,y) \in R$, então:

$$\iint_R g\,dA \leq \iint_R f\,dA$$

Teorema 18.1.8: Se f é integrável em R e $m, M \in \mathbb{R}$ são tais que $m \leq f(x,y) \leq M$, então:

dx dy ou dy dx

$$m.\ \text{Área}(R) \leq \iint_R f\,dA \leq M.\ \text{área}(R)$$

Teorema 18.1.9: se f é contínua em $R = R_1 \cup R_2$, então

$$\iint_R f\,dA = \iint_{R_1} f\,dA + \iint_{R_2} f\,dA.$$

Cálculo das Integrais Duplas e Iteradas

Def.: Seja f uma função de 2 variáveis que é integrável em um retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$

- A integral parcial de f em relação à x é $\int_a^b f(x,y)\,dx$, onde integramos f em relação à x, mantendo y constante.

- A integral parcial de f em relação à y é $\int_a^b f(x,y)\,dy$, onde integramos f em relação à y, mantendo x constante.

Ex.: $$\int_0^1 xy^2\,dx = \frac{x^2}{2}y\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2}y^2 - \frac{0^2}{2}y^2 = \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 xy^2\,dy = \frac{xy^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{x \cdot 1^3}{3} - \frac{x \cdot 0^3}{3} = \frac{x}{3}$$

Denomina-se Integrais Iteradas de f:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

Ex.: calcule:

① $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\, dy\, dx = \int_0^3 \left(y + \frac{\cancel{8}^{4} x y^2}{\cancel{2}} \Big|_1^2 \right) dx =$

$= \int_0^3 \left[2 + 4x\, 2^2 - (1 + 4x\; 1^2) \right] dx = \int_0^3 1 + 12x\, dx$

$= x + \frac{\cancel{12}^{6} x^2}{\cancel{2}} \Big|_0^3 = 3 + 6 . 3^2 - (0 + 6 . 0^2) = 57$

② $\int_1^2 \int_0^3 (1 + 8xy)\, dx\, dy = \int_1^2 \left(x + \frac{8x^2 y}{2} \Big|_0^3 \right) dy$

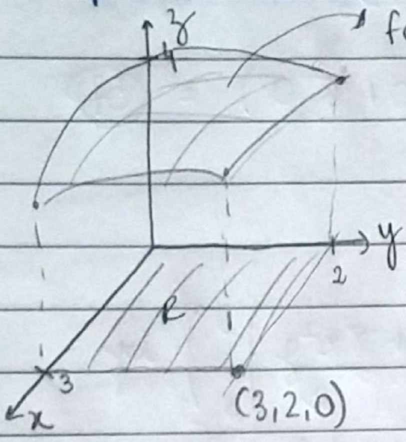
$= \int_1^2 \left[3 + 36y \right] dy = 3y + \frac{36y^2}{2} \Big|_1^2$

$= 6 + 72 - (3 + 18) = 57$

N/5

31 ▸ 03 ▸ 15

③ Encontre o volume do sólido limitado pela superfície $f(x,y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$, os planos $x=3$, $y=2$ e os planos coordenados.



$f(x,y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= \int_0^3\int_0^2 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^3 4y - \frac{x^3 y}{9} - \frac{y^3}{48}\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^3 8 - \frac{2x^2}{9} - \frac{8}{48}^{1/6} - (0-0-0)\, dx = \int_0^3 -\frac{2x^2}{9} + \frac{47}{6}\, dx$$

$$= -\frac{2x^3}{27} + \frac{47x}{6}\Big|_0^3 = -2 + \frac{47}{2} - 0 = \boxed{\frac{43}{2}}$$

④ Calcule $\iint_R (2x^2 - 3y)\, dA$, onde $R = [-1,2] \times [1,3]$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 3$

Resposta: 24

$$\iint_R (2x^2 - 3y)\, dA = \int_{-1}^{2}\int_1^3 2x^2 - 3y\, dy\, dx$$

credeal

P1: 26 ou 29/05
P2: 10/07
Opt: 21/07

Por isso podemos ficar comutando ($dx\,dy$ ou $dy\,dx$) 2/5

↗ Tq contínuo 31 ▸ 03 ▸ 15

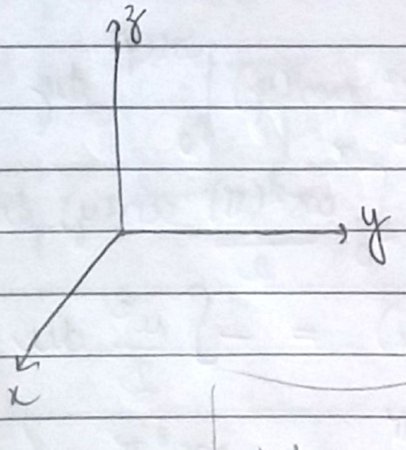
<u>Teorema de Fubini</u>: Seja R o retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Se f é contínua em R, então:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

Ex.: Calcule $\iint_R y^2 x\, dA$ no retângulo $-3 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$

$\iint_R y^2 x\, dA$ $\boxed{-\frac{5}{6}}$ //

Ex.: Use a integral dupla para calcular o volume V do sólido limitado acima pelo plano $z = 4 - x - y$ e abaixo pelo retângulo $R = [0,1] \times [0,2]$. Esboce o sólido



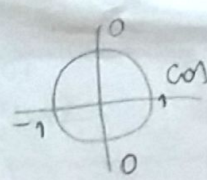
$V = \iint_R f(x,y)\, dA$

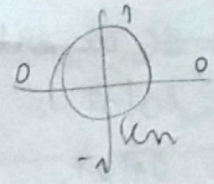
$f(x,y) = 4 - x - y$

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$V = \int_0^1 \int_0^2 4 - x - y\, dy\, dx = 5$

Esboçar → P





Integrais duplas em regiões não-retangulares

As integrais iteradas podem apresentar limites de integração não-constantes, como:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

e

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Ex.: ① $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{x} y^2 x \, dy\, dx = \qquad -\frac{128}{15}$

② $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\cos(y)} x \operatorname{sen}(y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(y) \Big|_0^{\cos(y)} dy =$

$\displaystyle= \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(y)}{2} \cdot \operatorname{sen}(y) - 0 \, dy = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(\pi)}{2} \operatorname{sen}(y)\, dy =$

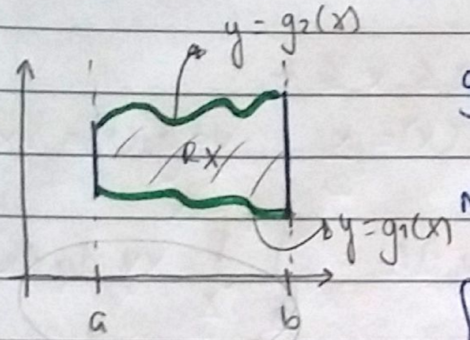
substituição:
$u = \cos(y)$
$du = -\operatorname{sen}(y)\, dy$

$\displaystyle= \int \frac{u^2}{2}(-du) = -\int \frac{u^2}{2} du = -\frac{u^3}{6} =$

$\displaystyle= -\frac{\cos^3(y)}{6}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos^3\pi}{6} - \left(-\frac{\cos^3(0)}{6}\right) =$

$\displaystyle= -\frac{(-1)^3}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Def.: (a) Uma região do tipo R_x é limitada à esquerda e à direita por <u>retas</u> <u>verticais</u> $x = a$ e $x = b$ respectivamente, e é limitada abaixo e acima por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ respectivamente, onde:

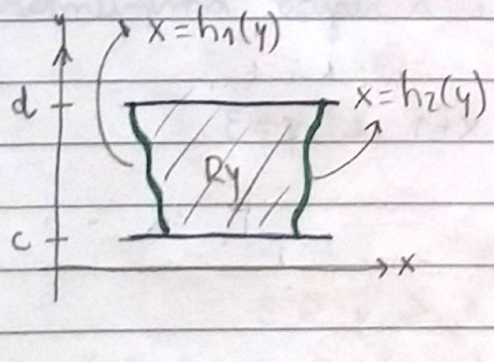


$$g_1(x) \leq g_2(x), \ \forall \ x \in [a,b]$$

Nesse caso,

$$\iint_R f(x,y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dy \, dx$$

(b) Uma região do tipo R_y é limitada abaixo e acima por retas horizontais $y = c$ e $y = d$ respectivamente, e à esquerda e à direita por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$ respectivamente, onde



$$h_1(y) \leq h_2(y), \ \forall \ y \in [c,d]$$

Nesse caso,

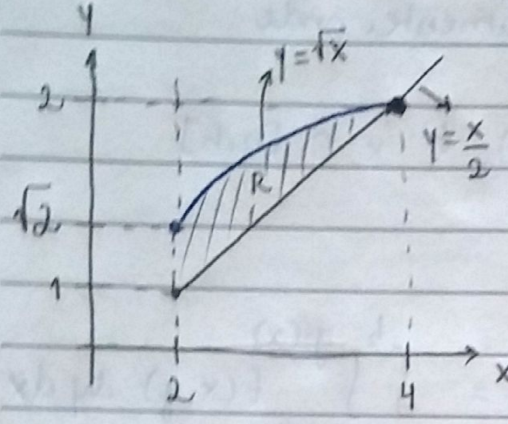
$$\iint_{R_y} f(x,y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dx \, dy$$

31 ▸ 03 ▸

785 - 786
797 - 792

Ex.: Calcule $\iint_R xy \, dA$, onde R é a região compreendida entre $y = x/2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ e $x = 4$

$\hookrightarrow R = Rx$

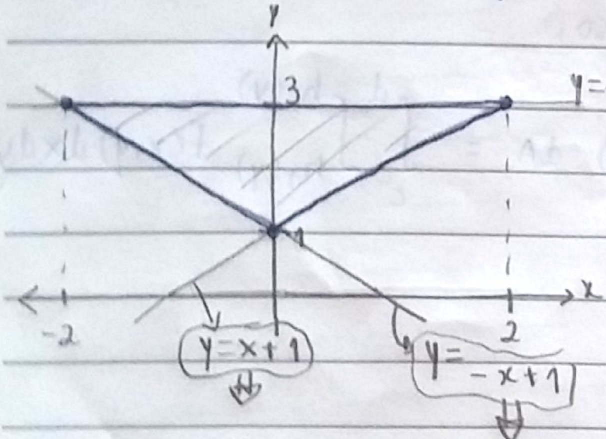


$Rx: \ 2 \leq x \leq 4$

$y = g_1(x) = \frac{x}{2}$ | $y = g_2(x) = \sqrt{x}$

$$\therefore \iint_{Rx} xy \, dA = \int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx = \frac{11}{6}$$

Ex.: Calcule $\iint_R (2x - y^2) \, dA$, onde R é a região compreendida entre as retas $y = -x+1$, $y = x+1$ e $y = 3$



$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$x = y-1$ $\quad$ $x = 1-y$

$Ry: \ 1 \leq y \leq 3$

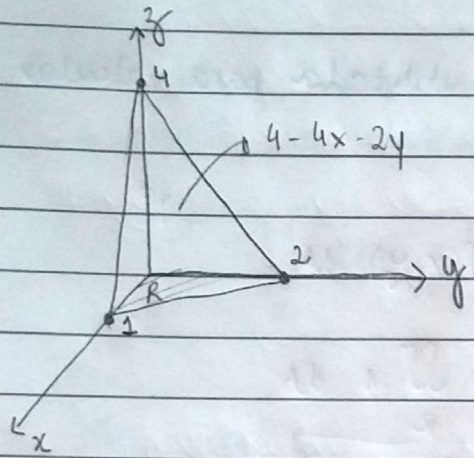
$h_1(y) = 1-y$, $h_2(y) = y-1$

$$\iint_R (2x - y^2) \, dA = \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2) \, dx \, dy = -\frac{68}{3}$$

credeal

08 04 15

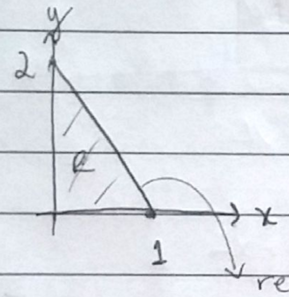
EX.: Use uma integral dupla para calcular o volume do sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano $z = 4 - 4x - 2y$



$$f(x,y) = 4 - 4x - 2y$$

$$V = \iint\limits_{R=Rx} 4 - 4x - 2y$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} 4 - 4x - 2y \; dy\, dx$$



R = Rx

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq 2 - 2x$

$\boxed{\begin{array}{l} R = Ry \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \frac{2-y}{2} \end{array}}$

outra opção (pior, neste caso)

$\frac{4}{3}$

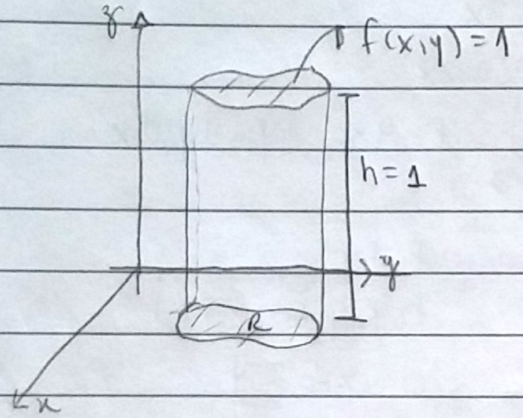
$f(x) = ax + b \qquad f(x) = -2x + 2$

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -2$

$f(0) = 2 \Rightarrow a\cancel{0} + b = 2 \Rightarrow b = 2$

Obs.: ① A inversão da ordem de integração às vezes simplifica os cálculos

② A integral dupla pode ser utilizada para calcular a área de regiões planas



$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$A_B \cdot \overset{=1}{h} = \iint_R 1\, dA$$

$$\boxed{\Rightarrow A_B = \iint_R 1\, dA}$$

área do prisma

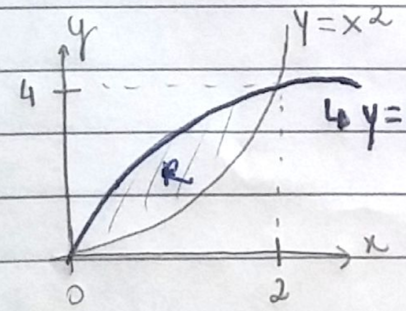
Ex.: Encontre por integração dupla a área da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$

Pontos de Interseção: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow$

$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$2x(x-2) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x = 0}$ ou $\boxed{x = 2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} R = R_x \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4x - x^2 \end{array}}$$

$$A_B = \iint_R 1\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} 1\, dy\, dx =$$

Exercícios: p 785-786, 791-792 Resposta: 8/3

10 04 15

Conversão de Integrais Duplas em coordenadas Retangulares para Coordenadas Polares

Faz-se a substituição $\boxed{x = r\cos(\theta)}$, $\boxed{y = r\,sen(\theta)}$ e expressa-se a região de integração na forma polar:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta,\, r\,sen\theta)\; r\,dr\,d\theta$$

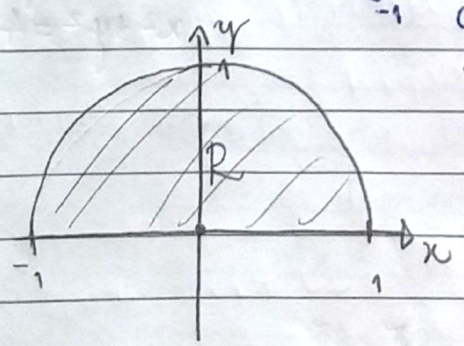
Obs.: note que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\theta$ implica:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta = r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) = r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Ex. 1: Use coordenadas polares para calcular:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$$



$-1 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

Coord. Polares

$x = r\cos\theta$

$y = r\,sen\theta$

$x^2+y^2 = r^2$

$\boxed{y = \sqrt{1-x^2}}$

$y^2 = 1 - x^2 \quad (\Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 1}$

Região Polar: R

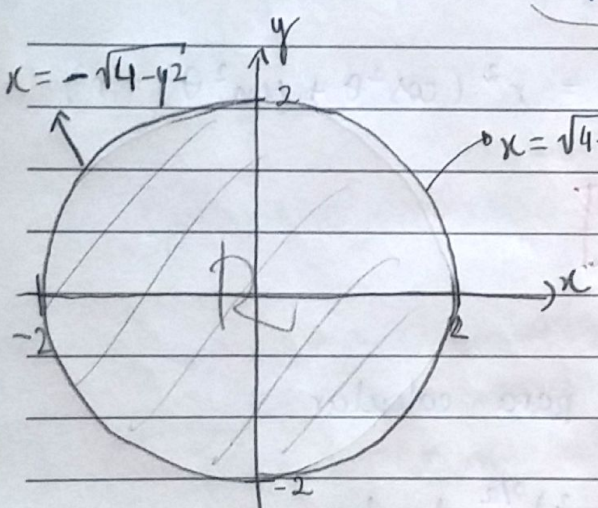
$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq r \leq 1$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} (r^2)^{3/2}\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} r^4\, dr\, d\theta = \int_{0}^{\pi} \frac{r^5}{5}\Big|_{0}^{1} d\theta = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{5}\, d\theta = \frac{\theta}{5}\Big|_{0}^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{5}}$$

Ex2: Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$



$$\begin{cases} -2 \le y \le 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

1º $x = -\sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2 = 4-y^2$

$x^2+y^2 = 4$

2º $x = \sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2 = 4-y^2$

$x^2+y^2 = 4$

Coord. Polares	Região Polar
$y = r\cos\theta$	$0 \le \theta \le 2\pi$
$x = r\,\text{sen}\,\theta$	$0 \le r \le 2$
$x^2+y^2 = r^2$	

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$u = -r^2$
$du = -2r\, dr$

$$\int_0^{2\pi}\int e^{u}\, du\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int e^{u} \frac{du}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{u}\, d\theta \Rightarrow -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\Big|_0^2 d\theta \Rightarrow -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-4} - e^{0}\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-4} - 1\, d\theta \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(e^{-4}\theta - \theta\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-4}\, 2\pi - 2\pi\right) = -\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\pi\left(e^{-4} - 1\right) = \boxed{-\pi\left(e^{-4} - 1\right)}$$

Aplicações

① Centro de Massa:

Suponhamos que uma lâmina tenha a forma de uma região fechada R no plano xy. Seja $\rho(x,y)$ a medida da densidade de área da lâmina em um ponto qualquer $(x,y) \in R$, onde $\rho(x,y)$ é contínua em R.

(a) a massa total da lâmina é dada por

$$M = \iint_R \rho(x,y)\, dA$$

(b) a medida M_x do momento de massa em relação ao eixo x da lâmina inteira é

$$M_x = \iint_R y\, \rho(x,y)\, dA$$

(c) a medida M_y do momento de massa em relação ao eixo y é dada por

$$M_y = \iint_R x\, \rho(x,y)\, dA$$

(d) o centro de massa da lâmina é o ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}\right)$$

Ex. 1: Uma lâmina na forma de um triângulo isósceles tem uma densidade de área que varia com o quadrado da distância ao vértice do ângulo reto. Encontre a massa

Integrais Triplas

A integral tripla de uma função $f(x,y,z)$ é definida de forma análoga à integral dupla: nesse caso, $f(x,y,z)$ deve ser contínua em um sólido G do espaço 3-D.

As propriedades da integral tripla são análogas às de integral dupla.

Integrais triplas em "caixas" retangulares:

Teorema: Seja G uma caixa retangular definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ e $l \leq z \leq m$, ou seja,

$$G = [a,b] \times [c,d] \times [l,m].$$

Se f é uma função contínua em G, então:

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dV = \int_l^m \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

não importando a ordem de integração.

Ex. 1: calcule $\iiint_G 12xy^2z^3\, dV$, onde G é a caixa

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3 \quad e \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$\iiint_G 12xy^2z^3\, dV = \int_{-1}^{2}\int_0^3\int_0^2 12xy^2z^3\, dz\, dy\, dx$$

Integrais Triplas em sólidos mais gerais:

① G é um sólido do tipo xy simples:

Teorema 1: Seja G um sólido xy com uma superfície inferior $z = g_1(x,y)$ e superfície superior $z = g_2(x,y)$. Seja R a projeção de G no plano x,y. Se f é uma função contínua em G, então:

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dA.$$

② G é uma sólido do tipo xz simples:

Teorema 2: Seja G um sólido xz simples, limitado à esquerda pela superfície $y = g_1(x,z)$ e pela direita pela superfície $y = g_2(x,z)$. Seja R a projeção de G no plano xz. Se f é contínua em G, então:

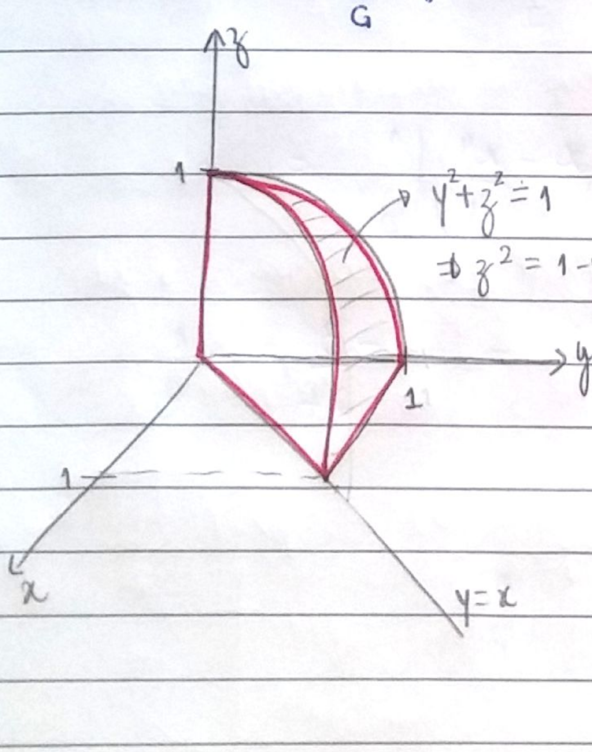
$$\iiint_G f(x,y,z)\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\, dy \right] dA$$

③ G é um sólido yz simples:

Teorema 3: Seja G um sólido yz simples limitado atrás pela superfície $x = g_1(y,z)$, à frente pela superfície $x = g_2(y,z)$, Seja R a projeção de G no plano yz. Se f é contínua em G, então:

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx \right] dA$$

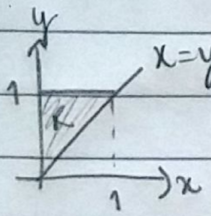
Ex. 2: Seja G a cunha do 1º octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$. Calcule $\iiint_G z\, dV$.



$\rightarrow y^2 + z^2 = 1$

$\Rightarrow z^2 = 1 - y^2 \Rightarrow \boxed{z = \sqrt{1-y^2}} = g^2(x,y)$

(a) G sólido xy simples



$$g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \Rightarrow 0 \le z \le \sqrt{1-y^2}$$

$R = Rx$

$0 \le x \le 1$

$x \le y \le 1$

$$\iiint_G z \, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} z \, dV \right] dA$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z \, dz \right] dy \, dx$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \left[\frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] dy\,dx \Rightarrow \iint_G \left[\frac{(\sqrt{1-y^2})^2}{2} - 0 \right] dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 \frac{-y^2}{2} \, dy\,dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^1 y^2 \, dy\,dx$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^3}{3} \Big|_x^1 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{3} (1 - x^3) \, dx$$

$$-\frac{1}{6} \int_0^1 1 - x^3 \, dx = -\frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 =$$

$$-\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$

Errado solução é $\boxed{\frac{1}{8}}$

credeal