Versuch 221
Adiabatenkoeffizient

Viktor Ivanov

Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Das Ziel dieses Versuchs ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, oder auch Adiabatenkoeffizient $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$ zu bestimmen. Das machen wir auf zwei Weisen, zuerst nach Clement und Desormes und danach nach Rüchhardt. Wir werden die Ergebnisse von beiden Versuchsteile am Ende vergleichen.

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clement und Desormes

Bei der Clement und Desormes Versuchsteil, der in Skizze 1 zu sehen ist, benutzen wir einen luftgefüllten Gasbehälter mit Luftbalg, Gasauschluss und Manometer. Wenn wir den Luftbalg Pumpen und anschlißend warten bis die Temperatur sich zurück mit dem Zimmertemperatur ausgleicht, haben wir im Gasbehälter ein hohen Druck p_1:

$$p_1 = b + h_1 \tag{1}$$

Zum diesen Zeitpunkt haben wir im Gasbehälter den Volumen V_1 und die Temperatur T_1. b ist der äußere Luftdruck und h_1 ist die Höhendifferenz des Manometers.
Wir öffnen danach der Gasauslassstopfen am Gasbehälter bis den Druck b erreicht ist. Wir beobachten eine adiabatische Zustandsänderung. Für unsere drei Zustandsgrößen gilt:

$$V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_2 = b, \quad T_2 = T_1 - \Delta T \tag{2}$$

Bis die Temperaturen ausgeglichen sind, beobachten wir ein isochores Prozess, da das Volumen konstant bleibt. Am Ende dieser Prozess gilt es für die Zustandsgrößen:

$$V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_3 = b + h_3, \quad T_3 = T_1 \tag{3}$$

Die p-V Diagramm, die die oben beschriebene Schritte veranschaulicht kann man in Abbildung 1 finden. Nach die

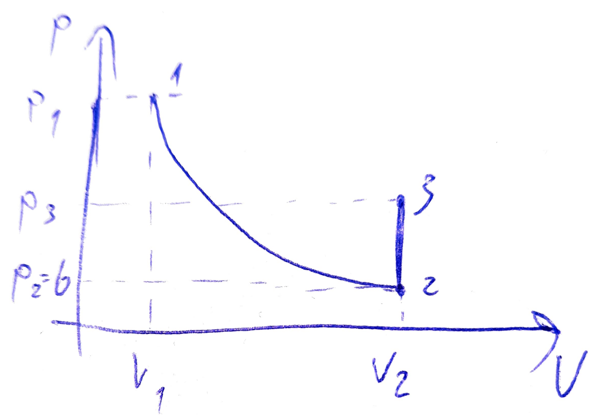


Abbildung 1: p-V Diagramm nach Clement und Desormes

Poisson´sche Gleichung gilt es für die Zustände 1 und 2:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \tag{4}$$

Und wenn wir mit 1 und 2 einsetzen, erhalten wir:

$$(b + h_1) V_1^\kappa = b(V_1 + \Delta V)^\kappa \tag{5}$$

Über die Näherung $\Delta V << V_1$ folgt für $(V_1 + \Delta V)^\kappa$, dass:

$$(V_1 + \Delta V)^\kappa = V_1^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^\kappa \approx V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right) \tag{6}$$

Und wenn wir 6 in 5 einsetzen, es führt zu:

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1} \tag{7}$$

Da in den Zuständen 1 und 3 das Wasser die gleiche Zimmertemperatur T_1 besitzt, gilt das Boyle-Marriotte´sche Gesetz $pV = konst$:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \tag{8}$$
$$\Rightarrow (b + h_1) V_1 = (b + h_3)(V_1 + \Delta V) \tag{9}$$

Da $h_3 << b$ und $\Delta V << V_1$ sind, können wir $h_3 \Delta V$ vernachlässigen und wir erhalten:

$$h_1 V_1 = h_3 V_1 + b \Delta V \tag{10}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b} \tag{11}$$

Wenn wir das in 7 einsetzen, erhalten wir schließlich für den Adiabatenkoeffizient κ:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \tag{12}$$

was zeigt, dass wir den Adiabatenkoeffizient durch Messung der Höhenänderung im Manometer während der beschriebenen Prozesse bestimmen können.

1.2.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Ruchhardt

Die andere Weise den Adiabatenkoeffizient zu bestimmen ist mithilfe einem Gasbehälter mit einem montierten Glasrohr, in denen ein Schwingkörper mit nahezu gleichen Durchmesser wie das Rohr sich befindet. Zu den Glasbehälter ist eine Gasflasche verbunden, die ein gleichmäßigen Gasstrom lässt. In diesem Versuchsanteil verwenden wir zwei Versuchsaufbaue, ein mit eine Lufterfüllte Gasflasche und ein mit eine Argonerfüllte Gasflasche. Da die Schwingung des Schwingkörpers stark gedämpft ist, befindet sich in der Mitte des Glasrohrs ein kleines Loch, damit wenn der Schwingkörper unterhalb dem Loch befindet, ein zusätzlicher Druck auf der Körper wirkt. Wenn der Schwingkörper über der Öffnung sich befindet, entweicht der Gasstrom und es fällt wieder runter. Der Schwingkörper ist im Gleichgewicht genau dann, wenn:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{13}$$

Wobei p_0 der Luftdruck ist , m ist die Masse vom Schwingkörper und A ist die Querschnittsfläche des Schwingkörpers. g ist die Erdbeschleunigung. $\frac{mg}{A}$ ist dabei der „Schweredruck"des Schwingkörpers. Nach dem Newton'schen Gesetz gilt für eine Schwingung um eine kleine Strecke x über die Gleichgewichtslage:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = A dp \tag{14}$$

Wegen des adiabatischen Ablaufs der Vorgang gilt die Poisson'sche Gleichung:

$$pV^\kappa = konst \tag{15}$$

Wenn wir das nach V ableiten, erhalten wir:

$$dp = -\kappa \frac{p}{V} dV \tag{16}$$

Nach Einsetzen in 14, es ergibt sich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -A\kappa\frac{p}{V}dV \tag{17}$$

Wobei die Volumenänderung $dV = Ax = \pi r^2 x$ ist und hier ist r der Radius des Glasrohrs. Wenn wir das in 17 einsetzen, erhalten wir:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\pi^2 r^4 \kappa\frac{p}{V}x \tag{18}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}x = 0 \tag{19}$$

Dieser Ausdruck ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators .

Die Kreisfrequenz des Schwingkörpers können wir dann nachdem wir die DGL lösen, bestimmen:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}} \tag{20}$$

und damit die Periodendauer ergibt sich auf:

$$T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}} \tag{21}$$

Wenn wir Gleichung 21 umformen, erhalten wir schließlich für den Adiabatenkoeffizienten κ:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} \tag{22}$$

1.3 Durchführung des Versuchs

In diesem Versuch haben wir zuerst die Rüchardt Methode verwendet. Wir haben das Reduzierventil der Gasflasche zuerst bei c.a. $0,3bar$ bei Argon und $0,5bar$ bei Luft gestellt und danach das Nadelventil so gedreht, dass eine Schwingung erzeugt wurde. Wir haben die Größen m, V und r von beiden Versuchsaufbauen in Punkte 3 und 4 im Messprotokol notiert und danach dreimal 50 Schwingungen jeder Gas gemessen und in dieselbe Punkte die Messungen notiert. Anschließend haben wir die Fehlerabschätzung gemacht.

Im zweiten Teil haben wir der Clement und Desormes Versuch durchgeführt. In diesem Teil haben wir zuerst mit dem Luftbalg gepumpt, um ein Überdruck im Gasbehälter zu erzeugen, danach haben wir gewartet, bis die Temperatur stabilisiert hat. Wir haben hier die Höhendifferenz (h_1) in Tabelle 1 notiert . Wir haben dann für c.a. 2 Sekunden den Stopfen geöffnet, um den Druck adiabatisch auszugleichen. Danach haben wir gewertet, bis die Temperatur ausgeglichen ist und die Höhendifferenz h_3 in Tabelle 1 im Messprotokol notiert.

2 Messprotokol

Das Messprotokoll finden Sie auf der nächsten Seite.

Viktor Ivanov, Danae Drautsas

Messprotokoll Versuch 221

Adiabatenkoeffizient κ

30/10/23

14-17 Uhr

Tutor: Jonah Lax

1. Messaufbau

- Nach Clément-Desormes: Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg
- Nach Rüchardt: Gasbehälter mit Rohraufsatz und ~~Na~~ Nadelventil
  - Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
  - Gasflaschen (Argon, Luft)
  - Stoppuhr

2. κ für Luft nach Clément-Desormes

2.1 Erzeugung von Überdruck, Abwarten bis Gas auf Zimmertemperatur ist, Messung des Druckes h_1 am Manometer

$h_1 = \dots$

2.2 adiabatischer Druckausgleich, Temperaturausgleich, Überdruck

$h_3 = \dots$

Tabelle 1: Druckwerte h_1 und h_3 für Luft

h_1 [cm]	6	6,4	4,4	3,3	4,2
h_3 [cm]	0,8	0,9	0,7	0,5	0,6

$$\Delta h = \sqrt{2}\,\Delta h_{ablese} = \sqrt{2}\cdot 0{,}1\,\text{cm} = 0{,}14\,\text{cm}$$

3. κ für Argon nach Rüchardt

$p = 0,4$ bar

$2r = (15,95 \pm 0,02)$ mm

$m = (26,116 \pm 0,002)$ g

$V = (5370 \pm 5)$ cm^3

$T_{50} = 47,09$s; $46,465$; $46,243$ $\quad \bar{T} = 46,6$

4. κ für Luft nach Rüchardt

$p = 0,6$ bar

$2r = (15,97 \pm 0,02)$ mm

$m = (26,006 \pm 0,002)$ g

$V = (5460 \pm 5)$ cm^3

$T_{50} = 48,98$ s; $49,61$ s; $49,34$ s $\quad \bar{T} = 49,3$

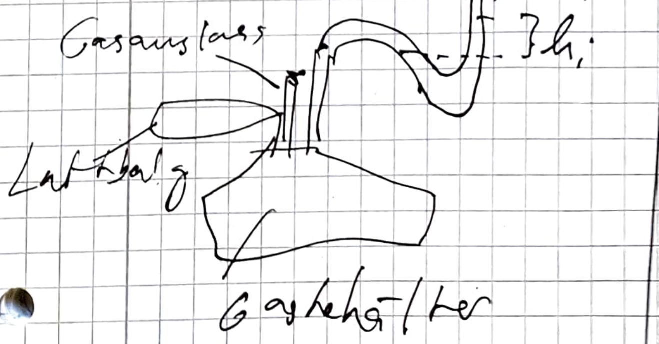
$$\Delta T = \sqrt{(\Delta T_{statistisch})^2 + (\underbrace{\Delta T_{Gerät}}_{= 0,01\,s})^2 + (\Delta T_{reaktion})^2}$$

$\Rightarrow \Delta T_{Argon} = 0,5$ s

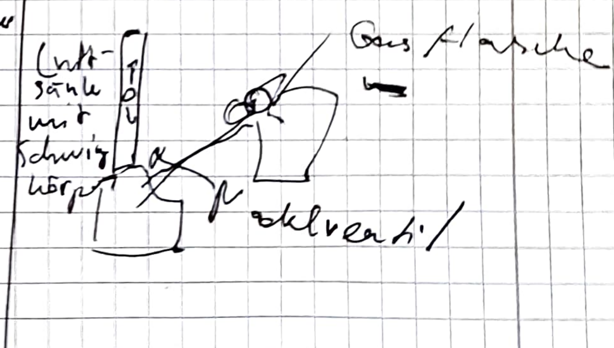
$\Delta T_{Luft} = 0,4$ s

Skizze 1, Versuchsaufbau

Clement-Desormes



Rüchardt



3 Auswertung

3.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt

Zuerst bestimme ich den Adiabatenkoeffizient nach der Rüchardt Methode. Um das zu machen brauchen wir zuerst den Querschnitt A.

$$A = \pi r^2 \tag{23}$$

Die Querschinittsflächen der Schwingkörpern in beiden Versuchsaufbauen (Luft und Argon) haben denselben Wert, nämlich :

$$A_A = (2,00 \pm 0,05).10^{-4} m^2 \tag{24}$$
$$A_L = (2,00 \pm 0,05).10^{-4} m^2 \tag{25}$$

Nach der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich den Fehler auf:

$$\Delta A = \Delta r 2\pi r \tag{26}$$

Der Druck können wir mithilfe der Gleichung 13 bestimmen.
Nach der Gaußschen fehlerfortpflanzung ergibt sich für den Fehler:

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p_0)^2 + \left(\Delta m \frac{g}{A}\right)^2 + \left(\Delta A \frac{mg}{A^2}\right)^2} \tag{27}$$

Der Luftdruck ist $p_0 = (999 \pm 1) mbar$ und daher die Drücken kommen zu:

$$p_L = (1011 \pm 1) mbar \tag{28}$$
$$p_A = (1011 \pm 1) mbar \tag{29}$$

Die Periodendauern können wir bestimmen, wenn wir die Zeit für 50 Schwingungen durch 50 teilen. Sie lauten:

$$T_A = (0,932 \pm 0,010) s \tag{30}$$
$$T_L = (0,986 \pm 0,008) s \tag{31}$$

Nach 22 können die Adiabatenkoeffizienten bestimmt werden:

$$\kappa_L = 1,420 \pm 0,006 \tag{32}$$
$$\kappa_A = 1,578 \pm 0,022 \tag{33}$$

Wobei der Fehler nach der Gauß'sche Fehlerfortpflanzung berechnet wurde:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\Delta m \frac{4V}{r^4 T^2 p}\right)^2 + \left(\Delta V \frac{4m}{r^4 T^2 p}\right)^2 + \left(\Delta r \frac{mV}{r^5 T^2 p}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{2mV}{r^4 T^3 p}\right)^2 + \left(\Delta p \frac{4mV}{r^4 T^2 p^2}\right)^2} \tag{34}$$

Die Literaturwerten lauten:

$$\kappa_{L,lit} = 1,400 \tag{35}$$
$$\kappa_{A,lit} = 1,670 \tag{36}$$

Die σ Abweichung berechnet man mithilfe von:

$$\frac{|\kappa - \kappa_{lit}|}{\sqrt{(\Delta\kappa)^2 + (\Delta\kappa_{lit})^2}} \tag{37}$$

Die Ergebnisse besprechen wir in der Diskussion.

3.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clement und Desormes

Der Adiabatenkoeffizient können wir mithilfe von Formel 12 bestimmen. Der Fehler lautet nach dem Gauß'schen Gesetz:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\Delta h_1 \frac{h_3}{(h_1 - h_3)^2}\right)^2 + \left(\Delta h_3 \frac{h_1}{(h_1 - h_3)^2}\right)^2} \tag{38}$$

Die Werte jeder Messung habe ich in Tabelle 2 zusammengefasst:

Tabelle 2: Adiabatenkoeffizienten jeder Messung nach Clement und Desormes

Adiabatenkoeffizient κ	$\Delta\kappa_m$
1.15	0.03
1.16	0.03
1.19	0.05
1.18	0.06
1.17	0.05

Der statistische Fehler der Mittelwert beträgt $\sigma_{CD} = 0,016$ und der gesamte Fehler ergibt sich auf:

$$\Delta\kappa_{L,C\&D} = \sqrt{\sigma_{CD}^2 + \overline{\Delta\kappa_m^2}} \tag{39}$$

Der Endergebnis dieser Teil des Versuchs kommt auf:

$$\kappa_{L,C\&D} = 1,17 \pm 0,04 \tag{40}$$

Alle Ergebnisse besprechen wir in der Diskussion.

4 Zusamenfassung und Diskussion

4.1 Zusamenfassung

In diesem Versuch haben wir die Adiabatenkoeffizienten bestimmt auf zwei Weisen, nach Rüchardt und nach Clement und Desormes. Eine Zusammenfassung der Durchführung ist in Abschnitt 1.3 zu lesen.

In der Auswertung haben wir zuerst die Adiabatenkoeffiziente von Argon und Luft nach Rüchardt bestimmt. Um das zu machen, haben wir zuerst die Querschnitte beider Schwingkörper berechnet, anschließend der Druck berechnet und danach leicht mit dem in der Einleitung hergeleitete Formel den Koeffizient berechnet.

Im zweiten Teil des Versuchs haben wir einfach mit der in der Einleitung hergeleitete Formel den Adiabatenkoeffizient von Luft jeder Einzelmessung berechnet, mit den Ergebnissen Tabelle 2 erstellt und dann den Mittelwert und Fehler berechnet.

In Tabelle 3 kann man die zusammengefasste Endergebnisse finden.

Tabelle 3: Alle Ergebnisse zusamengefasst

	Adiabatenkoeffizient κ	Adiabatenkoeffizient Fehler $\Delta\kappa$	$\sigma-$Abweichung	Relativen Fehler %
Rüchard(Luft)	1.420	0.006	3.2	0.5
Rüchard(Argon)	1.578	0.022	4.2	1.4
Clement und Desormes	1.17	0.04	5.8	3.4

4.2 Diskussion

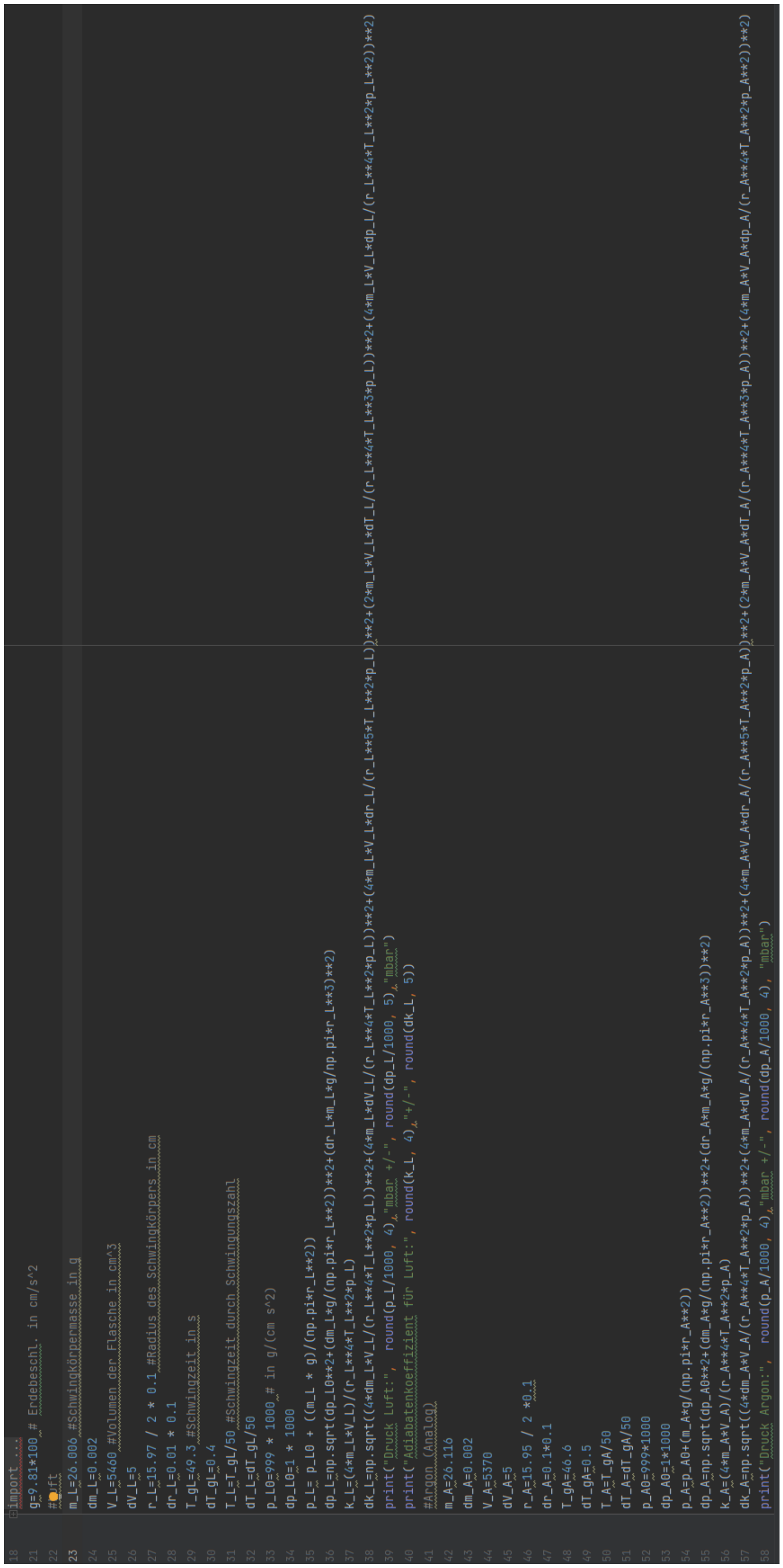
Die Sigma-Abweichung der Rüchard Messung von Luft beträgt $3,2\sigma$ mit einem relativen Fehler von $0,45\%$. Bei der Argon-Messung haben wir eine Abweichung von $4,2\sigma$ und einen relativen Fehler von $1,4\%$. Bei der Clement und Desormes Teil haben wir eine Abweichung von $5,75\sigma$ und einen relativen Fehler von $3,4\%$.
Alle unsere Abweichungen liegen außerhalb von dem 3σ Bereich, was bedeutet, dass unsere Ergebnisse unsignifikant sind. Es ist aber zu sehen, dass die Relative Fehler von dem ersten Teil sehr klein sind. Das bedeutet, dass wahrscheinlich der Grund für die große Abweichung eine falsche Fehlerrechnung ist. Es ist sehr Wahrscheinlich, dass wir eine zu kleine Zeitmessungsfehler genommen haben $(0,3s)$. Wenn wir eine Messung von mehr Schwingungen gemacht hatten, würden wir sicherlich ein genaueres Ergebnis bekommen. Die Luftmessung war auch sehr schwierig einzustellen, was auch zu eine ungenauere Messung geführt hat.

Bei dem Clement und Desormes Versuchsteil haben wir noch während der Versuch gemerkt, dass unsere Ergebnisse nicht nah zu dem theoretischen Wert liegen, deshalb haben wir viel bei der Temperaturausgleich gewartet und auch die andere Gruppe gefragt, ob wir alle Schritte richtig durchgeführt haben. Sie haben einmal kontrolliert und uns gesichert, dass sie den Versuch auf der gleichen Weise gemacht haben. Da wir konsistente Resultaten von zwischen $1,15$ und $1,19$ bekommt haben, glaube ich, dass etwas mit unserem Versuchsaufbau falsch wurde. Vor wir der Versuch angefangen haben, hat das Wasser von dem rechten Rohr überlaufen und dann hat Dr. Wagner mit einem Tuch die Drücke normalisiert, damit wir anfangen zu messen können und es ist möglich, dass das irgendwie den Versuch beeinflusst hat. Das macht aber nach meiner Meinung kein Sinn, da wir nur Änderungen und keine Feste Zahlen messen sollten. Wenn ich den Versuch noch einmal machen würde, werde ich mehr Wasser einfülle, um sicher zu sein, dass wir die Druckunterschied richtig messen können

In diesem Versuch haben wir sehr große Abweichungen und die Ergebnisse sind nicht sehr signifikant, jedoch haben wir gemerkt dass das bei der ersten Teil wegen falsche Fehlerabschätzung ist, und die Ergebnisse im Vergleich zu der relativen Fehler ziemlich genau sind. Bei der zweiten Teil haben wir eine signifikante Abweichung, die zeigt, dass entweder unser Versuchsaufbau nicht gut funktioniert hat, oder wir ein systematischen Fehler gemacht haben.

5 Anhang

- **Python Skript für Rüchardt Teil:**



```python
import ...
g=9.81*100 # Erdebeschl. in cm/s^2
#Luft
m_L=26.006 #Schwingkörpermasse in g
dm_L=0.002
V_L=5460 #Volumen der Flasche in cm^3
dV_L=5
r_L=15.97 / 2 * 0.1 #Radius des Schwingkörpers in cm
dr_L=0.01 * 0.1
T_gL=49.3 #Schwingzeit in s
dT_gL=0.4
T_L=T_gL/50 #Schwingzeit durch Schwingungszahl
dT_L=dT_gL/50
p_L0=999 * 1000 # in g/(cm s^2)
dp_L0=1 * 1000
p_L= p_L0 + ((m_L * g)/(np.pi*r_L**2))
dp_L=np.sqrt(dp_L0**2+(dm_L*g/(np.pi*r_L**2))**2+(dr_L*m_L*g/np.pi*r_L**3)**2)
k_L=(4*m_L*V_L)/(r_L**4*T_L**2*p_L)
dk_L=np.sqrt((4*dm_L*V_L/(r_L**4*T_L**2*p_L))**2+(4*m_L*dV_L/(r_L**4*T_L**2*p_L))**2+(4*m_L*V_L*dr_L/(r_L**5*T_L**2*p_L))**2+(2*m_L*V_L*dT_L/(r_L**4*T_L**3*p_L))**2+(4*m_L*V_L*dp_L/(r_L**4*T_L**2*p_L**2))**2)
print("Druck Luft:",  round(p_L/1000, 4),"mbar +/-", round(dp_L/1000, 5),"mbar")
print("Adiabatenkoeffizient für Luft:", round(k_L, 4),"+/-", round(dk_L, 5))
#Argon (Analog)
m_A=26.116
dm_A=0.002
V_A=5370
dV_A=5
r_A=15.95 / 2 *0.1
dr_A=0.1*0.1
T_gA=46.6
dT_gA=0.5
T_A=T_gA/50
dT_A=dT_gA/50
p_A0=999*1000
dp_A0=1*1000
p_A=p_A0+(m_A*g/(np.pi*r_A**2))
dp_A=np.sqrt(dp_A0**2+(dm_A*g/(np.pi*r_A**2))**2+(dr_A*m_A*g/(np.pi*r_A**3))**2)
k_A=(4*m_A*V_A)/(r_A**4*T_A**2*p_A)
dk_A=np.sqrt((4*dm_A*V_A/(r_A**4*T_A**2*p_A))**2+(4*m_A*dV_A/(r_A**4*T_A**2*p_A))**2+(4*m_A*V_A*dr_A/(r_A**5*T_A**2*p_A))**2+(2*m_A*V_A*dT_A/(r_A**4*T_A**3*p_A))**2+(4*m_A*V_A*dp_A/(r_A**4*T_A**2*p_A**2))**2)
print("Druck Argon:",  round(p_A/1000, 4),"mbar +/-", round(dp_A/1000, 4), "mbar")
```