

Versuch223

Brownsche Bewegung

Viktor Ivanov

19. November 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Motivation	2
1.2	Physikalische Grundlagen	2
1.2.1	Brownsche Bewegung	2
1.2.2	Brownsche Bewegung in einer Dimension	2
1.2.3	Brownsche Bewegung in mehr Dimensionen	3
2	Messprotokoll	3
3	Auswertung	6
3.1	Punkt-Liniendiagramm der Random-Walk einer Silikon Partikel	6
3.2	Bestimmung der Boltzmannkonstante und Diffusionskonstante	6
3.3	Kontrollverteilung	8
3.4	Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate	8
4	Zusammenfassung und Diskussion	9
4.1	Zusammenfassung	9
4.2	Diskussion	9
5	Quellen	11
6	Code	11

1 Einleitung

1.1 Motivation

Das Ziel dieses Versuchs ist mit der Benutzung eines Mikroskops vertraut zu machen. Wir werden Brownsche Bewegung von Latex-Partikel in Wasser beobachten und daraus die Diffusions- und die Boltzmannkonstante bestimmen.

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Brownsche Bewegung

Ein Partikel in einem Fluid erfährt ständig Stöße von den kleinen Molekülen der umgebenden Materie. Diese Stöße sind zufällig und die Bewegung, die die verursachen, lassen sich mithilfe eines sogenannten Random-Walk Modells quantitativ beschreiben. Es ist leicht erstens das in einer Dimension zu erklären.

1.2.2 Brownsche Bewegung in einer Dimension

Wenn ein Teilchen in einer Dimension sich befindet, kann es nur um die x-Achse bewegen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist es in Position $x = 0$. In gleichmäßige Intervalle von τ Sekunden erfährt das Partikel einen Stoß und das bedeutet, dass am Ende der Zeit t

$$n = \frac{t}{\tau} \quad (1)$$

Stoßprozesse auftreten. Das Partikel wird bei jedem Stoß um die Distanz δ verschoben und es gibt die gleiche Wahrscheinlichkeit dass das Partikel nach rechts oder nach links verschoben wird.

Die Bewegung mehrerer Partikel ist unabhängig voneinander.

Nach n Stößen befindet sich das Partikel an der Position $x = m\delta$. Das bedeutet, dass es $\frac{n+m}{2}$ mal nach rechts und $\frac{n-m}{2}$ mal nach links bewegt hat. Die Anzahl der möglichen Wege laut der Binomialkoeffizient ergibt sich auf:

$$\binom{n}{\frac{n+m}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n+m}{2})!(\frac{n-m}{2})!} \quad (2)$$

Und dann die Wahrscheinlichkeit, das Partikel bei $x = m\delta$ zu befinden lautet:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2} \quad (3)$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel nach links oder rechts verschoben wird, gleich ist, ist $p = \frac{1}{2}$ und somit:

$$P(m; n) = \frac{n!}{(\frac{n+m}{2})!(\frac{n-m}{2})!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (4)$$

m und n sind bei kleinem τ sehr groß und deshalb können wir die Stirling-Näherung verwenden:

$$n! = (2\pi n)^{0,5} n^n e^{-n} \quad (5)$$

Daraus ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \quad (6)$$

Es gilt, dass:

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x \quad (7)$$

Wenn wir $n = \frac{t}{\tau}$ und $m = \frac{x}{\delta}$ substituieren, erhalten wir die Größe D :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau} \quad (8)$$

Für die Wahrscheinlichkeit in der Bereich $[x, x + \Delta x]$ erhalten wir die Gaußverteilung:

$$P(x; t)\Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (9)$$

Da die Verteilung symmetrisch ist, die Varianz lautet:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \sigma^2 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (11)$$

Gleichung 11 heißt Einstein-Smoluchowski-Gleichung.

1.2.3 Brownsche Bewegung in mehr Dimensionen

Wir können einfach in mehrere Dimensionen wechseln und für die Brownsche Bewegung gilt:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle \quad (12)$$

Wobei hier $\langle r^2 \rangle$ das mittlere Verschiebungsquadrat ist. Da die Bewegung vollständig isotropist, gilt für die Einstein-Smoluchowski-Gleichung im zweidimensionalen Fall:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (13)$$

Der Diffusionskoeffizient D ist gegeben durch:

$$D = \frac{kT}{f} \quad (14)$$

Und der Reibungskoeffizient:

$$f = 6\pi\eta a \quad (15)$$

Endlich für die Boltzmannkonstante erhalten wir:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle \quad (16)$$

2 Messprotokoll

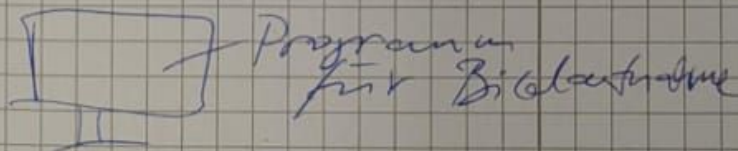
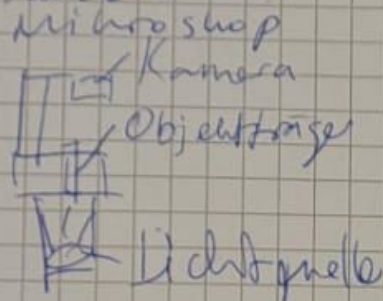
Das Messprotokoll befindet sich auf der nächsten Seite.

Messaufbau

Inter:
Jugendheim
Nofen

- Durchlichtmikroskop Motric BT mit
CD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert
in Wasser
- PC mit Druckaus
- Thermometer, Objekthaltener

Skizze



Zimmertemperatur

$$T = (21,5 \pm 0,5)^\circ\text{C}$$

~~Teilchendurchmesser~~

Teilchendurchmesser

$$d = (755 \pm 30) \text{ nm}$$

Durchführung des Versuchs

Zuerst haben wir Löcher in dem doppelseitigen Klebeband gestanzt und es auf ein Objektträger geklebt. Anschließend haben wir die Probeflüssigkeit in dem Loch gespitzt, mit einem Deckblatt verschlossen. Wir haben dann Immersionsöl auf dem Deckel platziert und der Objektträger auf der Mikroskop gestellt. ~~Wird~~

Danach haben wir das Programm geöffnet, der

Mikroskop kalibriert und ein Video aufgezeichnet. Der Mikroskop haben wir danach mit einem Objektmikrometer geeicht.

Am Ende haben wir die Partikelpositionen bestimmt und einen File erstellt.

J. Löffler

3 Auswertung

3.1 Punkt-Liniendiagramm der Random-Walk einer Silikon Partikel

Im Versuch, wie im Messprotokoll beschrieben, haben wir der zweidimensionalen Random-Walk von Silikon Partikel bestimmt. Die erstellte Datei ist in Form von x- und y-Koordinaten. Aus der Praktikumsanleitung haben wir der Code verwendet und ein bisschen modifiziert, um ein Punkt-Liniendiagramm aus der schon erstellte Datei zu zeichnen. Es ist in Abbildung 1 zu sehen.

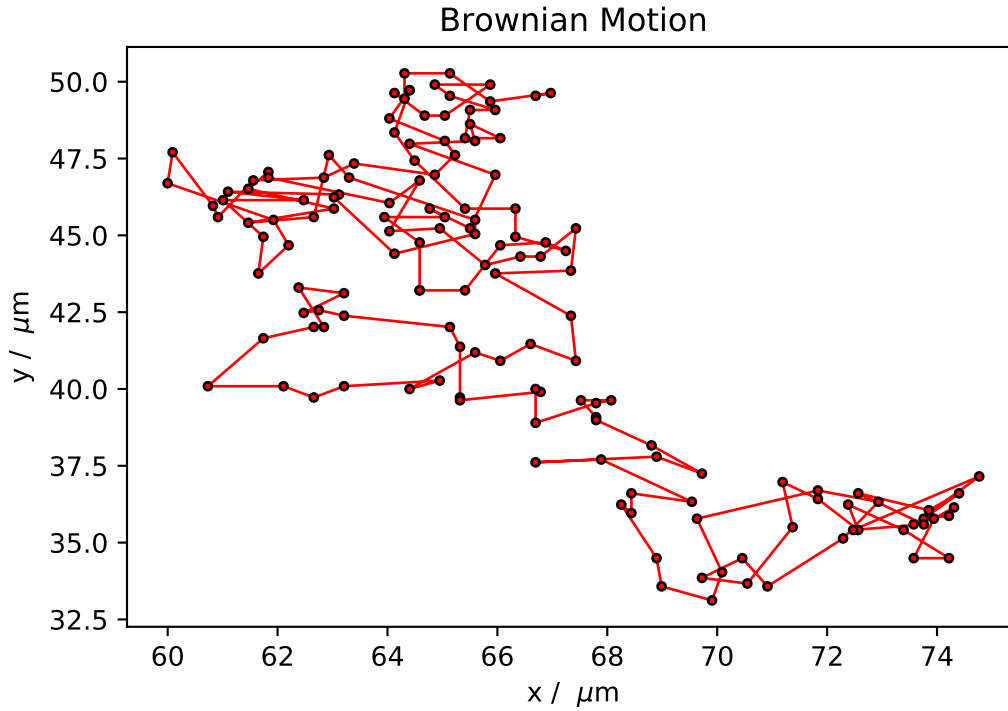


Abbildung 1: Brownsche Bewegung von einem Silikon Partikel

3.2 Bestimmung der Boltzmannkonstante und Diffusionskonstante

Jetzt berechnen wir die Boltzmannkonstante und Diffusionskonstanten. Um das zu machen, verwenden wir Gleichungen 11 und .

Mithilfe des Python Skripts haben wir die mittlere quadratische Abweichung berechnet. Es beträgt:

$$\langle r^2 \rangle = (1,56 \pm 0,12) \mu m \quad (17)$$

Der Fehler nach der Gaußsche Fehlerfortpflanzung lautet:

$$\Delta \langle r^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \langle r^2 \rangle \quad (18)$$

Der Mittelwert des Zeitintervalls $\langle t \rangle$ beträgt:

$$\langle t \rangle = 1s \quad (19)$$

Nach Gleichung 11 können wir der Diffusionskoeffizient so bestimmen:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{\langle t \rangle} \quad (20)$$

Der Wert von der Viskosität beträgt:

$$\eta = (9,65 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{Pas} \quad (21)$$

Wobei wir er mithilfe von Abbildung 2 bestimmt haben.

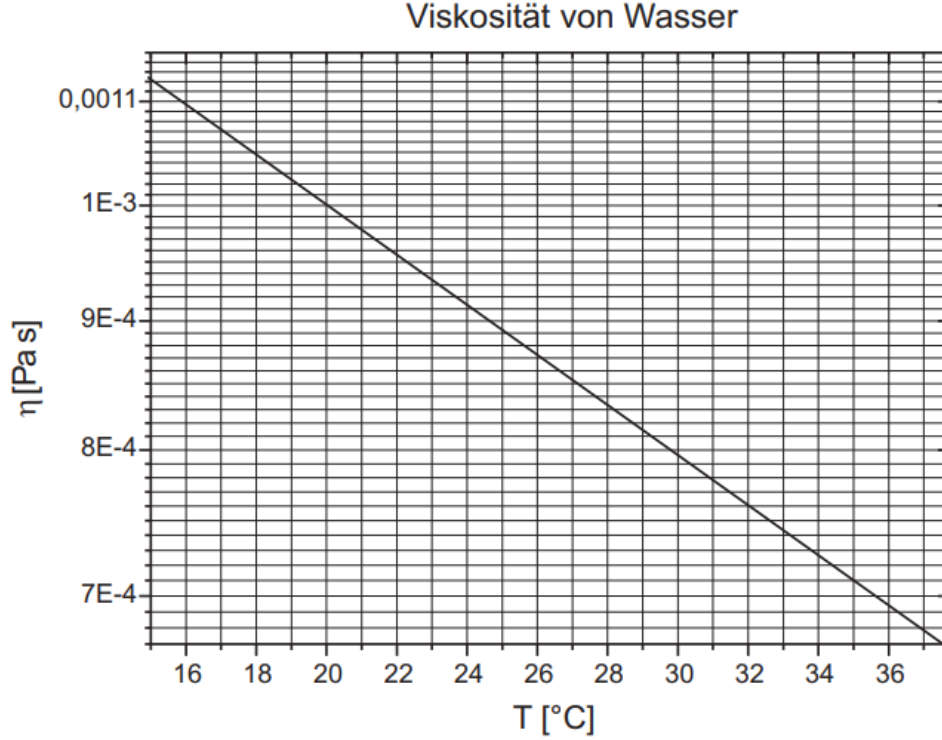


Abbildung 2: Viskosität von Wasser in Abhängigkeit von Temperatur

Die Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung lauten:

$$\Delta k_B = k_B \sqrt{\left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle}\right)^2} \quad (22)$$

$$(23)$$

$$\Delta D = D \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle}\right)^2} \quad (24)$$

Endlich ergeben sich die Boltzmannkonstante und Diffusionskonstante auf:

$$k_B = (9,1 \pm 0,8) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (25)$$

$$D = (3,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (26)$$

Der Literaturwert der Boltzmannkonstante beträgt $k_{B,l} = (1,380649) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$. Die σ -Abweichung kann man mit der Formel

$$\frac{|k - k_l|}{\sqrt{(\Delta k)^2 + (\Delta k_l)^2}} \quad (27)$$

berechnen.

Die Abweichung liegt dann bei $5,9\sigma$.

3.3 Kontrollverteilung

Um zu überprüfen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Partikels nach der Zeit t durch eine Gaußverteilung gegeben ist, haben wir in dem Histogramm 3 alle gemessenen Partikelverschiebungen dx und dy eingetragen. Der Mittelwert μ beträgt $\mu = -0,024\mu\text{m}$ und die Standardabweichung $\sigma = 0,082\mu\text{m}$. Der Histogram wird in der Diskussion besprochen.

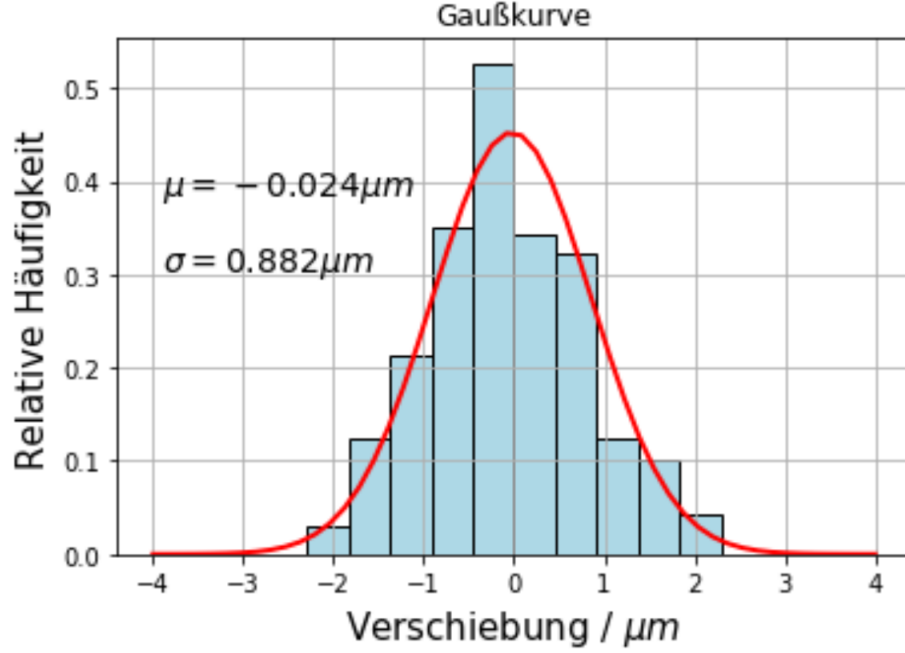


Abbildung 3: Histogramm zur Überprüfung der Gaußkurve

3.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

Zum Schluss habe ich die kummulative Verschiebung als Funktion der Zeit dargestellt und der linearen Zusammenhang durch eine rote Linie gezeigt, Abbildung 4. Wir können die Boltzmannkonstante und den Diffusionskoeffizient aus der Steigung der Fitgeraden bestimmen:

$$k'_a = \frac{6\pi\eta d}{4T} m \quad (28)$$

$$D' = \frac{m}{4} \quad (29)$$

Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bekommen wir für den Fehler:

$$\Delta k'_B = k'_b \sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} \quad (30)$$

$$\Delta D' = \frac{\Delta m}{4} \quad (31)$$

Dann erhalten wir für die Endergebnisse:

$$k'_b = (9,4 \pm 0,4) 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (32)$$

$$D' = (4,023 \pm 0,025) 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (33)$$

Die Abweichung der Boltzmannkonstante liegt bei 11σ . Die Ergebnisse besprechen wir in der Diskussion.

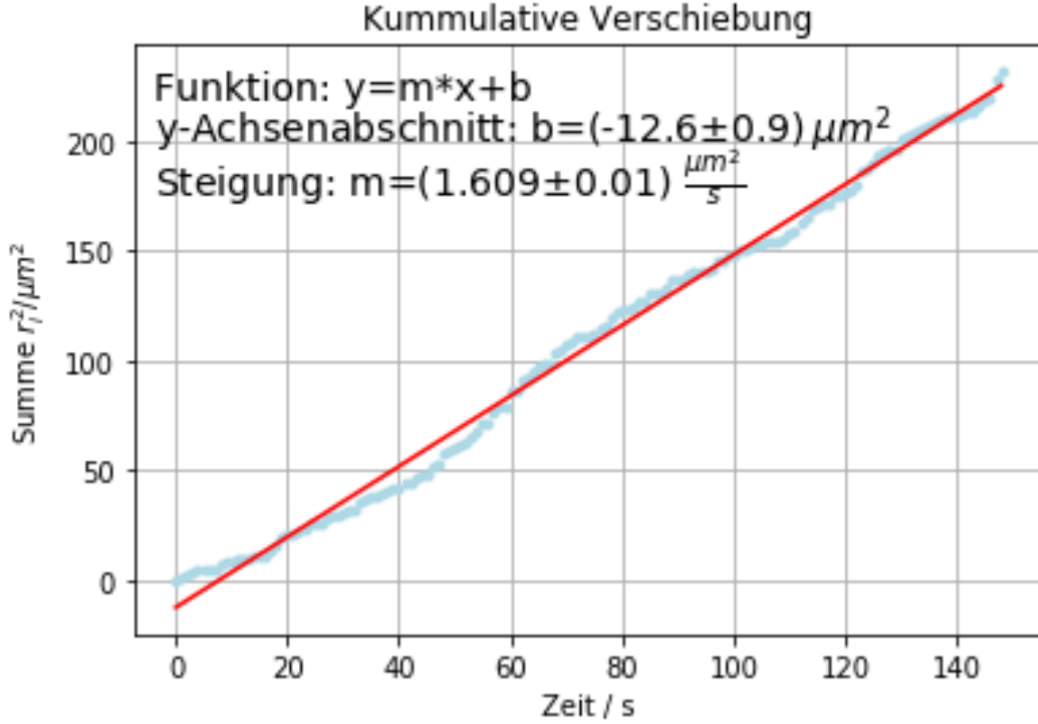


Abbildung 4: Kummulative Verschiebung als Funktion der Zeit

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

In der Auswertung haben wir zuerst ein Punkt-Liniendiagramm der Random-Walk einer Silikon Partikel mithilfe eines Pythonprogramms erstellt, die in Abbildung 1 zu sehen ist. Danach haben wir die Boltzmann- und Diffusionskonstante mithilfe von Gleichungen 16 und 11 bestimmt. Anschließend haben wir die Gaußkurve überprüft, wobei wir ein Histogramm mit den erhaltenen Daten erstellt und eine Gaußkurve darauf platziert. Zum Schluss haben wir eine Kummulative Verteilung der Verschiebungsquadrate gezeichnet und daraus noch einmal die Boltzmann- und Diffusionskonstante bestimmt.

4.2 Diskussion

Die Boltzmannkonstante aus der mittlere Verschiebungsquadrat beträgt $k_B = (9,1 \pm 0,8) \cdot 10^{-24} \frac{J}{K}$ mit einer Abweichung von dem Literaturwert von $5,9\sigma$ und ein relativen Fehler von $8,9\%$. Bei der Bestimmung mit der Steigung der kummulative Verteilung der Verschiebungsquadrate haben wir ein Wert von $k'_b = (9,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-24} \frac{J}{K}$. Der relative Fehler beträgt $4,26\%$ und die die Abweichung zwischen dem Literaturwert beträgt 11σ . Die Abweichung zwischen beiden Methoden beträgt $0,34\sigma$. Die Diffusionskonstanten von beiden Methoden betragen $D = (3,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$ und $D' = (4,023 \pm 0,025) \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}$ und die Abweichung zwischen beiden beträgt $0,31\sigma$.

Wie erwartet, haben wir große relative Fehler, jedoch unsere Abweichungen sind sehr signifikant, wobei beide außer der 8σ Bereich liegen. Eine mögliche Grund dafür wäre, dass wir nicht genug Messungen gemacht haben. Das aber würde nicht zu so eine große Abweichung führen. Eine andere auch nicht so signifikante Fehler, die wir nicht berücksichtigt haben, ist die Möglichkeit, dass wir nicht immer genau der Mitte von den Partikeln geklickt haben, aber das würde auch nicht zu so eine große Verschiebung führen. Was wir auch nicht berücksichtigt haben ist die Verschiebung von der Temperatur zwischen den zwei Messungen, was schon zu einen signifikanteren Unterschied führen könnte. Der gleiche Wert wie den theoretischen würden wir aber bei c.a. $7^{\circ}C$ erreichen, was sicherlich

nicht der Fall ist. Eine weitere Ungenauigkeit wurde, dass wir die Lampe angelassen haben, auch wenn sie mit der niedrigsten Intensität angelassen wurde, was noch die Temperatur des Partikels geändert hat. Eine Weitere Ungenauigkeit kommt von der Eichung des Abbildungsmaßstabs, die in Abbildung 5 zu sehen ist. Da die Abweichung so groß ist, gibt es die Möglichkeit, dass nicht nur diese Fehlerquellen Grund dafür sind, sondern auch, dass wir nicht ein Partikel, sondern zwei geklebte Partikeln beobachtet haben, was unsere Ergebnis verfälscht hat.

Die Abweichungen zwischen beiden Messmethoden sind klein und liegen innerhalb von 1σ . Das bedeutet, dass wir mit beiden Methoden dieselbe Ergebnisse berechnet haben.

Aus Abbildung 3 ist es zu sehen, dass unsere Daten eine erkennbare Gaußkurve bezeichnen, was bedeutet, dass die 150 Messungen genug wurden, auch wenn es keiner perfekten Gaußverteilung beschreibt. Unsere Erwartung war richtig.

Bei Abbildung 4 sehen wir auch eine lineare Verschiebung, was von der Gaußkurve impliziert wurde, aber hier sehen wir wie die Verschiebung mit der Zeit sich verhält.

Im allgemein fand ich dieser Versuch ganz gut, auch wenn nicht alle Ergebnisse erwartet wurden. Es gab Fehlerquellen, die die große Abweichung erklären konnten und auch die Diagrammen haben gezeigt, dass wir genau eine Brownsche Bewegung beobachtet haben und es verhält sich wie erwartet.

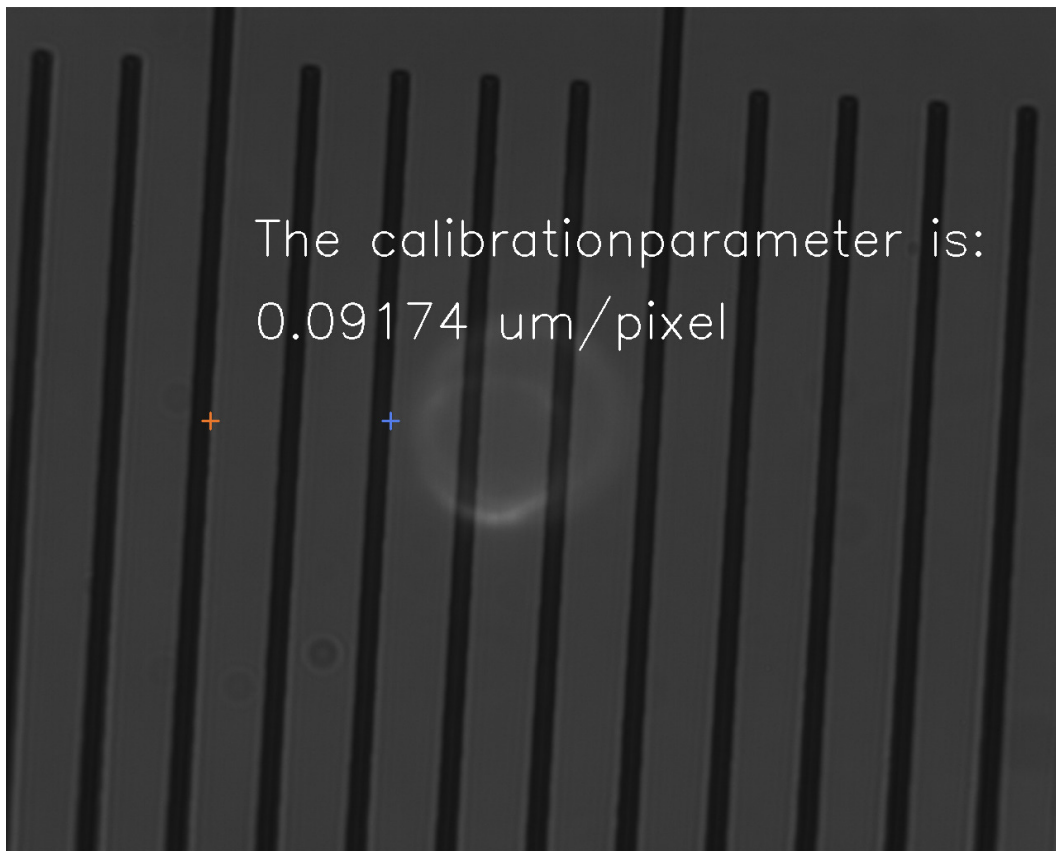


Abbildung 5: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer

5 Quellen

Alle Werte, Daten und Bilder stammen aus der Praktikumsanleitung oder www.Wikipedia.org.

6 Code

Der benutzte Code befindet sich auf der nächste Seite.

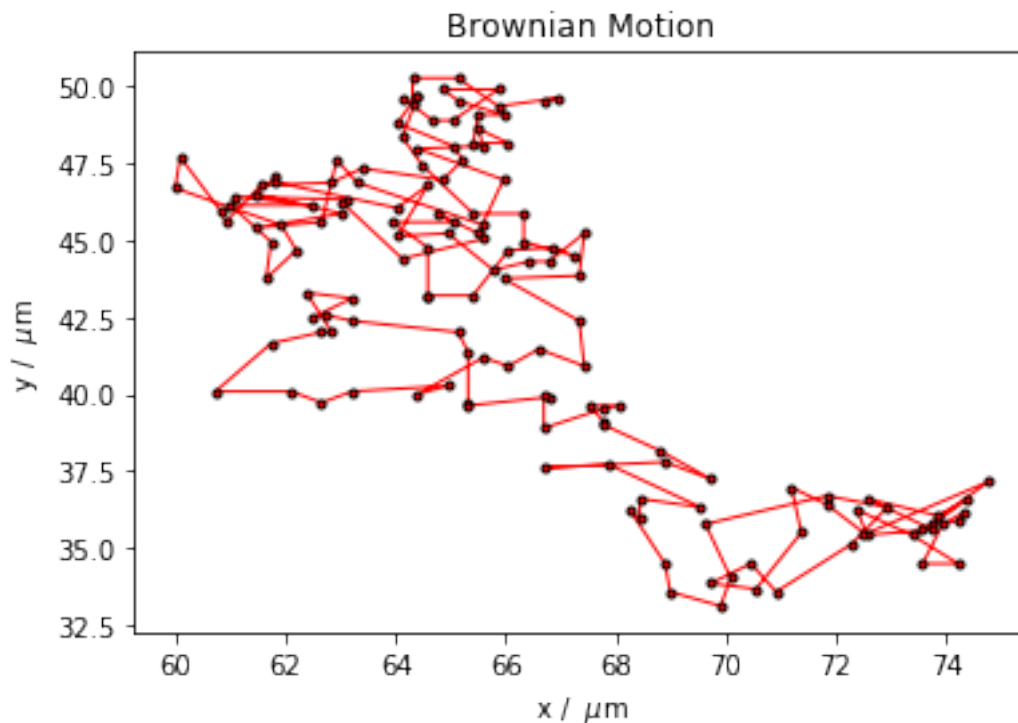
Untitled

November 14, 2023

```
[1]: %matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import curve_fit

[2]: t,x,y=np.loadtxt('position_data.txt', delimiter=",",
dtype="float", unpack=True)

[3]: plt.plot(x, y, marker='.', color='red',markeredgcolor='black', linewidth=1)
plt.xlabel('x / '+'  $\mu\text{m}$ +'m')
plt.ylabel('y / '+'  $\mu\text{m}$ +'m')
plt.title('Brownian Motion')
plt.savefig('brown1.pdf', format='PDF')
```



```
[21]: dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])
i=0
for i in range(0, len(t)-1,1):
    dt=np.append(dt, t[i+1]-t[i])
    dx=np.append(dx, x[i+1]-x[i])
    dy=np.append(dy, y[i+1]-y[i])
r_squared=dx**2 + dy**2
```

```
[20]: r_squared_mean=np.mean(r_squared)
print("Mittlere quadratische Abweichung:", r_squared_mean)
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared))
print("Fehler der mittleren quadratischen Abweichung:", r_squared_mean_std)
dt_mean=np.mean(dt)
print("Mittelwert des Zeitintervalls:", dt_mean)
dt_mean_std=np.std(dt)/np.sqrt(len(dt))
print("Fehler des Mittelwerts des Zeitintervalls:", dt_mean_std)
```

Mittlere quadratische Abweichung: 1.5563242890120796

Fehler der mittleren quadratischen Abweichung: 0.12183595424355093

Mittelwert des Zeitintervalls: 1.0

Fehler des Mittelwerts des Zeitintervalls: 0.0

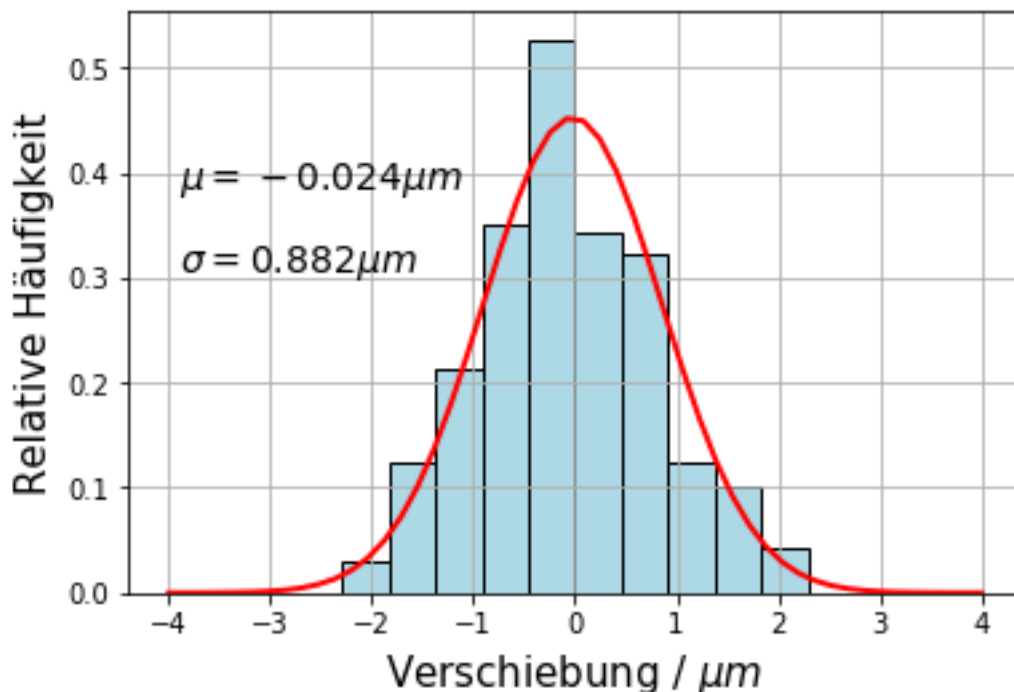
```
[22]: #Bestimmung der Boltzmannkonstante und Diffusionskonstante
r=r_squared_mean*10**(-12) #10-12 Umrechnung in Meter
dr=r_squared_mean_std*10**(-12)
eta=9.65*10**(-4)
deta=0.05*10**(-4)
d=(755*10**(-9))/2 #in m
dd=(30*10**(-9))/2
T=294.65
dT=0.5
t_k=dt_mean
dt_k=dt_mean_std
```

```
[23]: #Boltzmannkonstante
k_B=((6*np.pi*eta*d)/(4*T*t_k))*r
dk_B=k_B*np.sqrt((deta/eta)**2+(dd/d)**2+(dT/T)**2+(dt_k/t_k)**2+(dr/r)**2)
print('Boltzmannkonstante: ', k_B, "+/-", dk_B)
#Diffusionskonstante
D=k_B*T/(6*np.pi*eta*d)
dD=D*np.sqrt((dk_B/k_B)**2+(dT/T)**2+(deta/eta)**2+(dd/d)**2)
print('Diffusionskonstante: ', D, "+/-", dD)
```

Boltzmannkonstante: 9.067322256504838e-24 +/- 7.975665034056121e-25
Diffusionskonstante: 3.890810722530199e-13 +/- 3.76136155309869e-14

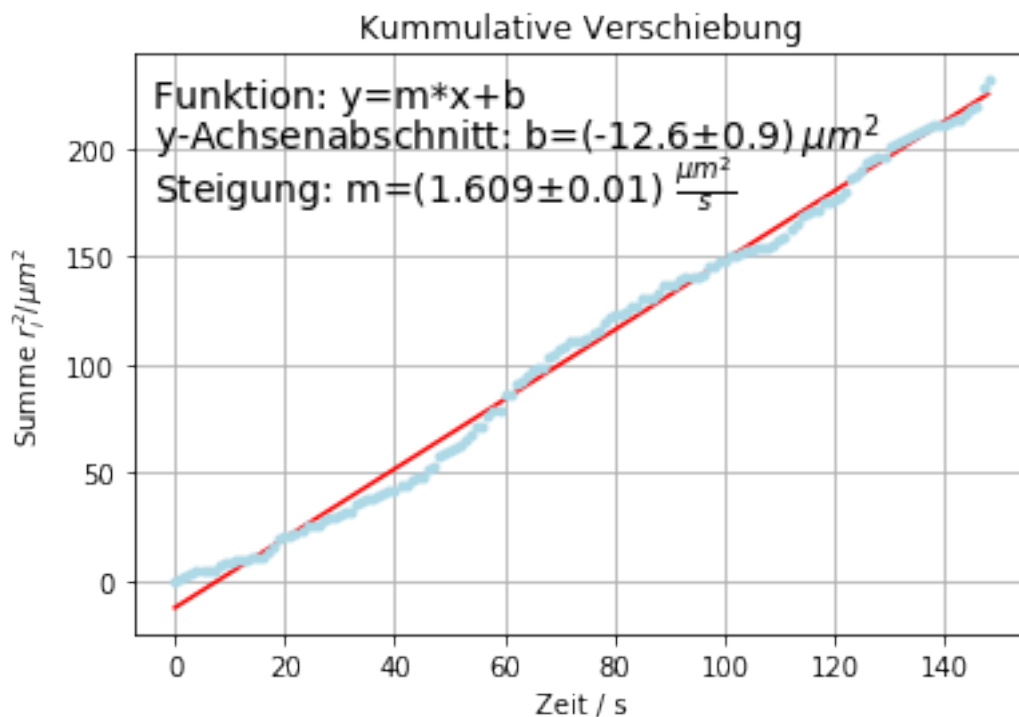
```
[14]: plt.figure()
fig = plt.figure()
fig.patch.set_facecolor('white')
plt.grid()
all_data=np.append(dx,dy)
plt.hist(all_data, density=True,color = "lightblue", ec="black")
mu=np.mean(all_data)
sigma=np.std(all_data)
gauss = norm.pdf(np.linspace(-4,4), mu , sigma)
plt.text(-3.9,0.385, '$\mu = %s\mu m$'%(round(mu, 3)), fontsize=14)
plt.text(-3.9,0.305, '$\sigma = %s\mu m$'%(round(sigma, 3)), fontsize=14)
plt.xlabel('Verschiebung / $\mu m$', fontsize=15)
plt.ylabel('Relative Häufigkeit', fontsize=15)
plt.plot(np.linspace(-4,4), gauss, 'r-', linewidth=2)
plt.show()
plt.savefig('brown2.pdf', format='PDF')
plt.show()
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



<Figure size 432x288 with 0 Axes>


```
[18]: r_kumm=np.cumsum(r_squared)
plt.grid()
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1],*popt),color="red")
m=round(popt[0], 3)
dm=round(np.sqrt(pcov[0][0]), 3)
b=round(popt[1], 1)
db=round(np.sqrt(pcov[1][1]), 1)
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker='.', color='lightblue', linewidth=0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.text(-3.9,220,'Funktion: y=m*x+b', fontsize=14)
plt.text(-3.9,175, 'Steigung: m=(%s$ \pm %s) $ \frac{\mu m^2}{s}$'%(m,dm),
    ↪ fontsize=14)
plt.text(-3.9, 200, 'y-Achsenabschnitt: b=(%s$ \pm %s) $ \mu m^2$'%(b,db),
    fontsize=14)
plt.ylabel('Summe  $r_i^2 / \mu m^2$ ')
plt.title('Kummulative Verschiebung')
plt.savefig('brown3.pdf', format='PDF')
```



```
[24]: #Berechnung der Boltzmann und Diffusionskonstante von der Graph
m2=m*10**(-12)
dm2=dm*10**(-12)
#Boltzmannkonstante
k_B2=((6*np.pi*eta*d)/(4*T))*m2
dk_B2=k_B2*np.sqrt((deta/eta)**2+(dd/d)**2+(dT/T)**2+(dm2/m2)**2)
print('Boltzmannkonstante= ', k_B2, "+/-", dk_B2)
#Diffusionskonstante
D2=m2/4
dD2=dm2/4
print('Diffusionskonstante= ', D2, "+/-", dD2)
```

```
Boltzmannkonstante= 9.374216937767683e-24 +/- 3.804628203842036e-25
Diffusionskonstante= 4.0225e-13 +/- 2.5e-15
```