Versuch 212
Zähigkeit von Flussigkeiten

Viktor Ivanov

15. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch untersuchen wir die Viskosität von der Flüssigkeit Polyethylenglykol auf zwei Weisen. Einmal durch einen Kugelfall nach Stokes und einmal mithilfe eines Kapillarviskosimeters nach Hagen-Poiseuille nach Hagen-Poiseuille. Wir werden auch seine kritische Reynoldszahl bestimmen und am Ende die Ergebnisse von beiden Weisen vergleichen.

1.2 Physikalische Grundlagen

Ein Körper braucht eine Kraft, um eine konstante Geschwindigkeit in einem fluiden oder gasförmigen Medium beizubehalten. Das passiert wegen der Reibung im Fluid. Die Reibungsstärke hängt von der Zähigkeit der Flüssigkeit ab.

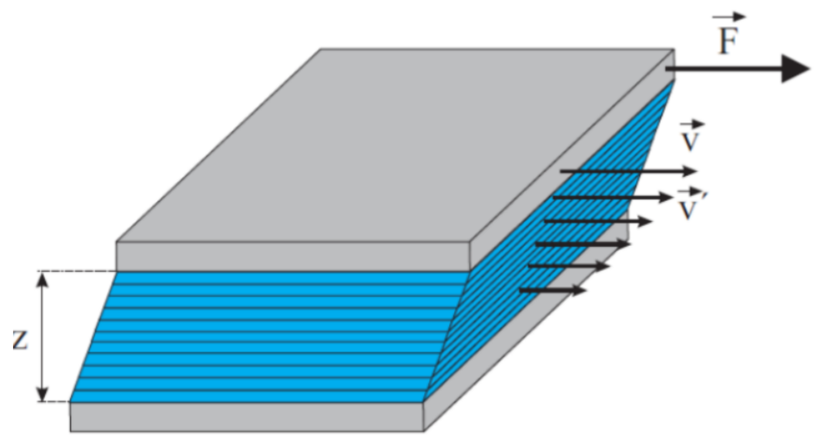


Abbildung 1: Gedankenexperiment zur Bestimmung der inneren Reibung

Wir können die Reibungskräfte eines Körpers quantifizieren, wenn wir einen Gedankenexperiment betrachten. In Abbildung 1 sind zwei Platten mit einem Abstand z gezeigt. Zwischen denen gibt es eine Flüssigkeit. Wenn wir auf der oberen Platte eine Kraft ausüben, bewegt sich die Platte mit einer Geschwindigkeit v. Genau unter der Platte befindet sich aufgrund der Adhäsion ein Flüssigkeitsfilm, der mit derselben Geschwindigkeit wie die Platte sich bewegt. Der Flüssigkeitsfilm der unteren Platte hat die Geschwindigkeit $v_u = 0$. Die Schichten dazwischen haben zunehmende Geschwindigkeit mit Relation zu der z-Achse.
Die notwendige Kraft, die obere Platte zu bewegen, ist proportional zur Fläche A. Die Formel für die Reibungskraft lautet:

$$F_r = \eta A \frac{v}{z}. \tag{1}$$

Wobei η die Viskosität (oder auch Zähigkeit) des Fluids ist.
Im Allgemeinen Fall gilt:

$$F_r = \eta A \frac{dv}{dz} . F_r = \eta A \frac{dv}{dz} \tag{2}$$

1.2.1 Laminare und turbolente Strömung, Reynoldszahl

Es gibt zwei Typen von Strömungen. Eine laminare Strömung geschieht bei Schichtströmungen, wobei eine turbulente Strömung eine Strömung mit Wirbeln ist. Beide Strömungen für den Fall einer Kugel sind in Abbildung 2 gezeigt.

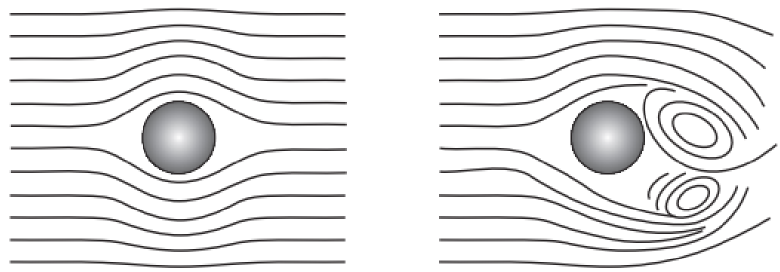


Abbildung 2: Laminare Strömung (links) und turbolente Strämung (rechts) einer Kugel

Um zu bestimmen ob eine Flüssigkeit laminar oder turbolent verhält, brauchen wir den Reynoldszahl. Die Formel der Reynoldszahl beträgt:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}} \tag{3}$$

Wobei E_{kin} die kinetische Energie der Flüssigkeit ist und $W_{Reibung}$ die innere Reibung. Wenn die Reynoldszahl $Re \leq 1$ ist, dann strömt die Flüssigkeit laminar. Bei einer Reynoldszahl $Re \geq 1$ sprechen wir über turbulente Strömungen. Hier ist es wichtig zu sagen, dass bei verschiedenen Flüssigkeiten und Objekten, die die Flüssigkeit überqueren, die kritische Reynoldszahlen zwischen 1 und mehr als 1000 variieren können.
Die Reynoldszahl kann auch mithilfe folgender Formel beschrieben werden:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} \tag{4}$$

Wobei L die charakteristische Wellenlänge, die die Geometrie des Strömungssystems beschreibt, ρ die Dichte der Flüssigkeit und v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

1.2.2 Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Die Reibungskraft, die auf einer fallenden im Fluid Kugel mit dem Radius r wirkt lautet nach dem Stokes'schen Gesetz:

$$F_r = 6\pi\eta r v \tag{5}$$

Eine Darstellung der wirkenden Kräfte und Versuchsaufbau sind in Abbildung 3 zu finden.

Die Gewichtskraft beträgt:

$$F_g = \rho_k V_{kg} \tag{6}$$

Die Aufriebskraft:

$$F_a = \rho_f V_k g \tag{7}$$

Dabei die Gesamtkraft bei Gleichgewicht gleich Null ist:

$$F_{ges} = 0 = F_g + F_a + F_r = \rho_k V_k g - \rho_f V_k g - 6\pi\eta r v_s \tag{8}$$

Wobei hier V das Volumen ist, g die Erdbeschleunigung und v_s die Sinkgeschwindigkeit.
Durch Umstellen von Formel 8 können wir die Viskosität bestimmen:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{v_s} r^2 \tag{9}$$

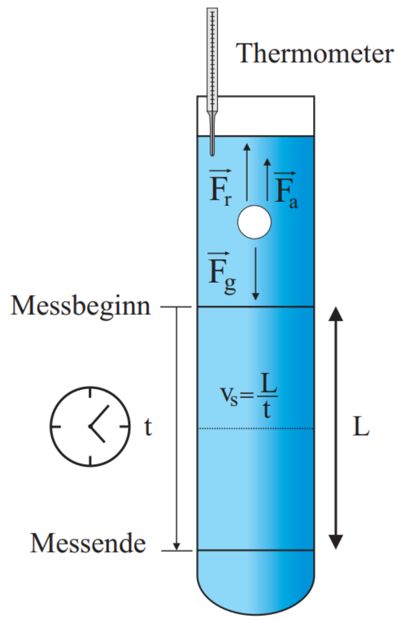


Abbildung 3: Bestimmung der Viskosität nach Stokes

1.2.3 Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille: Laminare Rohrströmung

Wir können auch durch Messung des Volumenstroms einer laminaren Strömung die Viskosität eines Fluids bestimmen.
Wir werden ein Rohr der Länge L und Radius R und Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ brauchen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 4 zu finden. Aufgrund der Druckdifferenz wirkt folgende Kraft im Rohr:

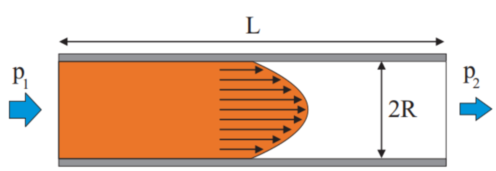


Abbildung 4: Laminare Rohrströmung

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) \tag{10}$$

In der anderen Richtung wirkt auch die Reibungskraft:

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \tag{11}$$

Wobei L die Länge des Rohrs ist, r der Radius und v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit.
Bei einer stationären Strömung gilt, dass F_p gleich F_r ist und daher ergibt sich für die Geschwindigkeitsgradienten:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \tag{12}$$

Nach Integration mit der Randbedingung $v(R) = 0$ erhalten wir für die Geschwindigkeit von der Flüssigkeit:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \tag{13}$$

Um den Volumenstrom zu bestimmen, integrieren wir über die ganze Querschnittsfläche:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} \tag{14}$$

2 Messprotokol und Durchführung des Versuchs

Das Messprotokoll und die Duchführung des Versuchs befinden sich auf der nächsten Seite.

08.01.24

Versuch 212

Zähigkeit von Flüssigkeiten

Viktor Ivanov
Dame Dcontsas

Es wird die Fallzeit, die Kugeln verschiedener Radien für 100mm gemessen

Tabelle 1: Kugelfallzeitmessungen

Mess# \ Kugel Durchmesser	9mm	8mm	7,144mm	6mm	5mm	4mm	3mm	2mm	1,5mm
1	3,56s	4,86s	5,17s	6,76s	9,11s	15,53s	23,80s	41,67 s	1m: 20,61s
2	3,81s	4,59s	5,00s	6,56s	9,32s	13,65s	23,98s	41,76 s	1m: 19,41s
3	3,61s	4,64s	4,92s	6,70s	9,44s	14,09s	23,70s	45,10s	1m: 20,29s
4	3,65s	4,65s	5,25s	7,09s	9,28s	14,21s	23,97s	41,70s	1m: 19,89s
5	3,64s	4,73s	5,02s	7,02s	9,25s	14,70s	22,58	43,39s	1m: 20,81s

special Messung: 1m 24,37s

$\Delta s = \frac{1}{2}$ vom Radius des Kugels

$\Delta t = 0,1 s$

Temperatur $T = 19,2 \pm 0,2$ °C

Anfangshöhe

$h_A = 486,2 \pm 0,2mm$ $h_F = 480,1 \pm 0,2mm$

Tabelle 2: Flüssigkeitsströmungszeit

Zeit	2m: 25,98s	5m: 12,52s	7m: 58,07s	10m: 41,69s	13m: 33,95s
Volumen [cm³]	5	10	15	20	25

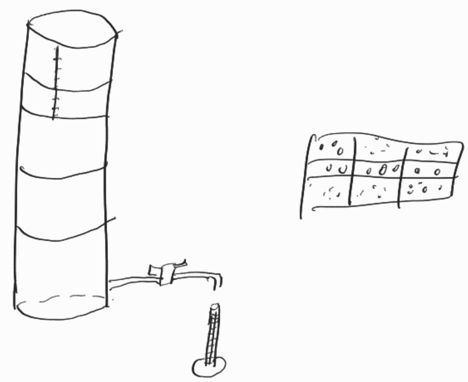
Tab. 2. Messung mit Kapillarviskosimeter

Luftdruck: 1012,9 hpa

III Durchführung des Versuchs:

Am Anfang des Versuchs haben wir für 9 Kugelgrößen 5 Messungen gemacht und die Ergebnisse notiert. Die Messungen bestanden aus Zeit und Wegmessungen vom Fallen der Kugel in einer Öl Flüssigkeit. Beim zweiten Versuchsteil haben wir die Flüssigkeit Tröpfen lassen. Wir haben die Anfangshöhe aufgeschrieben, jede 5 cm^3 die Zeiten gemessen und am Ende auch die Endhöhe aufgeschrieben.

IV Versuchsaufbau



Skizze 1: Versuchsaufbau

M. Waller

3 Auswertung

3.1 Viskosität nach Stokes

In diesem Abschnitt wollen wir zuerst die Zähigkeit der Flüssigkeit bestimmen und daraus auch die Reynoldszahlen jeder Kugel und die theoretischen Geschwindigkeiten bei laminarem Fluss. Schließlich werden wir die kritische Reynoldszahl bestimmen.
Anschließend brauchen wir die mittlere Geschwindigkeit. Sie werden experimentell mithilfe der Daten in Tabelle 1 bestimmt . Wir verwenden folgende Formel:

$$\overline{v} = \frac{x}{\overline{t}} \tag{15}$$

Wobei x der Weg, der die Kugeln für eine mittlere Zeit $\overline{t}$ geschwommen haben, ist.
Der Fehler der mittleren Geschwindigkeit beträgt:

$$\Delta\overline{v} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\overline{t}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\overline{t}^2}\Delta t_{ges}\right)^2} \tag{16}$$

In Tabelle 1 haben wir immer für einen Weg von $x = (100 \pm 5)mm$ die Fallzeiten bestimmt. Die Zeitmessung hat einen Fehler von $\Delta t = 0,1s$.
Erstens haben wir die mittleren Zeiten $\overline{t}$ bestimmt:

$$\overline{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t}{n} \tag{17}$$

Der Fehler des Mittelwerts kann man so berechnen:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}(\overline{t} - t_i)^2} \tag{18}$$

Der gesamte Fehler für die Zeiten beträgt:

$$\Delta t_{ges} = \sqrt{\sigma_t^2 + (\Delta t)^2} \tag{19}$$

Die zusammengefassten Ergebnisse von den Zeiten und Geschwindigkeiten der Stokes Messung sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Zusammengefasste mitlere Zeiten und Geschwindigkeiten Stokes

d$[mm]$	$\overline{t}[s]$	σ_t	Δt_{ges}	$\overline{v}[\frac{mm}{s}]$	$\Delta\overline{v}[\frac{mm}{s}]$
1.5	80.2	0.3	0.3	1.25	0.06
2	42.7	1.8	1.8	2.34	0.15
3	23.6	0.3	0.3	4.24	0.22
4	14.4	0.4	0.4	6.9	0.4
5	9.280	0.011	0.015	10.8	0.5
6	6.83	0.04	0.04	14.6	0.7
7.144	5.070	0.014	0.017	19.7	1.0
8	4.694	0.009	0.013	21.3	1.1
9	3.654	0.007	0.012	27.4	1.4

Um die Viskosität zu bestimmen, brauchen wir die Dichte von Polyethylenglykol ρ_f bei der Temperatur von $T = (19,2 \pm 0,2)^oC$ zu bestimmen. Um das zu machen, verwenden wir Diagramm 5.
Ich habe die folgende Dichte abgelesen:

$$\boxed{\rho_f = (1,1506 \pm 0,0002)\frac{g}{cm^3}} \tag{20}$$

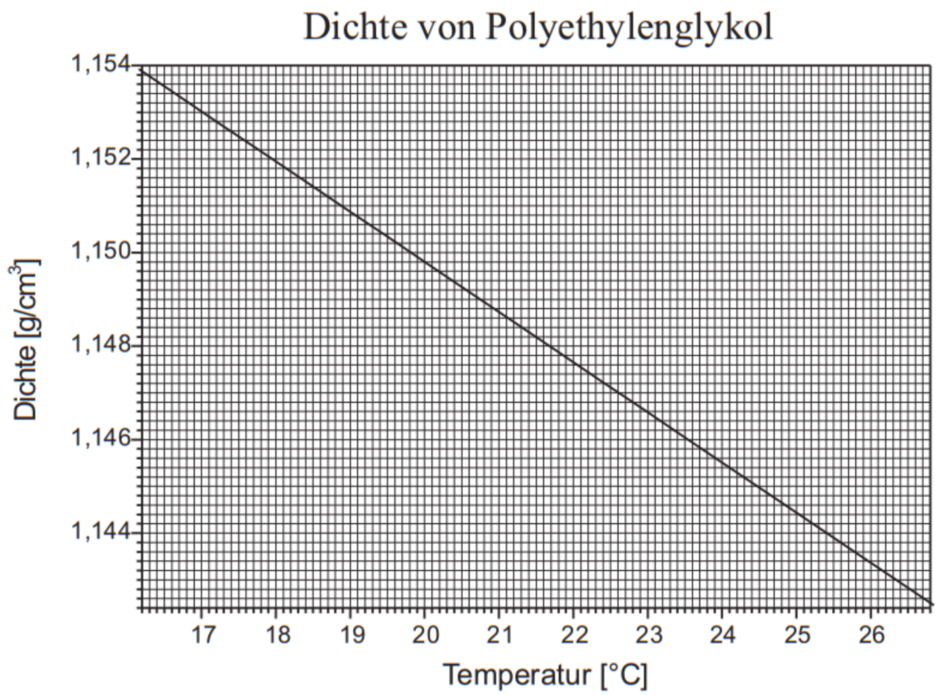


Abbildung 5: Flüssigkeitsdichte von Polyethylenglykol

Jetzt werden wir das Verhältnis $\gamma = \frac{\overline{v}}{\rho_k - \rho_f}$ berechnen. Später werden wir das gegenüber dem Radius der Kugel zum Quadrat r^2 plotten sollen.
Der Fehler von γ beträgt:

$$\Delta\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{v}}{\rho_k - \rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\overline{v}\Delta\rho_k}{(\rho_k - \rho_f)^2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{v}\Delta\rho_f}{(\rho_k - \rho_f)}\right)^2} \tag{21}$$

Die γ-Werte für jeden Kugel im Fluid habe ich in Tabelle 4 berechnet und dargestellt.

Tabelle 4: Berechnung von den x-Werten tabellarisch

r^2 $[cm]$	$\overline{v}$ $[\frac{cm}{s}]$	$\Delta\overline{v}$ $[\frac{cm}{s}]$	ρ_f $[\frac{g}{cm^3}]$	$\Delta\rho_f$ $[\frac{g}{cm^3}]$	ρ_k $[\frac{g}{cm^3}]$	$\Delta\rho_k$ $[\frac{g}{cm^3}]$	x $[\frac{cm^4}{gs}]$	Δx $[\frac{cm^4}{gs}]$
0.005625	0.125	0.006	1.15060	0.00020	1.3575	0.0025	0.60	0.03
0.01	0.234	0.015	1.15060	0.00020	1.4025	0.00250	0.93	0.06
0.0225	0.424	0.022	1.15060	0.00020	1.3775	0.0025	1.87	0.10
0.04	0.69	0.04	1.15060	0.00020	1.3775	0.0025	3.05	0.18
0.0625	1.08	0.05	1.15060	0.00020	1.3775	0.0025	4.75	0.24
0.09	1.46	0.07	1.15060	0.00020	1.3775	0.0025	6.5	0.3
0.127592	1.97	0.10	1.15060	0.00020	1.3775	0.0025	8.7	0.4
0.16	2.13	0.11	1.15060	0.00020	1.3575	0.0025	10.3	0.5
0.2025	2.74	0.14	1.15060	0.00020	1.3625	0.0025	12.9	0.7

Da die Kugeln in einem Rohr fallen, und nicht in eine unendlich große Flüssigkeit, sollen wir folgenden Korrekturfaktor betrachten:

$$\lambda = (1 + 2,1\frac{r}{R}) \tag{22}$$

Der Radius des Gefäßes beträgt $R = 32,5mm$. Dabei erhalten wir die korrigierten Werte, die in Tabelle 5 dargestellt sind.

Tabelle 5: Korrigierte Werte

r $[cm]$	λ	λx $[\frac{cm^4}{gs}]$	$\Delta\lambda x$ $[\frac{cm^4}{gs}]$
0.075	1.05	0.63	0.03
0.1	1.06	0.99	0.06
0.15	1.10	2.05	0.10
0.2	1.13	3.45	0.18
0.25	1.16	5.52	0.24
0.3	1.19	7.7	0.3
0.3572	1.23	10.7	0.4
0.4	1.26	13.0	0.5
0.45	1.29	16.7	0.7

In Abbildung 6 sind die x-Werte gemäß dem Kugelradius zum Quadrat dargestellt. Die Steigung von den korrigierten Messwerte beträgt:

$$\boxed{s = (81,1 \pm 0,7)\frac{cm^2}{gs}} \tag{23}$$

Aus Formel 9 können wir die Viskosität bestimmen:

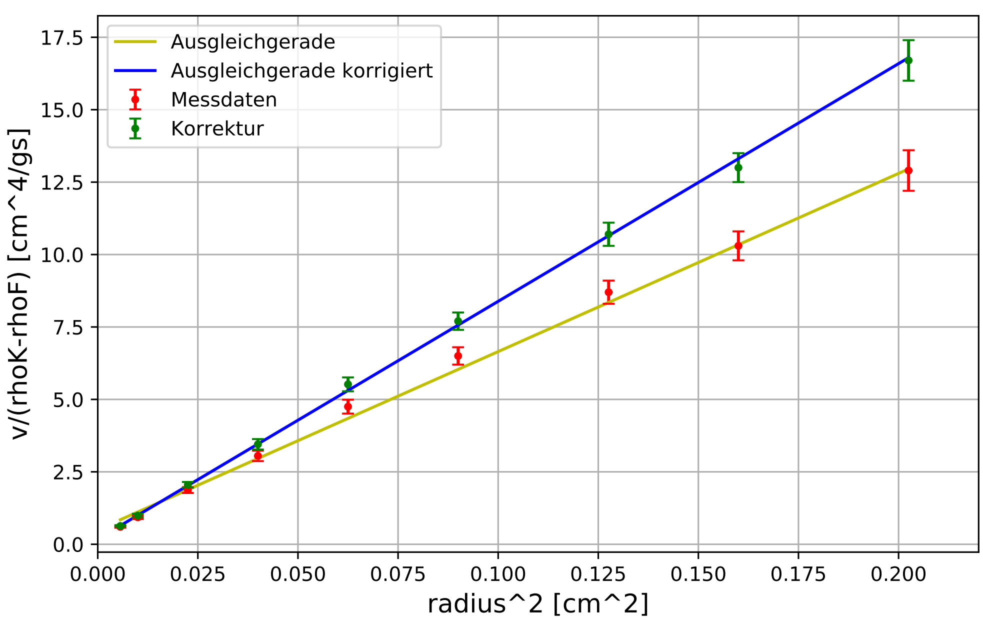


Abbildung 6: x gegen den Kugelradius zum Quadrat

$$\eta = \frac{2}{9s}g \tag{24}$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta\eta = \frac{2}{9}\frac{g}{s^2}\Delta s \tag{25}$$

Das Endergebnis der Viskosität beträgt:

$$\boxed{\eta_1 = (0,2688 \pm 0,0023)Pas} \tag{26}$$

3.1.1 Reynoldszahl und theoretische Sinkgeschwindigkeit

Da wir die Viskosität schon bestimmt haben, können wir die Reynoldszahlen und die theoretischen Sinkgeschwindigkeiten bei laminare Strömung v_{lam} jeder Kugel bestimmen.
Durch Umformung von 9 erhalten wir eine Formel für die Geschwindigkeit bei laminare Strömung unter dem Einfluss Stokes'scher Reibung:

$$v_{lam} = \frac{2}{9}g\frac{\rho_k - \rho_f}{\eta}r^2 \tag{27}$$

Der Fehler beträgt nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta v_{lam} = \sqrt{\left(\frac{2}{9}gr^2\frac{\Delta\rho_k}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}gr^2\frac{\Delta\rho_f}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}gr^2\frac{(\rho_k - \rho_f)\Delta\eta}{\eta^2}\right)^2} \tag{28}$$

Die Reynoldszahlen berechnet man mithilfe von Formel 4.
Der Fehler beträgt:

$$\Delta Re = Re\sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\overline{v}}{\overline{v}}\right)^2} \tag{29}$$

Wir sollen auch das Verhältnis zwischen den theoretischen und gemessenen Sinkgeschwindigkeiten bestimmen:

$$k = \frac{\overline{v}}{v_{lam}} \tag{30}$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta k = k\sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{v}}{\overline{v}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{lam}}{v_{lam}}\right)^2} \tag{31}$$

Alle Daten aus diesem Abschnitt habe ich in Tabelle 6 zusammengefasst.

Tabelle 6: v_{lam}, Re und k - Ergebnisse Stokes

r^2 [cm]	$\rho_k - \rho_f$ [$\frac{g}{cm^3}$]	v_{lam} [$\frac{cm}{s}$]	Δv_{lam} [$\frac{cm}{s}$]	Re [ ]	ΔRe [ ]	k [ ]	Δk [ ]
0.005625	0.207	0.09	0.00	0.008	0.000407	1.32	0.05
0.01	0.252	0.20	0.00	0.020	0.001334	1.15	0.07
0.0225	0.227	0.41	0.01	0.054	0.002831	1.02	0.05
0.04	0.227	0.74	0.01	0.119	0.0069	0.94	0.06
0.0625	0.227	1.15	0.02	0.231	0.011705	0.94	0.05
0.09	0.227	1.66	0.02	0.376	0.019203	0.88	0.05
0.127592	0.227	2.35	0.03	0.603	0.030665	0.84	0.05
0.16	0.207	2.68	0.04	0.730	0.037065	0.79	0.05
0.2025	0.212	3.48	0.05	1.054	0.053599	0.79	0.05

Wenn wir ein k-logRe Diagramm erstellen, können wir für einen Knick suchen, wo die Strömung von laminar ins turbulent wechselt. Das Diagramm ist in Abbildung 7 dargestellt.

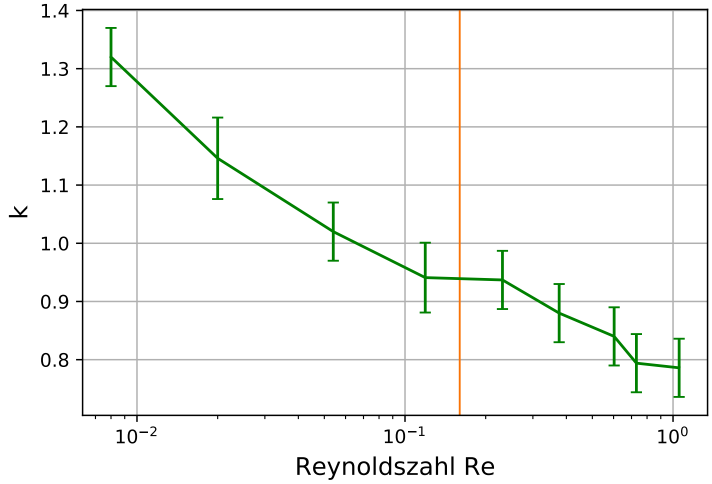


Abbildung 7: Kritischer Reynoldszahl bestimmen

Der Knick kann man bei der kritischen Reynoldszahl

$$\boxed{Re_{kr} = (0,16 \pm 0,04)} \tag{32}$$

finden. Bei dieser Messung gibt es eine sehr große Abweichung, da der Knick irgendwo zwischen zwei von unseren Messungen liegt, aber man kann nicht sicher sein, wo genau.

3.2 Hagen-Poiseuille

Jetzt bestimmen wir die Zähigkeit nach Hagen-Poiseuille. Zuerst sollen wir die Druckdifferenz bestimmen, um in Formel 14 einzusetzen. Die Flüssigkeitsdichte haben wir oben schon berechnet und die Anfangs- und Endhöhen betragen aus dem Messprotokoll $h_a = (486,1 \pm 0,2)mm$ und $h_f = (480,1 \pm 0,2)mm$. Die Druckdifferenz beträgt:

$$\Delta p = \rho_f g \frac{h_a - h_f}{2} \tag{33}$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta\Delta p = \frac{1}{2}\sqrt{(gh_a\Delta\rho_f)^2 + (gh_f\Delta\rho_f)^2 + (\rho_f g\Delta h_a)^2 + (\rho_e g\Delta h_2)^2} \tag{34}$$

Der Druckunterschied beträgt:

$$\Delta p = (5452,8 \pm 1,9)Pa \tag{35}$$

Um den Volumenstrom zu berechnen, plotten wir ein t-V-Diagramm und bestimmen die Steigung. Das Diagramm ist in Abbildung 8 dargestellt.
Die Steigung beträgt:

$$\dot{V} = (0,02997 \pm 0,00005)\frac{s}{cm^3} \tag{36}$$

Wenn wir Gleichung 14 umformen, erhalten wir für die Viskosität des Fluids:

$$\eta = \frac{\pi p R^4}{8\dot{V}L} \tag{37}$$

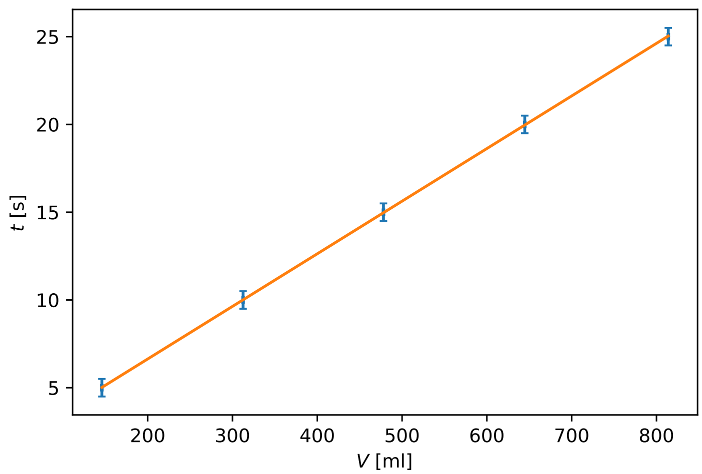


Abbildung 8: t-V Diagramm Hagen-Poiseuille

Wobei $R = (0,75 \pm 0,01)mm$ der Kappilarradius, $L = (100 \pm 0,5)mm$ die Länge des Rohrs und $p = \Delta p$ der Druckunterschied sind.
Der Fehler beträgt:

$$\Delta\eta = \eta\sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2} \tag{38}$$

Das Endergebnis der Viskosität beträgt:

$$\boxed{\eta_2 = (0,2260 \pm 0,0013)Pas} \tag{39}$$

Aus 4 und 13 erhalten wir eine Gleichung für die Reynoldszahl:

$$Re = \frac{4\rho_f \dot{V}}{\eta\pi R^2} \tag{40}$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta Re = Re\sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\dot{V}}{\dot{V}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2} \tag{41}$$

Das Endergebnis für die Reynoldszahl nach dem Hagen-Poiseuille Prinzip ist:

$$\boxed{Re = (0,1295 \pm 0,0008)} \tag{42}$$

3.3 Vergleich zwischen Stokes und Hagen-Poiseuille

Die σ-Abweichung berechnet man mit folgender Formel:

$$\frac{|\eta_1 - \eta_2|}{\sqrt{(\Delta\eta_1)^2 + (\Delta\eta_2)^2}} \tag{43}$$

Die Abweichung zwischen beiden Viskositätsmessungen beträgt $16,2\sigma$.
Das ist eine ziemlich große Abweichung, die wir in der Diskussion besprechen.

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung der Durchführung des Versuchs kann man im Messprotokoll, Abschnitt III finden.
Im ersten Teil der Auswertung haben wir mit einem Kugelfallviskosimeter ein paar kleine Kugeln untersucht. In der Durchführung des Versuchs haben wir die Zeiten, die sie ein Weg von $x = (100 \pm 5)mm$ fallen, gemessen. Wir haben die mittleren Geschwindigkeiten berechnet und die Ergebnisse in Tabelle 3 geschrieben. Danach haben wir mithilfe eines Diagramms die Dichte von der Flüssigkeit bestimmt, sie beträgt $\rho_f = (1,1506 \pm 0,0002)\frac{g}{cm^3}$. Danach haben wir das Verhältnis $\gamma = \frac{\overline{v}}{\rho_k - \rho_f}$ für jede Kugel bestimmt und in einem Diagramm gegen r^2 geplottet. Wir haben den Korrekturfaktor $\lambda = (1 + 2,1\frac{r}{R})$ betrachtet, da die Kugeln sich nicht in einem unendlich großen Gefäß befinden und das Stokes´sche Gesetz eine Näherung für laminare Strömungen mit $Re < 1$ ist. Die Steigung dieses Diagramms haben wir für die Bestimmung der Viskosität des Flüssigkeit gebraucht. Sie beträgt:

$$\boxed{\eta_1 = (0,2688 \pm 0,0023)Pas} \tag{44}$$

Anschließend haben wir die theoretische Geschwindigkeit, die Reynoldszahl und die Koeffizienten $k = \frac{\overline{v}}{v_{lam}}$ berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 dargestellt.
Zum Schluss haben wir die Koeffizienten gegen die Reynoldszahlen geplottet und die kritische Reynoldszahl bestimmt. Er beträgt:

$$\boxed{Re_{kr} = (0,16 \pm 0,04)} \tag{45}$$

Im zweiten Teil der Auswertung haben wir mithilfe einer Messung des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung, die Viskosität der Flüssigkeit bestimmt. Wir haben zuerst den Druckunterschied berechnet. Wir haben ein $t - V$ Diagramm gezeichnet, um den Volumenfluss zu bestimmen und nach Einsetzen in Formel 14 haben wir die Viskosität der Flüssigkeit bestimmt, sie beträgt:

$$\boxed{\eta_2 = (0,226 \pm 0,0013)Pas} \tag{46}$$

Schließlich haben wir auch die Reynoldszahl berechnet, sie beträgt:

$$\boxed{Re = (0,1295 \pm 0,0008)} \tag{47}$$

Die Abweichung zwischen beiden Viskositätszahlen beträgt $16,2\sigma$.

4.2 Diskussion

Die Dichte der Flüssigkeit konnten wir aus Diagramm 5 sehr präzis bestimmen, mit einem relativen Fehler von $0,013\%$. Alle relativen Fehler von den Nebenrechnungen liegen auch unter 5%. Ich habe aber gemerkt, dass die Kugelradien einen Fehler von 50% hatten, den ich nicht betrachtet habe. Bei dem Endergebnis von der Viskosität haben wir einen relativen Fehler von $0,86\%$, der eigentlich größer wegen der Kugelradienfehler sein sollte.
Die kritische Reynoldszahl hat einen großen relativen Fehler von 20%, was daran liegt, dass die Zahl irgendwo zwischen zwei von unseren Messungen liegt. Wenn wir mehr Messungen in der Reichweite von $Re \in [0,12; 0,20]$ machen, würden wir ein genaueres Ergebnis erhalten.
Bei der Messung nach Hagen-Poiseuille haben wir auch relative Fehler unter 1%.

Beim Vergleich von beiden Viskositätsmessungen haben wir eine ziemlich große σ-Abweichung von $16,2\sigma$. Es könnte einige Gründe dafür geben. Erstens, das Stokes'sche Gesetz ist eine Näherung für laminare Strömungen mit $Re < 1$. Wir haben die Ladenburg'sche Korrektur verwendet, aber das Gesetz ist nur noch eine Näherung, was einen Fehler bei unseren Endergebnis verursacht. Auch, nicht alle Kugeln haben sich in einer laminaren Strömung befunden, wie zum Beispiel die Kugel mit dem Durchmesser von $d = 9mm$.
Zweitens, ich habe die Fehler der Kugelradien nicht berücksichtigt. Wenn ich die berücksichtigt habe, würde der Fehler der Viskosität größer sein und dabei die Abweichung kleiner. Es war auch schwierig die Fallzeit präzis bei den schnelleren Kugeln zu messen, aber das liegt in dem Fehler des Mittelwerts drin und wegen der großen Anzahl

von Messungen, glaube ich, dass das kein großer Einfluss auf das Ergebnis hat.
Beim Hagen-Poiseuille Teil sollten wir die Flüssigkeit nachfüllen, was erstens zu Änderung der Viskosität führen könnte und zweitens, hat sicherlich turbulente Strömungen verursacht. Wir haben ein bisschen gewartet, bis die Flüssigkeit ruhig geworden ist, aber sie hat noch eine sehr kleine Bewegung, die nicht wirklich gestoppt hat, beim Anfang der Messung. Da das Hagen–Poiseuille Gesetz nur bei laminaren Rohrströmungen gilt, und unsere Strömung nicht wirklich laminar war, hat das auch einen Fehler verursacht.
Es ist auch möglich, dass wir die Höhe vom Rohr nicht gut abgelesen haben. Wenn die abgelesene Höhen statt $h_a = (486,1 \pm 0,2)mm$ und $h_f = (480,1 \pm 0,2)mm$ waren, sondern mit 10cm höher: $h_{a,hyp} = (586,1 \pm 0,2)mm$ und $h_{f,hyp} = (580,1 \pm 0,2)mm$, würde die Viskosität $\eta_{2,hyp} = (0,2728 \pm 0,0015)Pas$ betragen und dabei die σ-Abweichung: $1,46\sigma$, die noch groß ist, aber noch in der 2σ-Bereich liegt.
Bei einem Wiederholung des Versuchs würde ich auf die obengenannten Fehlerquellen und systematische Fehler aufpassen.
Insgesamt war dieser Versuch teilweise erfolgreich, obwohl wir signifikante Abweichungen zwischen den beiden Viskositätsmessungen und einen bedeutenden Fehler bei der kritischen Reynoldszahl festgestellt haben. Die Identifizierung einiger möglicher Fehlerquellen hat jedoch zu neuen Kenntnissen geführt.

5 Anhang

5.1 Quellen

Alle Informationen, die ich im Protokoll verwendet habe, stammen aus der Praktikumsanleitung, Ausgabe 4.2023.

5.2 Python-Code

Der Python-Code befindet sich auf der nächsten Seite.

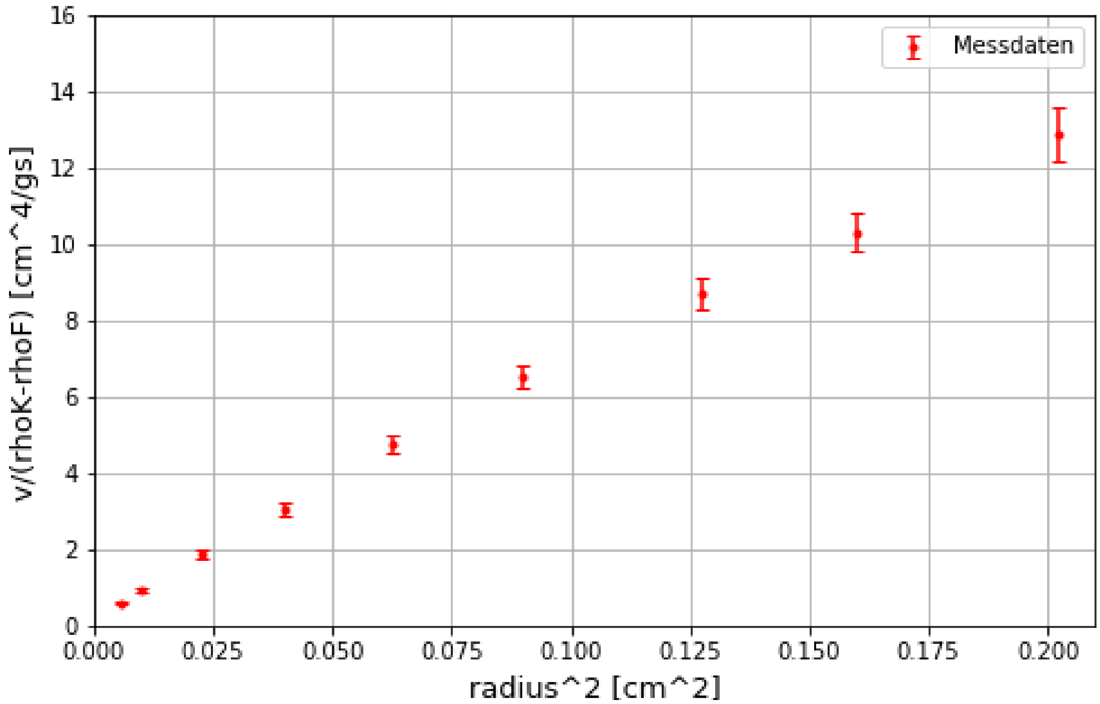
Viskositätviktor

February 22, 2024

[1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
from uncertainties import ufloat as uf
import uncertainties.unumpy as unp
import statistics as st
```

[2]:
```python
r2=[0.00563, 0.01, 0.0225, 0.04, 0.0625, 0.09, 0.12759, 0.16, 0.2025]
x=[0.6,0.93,1.87,3.05,4.75,6.5,8.7,10.3,12.9]
dx=[0.03, 0.06, 0.1, 0.18, 0.24, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7]
korrx=[0.63, 0.99, 2.05, 3.45, 5.52, 7.7, 10.7, 13, 16.7]
korrdx=[0.03, 0.06, 0.1, 0.18, 0.24, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7]
```

[3]:
```python
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.errorbar(r2,x,yerr=dx, capsize=3, fmt=".", color="red",label='Messdaten')
plt.xlabel('radius^2 [cm^2]',fontsize=13)
plt.ylabel('v/(rhoK-rhoF) [cm^4/gs]',fontsize=13)
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlim((0,0.21))
plt.ylim((0,16))
plt.savefig("Aufgabe1graph.pdf", format="pdf")
```



[4]:

```
def linear(z,a,b):
    return a*z+b
popt1, pcov1 = curve_fit(linear,r2,korrx)
print(popt1[0])
```

```
81.14993283280218
```

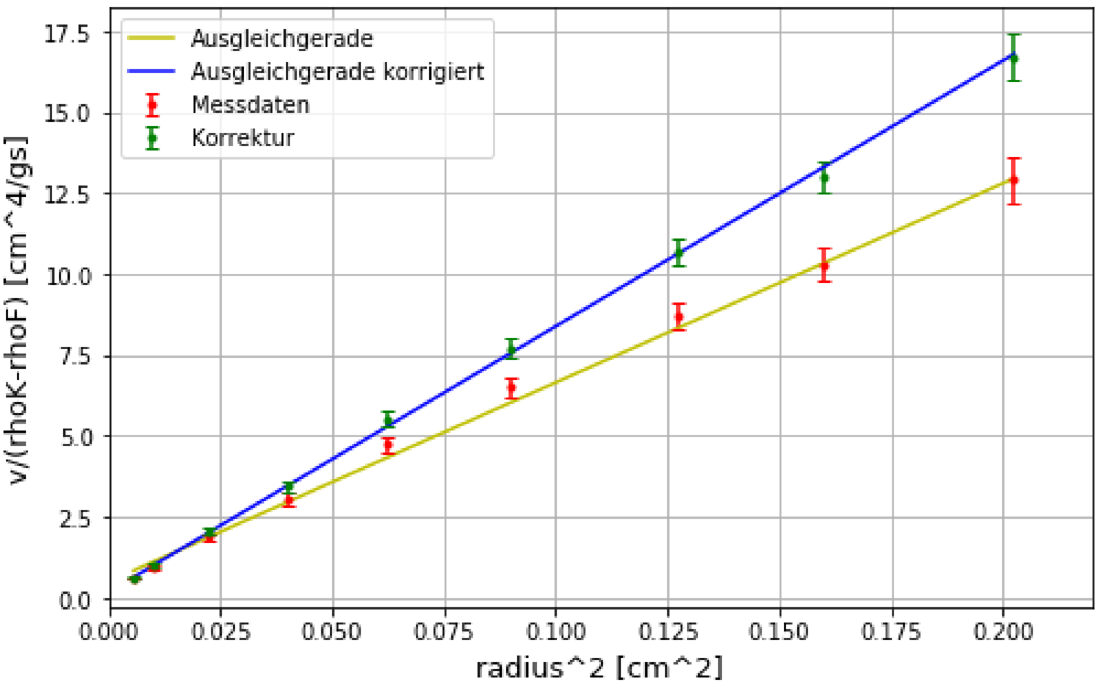
[5]:

```
plt.figure(figsize=(8,5))
Y=[]
for z in r2:
    Y.append(linear(z,82.05,0.18))
G=[]
for b in r2:
    G.append(linear(b,61.5,0.5))
plt.plot(r2,G,'y-',label='Ausgleichgerade')
plt.plot(r2,Y,'b-',label='Ausgleichgerade korrigiert')
plt.errorbar(r2,x,yerr=dx, capsize=3, fmt=".", color="red",label='Messdaten')
plt.errorbar(r2,korrx,yerr=korrdx,capsize=3,fmt=".",␣
 ↪color="green",label='Korrektur')
plt.xlabel('radius^2 [cm^2]',fontsize=13)
plt.ylabel('v/(rhoK-rhoF) [cm^4/gs]',fontsize=13)
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlim((0,0.22))
```

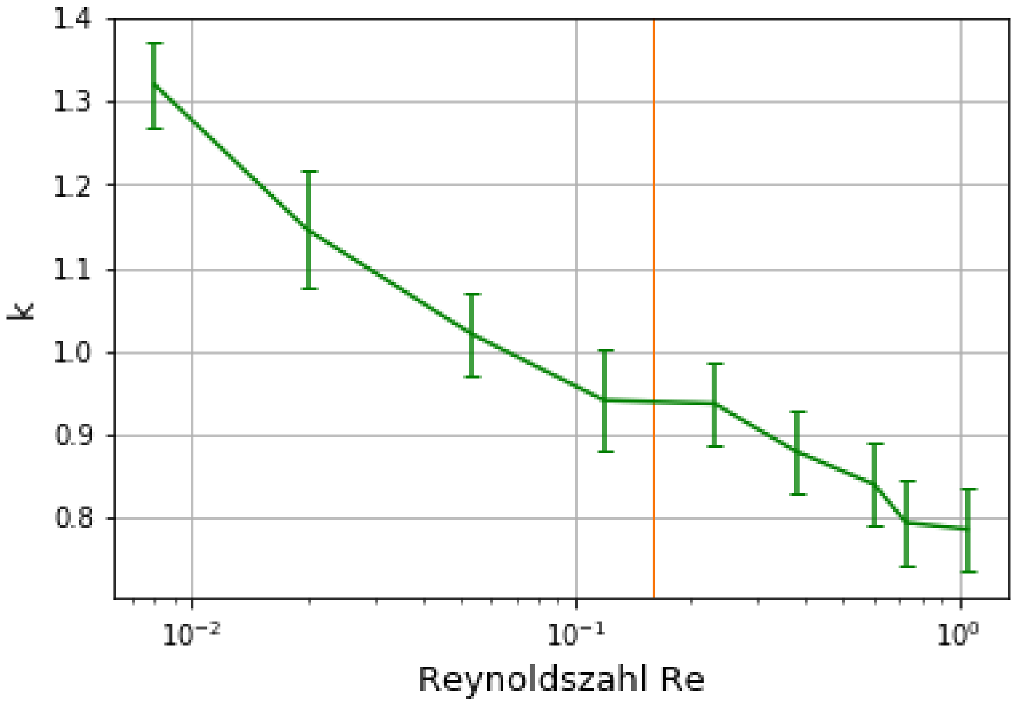
```
perr = np.sqrt(np.diag(pcov1))

print(str("die gemessene Steigung ist: ")+str(popt1[0])+str(" +/
 ↪-␣")+str(perr[0]))
plt.savefig("A1graph2.pdf", format="pdf")
```

```
die gemessene Steigung ist: 81.14993283280218 +/-␣0.709283027058747
```



[6]:
```
k=[1.32, 1.146, 1.02, 0.941, 0.937, 0.88, 0.84, 0.794, 0.786]
dk=[0.05, 0.07, 0.05, 0.06, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05]
Re=[0.008, 0.02, 0.054, 0.119, 0.231, 0.376, 0.603, 0.73 ,1.054]
plt.errorbar(Re,k,yerr=dk,capsize=3, color="green")
plt.xlabel('Reynoldszahl Re',fontsize=13)
plt.ylabel('k',fontsize=13)
plt.grid()
plt.axvline(x= 0.16,color='xkcd:orange', linewidth=1)
plt.xscale('log')
#plt.xlim((0,22))
#plt.ylim((0,180000))
plt.savefig("Knick.pdf", format="pdf")
```



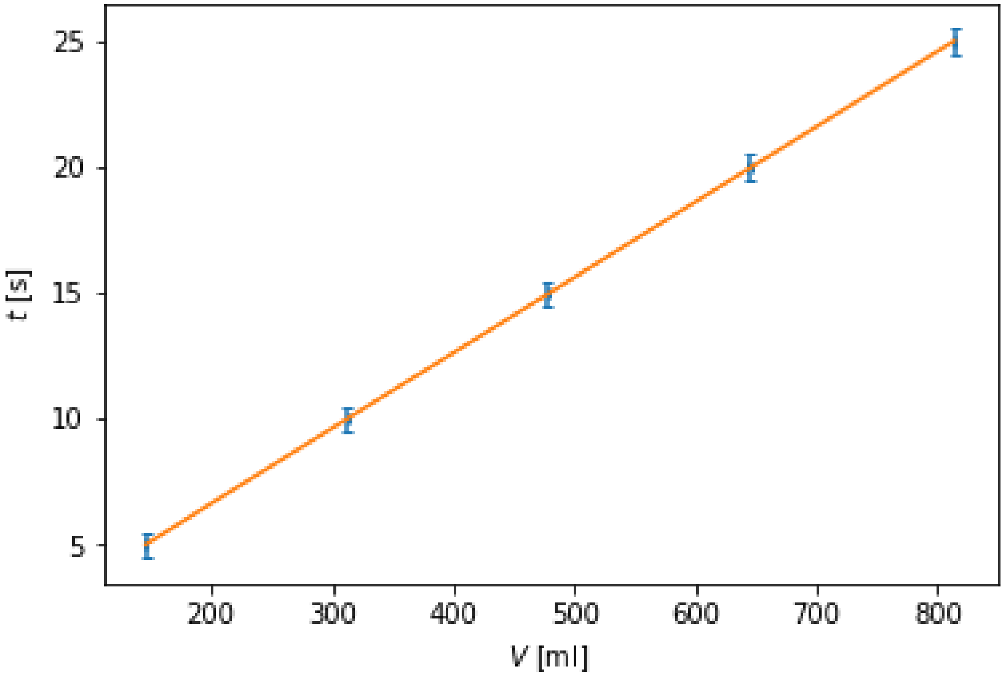
[7]:
```
g = 9.80984
rho_f = uf(1.1506,0.0002) #g/cm^3
h_a = uf(486.1,0.2)
h_f = uf(480.1,0.2) #mm
H = 0.5*(h_a+h_f)
p = (rho_f*1000)*g*(H*0.001) #Pa
print(p)
```

```
5452.8+/-1.9
```

[8]:
```
V = unp.uarray([5,10,15,20,25],[0.5,0.5,0.5,0.5,0.5]) #ml
t = unp.uarray([145.98,312.52,478.07,644.69,813.95],[1.4,1.4,1.4,1.4,1.4]) #s
```

[9]:
```
plt.errorbar(unp.nominal_values(t),unp.nominal_values(V),xerr=unp.std_devs(t),
yerr=unp.std_devs(V),linestyle='',capsize=2, label='Daten')
f = lambda x, a, b : a*x+b # lineare Fit-Funktion
q, cov = curve_fit(f,unp.nominal_values(t),unp.nominal_values(V))
plt.plot(unp.nominal_values(t),q[0]*unp.nominal_values(t)+q[1])
plt.xlabel('$V$ [ml]')
plt.ylabel('$t$ [s]')
Vf = uf(q[0],cov[0,0]) # Geradensteigung (mit Fehler) ml/s
print(Vf)
plt.savefig(r'Hagen.pdf', format="pdf")
```

```
0.029973574+/-0.000000005
```



[10]:
```
L = uf(100,0.5) #mm
R = 0.5*uf(1.5,0.001) #mm
eta2 = (np.pi*p*(R*0.001)**4)/(8*(Vf*0.001*0.001)*L*0.001)
print(eta2) #Pas
```

```
0.2260+/-0.0013
```

[11]:
```
Re2 = (2*rho_f*1000*Vf*0.001*0.001)/(np.pi*R*0.001*eta2)
print(Re2)
```

```
0.1295+/-0.0008
```