Versuch 213
Kreisel

Viktor Ivanov

Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch untersuchen wir qualitativ und quantitativ die Eigenschaften eines Kreisels.
Kreiselphänomene finden wir in unterschiedlichen Bereichen, z.B. im Bereich der Navigation als künstlicher Horizont, wobei zwei Gyroskopen auf beide Seiten eines Flugzeugs platziert sind und dabei mithilfe einer Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsmesser der Kurs der Maschine automatisch eingestellt werden kann.
Die Erde ist auch ein Kreisel und wir wissen, dass unsere sie auch eine Präzessionsperiode hat, was zu Milanković-Zyklen führt und den Himmelnordpol wandert.
Kreiselphänomene benutzen wir auch bei Untersuchung von den Rotationsspektren von Molekülen.

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Kräftefreie, symmetrische Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der sich um einen festen Punkt umdreht. Wenn der Kreisel um einen festen Punkt gelagert ist, nennen wir es kräftefrei, da die Gewichtskraft kein äußeres Drehmoment auf dem Kreisel ausübt. Wenn die zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß sind, nennen wir den Kreisel symmetrisch. Drei charakteristische Achsen können definiert werden, um die Bewegung beschreiben zu können: die Symmetrie- oder auch Figurenachse $\vec{F}$, die Drehimpulsachse $\vec{L}$ und die Richtung der Drehimpulsachse $\vec{\omega}$. Man kann die in Abbildung 2 finden.

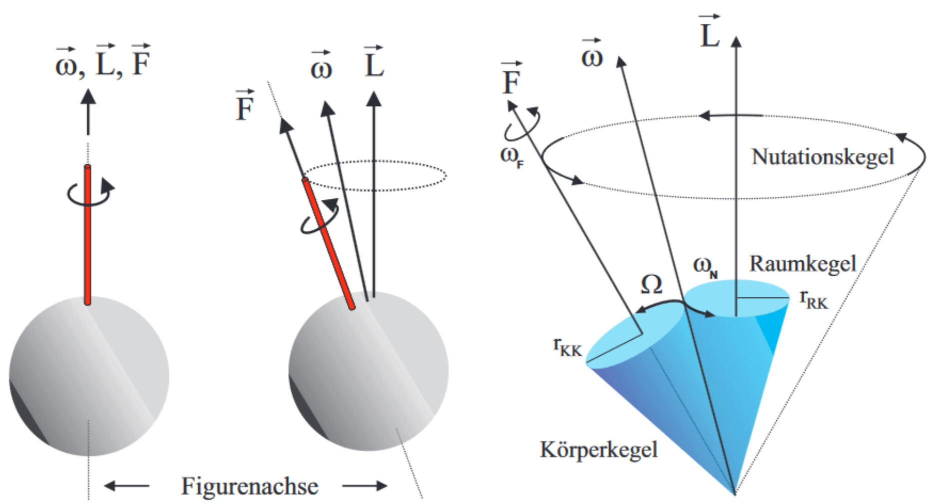


Abbildung 2: Bewegung eines kräftefreien symmetrischen Kreisels

Ein Spezialfall ist, wenn die Richtung der Figurenachse konstant bleibt und alle Achsen zusammenfallen. Dann zeigen die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ in der gleichen Richtung, was Links auf Abbildung 2 zu sehen ist.
In der Mitte ist es eine Nutationsbewegung zu sehen, wobei die Achsen nicht mehr zusammenfallen. Die Figurenachse macht eine Symmetrieachse, die durch einen gedachten "Körperkegel"beschrieben werden kann. Der Körperkegel rollt auf dem Mantel des Raumkegels, mit dem Drehimpuls als Symmetrieachse, ab. Die sind an der rechte Seite von Abbildung 2 zu sehen. Daraus folgt, dass der Drehimpuls und die momentane Geschwindigkeit in einer Ebene liegen.
Für die momentane Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F \tag{1}$$

Wobei $\vec{\omega_N}$ der Nutationsteil ist und $\vec{\omega}_F$ der Anteil der Eigenrotation der Figurenachse ist.
Wenn wir die momentane Geschwindigkeit zusätzlich in x und z Komponenten zerlegen, erhalten wir:

$$\omega_x = \omega_N . sin\theta \tag{2}$$

Für die x Komponente des Drehimpulses gilt:

$$L_x = Lsin\theta \tag{3}$$
$$L_x = I_x\omega_x \tag{4}$$

Daraus gilt für den Betrag der Nutationsfrequenz:

$$\omega_N = \frac{L}{I_x} \tag{5}$$

Für einen kleinen Winkel θ gilt die Näherung:

$$L \approx I_z\omega \approx I_z\omega_F \tag{6}$$

Und daraus ergibt sich für die Nutationsteil der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x}\omega_F \tag{7}$$

Die Geometrie der Nutationsbewegung kann man in 3 finden.

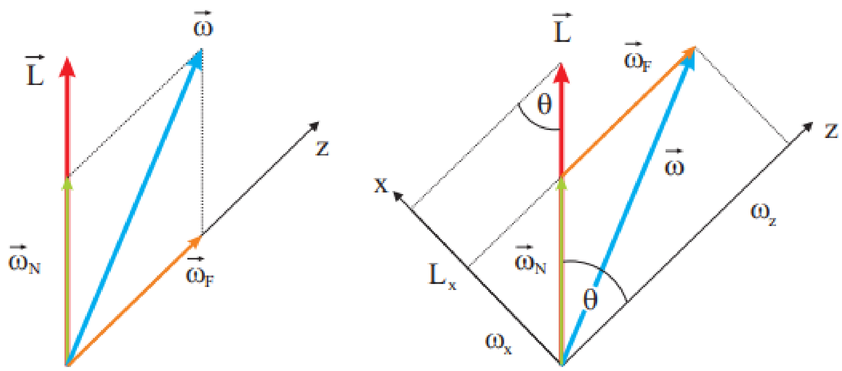


Abbildung 3: Geometrie von einer Nutationsbewegung

In Abbildung 4 kann man die Visualisierung der Nutationsbewegung der Figurenachse sehen.

Es ist schwieriger die momentane Drehachse zu beobachten. Die momentane Drehachse wandert sich um die Figurenachse. Wenn wir eine Sektorenscheibe benutzen, ein Beobachter sieht am Ort der momentanen Drehachse, wie die Farben der Sektorenscheibe durchlaufen werden, Abbildung 5. Der Farbwechsel erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit Ω:

$$\Omega = \frac{r_{RK}}{r_{KK}}\omega_N \tag{8}$$

Wobei r_{RK} der Radius des Raumkegels ist und r_{KK} der Radius des Körperkegels ist.
Daraus ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x}\omega_F \tag{9}$$

Diese Umformung benutzen wir später in der Auswertung:

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\omega_F/\Omega - 1} \tag{10}$$

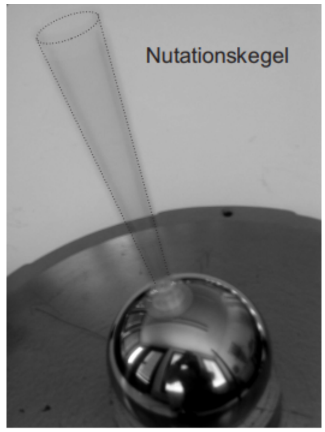


Abbildung 4: Nutationsbewgung der Figurenachse

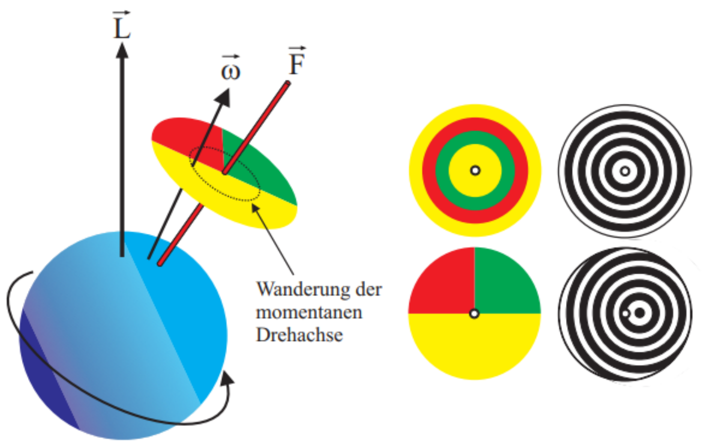


Abbildung 5: Momentane Drehachse , visualisiert durch eine Sektorscheibe

1.2.2 Schwere, symmetrische Kreisel

Bei einem schweren Kreisel liegt der Unterstütztpunkt nicht mehr im Schwerpunkt. Da der Kreisel immer noch symmetrisch ist, liegt der Unterstütztpunkt auf der Figurenachse. Auf einen schweren, symmetrischen Kreisel wirkt das Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{l} m \vec{g} \tag{11}$$

Wobei m eine Zusatzmasse ist und $\vec{l}$ ist der Vektor, der vom Unterstützungspunkt des Kreisels zur Zusatzmasse auf der Figurenachse zeigt.
Der Drehimpuls ändert sich zeitlich und verursacht eine Bewegung, die Präzession heißt. Diese Bewegung kann man in Abbildung 7 sehen. Die Präzessionsfrequenz $\vec{\omega_p}$ kann als

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L \sin \alpha dt} \tag{12}$$

geschrieben werden.

Nach einige Umformungen bekommen wir für den Präzessionsfrequenz:

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \tag{13}$$

Allgemein gilt für das Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L} \tag{14}$$

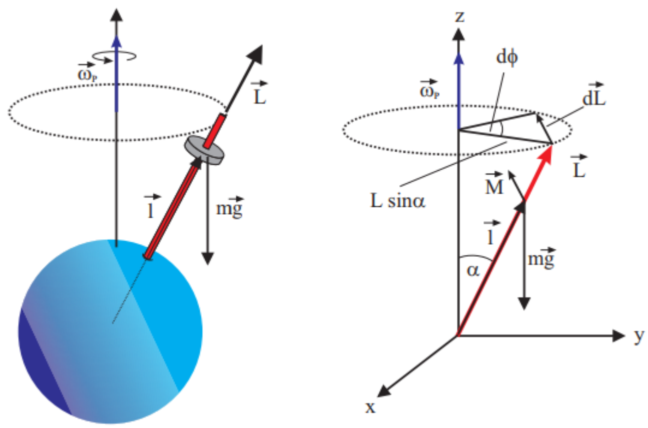


Abbildung 6: Schwere, Symmetrische Kreisel

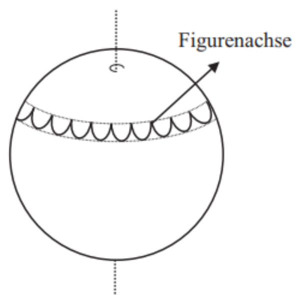


Abbildung 7: Bewegung der Figurenachse bei einer Überlagerung von Präzession und Nutation

2 Messprotokoll und Durchführung des Versuchs

Das Messprotokoll befindet sich auf der nächsten Seite.

23.10.2023

Messprotokol
Versuch 213
Kreisel

Viktor Iwanov
Danae Droutsas

• Geräteliste:

- Stahlkugel mit Aluminiumstab ($m = 4,164$ kg incl. Stab, $r = 5,08$ cm)
- 2 Gewichte ($r_a = 0,725$ cm, $r_i = 0,325$ cm, $h = 1,1$ cm, $m = 9,85$ g)
- Farbescheibe; Scheibe mit konzentrischen Ringen
- Stroboskop
- Stopuhr
- Motor mit Netzgerät
- Gyroskop zur Demonstration der Kreiseleigenschaften

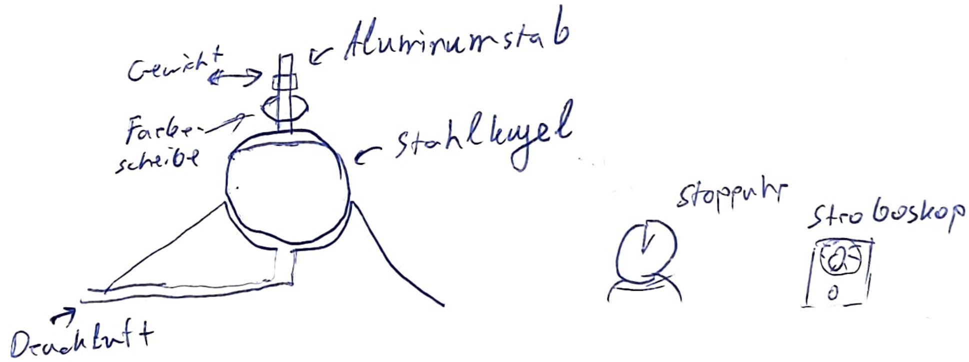


Abb. 1 Messaufbau

• Vorversuch

a) Zunächst liegen Figuren-, Drehimpuls und momentane Drehachse übereinander. Lenkt man die Figurenachse aus, findet die Rotation um diese herum statt.

b) In einem Punkt auf der Farbescheibe erkennen wir ein Punkt, in den die Farben sich ändern. Das passiert erst dann, wenn der Stab angeschlagen wurde. Das ist die Wanderung der momentanen Drehachse.
Wenn wir die Scheibe gedreht haben und die Seite mit den farbigen Ringen beobachtet haben, sehen wir, dass

c) Wenn wir eine zusätzliche Scheibe gelegt haben und der Kreisel gedreht, beobachten wir, dass ~~auch~~ sowohl wenn der weiße Mittelpunkt ~~durch di~~ unter der Figurenachse als auch seitlich liegt, konzentrische Kreise um die Figurenachse. Mit einem Gewichtsstück am Ende des Stabs sehen wir wieder konzentrische Kreise sehen. Es findet eine langsame Präzisions-bewegung in Richtung der Drehung statt.

d) Ohne Scheibe mit Gewicht: Präzision in Richtung der Drehung

.2 Dämpfung
Wir platzieren 2 Gewichtsstücke am oberen Stabende und versetzen den Kreisel in Bewegung. Es wird die Änderung der Drefrequenz.

Zeit [min]	Frequenz f [min^{-1}]
0	~~690~~ 685
2	635
4	585
6	540
8	490
10	460
12	425

Tabelle 1: Messung der Dämpfung

Ablesefehler $\Delta f = 10 \frac{1}{min}$

Zeitfehler $\Delta t = 2\,s$

~~Gaußsche Fehler~~

.3 Präzession

a) Wir montieren die Farbscheibe auf dem Kreisel und ein Zusatzgewicht bei einem Abstand von 20 cm von der Kugelmitte.
Wir beschleunigen auf $f = (500 \pm 10)\,\mathrm{min}^{-1}$ messen wir die Präzisionsperiodendauer für folgende Winkel

Winkel φ [°]	T [s]
30	181
60	183
90	179

Tabelle 2: Messung der Periodendauer der Präzission bei verschiedenen auslenkungen

b) Jetzt stellen wir auf den Stab

- ein Gewichtsstück bei 15cm (Tabelle 4)
- ein Gewichtsstück bei 20cm (Tabelle 3)
- zwei Gewichtsstücke bei 15 cm
- zwei Gewichtsstücke bei 20 cm

f [min^{-1}]	Periodendauer T [s]
300	~~160~~ 107
400	147
500	176
600	211

Tabelle 3: Messung der Periodendauer der Präzission bei verschiedene Drehfrequenzen (ein Gewicht bei 20 cm)

f [min^{-1}]	Periodendauer T [s]
300	144
400	195
500	241
600	261

Tabelle 4: Messung der Periodendauer der Präzission bei verschiedene Drehfrequenzen (ein Gewicht bei 15cm)

$\Delta T = 2s$

$\Delta f = 10 min^{-1}$

5. Umlauf der momentalen Drehachse um die Figurenachse

a) Die Umlaufrichtung der momentalen Drehachse ist in Uhrzeigersinn und die Farberichtung ist:
rot - gelb - grün

b) Jetzt messen wir mit der Stopuhr für 5 frequenzen die Zeit t für 10 Umläufe der momentalen Drehachse um die Figurachse:

f [min^{-1}]	t [s]
350	27,53
400	28,10
450	25,64
500	22,29
550	21,64

Tabelle 5: Messung der momentanen Drehachse um die Figurenachse

5. Nutation

ω_f [min⁻¹]	ω_N [min⁻¹]
~~3~~ 325	~~[illegible]~~ 310
400	380
~~4~~ 505	485
590	530
305	295

Tabelle 6: Messung von den Wertepaare ω_f und ω_N

D. [illegible]

3 Auswertung

3.1 Beobachtungen des Vorversuchs

Im Vorversuch haben wir qualitativ die schon beschriebene Eigenschaften des Kreisels untersucht, wir haben unsere Kenntnisse vertiefert und das theoretische Wissen mit praktischen Beispielen überprüft.

Zunächst haben wir die Figuren-, Drehimpuls und momentane Drehachse übereinander ausgerichtet, damit der Kreisel kräftefrei ist. Bei der Auslenkung der Figurenachse durch seitliches Drücken des Metallrings am Stabende mit einem Finger haben wir eine Rotation um diese Achse beobachtet. Es wurde jedoch keine Nutations- oder Präzessionsbewegung beobachtet, da wir den Metallring vorsichtig bewegt haben und nicht angestoßen.

Im zweiten Teil des Vorversuchs haben wir den Metallring leicht angestoßen und die Farbescheibe mit den Farbesektoren, die in Abbildung 5 zu sehen ist beobachtet. Da wir in diesem Fall eine Nutationsbewegung erzeugt haben, konnten wir die momentane Drehachse visualisieren, da die Farben sich genau in diesem Punkt durchgelaufen haben.

Im dritten Teil des Vorversuchs haben wir eine zusätzliche Scheibe mit konzentrischen Kreisen gelegt. Wenn wir den Kreisel um die Figurenachse gedreht haben, haben wir beobachtet, dass der Mittelpunkt der Kreise der Scheibe genau im Zentrum liegt. Bei einem kleinen Stoß auf den Metallring erzeugt sich eine Nutationsbewegung, dabei haben wir eine Verschiebung des Mittelpunkts beobachtet. Jetzt liegt sie zur Seite und veranschaulicht wo die Drehimpulsachse liegt. Bei der Platzierung von einem weiteren Gewicht verschiebt sich der Schwerpunkt und dabei ist unser Kreisel nicht kräftefrei. Deswegen fand es schon eine langsame Präzessionsbewegung in der Richtung der Drehung statt.

Beim letzten Teil des Vorversuchs haben wir die Scheibe und Gewicht weggenohmen. Wir haben den Kreisel in nichtwertikalen Stellung gedreht und haben eine Präzessionsbewegung in die entgegengesetzte Richtung beobachtet. Wenn wir das Gewicht zurückgelegt haben, haben wir eine Präzessionsbewegung in Richtung der Drehung beobachtet. Das lässt sich dadurch erklären, dass im ersten Fall der Schwerpunkt unterhalb der Kugelmitte liegt, während er im zweiten Fall über der Kugelmitte liegt.

3.2 Dämpfung

In diesem Teil der Auswertung werden wir die Dämpfungskonstante und die Halbwertszeit des Kreisels bestimmen. Um das zu erreichen, tragen wir die Messwerte auf halb-logarithmischen Papier.
Zuerst haben wir die Kreisfrequenzen von Umdrehungen pro Minute in Hertz umgerechnet:

$$\omega = 2\pi \frac{f}{60} \tag{15}$$

Unter Verwendung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung erhalten wir den Fehler:

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{\Delta f}{60} \tag{16}$$

Auf der Frequenz wird eine abfallende Exponentialfunktion angepasst:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\delta t} \tag{17}$$

Wobei hier δ die Dämpfungskonstante beträgt. Sie ist auch die Steigung der Gerade in unserem Diagramm. Der Diagramm kann man in Abbildung 8 finden.

Die Dämpfungskonstante beträgt:

$$\delta = (6,7 \pm 0,6).10^{-4} \frac{1}{s} \tag{18}$$

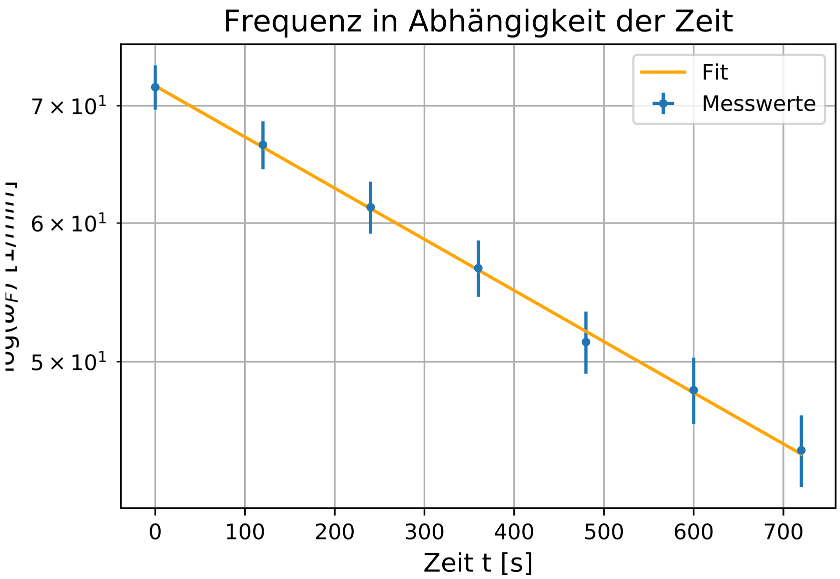


Abbildung 8: Dämpfungsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit

Die Halbwertszeit kann man mit folgender Formel berechnen:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} \tag{19}$$

Und mit dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzung erhalten wir den Fehler der Halbwertszeit:

$$\Delta T_{1/2} = \frac{\ln(2)\Delta\delta}{\delta^2} \tag{20}$$

Die Halbwertzeit kommt zu:

$$T_{1/2} = (1030 \pm 86)s \tag{21}$$

3.3 Präzession

In diesem Versuchsteil haben wir, wie in Messprotokoll beschrieben, ein Gewichtsstück in Abstand von $20cm$ zur Kugelmitte platziert und den Kreisel für den Winkeln 30^o, 60^o und 90^o untersucht. Die Periodendauern lauten $181s$, $183s$ und $179s$. Die mittlere Abweichung kann man mit dieser Formel berechnen:

$$\delta = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{N} \tag{22}$$

Wobei N die Anzahl von Daten ist und $\overline{x}$ der Durchschnitt ist.
Die mittlere absolute Abweichung zwischen den Ergebnissen beträgt:

$$\delta_p = 1,3s \tag{23}$$

Das liegt in unserem systematischen Fehler drin und ist nicht signifikant.

3.4 Trägheitsmoment I_z

Jetzt berechnen wir das Trägheitsmoment des Kreisels entlang der z-Achse. Dafür haben wir einmal ein Gewicht bei $15cm$ und einmal bei $20cm$ platziert und die Periodendauern bei verschiedenen Drehfrequenzen

gemessen. Die entsprechenden Daten befinden sich in den Tabellen 3 und 4.
Wir sollen zuerst die mittlere Drehfrequenzen berechnen:

$$\overline{\omega_F} = \frac{\omega_A + \omega_E}{2} \tag{24}$$

Wobei ω_A und ω_E die Anfangs- und Endfrequenzen sind.
Nach der Gauß'schen Fehlerforpflanzung ergibt sich für den Fehler den Formel:

$$\Delta\overline{w_F} = \frac{\sqrt{\Delta w_A^2 + \Delta w_E^2}}{2} \tag{25}$$

Wenn wir die Frequenzen gegen die Präzessionsdauer plotten, können wir aus den Steigungen der Geraden die Trägheitsmomente berechnen. Bei dem Diagramm habe ich auch den Nullpunkt geplottet, damit es anschaulicher ist. Die Grafik ist in Abbildung 9 zu finden. Die Steigungen betragen:

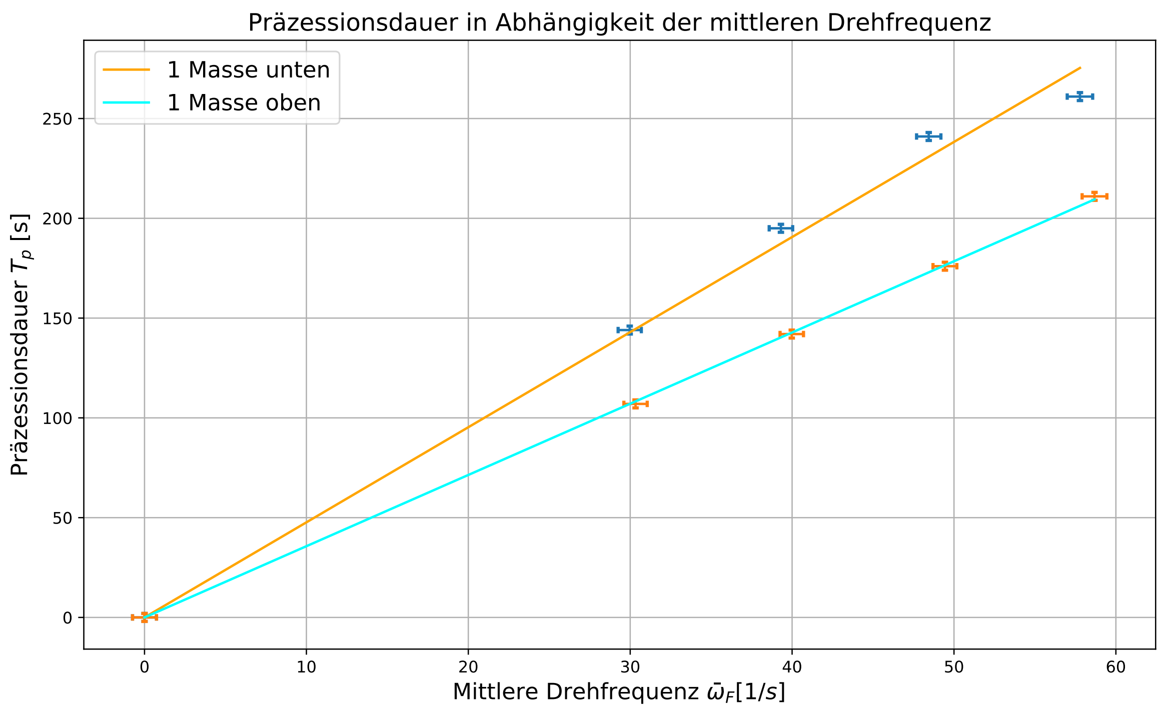


Abbildung 9: Präzessionsdauer gegen die mittlere Drehfrequenz

$$s_o = (4,76 \pm 0,10)s^2 \tag{26}$$
$$s_u = (3,569 \pm 0,012)s^2 \tag{27}$$

Wobei s_o die Steigung der Gerade für das Gewicht bei $20cm$ ist und s_u bei $15cm$.
Die Trägheitsmomente sind mit dem Formel

$$I_z = \frac{smgl}{2\pi} \tag{28}$$

zu berechnen.
Nach der Gauß'schen Ferhlerfortpflanzung erhält man für den Fehler:

$$\Delta I_z = I_z.\sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2} \tag{29}$$

Die Trägheitsmomente von beiden Messungen entsprechen:

$$I_{z,o} = (11,00 \pm 0,24).10^{-3} kg.m^2 \tag{30}$$
$$I_{z,u} = (11,00 \pm 0,04).10^{-3} kg.m^2 \tag{31}$$

Wenn wir die beide Ergebnisse mitteln erhalten wir einen präziseren Wert für das Trägheitsmoment:

$$I_z = (11,00 \pm 0,12).10^{-3} kg.m^2 \tag{32}$$

3.5 Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenachse

In Tabelle 5 haben wir den Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenachse gemessen. Da ist es zu bemerken, dass je größer die Drehfrequenz ist, desto kleiner die Drehfrequenz der Figurenachse, wobei auch die Farbewechselfrequenz kleiner ist. Dabei ist aus Gleichung 10:

$$0 > \frac{\omega_f}{\Omega} \tag{33}$$
$$I_x = \frac{I_z}{\frac{\omega_f}{\Omega} - 1} + I_z \tag{34}$$
$$=> \;\; I_x > I_z \tag{35}$$

Das zeigt, dass das Trägheitsmoment der momentanen Achse I_x ist größer als dieser um die Figurenachse, I_z.

Man kann das auch aus den Daten in Tabelle 6 schlussfolgern. Da kann man sehen, dass die Nutationsfrequenz kleiner als die Drehfrequenz ist, dabei ist nach 7 das Trägheitsmoment um die z-Achse kleiner als dieser um die x-Achse:

$$\omega_n < \omega_f \;\; => \;\; I_z < I_x \tag{36}$$

Wir haben die Umlauffrequenz für 10 Umläufe der momentane Drehachse gemessen, dabei beträgt sie:

$$\Omega = 10.\frac{2\pi}{t} \tag{37}$$

Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung beträgt den Fehler:

$$\Delta\Omega = 10 \cdot \frac{2\pi\Delta t}{t^2} \tag{38}$$

Das Trägheitsmoment um die momentane Drehachse können wir durch Plotten der Umlauffrequenz gegen die Drehfrequenz und Einsetzen der Steigung der Gerade in 10 bestimmen. Die Grafik ist in Abbildung 10 zu finden.
Die Steigung beträgt

$$s = \frac{\Omega}{\omega_f} = (5,53 \pm 0,18).10^{-2} \tag{39}$$

Nach Einsetzen in 10 erhalten wir für das Trägheitsmoment der momentanen Achse das Endergebnis:

$$I_{x,1} = (1,160 \pm 0,018).10^{-2} kg.m^2 \tag{40}$$

3.6 I_x mithilfe der Nutationsfrequenz bestimmen

Ein anderen Weg I_x zu bestimmen ist durch Einsetzen in Gleichung 7. Wir sollen die Steigung der Gerade zwischen der Kreiselfrequenz und die Nutationsfrequenz bestimmen. Wir plotten zuerst ein Diagramm von

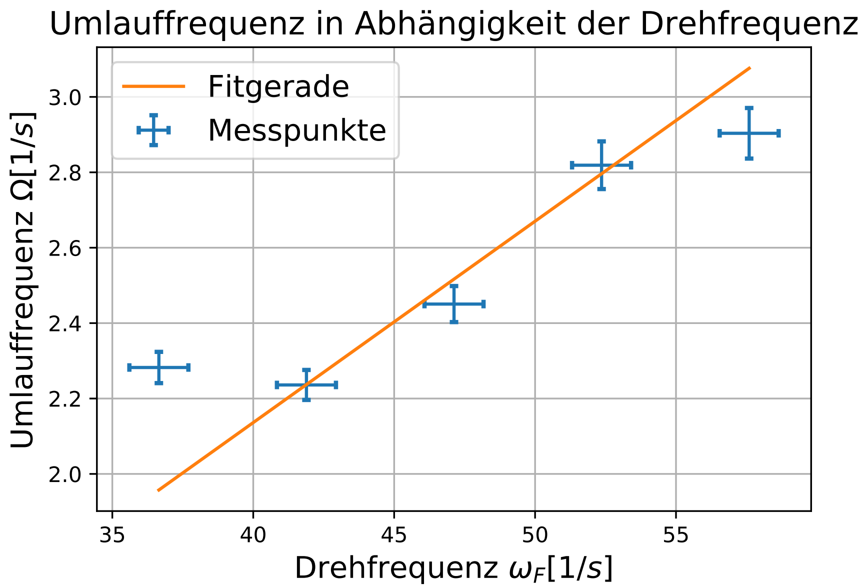


Abbildung 10: Umlauffrequenz gegen Drehfrequenz

der Kreiselfrequenz gegen die Nutationsfrequenz. Sie ist in Abbildung 11 zu finden.
Die Steigung entspricht:

$$s = \frac{I_z}{I_x} = (0,936 \pm 0,014) \tag{41}$$

Die Formel für das Trägheitsmoment kann so geschrieben werden:

$$I_x = \frac{I_z}{s} \tag{42}$$

$$\Delta I_x = I_x \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_z}{I_z}\right)^2} \tag{43}$$

Das Ergebnis beträgt:

$$I_{x,2} = (1,173 \pm 0,024).10^{-2} kg.m^2 \tag{44}$$

Der Mittelwert von beiden beträgt

$$I_x = (1,167 \pm 0,015).10^{-2} kg.m^2 \tag{45}$$

Alle Ergebnisse besprechen wir in der Diskussion.

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir zuerst die Beobachtungen aus dem Vorversuch diskutiert und weiter erklärt. Wir haben erklärt wie Nutations- und Präzessionsbewegung erzeugt werden, wie man die momentane Drehachse und die Drehimpulsachse durch Verwendung von Farbescheiben lokalisieren kann und wie der Schwerpunkt die Richtung der Präzessionsbewegung beeinflusst.

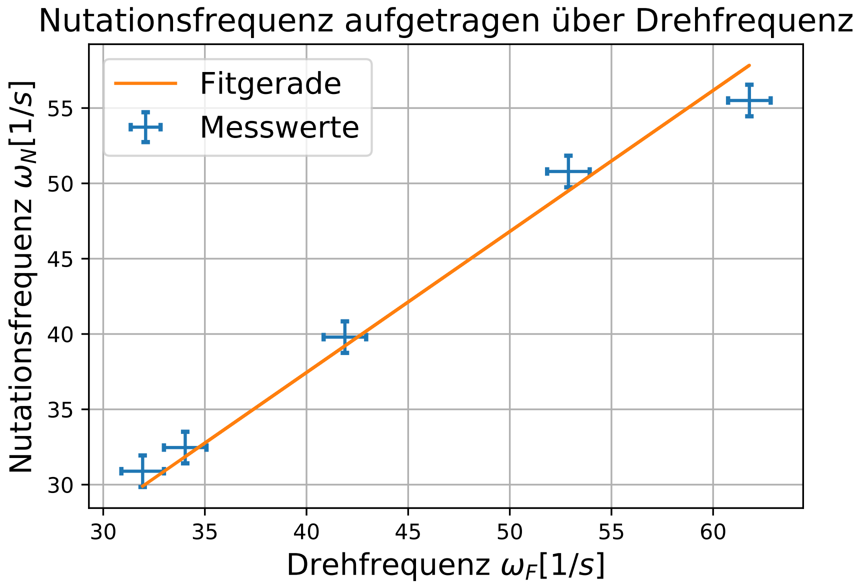


Abbildung 11: Nutationsfrequenz gegen Drehfrequenz

Im zweiten Teil des Versuchs haben wir die Halbwertszeit aus der Dämpfung bestimmt. Um das zu machen, haben wir zuerst die Kreisfrequenzen in Hertz bestimmt. Wir haben die gemessene Frequenz gegen die Zeit auf halblogarithmisches Papier geplottet und die Steigung bestimmt. Da der Frequenzabfall von der Dämpfungskonstante exponentiell abhängt, konnten wir daraus die Dämpfungskonstante bestimmen und daraus auch die Halbwertszeit.

Im nächsten Abschnitt haben wir gezeigt, dass der Winkel der Metallring unabhänging zu der Periodendauer ist, da die Abweichung zwischen unsere drei Messungen $\delta_p = 0,007\%$ beträgt und dabei nicht Signifikant ist.

Im vierten Teil des Versuchs haben wir zuerst die mittleren Drehfrequenzen $\overline{\omega_F}$ bestimmt. Wir haben dann die mittleren Drehfrequenze gegen die Präzessionsdauern geplottet, die Steigungen bestimmt und daraus auch die Trägheitsmomente für jedes Gewicht berechnet. Bei der Mittelung der Ergebnisse, haben wir ein präzises Endergebnis für das Trägheitsmoment I_z des Kreisels bekommen.

$$I_z = (11,00 \pm 0,12).10^{-3} kg.m^2 \tag{46}$$

In Teil fünf haben wir die Trägheitsmomente I_x und I_z verglichen und in zwei verschiedenen Arten gezeigt, dass das Trägheitsmoment der momentanen Achse I_x größer ist als dieser um die Figurenachse. Wir haben dann die Umlauffrequenz berechnet und ein Diagramm von der Umlauffrequenz gegen die Drehfrequenz geplottet. Aus der Steigung dieser Gerade haben wir das Trägheitsmoment der momentanen Achse bestimmt.

$$I_{x,1} = (1,160 \pm 0,018).10^{-2} kg.m^2 \tag{47}$$

Im letzten, sechsten Teil haben wir das Trägheitsmoment der momentanen Achse aus der Nutationsfrequenz bestimmt. Wir haben einen Diagramm von der Nutationsfrequenz gegen der Eigenfrequenz geplottet und I_x aus der Steigung bestimmt.

$$I_{x,2} = (1,173 \pm 0,024).10^{-2} kg.m^2 \tag{48}$$

Das präzise Endergebnis des Trägheitsmoments der momentanen Achse beträgt:

$$I_x = (1,167 \pm 0,015).10^{-2} kg.m^2 \tag{49}$$

4.2 Diskussion

In diesem Versuch haben wir ziemlich lange Zeiten für die Periodendauer der Präzessionsbewegung gemessen. Das ist wahrscheinlich von dem größeren Trägheitsmoment des Kreisels verursacht. Da die Zeiten so lang waren, konnten wir nicht alle Messungen in der verteilten Zeit durchführen und wir haben nach einem Gespräch mit dem Betreuer nur die Messungen mit einem Gewichtsstück durchgeführt. Eine Verbesserung wäre, wenn wir anstatt nur mit einem Gewichtsstück die Messungen durchgeführt haben, die mit zwei und drei Gewichtsstücken durchzuführen. In diesem Fall würden die Periodendauern kürzer sein und wir würden vier Messungen machen können, was uns am Ende genauere Ergebnisse für die Trägheitsmomente geben würde.

Noch etwas, was uns ziemlich verzögert hat ist, dass wenn wir den Kreisel beschleunigt haben, konnten wir verschiedene Frequenzen auf dem Stroboskop ablesen, z.B. wenn der Kreisel sich mit einem Frequenz $f_a = 400\frac{1}{min}$ sich dreht, es sieht stationär aus sowohl bei einer Einstellung von $f_{s,1} = 200\frac{1}{min}$ auf dem Stroboskop, als auch bei einer Einstellung von $f_{s,2} = 400\frac{1}{min}$. Da wir zum ersten Mal mit diesem Gerät gearbeitet haben, war es für uns schwierig vom Anfang das zu bemerken, was zu einigen falschen Ergebnissen geführt hat, die wir dann wegstreichen mussten und nochmal messen sollten. Bei einer Wiederholung des Versuchs würde ich darüber beachten.

Die Abweichung zwischen den Trägheitsmomenten der momentanen Achse $I_{x,1}$ und $I_{x,2}$, können wir mit dieser Formel berechnen:

$$\frac{|I_{x,1} - I_{x,2}|}{\sqrt{(\Delta I_{x,1})^2 + (\Delta I_{x,2})^2}} \tag{50}$$

Wir kommen zu der Abweichung von $0,43\sigma$, was innerhalb der 1σ Bereich liegt. Mit den relativen Fehlern von $1,5\%$ für $I_{x,1}$ und $2,0\%$ für $I_{x,2}$ sind das ziemlich genaue Ergebnisse und wir können behaupten, dass der Mittelwert von beiden, $I_x = (1,167 \pm 0,015).10^{-2} kg.m^2$ ein sehr präzises Ergebnis ist.

Für das Trägheitsmoment I_z des Kreisels haben wir ein relativen Fehler von $1,1\%$, was auch ziemlich klein ist.

Die Fehler sind sehr klein, und die σ-Abweichung zwischen den Endergebnissen liegt in der 1σ Bereich, was zeigt, dass unsere Fehlerabschätzung, die wir im Messprotokoll gemacht haben, akkurat war. Wegen der sehr langen Präzessionszeiten hatten wir so kleine relative Fehler.

Im Allgemeinen bin ich mit dem Versuch zufrieden, da ich mit einem neuen Gerät für mich, dem Stroboskop arbeiten konnte und auch in dem Vorversuch mein Wissen vom ersten Semester vertiefern konnte.

5 Anhang

Der Python Code befindet sich auf der nächsten Seite.

Untitled

February 11, 2024

[1]:

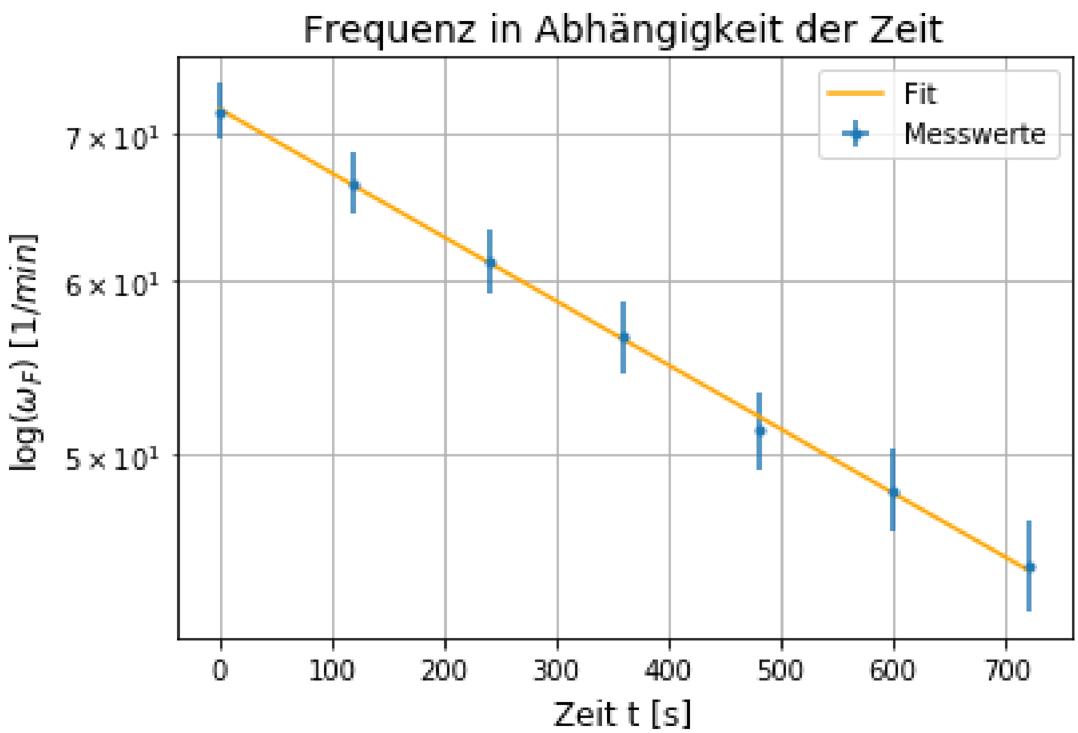
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
```

[2]:

```python
#Eingeben der Messwerte
#gemessene Zeit t in Sekunden
t=60*np.array([0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]) #s
dt=np.ones(7)*2

#Kreisfrequenz omega aus der gemessenen Frequenz f
w=(2*np.pi/60)*np.array([685, 635, 585, 540, 490, 460, 425]) #1/min
dw=(2*np.pi/60)*np.ones(7)*20

#Anpassen einer Fit-Funktion
def exp(t, a, d):
    return a*np.exp(-d*t)

#Plotten der Funktion
fig = plt.figure()
fig.patch.set_facecolor('white')
plt.grid(True, which="both")
plt.yscale("log")
plt.xlabel("Zeit t [s]", fontsize="12")
plt.ylabel("log($\omega_F$) [$1/min$]", fontsize="12")
plt.title("Frequenz in Abhängigkeit der Zeit", fontsize="14")
plt.errorbar(t, w, xerr=dt, yerr=dw, fmt=".", label="Messwerte")
popt, pcov=curve_fit(exp, t, w, sigma=dt, absolute_sigma= True, p0=[0,0])
plt.plot(t, exp(t,*popt), color="orange", label="Fit")
plt.legend(loc="best")
a=popt[0]
da=np.sqrt(pcov[0][0])
d=popt[1]
dd=np.sqrt(pcov[1][1])
plt.savefig('A2.pdf',format='pdf')
print(a, da)
print("Dämpfungskonstante:", d, "+/-", dd)
```

```
#Berechnung der Halbwertszeit
T12=np.log(2)/d
dT12=dd*np.log(2)/d**2
print("Halbwertszeit= (",T12, "+/-", dT12, ")s")
```

```
71.85665087222974 1.4822149729617942
Dämpfungskonstante: 0.0006723323576653287 +/- 5.6184403780759746e-05
Halbwertszeit= ( 1030.9591270705698 +/- 86.15355666940192 )s
```



[3]:
```
#Eintragen der Messwerte
#Index u heißt Gewicht unten (15cm), o heißt oben (20cm); Index 1 oder 2 weißt␣
↪auf Anzahl der Gewichte

fu1=np.array([600, 500, 400, 300, 0]) #1/min
wu1=fu1*2*np.pi/60 #1/s
fo1=np.array([600, 500, 400, 300, 0])
wo1=fo1*2*np.pi/60
w_0=np.array([wu1, wo1])

#Präzessionsdauern in [s]
Tu1=np.array([261, 241, 195, 144, 0])
To1=np.array([211, 176, 142, 107, 0])
T=np.array([Tu1, To1,]) #s
```

```
df=10 #1/min
dw=df*2*np.pi/60 #1/s
dT=np.ones(5)*2
a=np.array([wu1, wo1])
w_T=a*np.exp(-d*T)
dw_T=np.sqrt((dw*np.exp(-d*T))**2+((-T)*a*dd*np.exp(-d*T))**2+((-d)*dT*a*np.
 ↪exp(-d*T))**2)
print("w_0:", w_0)
print("w_T:", w_T)

#mittlere Drehfrequenzen
w_m=(w_T+w_0)/2
dw_m=np.sqrt((dw_T/2)**2+(dw/2)**2)
print("mittlere Drehfrequenzen w_m:", w_m, "1/s")
print("Fehler der mittleren Drehfrequenzen dw_m:", dw_m, "1/s")
```

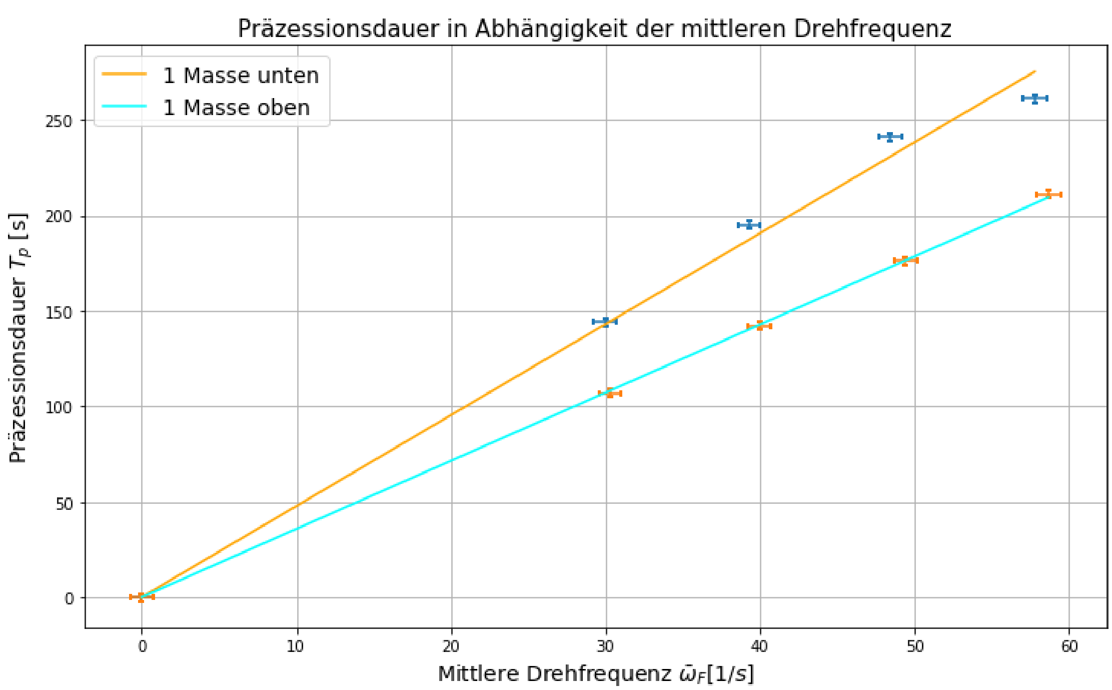
```
w_0: [[62.83185307 52.35987756 41.88790205 31.41592654  0.        ]
 [62.83185307 52.35987756 41.88790205 31.41592654  0.        ]]
w_T: [[52.71939498 44.52756806 36.7409612  28.51696346  0.        ]
 [54.52176785 46.51664045 38.07378001 29.23525712  0.        ]]
mittlere Drehfrequenzen w_m: [[57.77562403 48.44372281 39.31443162 29.966445
0.        ]
 [58.67681046 49.438259   39.98084103 30.32559183  0.        ]] 1/s
Fehler der mittleren Drehfrequenzen dw_m: [[0.78602551 0.75113339 0.72539339
0.71674587 0.74048049]
 [0.76575051 0.73784039 0.72414116 0.72088916 0.74048049]] 1/s
```

[4]:
```
mwu1=np.array([round(w_m.item(0),  2),  round(w_m.item(1),  2),  round(w_m.
 ↪item(2), 2),  round(w_m.item(3),  2), round(w_m.item(4),  2)])
mwo1=np.array([round(w_m.item(5),  2),  round(w_m.item(6),  2),  round(w_m.
 ↪item(7), 2),  round(w_m.item(8),  2), round(w_m.item(9),  2)])
dwu1=np.array([dw_m.item(0),dw_m.item(1),dw_m.item(2),dw_m.item(3),dw_m.
 ↪item(4)])
dwo1=np.array([dw_m.item(5),dw_m.item(6),dw_m.item(7),dw_m.item(8),dw_m.
 ↪item(9)])
```

[5]:
```
#Plotten der Graphen
#plt.figure(figsize=(30,30))
fig = plt.figure()
#fig.patch.set_facecolor('white')
fig.set_figwidth(12)
fig.set_figheight(7)
#eine Masse unten
def f(x, m):
    return m*x
popt, cov=curve_fit(f, mwu1, Tu1, sigma=dT)
plt.errorbar(mwu1, Tu1, xerr=dwu1, yerr=dT, capsize=2, capthick=2, ls='none')
```

```python
plt.plot(mwu1, f(mwu1,*popt), color='orange', label='1 Masse unten')
s1=popt[0]
ds1=np.sqrt(cov[0][0])
print('s_1=',popt[0])
print('ds_1', np.sqrt(cov[0][0]))
#eine Masse oben
def f(x, m):
    return m*x
popt, cov=curve_fit(f, mwo1, To1, sigma=dT)
plt.errorbar(mwo1, To1, xerr=dwo1, yerr=dT, capsize=2, capthick=2, ls='none')
plt.plot(mwo1, f(mwo1,*popt), color='cyan', label='1 Masse oben')
s2=popt[0]
ds2=np.sqrt(cov[0][0])
print('s_2=', popt[0])
print('ds_2=', np.sqrt(cov[0][0]))
plt.legend(loc='upper left', fontsize=14)
plt.xlabel('Mittlere Drehfrequenz $\\bar \\omega_{F} [1/s]$', fontsize=14)
plt.ylabel('Präzessionsdauer $T_{p}$ [s]', fontsize=14)
plt.grid()
plt.title('Präzessionsdauer in Abhängigkeit der mittleren Drehfrequenz',␣
 ↪fontsize=15)
plt.savefig('A3.pdf',format='pdf')
```

```
s_1= 4.765459886654027
ds_1 0.10658054634038874
s_2= 3.569535315625514
ds_2= 0.011823857295594136
```



[6]:

```python
#Berechnung der Trägheitsmomente
s=np.array([s1, s2]) #Steigungen
ds=np.array([ds1, ds2])
m=np.array([1, 1])*9.85/1000 #Masse des Gewichts in kg
l=np.array([0.15, 0.2]) #Position des Gewichts in m
g=np.ones(2)*9.81 #m/s^2
I=m*g*l*s/(2*np.pi) #kgm^2
dI=(m*g*l*ds)/(2*np.pi)
print('Trägheitsmomente:',I)
print('Fehler der Trägheitsmomente:', dI)
mI=(I.item(0)+I.item(1))/2
dmI=np.sqrt((dI.item(0)/2)**2+(dI.item(1)/2)**2)
print('gemittelter Wert des Trägheitsmoments I_z=', mI, '+/-', dmI)
```

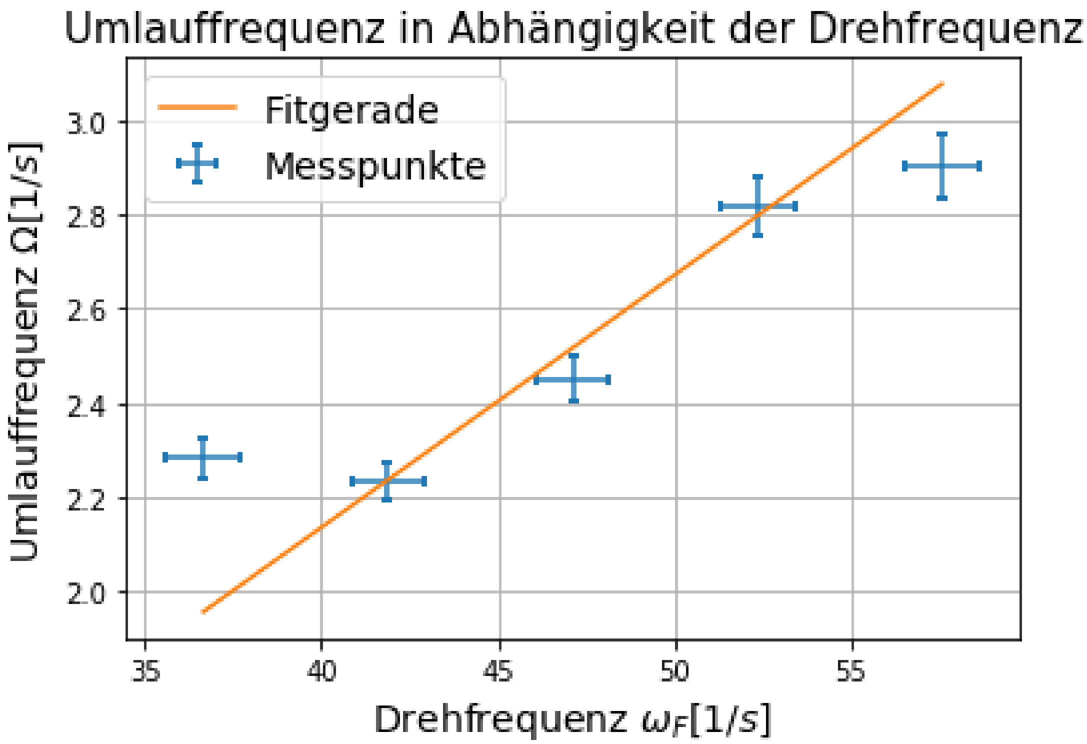
```
Trägheitsmomente: [0.01099313 0.01097911]
Fehler der Trägheitsmomente: [2.45863789e-04 3.63675919e-05]
gemittelter Wert des Trägheitsmoments I_z= 0.010986119937451527 +/-
0.0001242694699162309
```

[7]:

```python
T=np.array([21.64, 22.29, 25.64, 28.1, 27.53])
dT=np.ones(5)*0.5
O=10*2*np.pi/T #1/s, Farbwechselfrequenz
dO=10*2*np.pi*dT/T**2
w=np.array([550, 500,450,400,350])*2*np.pi/60 #1/s
dw=np.ones(5)*10*2*np.pi/60
print("Umlauffrequenz:", O, "+/-", dO)
print("Kreisfrequenz:", w, "+/-", dw)
plt.figure(figsize=(16,10))
fig = plt.figure()
fig.patch.set_facecolor('white')
plt.grid()
def f(x, m):
    return m*x
popt,cov=curve_fit(f, w, O, sigma=dw)
plt.errorbar(w, O, xerr=dw, yerr=dO, capsize=2, capthick=2, ls="none",␣
↪label="Messpunkte")
n=popt[0]
dn=np.sqrt(cov[0][0])
print("Steigung der Fitgeraden n:", popt[0], "+/-", np.sqrt(cov[0][0]))
plt.plot(w, f(w,*popt), label="Fitgerade")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlabel("Drehfrequenz $\omega_F [1/s]$", fontsize=14)
plt.ylabel("Umlauffrequenz $\Omega [1/s]$", fontsize=14)
plt.title("Umlauffrequenz in Abhängigkeit der Drehfrequenz", fontsize=15)
plt.savefig('A4.pdf',format='pdf')
```

```
Umlauffrequenz: [2.90350523 2.81883594 2.45054029 2.23600901 2.28230487] +/-
[0.06708653 0.06323095 0.04778745 0.03978664 0.04145123]
Kreisfrequenz: [57.59586532 52.35987756 47.1238898  41.88790205 36.65191429] +/-
[1.04719755 1.04719755 1.04719755 1.04719755 1.04719755]
Steigung der Fitgeraden n: 0.05340518237314473 +/- 0.0017549849525253308
```

```
<Figure size 1152x720 with 0 Axes>
```



[8]:
```python
#Berechnung des Trägheitsmoments I_x
I_z=mI
dI_z=dmI
ID=I_z/(n**(-1)-1)
dID=np.sqrt((dI_z/(n-1))**2+(I_z*dn/(n-1)**2)**2)
print('Delta I=', ID,'+/-', dID)
I_x=ID+I_z
dI_x=np.sqrt(dID**2+dI_z**2)
print('Trägheitsmoment I_x=', I_x,'+/-', dI_x)
```

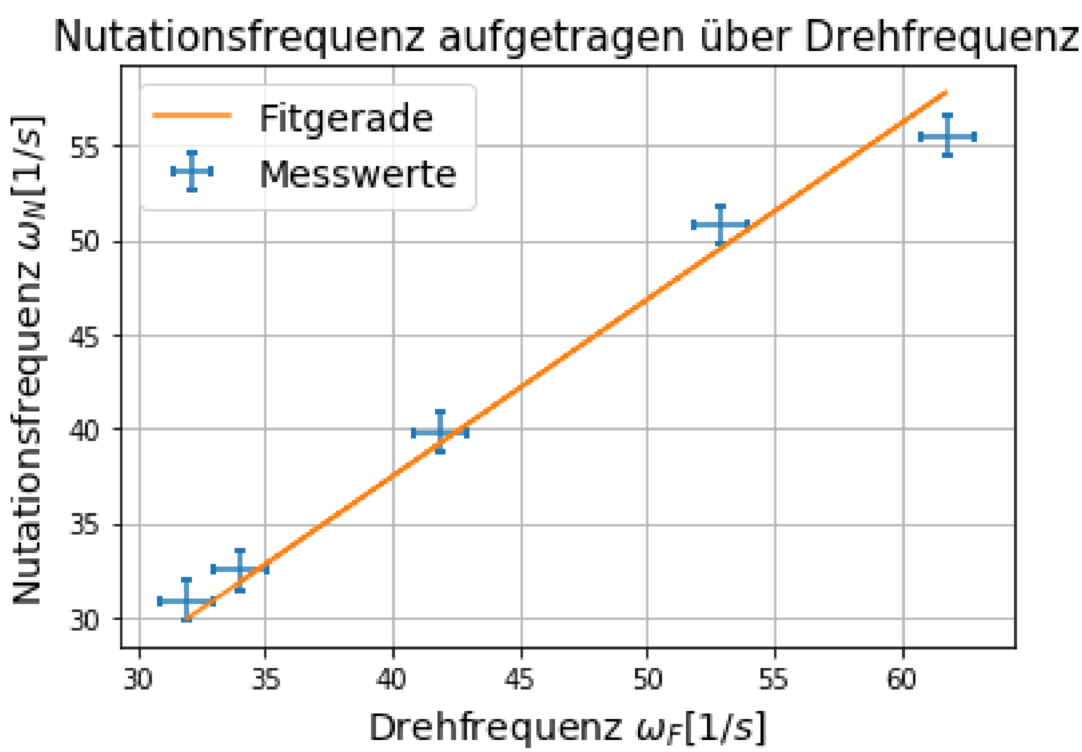
```
Delta I= 0.0006198171888408983 +/- 0.00013303223506094152
Trägheitsmoment I_x= 0.011605937126292425 +/- 0.00018204526008268004
```

[9]:
```python
w_F=np.array([325, 400, 505, 590, 305 ])*2*np.pi/60 #1/s
w_N=np.array([310, 380, 485, 530, 295 ])*2*np.pi/60 #1/s
```

```
dw_N=dw_F=np.ones(5)*20*np.pi/60
#Auftragen von w_N gegen w_F
plt.figure(figsize=(16,10))
fig = plt.figure()
fig.patch.set_facecolor('white')
plt.grid()
popt, cov=curve_fit(f, w_F, w_N, sigma=dw_N)
plt.errorbar(w_F, w_N, xerr=dw_F, yerr=dw_N, capsize=2, capthick=2, ls='none',␣
 ↪label='Messwerte')
plt.plot(w_F, f(w_F, *popt), label='Fitgerade')
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlabel('Drehfrequenz $\omega_F [1/s]$', fontsize=14)
plt.ylabel('Nutationsfrequenz $\omega_N [1/s]$', fontsize=14)
plt.title('Nutationsfrequenz aufgetragen über Drehfrequenz', fontsize=15)
n2=popt[0]
dn2=np.sqrt(cov[0][0])
print('Steigung der Fitgeraden n2=', popt[0],'+/-',np.sqrt(cov[0][0]))
plt.savefig('A5.pdf',format='pdf')
```

```
Steigung der Fitgeraden n2= 0.9361337111087799 +/- 0.014438564549151885
```

```
<Figure size 1152x720 with 0 Axes>
```



[10]:
```
#Berechung von I_x
I_x2=I_z*(n2)**(-1)
dI_x2=np.sqrt((dI_z*(n2)**(-1))**2+(I_z*dn2/(n2**2))**2)
print('Trägheitsmoment I_x2=' ,I_x2,'+/-' ,dI_x2)
```

```
Trägheitsmoment I_x2= 0.011735631146579793 +/- 0.00022446609892965086
```

[11]:
```
S=(I_x-I_x2)/(np.sqrt(dI_x**2+dI_x2**2))
print(S)
```

```
-0.44875613037044015
```

[ ]:
```
```