

Versuch 255

Röntgenspektrometer

Viktor Ivanov

23. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Motivation	2
1.2	Aufbau und Arbeitsprinzip einer Röntgenröhre	2
1.3	Übergänge der K-Serie	3
1.4	Bragg-Reflexion	3
1.5	Bestimmung der Avogadro Zahl	5
2	Messprotokoll und Durchführung des Versuchs	6
3	Auswertung	9
3.1	Bestimmung der Planck'sche Konstante h	9
3.2	Wellenlängen von K_α und K_β bestimmen	11
3.3	bestimmung der Planck'sche Konstante durch Extrapolation der Einsatzspannung	13
3.4	Röntgenspektrum mit NaCl Kristall	14
4	Zusammenfassung und Diskussion	16
4.1	Zusammenfassung	16
4.2	Diskussion	17
5	Anhang	18
5.1	Quellen	18
5.2	Python-Code	18

1 Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch werden wir ein Zählrohr-Goniometer verwenden, um die Röntgenspektren von LiF und NaCl zu untersuchen, die Planck'sche Konstante und die Avogadro Zahl zu bestimmen und noch einige Eigenschaften zu untersuchen.

1.2 Aufbau und Arbeitsprinzip einer Röntgenröhre

Die Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden, wie in Abbildung 1 gezeigt. Ein Modell der ersten Röntgenröhren befindet sich im Arbeitsraum.

Elektronen werden an der Glühkathode erzeugt. Sie werden durch eine Spannung in der Richtung der Anode beschleunigt und beim Aufprall werden durch das Coulombfeld abgebremst. Das Spektrum der verschiedenen Bremsenergien kann man in Abbildung 2 finden. Die Grenzwellenlänge λ_{gr} bezeichnet die Energie, wobei die kinetische

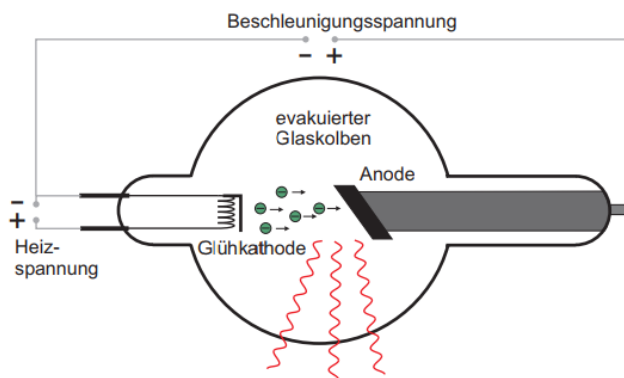


Abbildung 1: Aufbau einer Röntgenröhre

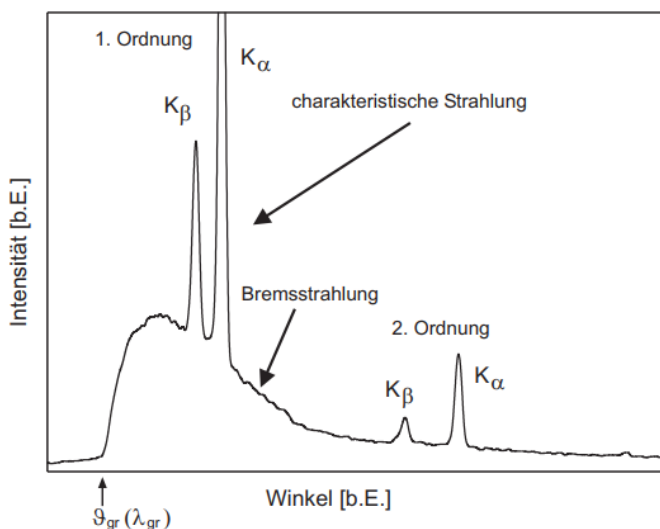


Abbildung 2: Röntgenspektrum

Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie $h\nu$ umgewandelt wird. Ein Elektron hat eine Energie:

$$E = eU \quad (1)$$

Wobei U die Spannung zwischen Kathode und Anode beträgt.
Für die Grenzwellenlänge gilt dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h\frac{c}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU} \quad (2)$$

Wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit betragen. Auf dem kontinuierlichen Spektrum ist ein diskretes, charakteristisches Linienspektrum überlagert. Wegen der Ionisation des Anodenmaterials wird Energie verloren, darüber sprechen wir im nächsten Absatz.

1.3 Übergänge der K-Serie

Die frei werdende Bindungsenergie von dem Elektronenübergang wird in Form eines Röntgenquants abgestrahlt. Wir sprechen von drei Typen von Strahlungen:

- K_α -Strahlung, beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale
- K_β -Strahlung, beim Übergang eines Elektrons von der M-Schale auf die K-Schale
- K_γ -Strahlung, beim Übergang eines Elektrons von der N-Schale auf die K-Schale

Der Moseley'schen Gesetz schätzt die Energie der charakteristischen Linien ab:

$$E_{n \rightarrow m} = hcR_\infty(Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3)$$

Wobei R_∞ die Rydbergkonstante und Z die Kernladungszahl und A eine Abschirmungskonstante sind. Die Rydbergkonstante beträgt $R_\infty = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}$. Bei K_α -Strahlung können wir $A = 1$ annähern, da der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt wird.

$$E_{2 \rightarrow 1} = hcR_\infty(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} hcR_\infty(Z - 1)^2 \quad (4)$$

Die Energie von z.B. Molybdän nach dem Moseley'schen Gesetz beträgt: $E = 17,2 keV$, was sehr nah zu dem Literaturwert von $E = 17,4 keV$ ist.

Alle Energieniveaus besitzen eine noch kleinere Feinstruktur, deren Energie von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt. Es gibt daher zwei verschiedene K_α -Übergänge:

- $L_{III} \Rightarrow K$, bezeichnet als $K_{\alpha 1}$
- $L_{II} \Rightarrow K$, bezeichnet als $K_{\alpha 2}$
- $L_{II} \Rightarrow K$ ist nicht möglich unter Berücksichtigung von Erhaltungssätzen

Die sind so dicht zusammen, dass wir sie nicht berücksichtigen. Man kann eine Darstellung in Abbildung 3 finden.

1.4 Bragg-Reflexion

Um eine Strahlungsquelle zu untersuchen, verwenden wir ein Prismenspektrometer bzw. ein Gitterspektrometer. Wir greifen auf das Prinzip der Beugung, um die Röntgenstrahlen zu untersuchen. Wir verwenden Kristalle, bei denen die Atomabstände der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge der Röntgenstrahlung sind. Die Beugung von solchen Kristallen bezeichnet man als Bragg-Reflexion, Abbildung 4 a). Eine Strahlung, die den Kristall unter dem Winkel ϑ trifft, wird von dem Reflexionsgesetz von der Oberfläche des Kristalls reflektiert. Es finden auch zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt.

Die Intensität der reflektierten Strahlung hängt von Δs ab. Wenn

$$\Delta s = n\lambda; n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

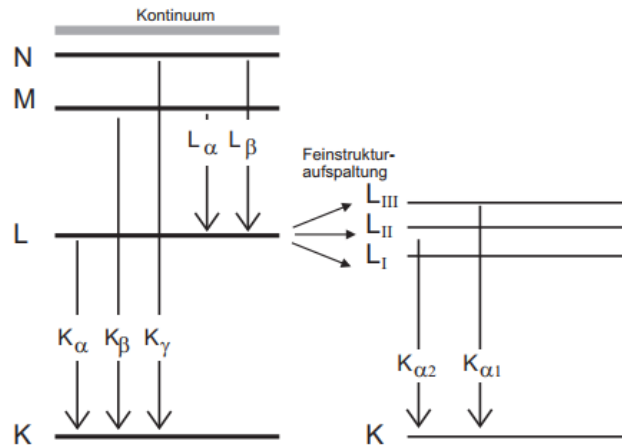


Abbildung 3: Energieniveaus von Molybdän

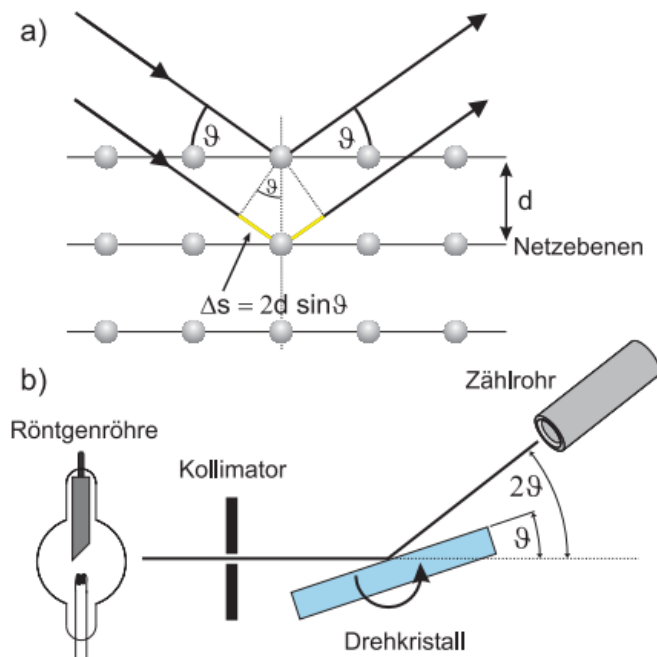


Abbildung 4: a) Bragg- Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Messung des Spektrums einer Röntgenröhre

interferieren die Teilbündel konstruktiv. Sonst löschen die teilreflektierten Strahlen aus. Wenn d der Netzebenenabstand ist, gilt für Δs aus Abbildung 4:

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \quad (6)$$

Der Bragg'sche Gesetz lautet aus 5 und 6:

$$2d \sin \vartheta = n\lambda ; n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

Die reflektierte Strahlung unter dem Winkel ϑ hängt von der Wellenlänge λ und von der Kristallstruktur. Wenn man den Winkel variiert, kann er die Intensität mithilfe eines Zählrohrs messen und dabei das Spektrum einer Strahlung messen. Das Spektrum in Abbildung 2 wurde so gemessen. Bei einer bekannten Wellenlänge kann man die Struktur des Kristalls messen.

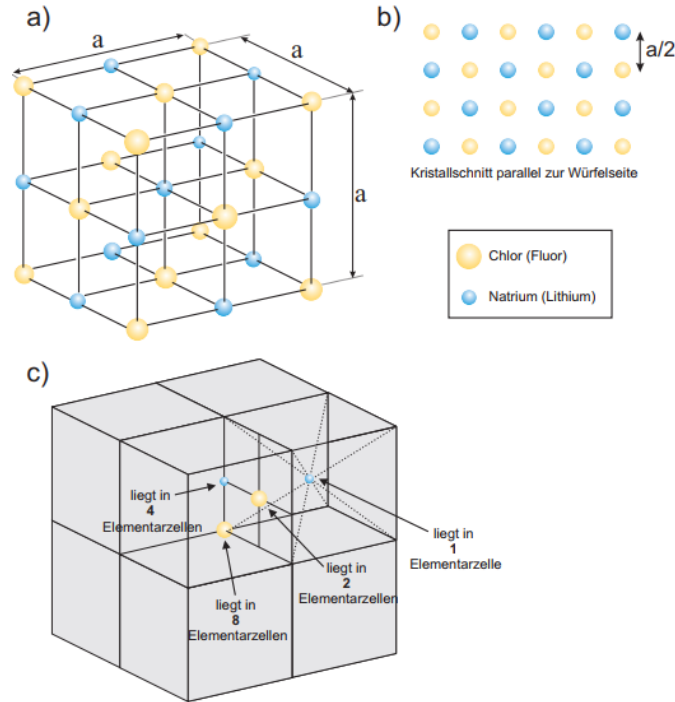


Abbildung 5: a) Elementarzelle b) Netzebenen c) Aufbau eines Kristalls durch Aneinandereihen von Elementarzellen

Ein Kristall ist streng periodisch aufgebaut. Die Kristalle NaCl und LiF, die wir verwenden werden, besitzen eine kubische Elementarzelle und besitzen gleich große Gitterkonstanten a . Bei beiden Kristallen ist die Kristalloberfläche parallel zur Seitenfläche der Elementarzelle ausgerichtet und daher der Netzebenenabstand der halben Gitterkonstante entspricht Abbildung 5 b).

1.5 Bestimmung der Avogadro Zahl

Im Versuch werden wir auch die Avogadro Zahl bestimmen. Dafür soll man das Volumen der Elementarzelle kennen und bestimmen, wie viele Atome einer Elementarzelle angehören. Es ist wichtig zu wissen, dass:

- Zentrale Atome einer einzelnen Zelle angehören
- Eckatome sind $\frac{1}{8}$ Bestandteil einer einzigen Elementarzelle (da sie Eckatome von noch 7 Zellen)
- Kantenatomen angehören zu $\frac{1}{4}$ einer Zelle

Das ist in Abbildung 5 c) veranschaulicht.

Wenn man das für Natrium und Chlor berechnet, erhält man: Chlor (Fluor): $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$

Natrium (Lithium): $12 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 4$

Daher gibt es 4 NaCl(LiF) pro Elementarzelle. Die Avogadro Zahl kann man mithilfe folgender Formel berechnen:

$$N_A = n \frac{V_{Mol}}{V} \quad (8)$$

Wobei n die Anzahl der Atome einer Elementarzelle beträgt, in unserem Fall $n = 4$. V_{Mol} ist das Molvolumen und V das Volumen einer Elementarzelle.

Mithilfe von dem Molgewicht M_{Mol} und der Dichte ρ können wir die Avogadro Zahl mit folgender Formel berechnen:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{(2d)^3} = 4 \frac{M_{Mol}}{\rho(2d)^3} = \frac{1}{2} \frac{M_{Mol}}{\rho d^3} \quad (9)$$

2 Messprotokol und Durchführung des Versuchs

Das Messprotokoll befindet sich auf der nächsten Seite.

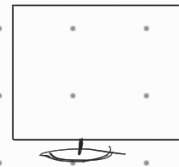
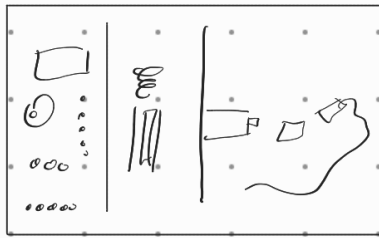
17.06.2024/

Versuch 255 Röntgenspektrometer

Danar Deutscher
Viktor Jovan

I Messaufbau

- Röntgengerät mit Röntgenöhre
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF- und NaCl-Kristall
- PC
- Leuchtschirm mit CCD-Kamera



Skizze 1: Messaufbau

A1 Wir haben den Röntgenspektrometer auf

$u = 35 \text{ kV}$, $I = 1 \text{ mA}$, $t = 5 \text{ s}$, $\Delta\beta = 0,2^\circ$ eingestellt

Wir haben dann eine Messung im Winkelbereich zw. 3° und 22° gemacht.

A2 Wir haben dieselben Messungen wie in A1 durchgeführt,

wobei $\Delta\beta = 0,1^\circ$ und $t = 20 \text{ s}$.

Die Winkelbereiche sind: $8 - 12^\circ$
 $19 - 22^\circ$

A3 Hier haben wir für den Winkel $\beta = 7,5^\circ$ die Spannungen zwischen 20 und 35 kV gemessen

$U [V]$	Zählrate [s^{-1}]
20	0,8
21	1,3
22	1,7
23	16,55
24	126,1
25	269,5
26	361,9
27	458,6
28	553,9
29	636,9
30	723,7
31	793,8
32	857,8
33	929,4
34	992,3
35	1047

A21) In dieser Aufgabe machen wir dasselbe wie in A11, aber mit einem NaCl-Kristall im Winkelbereich zw. 3° und 180°

17.06

A.C.B.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Planck'sche Konstante h

Im ersten Versuchsanteil, wie im Messprotokoll erklärt, haben wir das Röntgenspektrometer auf bestimmten Parametern eingestellt und eine Messung der Zahlrate zwischen den Winkeln 3° und 22° gemacht. Das gemessene Spektrum haben wir in einem Diagramm mithilfe von Python dargestellt, Abbildung 6.

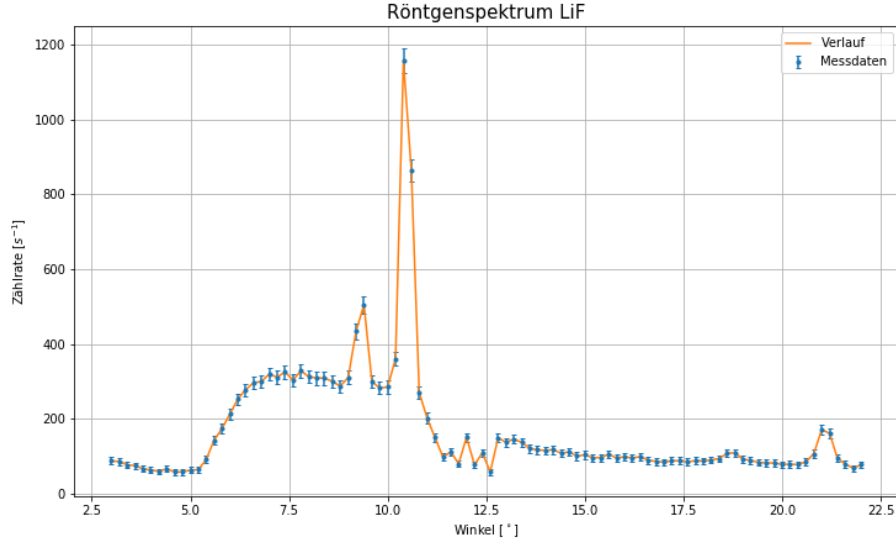


Abbildung 6: Gemessenen Röntgenspektrum

Ich habe den einigermaßen geraden Anstieg am kurzweiligen Ende bis zum Untergrund extrapoliert, wobei ich die gerade Funktion

$$y_1 = ax + b \quad (10)$$

auf der geraden Anstieg angepasst habe.

Der ausgewählten Bereich kann man in Abbildung 7 finden.

Für den Untergrund habe ich die Funktion

$$y_2 = c \quad (11)$$

angepasst.

Ich habe folgenden Parametern gemessen:

$$a = (187 \pm 14) \frac{\text{deg}}{\text{s}} \quad (12)$$

$$b = (-910 \pm 30) \frac{1}{\text{s}} \quad (13)$$

$$c = (67 \pm 8) \frac{1}{\text{s}} \quad (14)$$

Der Grenzwinkel befindet sich bei:

$$x = \vartheta = \frac{c - b}{a} \quad (15)$$

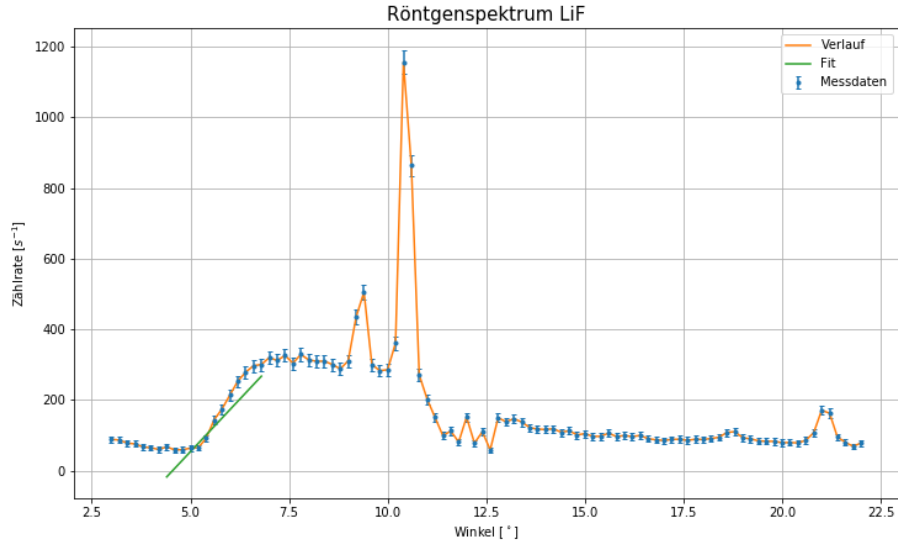


Abbildung 7: Ausgewählter zu interpolierenden Bereich

Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich der Fehler:

$$\Delta x = \Delta \vartheta = \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a(c-b)}{a^2}\right)^2} \quad (16)$$

Der Grenzwinkel beträgt

$$\vartheta_{gr} = (5,23 \pm 0,42)^\circ \quad (17)$$

Eine Darstellung der zwei angepassten Funktionen auf dem Diagramm kann man in Abbildung 8 finden.

Aus Gleichung 19 können wir die Grenzwellenlänge dann bestimmen. Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich folgender Fehler:

$$\Delta \lambda_{gr} = \sqrt{(2\Delta d \sin \vartheta)^2 + (2d \cos \vartheta \Delta \vartheta)^2} \quad (18)$$

Die Grenzwellenlänge beträgt dann:

$$\boxed{\lambda_{gr} = (36,7 \pm 2,9) \text{ pm}} \quad (19)$$

Die Planck'sche Konstante bestimmt man nach Gleichung 2:

$$h = \frac{eU\lambda_{gr}}{c} \quad (20)$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta h = h \frac{\Delta \lambda_{gr}}{\lambda_{gr}} \quad (21)$$

Die Planck'sche Konstante beträgt

$$\boxed{h_1 = (6,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-34} \text{ Js}} \quad (22)$$

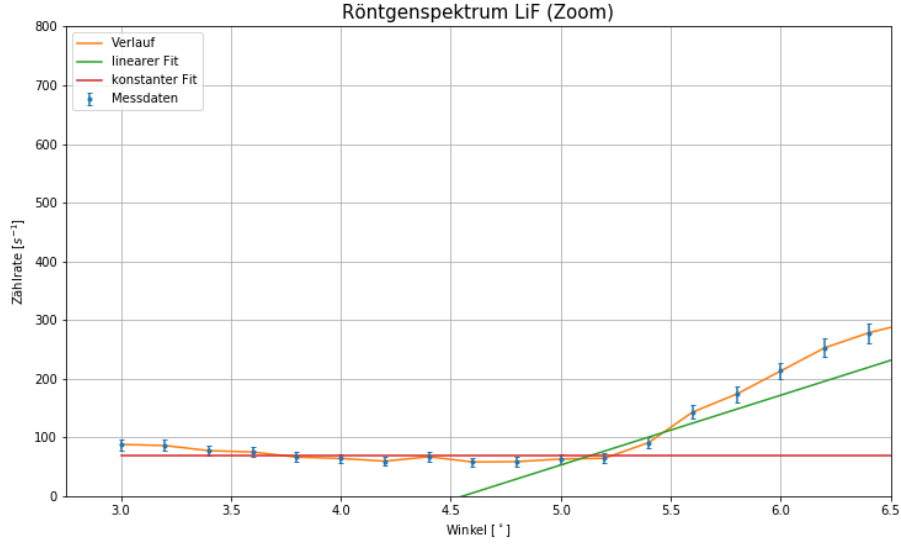


Abbildung 8: Extrapolation der Anstieg der kurzwelligen Ende

Die σ -Abweichung zwischen unseren und dem Literaturwert beträgt

$$\sigma_{h,1} = 0,43\sigma \quad (23)$$

Das Ergebnis besprechen wir in der Diskussion.

Zur Ende berechnen wir aus der Stelle des Beginns des Spektrums, ab welchen Winkel das Spektrum zweiter Ordnung einsetzt. Dabei verwenden wir wieder das Braggsche Gesetz, Gleichung 19, aber mit der Ordnung $n = 2$. Der Winkel beträgt:

$$\vartheta_2 = \arcsin\left(\frac{\lambda_{gr}}{d}\right) \quad (24)$$

Der Fehler nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung beträgt:

$$\Delta\vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{gr}}{d}\right)^2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda_{gr}}{d}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_{gr}\Delta d}{d^2}\right)^2} \quad (25)$$

Der Winkel, bei denen das Spektrum zweiter Ordnung einsetzt beträgt:

$$\vartheta_2 = (10,5 \pm 0,84)^\circ \quad (26)$$

3.2 Wellenlängen von K_α und K_β bestimmen

Im zweiten Versuchsteil haben wir genauere Messungen von den beiden Ordnungen der charakteristischen Strahlung gemacht.

Zuerst wollen wir die Wellenlängen von K_{alpha} und K_β bestimmen. Um das zu machen, bestimmen wir bei welchen Winkel sich die zwei Peaks befinden. Für 1. Ordnung kann man das in Abbildung 9 finden. Die Winkeln bei 1. Ordnung betragen:

$$K_{\beta,1} = (9,0 \pm 0,1)^\circ \quad (27)$$

$$K_{\alpha,1} = (10,2 \pm 0,1)^\circ \quad (28)$$

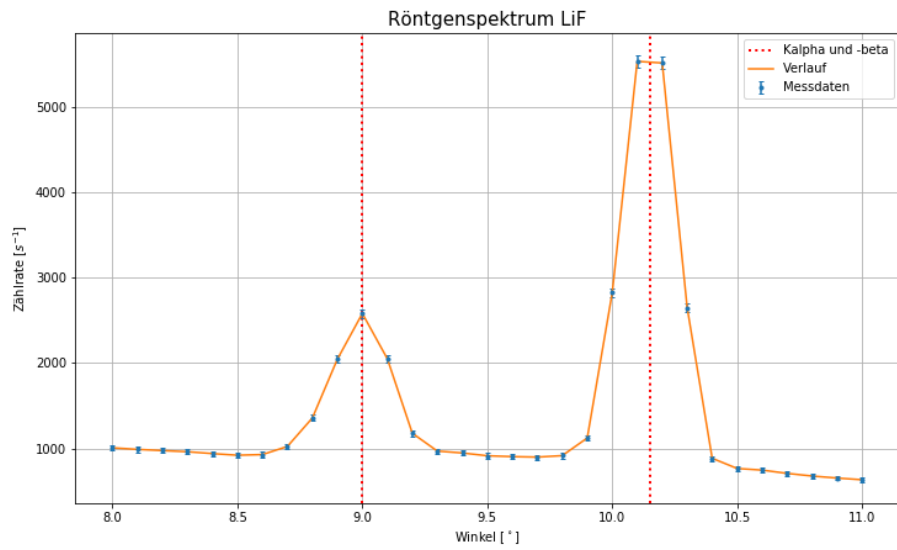


Abbildung 9: Bestimmung der zwei Peaks 1. Ordnung

Analog finden wir die Winkel für die zweite Ordnung, Abbildung 10. Die Winkeln bei 2. Ordnung betragen:

$$K_{\beta,2} = (18,3 \pm 0,1)^{\circ} \quad (29)$$

$$K_{\alpha,2} = (20,6 \pm 0,1)^{\circ} \quad (30)$$

Dann nach Gleichung 19 können wir die Wellenlängen berechnen. Der Mittelwert von 1. und 2. Ordnung beträgt:

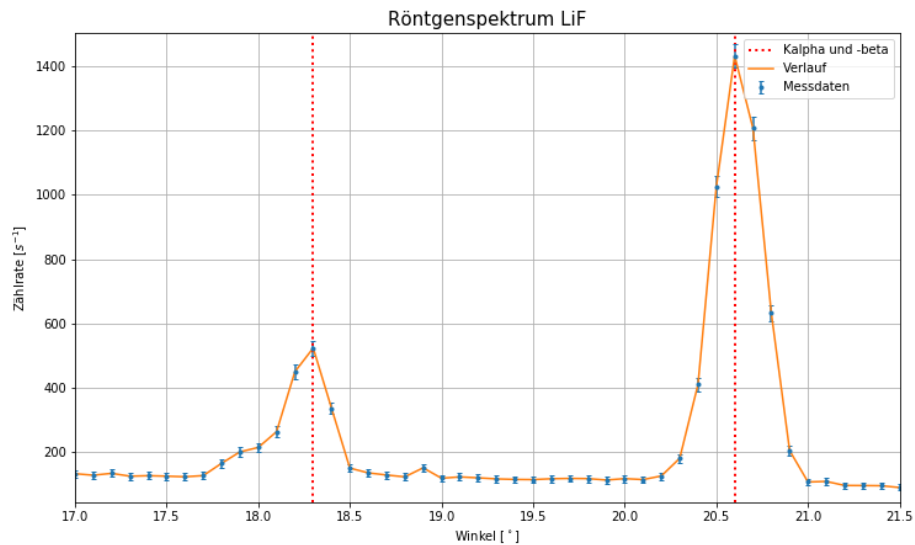


Abbildung 10: Bestimmung der zwei Peaks 2. Ordnung

$$\lambda_{\alpha} = (70,1 \pm 0,5)pm \quad (31)$$

$$\lambda_{\beta} = (63,3 \pm 0,5)pm \quad (32)$$

Um für die erste Ordnung die Halbwertsbreite der K_{α} Linie zu bestimmen sollen wir eine Gaußkurve dem K_{α} Peak anpassen (Abbildung 11). Die Halbwertsbreite berechnet man mithilfe folgender Formel:

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma$$

$$\Delta FWHM = FWHM \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \quad (33)$$

Die Halbwertsbreite kommt zu:

$$FWHM = (0,242 \pm 0,007)^{\circ} \quad (34)$$

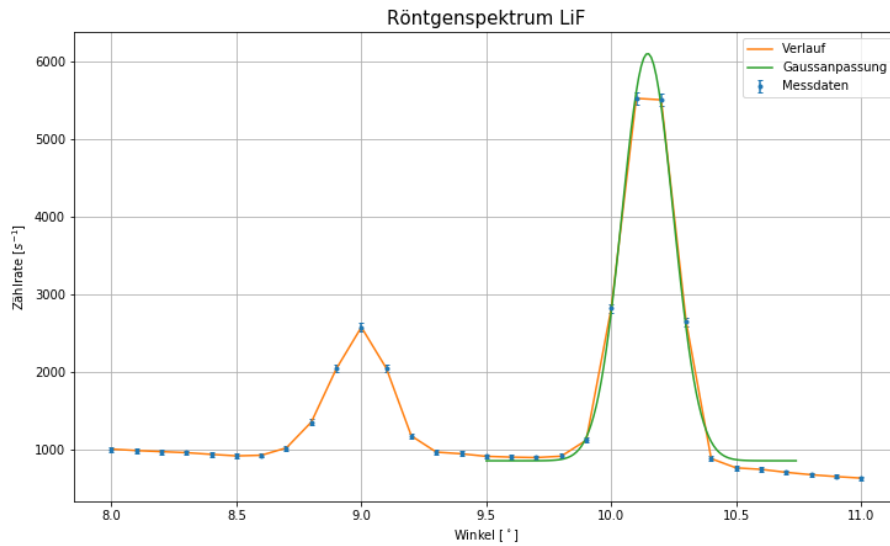


Abbildung 11: Angepasste Gaußkurve des K_{α} Peaks

3.3 bestimmung der Planck'sche Konstante durch Extrapolation der Einsatzspannung

Im nächsten Versuchsteil haben wir die Zählrate in Abhängigkeit von der Spannung gemessen. Wir suchen die Planck'sche Konstante. Um sie zu bestimmen, formen wir Gleichung 2 um in:

$$h = \frac{\lambda eU}{c} \quad (35)$$

mit dem Fehler

$$\Delta h = h \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \quad (36)$$

Wobei U die Einsatzspannung ist.

Um die Einsatzspannung zu bestimmen habe ich eine Gerade Funktion auf der linearen Teil der Messwerten angepasst, Abbildung 12. Die Nullstelle dieser Funktion ist dabei die Einsatzspannung. Analog zu oben beträgt die

Funktion:

$$x = aU + b \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow U = -\frac{b}{a} \quad (37)$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta U = U \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2} \quad (38)$$

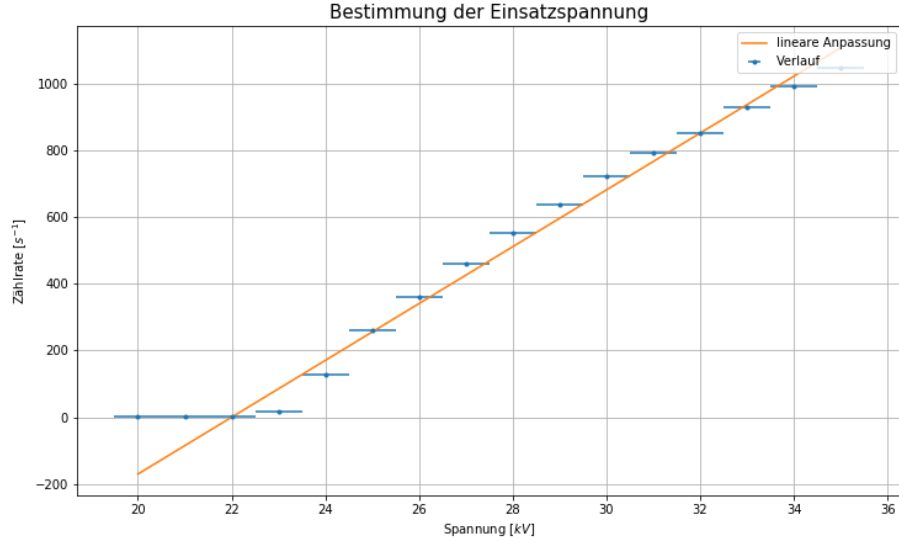


Abbildung 12: Angepasste gerade Funktion auf der Zählrate-Spannungsmessung

Die Planck'sche Konstante bei Winkel $\beta = 7,5^\circ$ nach 35 beträgt:

$$h_2 = (6,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} Js \quad (39)$$

Die σ -Abweichung zwischen unseren und dem Literaturwert beträgt

$$\sigma_{h,2} = 0,996\sigma \quad (40)$$

Das Ergebnis besprechen wir in der Diskussion.

3.4 Röntgenspektrum mit NaCl Kristall

Im letzten Versuchsteil haben wir analog zum ersten Versuchsteil das Spektrum einer NaCl Kristall gemessen.

Wir wollen die Lagen von den K_α und K_β -Linien bestimmen. Das Röntgenspektrum kann man in Abbildung 13 finden.

Analog zum letzten Abschnitt bestimmen wir die Lage der Peaks, Abbildungen 14 und 15. Die Winkeln betragen:

$$K_{\beta,1} = (6,4 \pm 0,1)^\circ \quad (41)$$

$$K_{\alpha,1} = (7,2 \pm 0,1)^\circ \quad (42)$$

$$K_{\beta,2} = (12,8 \pm 0,1)^\circ \quad (43)$$

$$K_{\alpha,2} = (14,4 \pm 0,1)^\circ \quad (44)$$

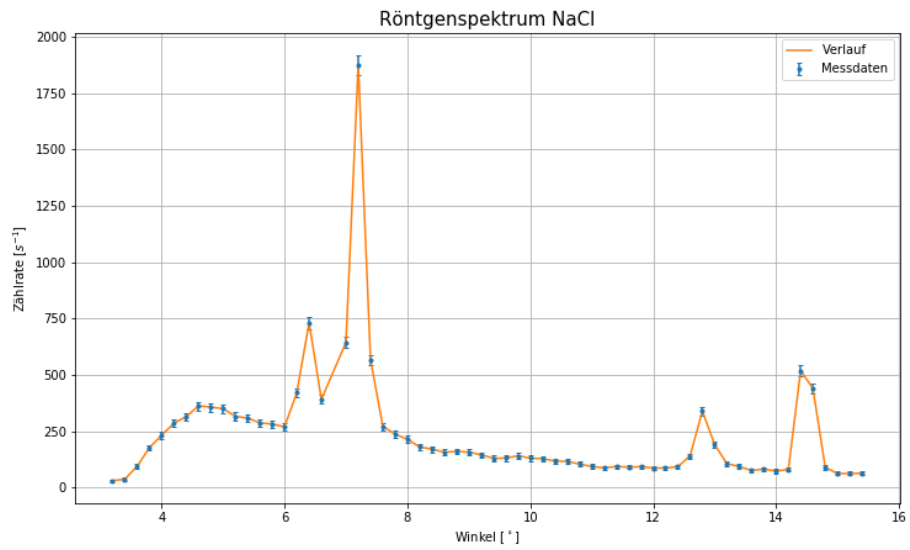


Abbildung 13: NaCl Röntgenspektrum

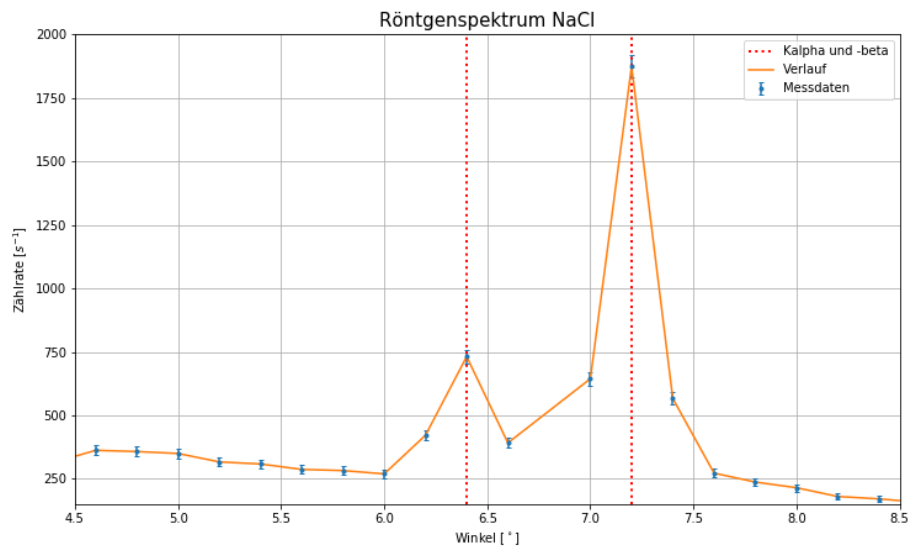


Abbildung 14: Bestimmung der zwei Peaks von NaCl 1. Ordnung

Wir können die Gitterkonstante mithilfe folgender Formel bestimmen:

$$g = \frac{n\lambda}{2\sin\vartheta} \quad (45)$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{n\Delta\lambda}{2\sin\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{n\Delta\vartheta\lambda\cos\vartheta}{2\sin\vartheta}\right)^2} \quad (46)$$

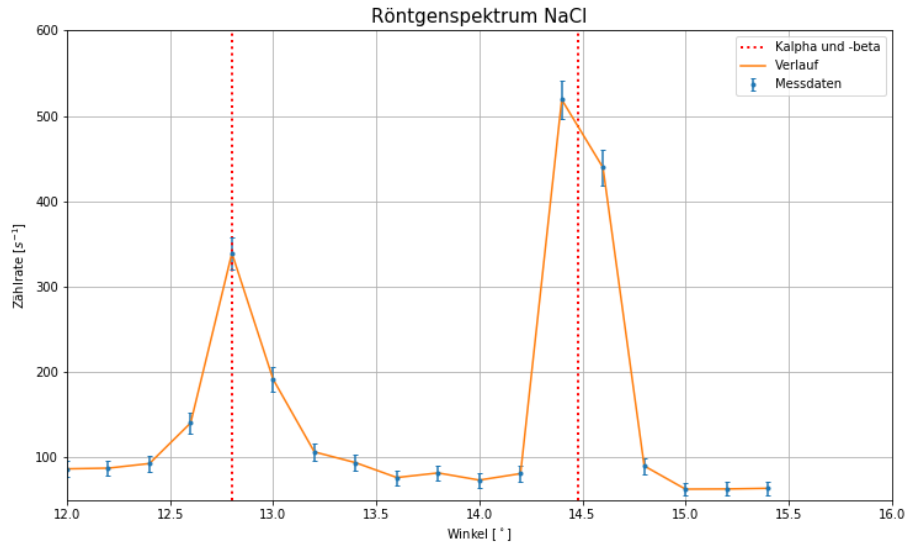


Abbildung 15: Bestimmung der zwei Peaks von NaCl 2. Ordnung

Der Mittelwert der von uns bestimmten Gitterkonstanten lautet:

$$g = (5,67 \pm 0,05) \cdot 10^{-10} m \quad (47)$$

Endlich können wir auch die Avogadro Zahl bestimmen mithilfe folgender Formel:

$$N_A = \frac{4M_{mol}}{\rho g^3} \quad (48)$$

Der Fehler beträgt:

$$\Delta N_A = N_A \frac{3\Delta g}{g} \quad (49)$$

Die Avogadro Zahl beträgt:

$$N_A = (5,92 \pm 0,15) \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} \quad (50)$$

Die σ -Abweichung zwischen unseren und dem Literaturwert beträgt

$$\sigma_{N_A} = 0,67\sigma \quad (51)$$

Das Ergebnis besprechen wir in der Diskussion.

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung der Durchführung des Versuchs befindet sich im Messprotokoll.

In der Auswertung haben wir am Anfang die gemessenen Daten aus der Messung des Spektrums einer Röntgenröhre

in einer Python Diagramm dargestellt, Abbildung 6, danach zwei Funktionen an den einigermaßen geraden Anstieg am kurzwelligen Ende bis zum Untergrund angepasst und ihre Parameter bestimmt. Daraus haben wir den Grenzwinkel bestimmt und danach auch die Grenzwellenlänge, Gleichung 19. Zum Schluss haben wir die Planck'sche Konstante 22 und den Winkel, bei denen das Spektrum zweiter Ordnung einsetzt, 26 bestimmt.

Im zweiten Versuchsteil haben wir zuerst die Winkeln von den K_α und K_β -Linien in der ersten und zweiten Ordnung bestimmt und daraus die Wellenlängen von K_α und K_β , λ_α und λ_β , 31 und 32. Zum Schluss haben wir auch die Halbwertsbreite der K_α -Linie bestimmt, wobei wir eine Gauß-Kurve angepasst haben, 34.

Im nächsten Versuchsanteil haben wir die Planck'sche Konstante durch Extrapolation der Einsatzspannung bestimmt. Um das zu machen, brauchten wir zuerst die Einsatzspannung zu berechnen, wobei wir analog zum ersten Teil eine gerade Kurve angepasst haben und dann den Wert für eine Nullzahlrate ist die Einsatzspannung. Die Planck'sche Konstante kann man in 39 finden.

Im letzten Versuchsteil haben wir analog zu den anderen Teilen die Lagen der Peaks bestimmt und daraus die Gitterkonstante. Daraus konnten wir die Avogadro Zahl, 50 berechnen.

4.2 Diskussion

Wie schon in der Einleitung erwähnt, der Zählrohr-Goniometer ist ein ziemlich präzises Gerät, obwohl dieser in der PAP2.2 nicht einer der neuesten ist. Wir erwarten daher, dass die Ergebnisse einigermaßen präzise sind, besonders bei der langen, zweiten Messung.

Im ersten Teil haben wir eine Messung der Planck'sche Konstante, die $h = (6,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-34} Js$ beträgt. Das entspricht einem relativen Fehler von $\Delta_{rel}h = 7,2\%$. Das ist kein großer Fehler, aber eine Messapparatur mit solchen Fehlern könnte nicht für industrielle Zwecke verwendet werden.

Die σ -Abweichung beträgt $\sigma_{h,1} = 0,43\sigma$, was unter 1σ ist und dabei ist die Abweichung insignifikant.

Bei dem zweiten Teil haben wir die Wellenlängen von K_α und K_β , λ_α und λ_β bestimmt. Ihre Literaturwerten betragen $\lambda_{\alpha,lit} = 71,1 pm$ und $\lambda_{\beta,lit} = 63,1 pm$. Die σ -Abweichungen betragen daher $\sigma_\alpha = 0,37\sigma$ und $\sigma_\beta = 0,05\sigma$. Beide sind unter 1σ und daher ist die Abweichung insignifikant. Die relative Fehler betragen weniger als 1%, was wie oben erwähnt, erwartet wurde.

Bei der Messung von den Spannungen haben wir eine Planck'sche Konstante von $h_2 = (6,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} Js$ berechnet. Die σ -Abweichung zwischen diesem und dem Literaturwert beträgt $\sigma_{h,2} = 0,996\sigma$. Das ist kleiner als 1σ , aber die Abweichung ist ein bisschen signifikanter als die vorherige.

Wir sehen, dass der Fit nicht sehr gut angepasst ist, das könnte daran liegen, dass der Spannungsgenerator nicht sehr präzise war. Ich glaube nicht, dass die statistische Natur der Strahlung der Grund für die ungenaue Messung in diesem Abschnitt ist, sondern eher die Ungenauigkeit der Messinstrumente. Wenn die Zeitintervalle kleiner sind und der Zeitraum größer wird, behaupte ich, dass die Messung genauer sein wird.

Bei der Messung mit dem $NaCl$ -Kristall haben wir eine Planck'sche Konstante von $N_A = (5,92 \pm 0,15) \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$ berechnet. Der relative Fehler beträgt $\Delta_{rel}N_A = 2,5\%$, was ziemlich genau ist. Die Messung war auch bei einigermaßen großen $\Delta\beta = 0,1^\circ$ gemessen. Wenn die Winkelabschnitte größer wären, würde das Ergebnis sogar genauer sein. Die σ -Abweichung zwischen unseren und dem Literaturwert beträgt $\sigma_{N_A} = 0,67\sigma$, was weniger als 1σ ist und dabei ist die Abweichung insignifikant.

Im Allgemeinen war dieser Versuch sehr interessant, besonders weil wir ein Gerät, das aktuell in der Industrie verwendet wird, benutzt haben.

5 Anhang

5.1 Quellen

Alle Informationen, die ich im Protokoll verwendet habe, stammen aus der Praktikumsanleitung, Ausgabe 4.2023.

5.2 Python-Code

Der Python-Code befindet sich auf der nächsten Seite.

June 23, 2024

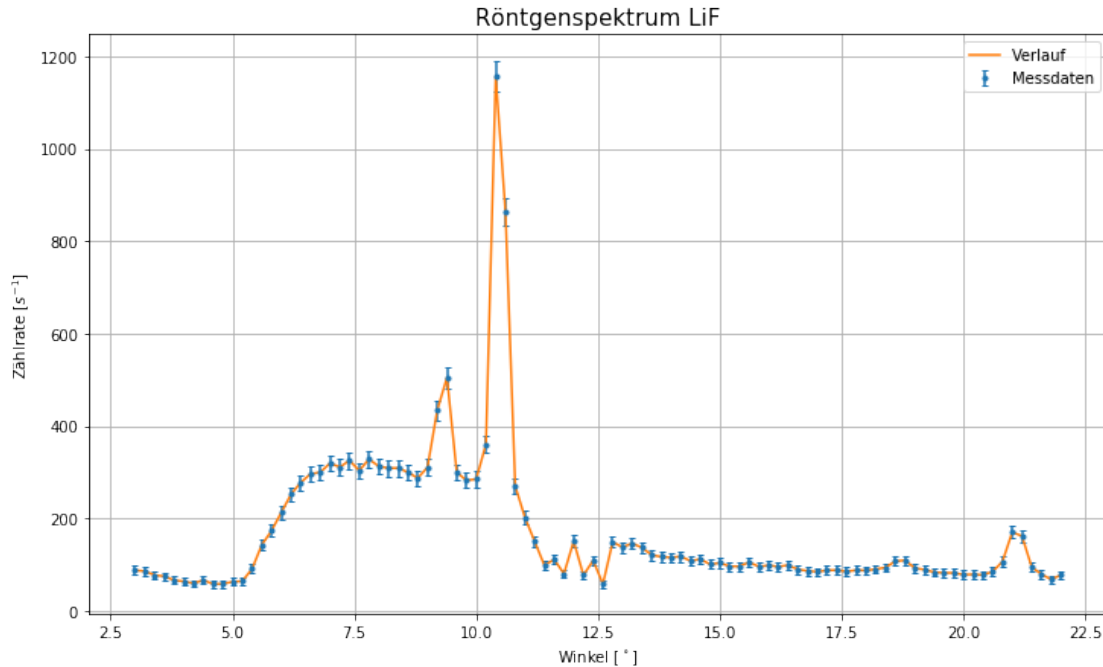
Viktor Ivanov, Versuch 255, Röntgenspektrometer

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
from scipy.optimize import curve_fit
def literatur_Vergleich(name,mess,sig_mess,lit,sig_lit):
    print(name," : ")
    print("Absolute Abweichung: ",np.abs(mess-lit))
    print("Sigma: ",np.abs(mess-lit)/np.sqrt(sig_mess**2 + sig_lit**2))
```

```
[2]: #Extrapoliere geraden Anstieg bis zum Untergrund
wink, intensity = np.loadtxt("Daten/Aufgabe 1 a)1.
    ↳txt",delimiter="      ",dtype=str,unpack=True)
wink = np.char.replace(wink,"",".").astype(float)
intensity = np.char.replace(intensity,"",".").astype(float)

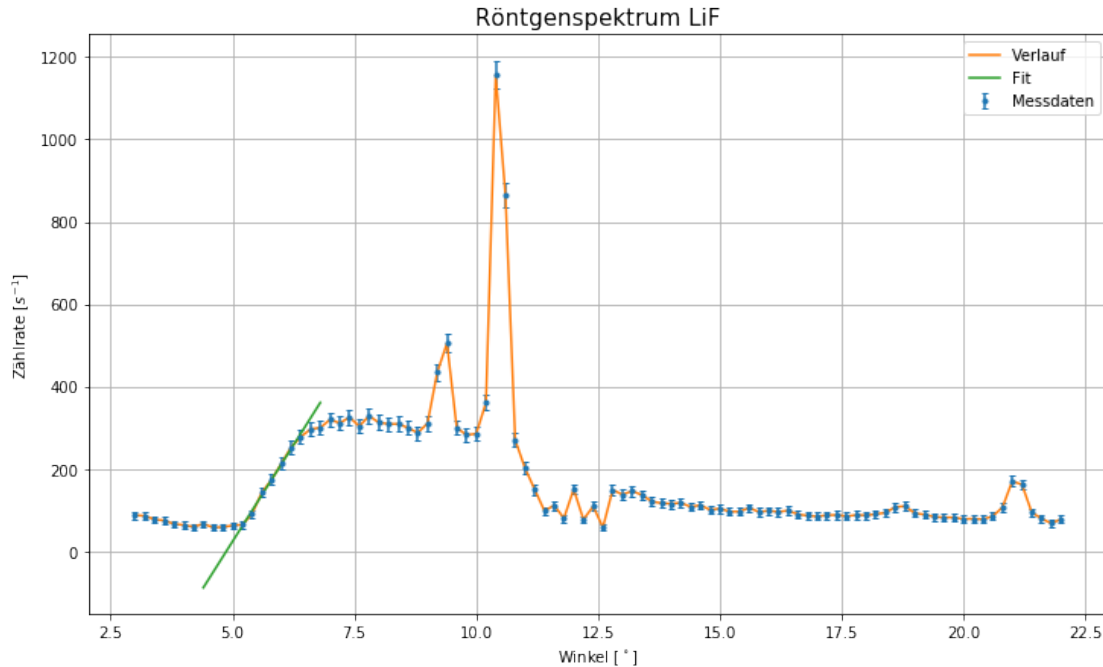
sig_intensity = np.sqrt(intensity)

plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label_
    ↳="Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum LiF",size=15)
plt.xlabel("Winkel [$^\circ$]")
plt.ylabel("Zählrate [$s^{-1}$]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("GesamtesRöntgenLiFSpektrum.png")
```



```
[3]: #Lineare Extrapolation
def line(x,a,b):
    return a*x+b
#Beschränke Fitparameter auf linearen Bereich
popt,pcov = curve_fit(line,wink[11:15],intensity[11:15],sigma=sig_intensity[11:
↳15])
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label="
↳"Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
plt.plot(wink[7:20],line(wink[7:20],*popt),label="Fit")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum LiF",size=15)
plt.xlabel("Winkel [°]")
plt.ylabel("Zählrate [s⁻¹]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("GesamtesRöntgenLiFSpektrummitGeradenextrapolation.png")
#Fitparameter ausgeben:
print("y = ax + b")
print("a=",popt[0],"+/-",np.sqrt(popt[0]))
print("b=",popt[1],"+/-",np.sqrt(-popt[1]))
```

```
y = ax + b
a= 187.05237481666285 +/- 13.676709210064491
b= -910.6693587730298 +/- 30.177298732209778
```



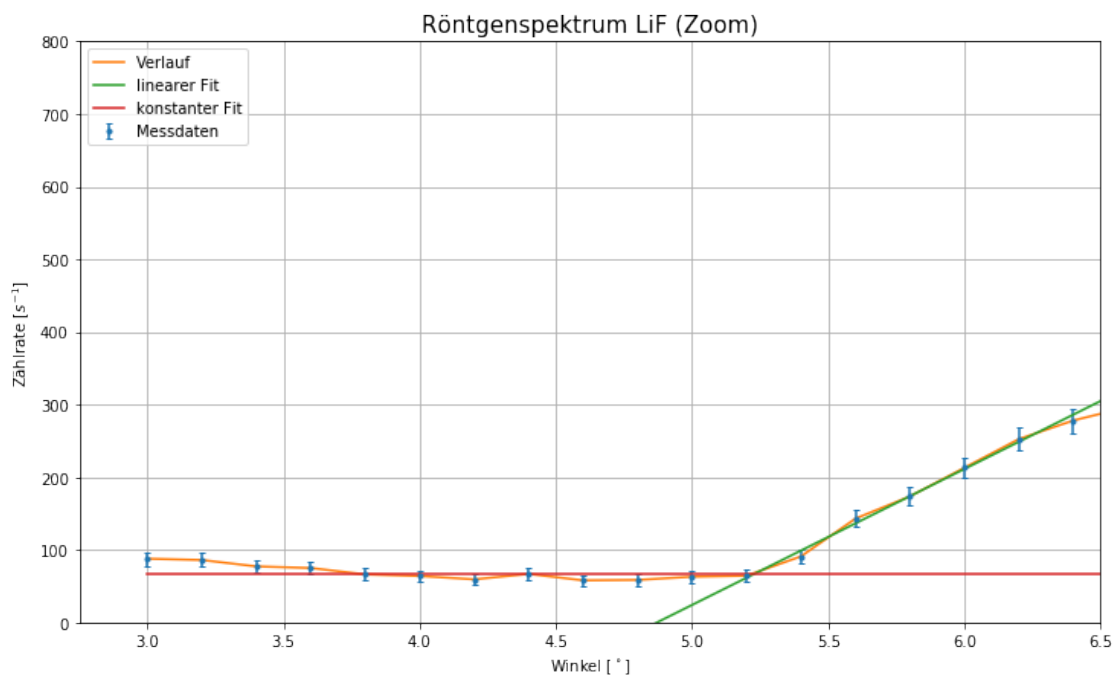
```
[4]: #Passe Konstante Funktion dem Untergrund an
def konstant(x,c):
    return c+x*0
popt_kon,pcov_kon = curve_fit(konstant,wink[1:11],intensity[1:
    ↳11],sigma=sig_intensity[1:11])
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label="
    ↳="Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
plt.plot(wink[7:20],line(wink[7:20],*popt),label="linearer Fit")
plt.plot(wink[0:20],konstant(wink[0:20],*popt_kon),label="konstanter Fit")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum LiF (Zoom)",size=15)
plt.xlabel("Winkel [ $^{\circ}$ ]")
plt.ylabel("Zählrate [ $s^{-1}$ ]")
plt.xlim(2.75,6.5)
plt.ylim(0,800)
plt.legend(loc="upper left")
plt.savefig("ZoomLiFGeradenundKonst.png")
#Fitparameter ausgeben:
print("y_1 = ax + b")
print("a=",popt[0],"+/-",np.sqrt(popt[0]))
print("b=",popt[1],"+/-",np.sqrt(-popt[1]))
#Fitparameter ausgeben:
print("y_2 = c")
```

```

print("c=",popt_kon[0], "+/-",np.sqrt(popt_kon[0]))
a=popt[0]
sig_a = np.sqrt(popt[0])
b=popt[1]
sig_b=np.sqrt(-popt[1])
c = popt_kon[0]
sig_c = np.sqrt(popt_kon[0])
#Ermittle Schnittpunkt
xgr = (c-b)/a
sig_xgr = np.sqrt((sig_c/a)**2 + (sig_b/a)**2 + (sig_a*(c-b)/a**2)**2)
print("Grenzwinkel theta=",np.round(xgr,2), "+/-",np.round(sig_xgr,2))

```

$y_1 = ax + b$
 $a = 187.05237481666285 \pm 13.676709210064491$
 $b = -910.6693587730298 \pm 30.177298732209778$
 $y_2 = c$
 $c = 66.79361545885924 \pm 8.172736106033232$
 Grenzwinkel $\theta = 5.23 \pm 0.42$



```

[5]: d = 201.4e-12 #Netzebenenabstand
sig_d = 0
e = 1.6022e-19
U = 35e3 #V
c = 2.9979e8
#Grenzwellenlänge

```

```

lamgr = 2*d*np.sin(np.deg2rad(xgr))
sig_lamgr = np.sqrt((2*sig_d*np.sin(np.deg2rad(xgr)))**2 + (2*d*np.cos(np.
    ↳deg2rad(xgr))*np.deg2rad(sig_xgr))**2)
print("Grenzwellenlänge [pm]",np.round(lamgr/10**(-12),2),"+/-",np.
    ↳round(sig_lamgr/10**(-12),2))
#Planck-Konstante
h = e*U*lamgr/c
sig_h = sig_lamgr*h/lamgr
print("Planck-Konst. h e-34",np.round(h/10**(-34),4),"+/-",np.round(sig_h/
    ↳10**(-34),4))
#Ab welchem Winkel Spektrum 2te Ordnung
x2 = np.rad2deg(np.arcsin(lamgr/(d)))
sig_x2 = np.rad2deg(1/np.sqrt(1-(lamgr/(d))**2)*np.sqrt((sig_lamgr/(d))**2)
    ↳+(lamgr*sig_d/(d**2))**2))
print("tehta_2 ",np.round(x2,2),"+/-",np.round(sig_x2,2))

```

Grenzwellenlänge [pm] 36.69 +/- 2.92
 Planck-Konst. h e-34 6.8623 +/- 0.5461
 tehta_2 10.5 +/- 0.84

```

[6]: #Vergleich Planck Konst. mit Litwert
literatur_Vergleich("h1 ",h,sig_h,6.6261e-34,0)

```

h1 :
 Absolute Abweichung: 2.3619352494498976e-35
 Sigma: 0.4324783622817526

```

[7]: #Bestimmung von Kalpha und Kbeta su den Messungen in beiden Ordnungen
wink, intensity = np.loadtxt("Daten/aufgabe 2 1.Ordnung.
    ↳txt",delimiter=" ",dtype=str,unpack=True)
wink = np.char.replace(wink,",",".").astype(float)
intensity = np.char.replace(intensity,",",".").astype(float)

sig_intensity = np.sqrt(intensity)

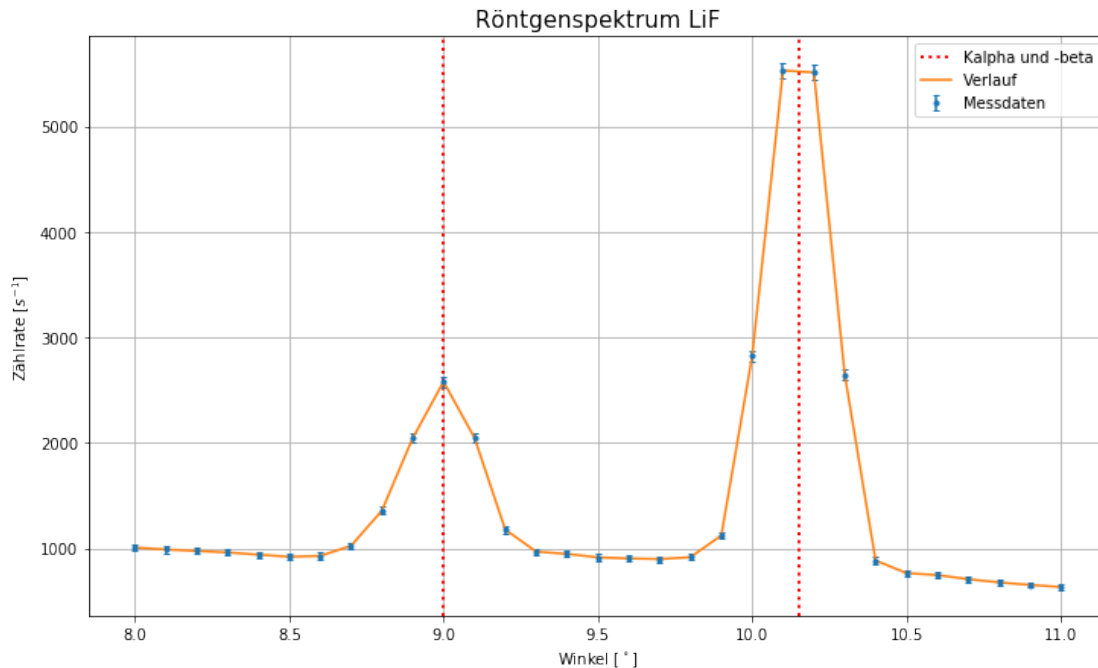
def linien(serien_name, serie, col, style):
    plt.axvline(serie[0], label = serien_name, color = col,linestyle =
    ↳style,linewidth = 2)
    for i in serie[1:]:
        plt.axvline(i, color = col, linestyle = style, linewidth = 2)

#win_al_bet = np.array([9.2,10.2,18.4,20.6])

win_al_bet = np.array([9,10.15])
plt.figure(figsize=(12,7))
linien('Kalpha und -beta',win_al_bet , 'red', ':')

```

```
plt.errorbar(wink, intensity, yerr=sig_intensity, fmt=".", label_u
↳="Messdaten", capsize=2)
plt.plot(wink, intensity, label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum LiF", size=15)
plt.xlabel("Winkel [ $^{\circ}$ ]")
plt.ylabel("Zählrate [ $s^{-1}$ ]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("KalphaundbetaLinienLiFSpektrum.png")
```



```
[8]: #Berechnung Wellenlängen mit dem Braggschen Gesetz
sig_win_al_bet = 0.1
lamgr = 2*d*np.sin(np.deg2rad(win_al_bet))
sig_lamgr = np.sqrt((2*sig_d*np.sin(np.deg2rad(win_al_bet)))**2 + (2*d*np.
↳cos(np.deg2rad(win_al_bet))*np.deg2rad(sig_win_al_bet))**2)
print("Wellenlängen: ", lamgr, "+/-", sig_lamgr)
```

Wellenlängen: [6.30118025e-11 7.09837524e-11] +/- [6.94363297e-13
6.92016219e-13]

```
[9]: #Zweite Ordnung
wink, intensity = np.loadtxt("Daten/Aufgabe 2 2. Ordnung.
↳txt", delimiter=" ", dtype=str, unpack=True)
wink = np.char.replace(wink, ",", ".").astype(float)
intensity = np.char.replace(intensity, ",", ".").astype(float)
```

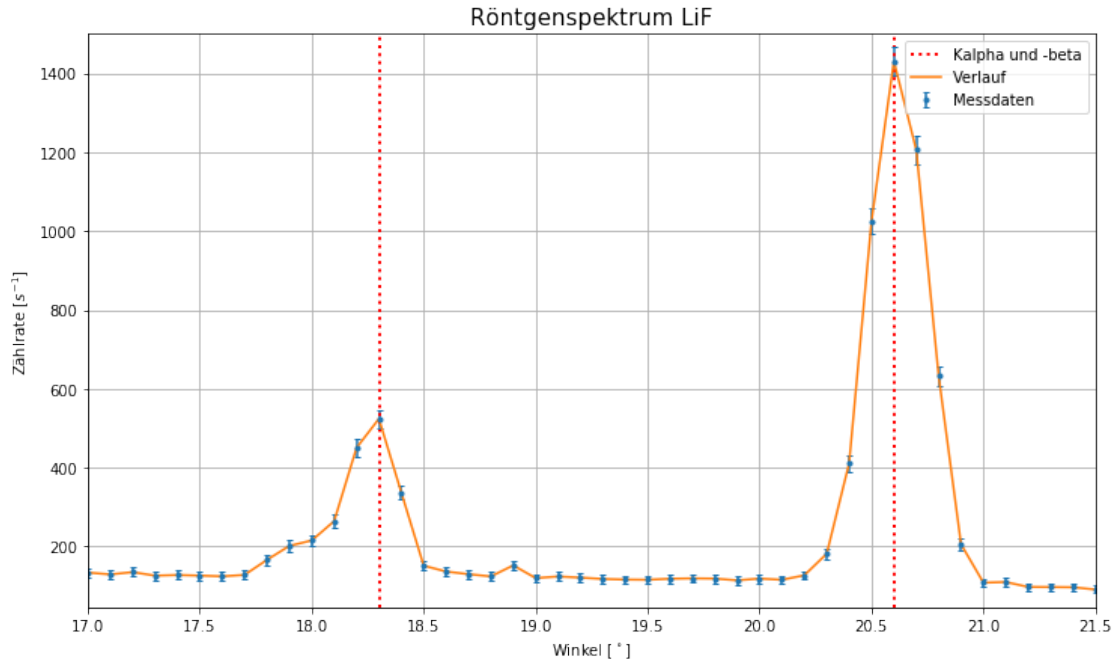


```

sig_intensity = np.sqrt(intensity)
def linien(serien_name, serie, col, style):
    plt.axvline(serie[0], label = serien_name, color = col, linestyle = '␣
    ↪style, linewidth = 2)
    for i in serie[1:]:
        plt.axvline(i, color = col, linestyle = style, linewidth = 2)
#win_al_bet = np.array([9.2,10.2,18.4,20.6])
win_al_bet = np.array([18.3,20.6])
plt.figure(figsize=(12,7))
linien('Kalpha und -beta',win_al_bet , 'red', ':')
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label=␣
    ↪="Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum LiF",size=15)
plt.xlim(17.0,21.5)
plt.ylim(45,1500)
plt.xlabel("Winkel [ $^{\circ}$ ]")
plt.ylabel("Zählrate [ $s^{-1}$ ]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("ZweiteOrdnungLiF.png")
sig_win_al_bet2 = 0.2
lamgr2 = d*np.sin(np.deg2rad(win_al_bet))
sig_lamgr2 = np.sqrt((sig_d*np.sin(np.deg2rad(win_al_bet)))**2 + (d*np.cos(np.
    ↪deg2rad(win_al_bet))*np.deg2rad(sig_win_al_bet2))**2)
print("Wellenlängen: ",lamgr2,"+/-",sig_lamgr2)

```

Wellenlängen: [6.32380806e-11 7.08609080e-11] +/- [6.67463792e-13
6.58067286e-13]



```
[10]: #Berechnung Mittelwert Wellenlänge für beide Ordnungen
l1 = (lamgr+lamgr2)/2
sig_l1 = 1/2 * np.sqrt(sig_lamgr**2 + sig_lamgr2**2)
print("Mittlere Wellenlänge: ",l1,"+/-",sig_l1)
#Sigma-Abweichung
literatur_Vergleich("Wellenlänge",l1,sig_l1,7.11e-11,0)
```

Mittlere Wellenlänge: [6.31249416e-11 7.09223302e-11] +/- [4.81572503e-13
4.77477486e-13]
Wellenlänge :
Absolute Abweichung: [7.97505842e-12 1.77669824e-13]
Sigma: [16.56045223 0.37210094]

```
[11]: #Vergleich mit Literaturwert
literatur_Vergleich("Wellenlängen ",l1,sig_l1,np.array([63.1e-12,71.1e-12]),0)
```

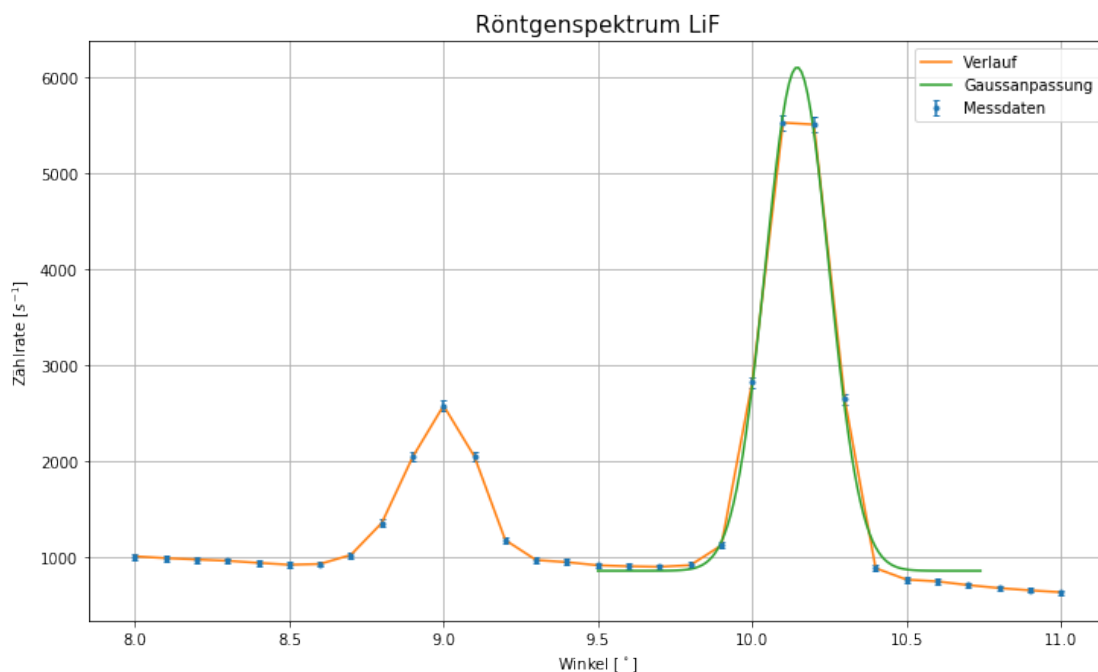
Wellenlängen :
Absolute Abweichung: [2.49415750e-14 1.77669824e-13]
Sigma: [0.05179194 0.37210094]

```
[12]: #Bestimmung Halbwertsbreite Kalpha
wink, intensity = np.loadtxt("Daten/aufgabe 2 1.Ordnung.
↳txt",delimiter=" ",dtype=str,unpack=True)
wink = np.char.replace(wink,",",".").astype(float)
intensity = np.char.replace(intensity,",",".").astype(float)
sig_intensity = np.sqrt(intensity)
```

```

def gaussian(x,A,mu,sig,k):
    return (A/ (np.sqrt(2*np.pi)*sig)) * np.exp(-(x-mu)**2/(2*sig**2))+ k
p0 = [3276-c,10.2,0.4,500]
popt,pcov = curve_fit(gaussian,wink[15:26],intensity[15:
    ↳26],p0,sigma=sig_intensity[14:25])
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label="
    ↳Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
wink_x = np.arange(9.5,10.75,0.01)
plt.plot(wink_x,gaussian(wink_x,*popt),label="Gaussianpassung")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum LiF",size=15)
plt.xlabel("Winkel [°]")
plt.ylabel("Zählrate [s-1]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("KalphaHalbLiFSpektrum.png")

```



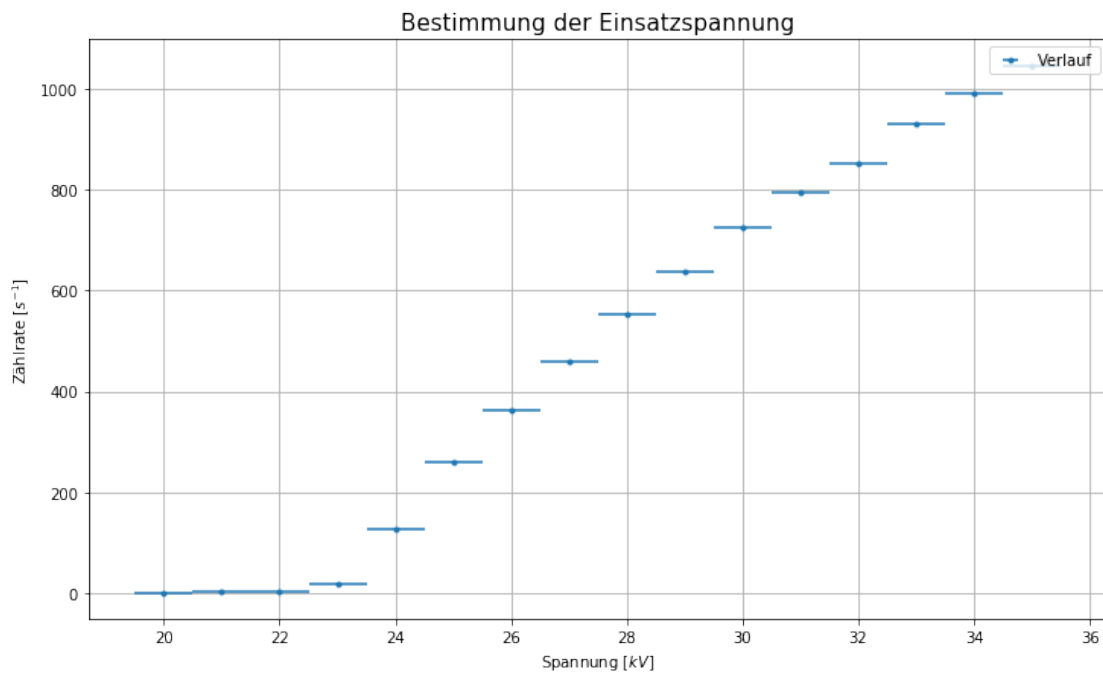
```

[13]: FWHM = 2*np.sqrt(2*np.log(2))*popt[2]
sig_FWHM = 2*np.sqrt(2*np.log(2))*np.sqrt(pcov[2][2])
print("Halbwertsbreite",FWHM,"+/-",sig_FWHM)

```

Halbwertsbreite 0.24201368249066932 +/- 0.006868051544766745

```
[14]: #Ermitteln der Einsatzspannung durch Extrapolation
U = np.arange(20,36,1) #kV
z = np.array([0.8,1.3,1.7,16.55,126.1,259.5,361.9,458.6,553.9,636.9,723.7,793.
    ↪8,851.8,929.4,992.3,1047])
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(U,z,xerr=np.ones(len(U))*0.5,fmt=".",label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Bestimmung der Einsatzspannung",size=15)
plt.xlabel("Spannung [kV]")
plt.ylabel("Zählrate [s-1]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("ZählratevsSpannung.png")
```



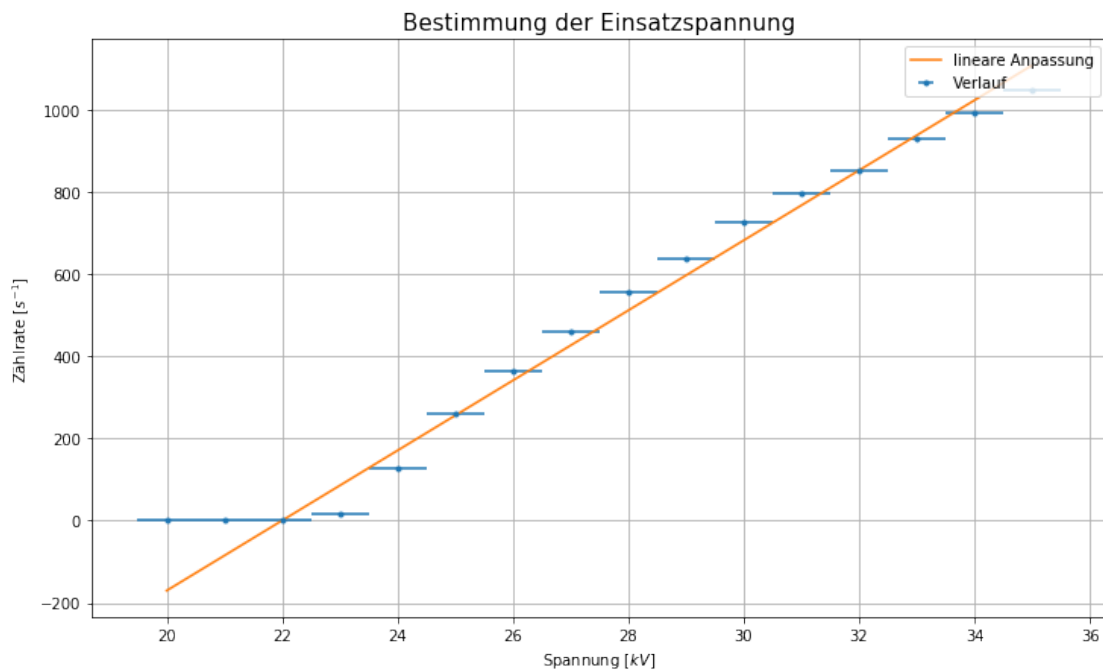
```
[15]: popt,pcov = curve_fit(line,U[3:],z[3:],sigma=np.ones(len(U[3:]))*0.5)
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(U,z,xerr=np.ones(len(U))*0.5,fmt=".",label="Verlauf")
plt.plot(U,line(U,*popt),label="lineare Anpassung")
plt.grid()
plt.title("Bestimmung der Einsatzspannung",size=15)
plt.xlabel("Spannung [kV]")
plt.ylabel("Zählrate [s-1]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("FitZählratevsSpannung.png")
#Ermitteln der Nullstelle
a = popt[0]
```

```

sig_a = np.sqrt(pcov[0][0])
b = popt[1]
sig_b = np.sqrt(pcov[1][1])
U = -b/a
sig_U = np.sqrt((sig_b/a)**2 + (sig_a*b/a**2)**2)
print("Einsatzspannung:", U, "+/-", sig_U)

```

Einsatzspannung: 22.00013545590647 +/- 1.3164850065423295



```

[16]: #Bestimmung von h mit Isochromatenmethode
lam = 2 * d * np.sin(np.deg2rad(7.5))
h_2 = e*U*10**3 *lam/c
sig_h_2 = h*sig_U/U
print("Plancksche Wirkungsquantum: ", h_2, "+/-", sig_h_2)

```

Plancksche Wirkungsquantum: 6.181759012572364e-34 +/- 4.1063867784764776e-35

```

[17]: #Vergleich h und h2
literatur_Vergleich("h2: ", h_2, sig_h_2, 6.6261e-34, 0)
literatur_Vergleich("Plancksche Wirkungsquantauntereinander", h, sig_h, h_2, sig_h_2)

```

h2: :

Absolute Abweichung: 4.443409874276359e-35

Sigma: 1.0820729059343313

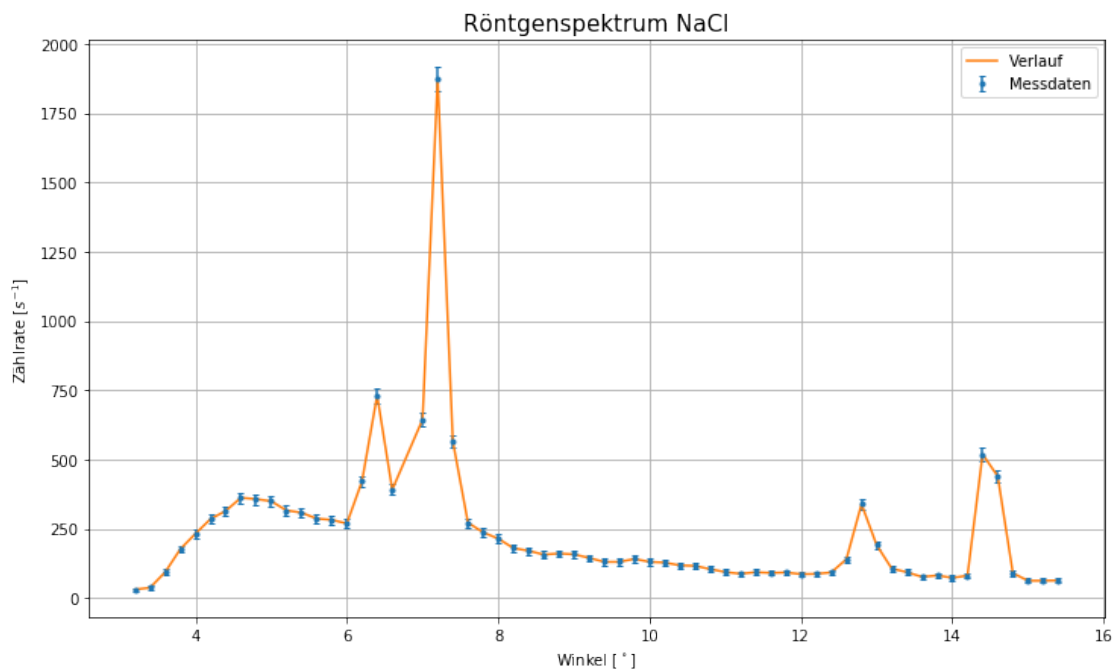
Plancksche Wirkungsquantauntereinander :

Absolute Abweichung: 6.805345123726257e-35

Sigma: 0.9959595645711592

[]:

```
[18]: #Extrapoliere geraden Anstieg bis zum Untergrund
wink, intensity = np.loadtxt("Daten/nacl1.txt",delimiter="
↪",dtype=str,unpack=True)
wink = np.char.replace(wink,",",".").astype(float)
intensity = np.char.replace(intensity,",",".").astype(float)
sig_intensity = np.sqrt(intensity)
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label=
↪"Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum NaCl",size=15)
plt.xlabel("Winkel [°]")
plt.ylabel("Zählrate [s-1]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.savefig("NaClGesamt.png",format="png")
```

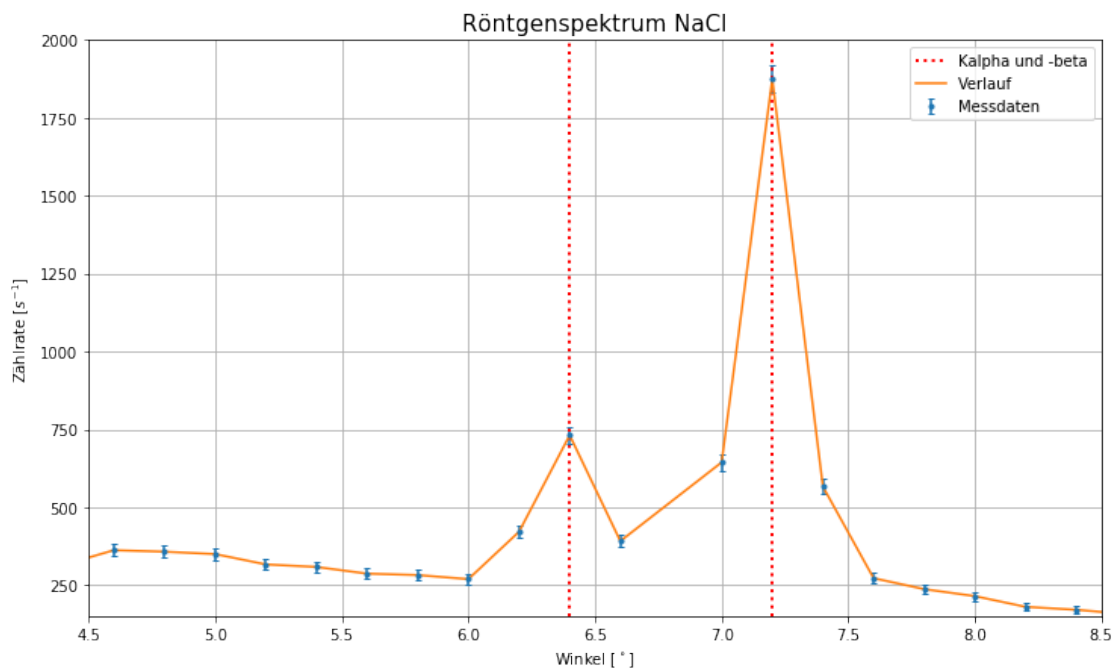


```
[19]: #Bestimmung der Peaks erster Ordnung
def linien(serien_name, serie, col, style):
    plt.axvline(serie[0], label = serien_name, color = col,linestyle =
↪style,linewidth = 2)
```

```

for i in serie[1:]:
    plt.axvline(i, color = col, linestyle = style, linewidth = 2)
#win_al_bet = np.array([9.2,10.2,18.4,20.6])
win_al_bet = np.array([6.4,7.2])
sig_win_al_bet = np.deg2rad(0.5)
plt.figure(figsize=(12,7))
linien('Kalpha und -beta',win_al_bet , 'red', ':')
plt.errorbar(wink, intensity,yerr=sig_intensity,fmt=".",label_
↪="Messdaten",capsize=2)
plt.plot(wink,intensity,label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum NaCl",size=15)
plt.xlabel("Winkel [ $^{\circ}$ ]")
plt.ylabel("Zählrate [ $s^{-1}$ ]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.xlim(4.5,8.5)
plt.ylim(150,2000)
plt.savefig("Kalphaundbeta1steNa.png")

```

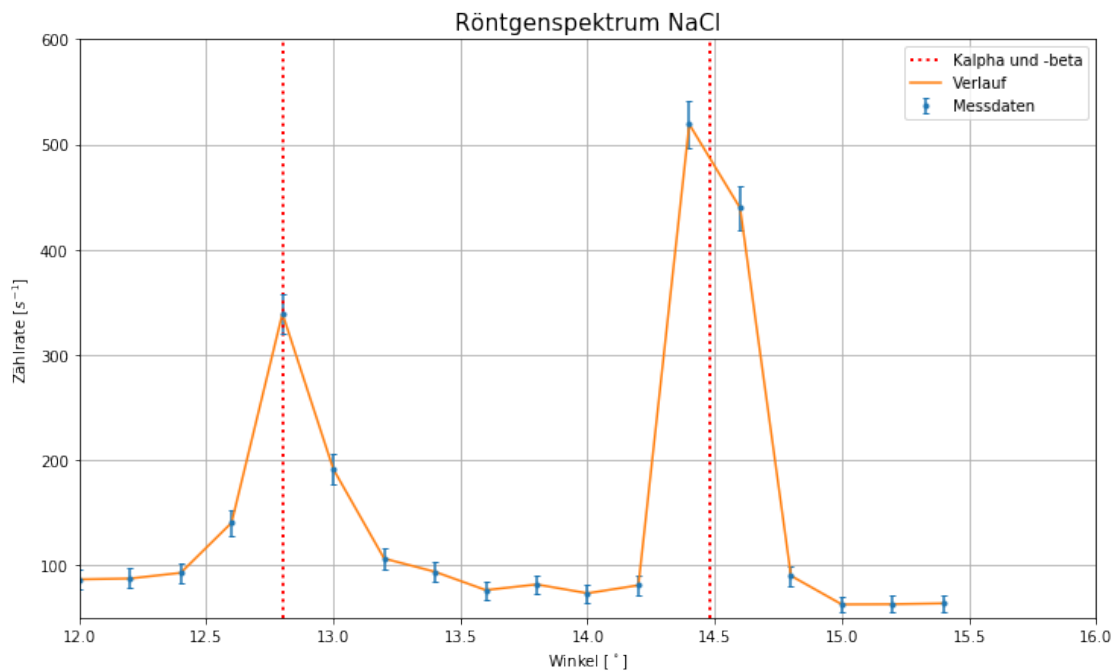


```

[20]: #Zweiter Ordnung
win_al_bet2 = np.array([12.8,14.48])
sig_win_al_bet2 = np.deg2rad(0.5)
plt.figure(figsize=(12,7))
linien('Kalpha und -beta',win_al_bet2 , 'red', ':')

```

```
plt.errorbar(wink, intensity, yerr=sig_intensity, fmt=".", label_u
↳="Messdaten", capsize=2)
plt.plot(wink, intensity, label="Verlauf")
plt.grid()
plt.title("Röntgenspektrum NaCl", size=15)
plt.xlabel("Winkel [ $^\circ$ ]")
plt.ylabel("Zählrate [ $s^{-1}$ ]")
plt.legend(loc="upper right")
plt.xlim(12, 16)
plt.ylim(50, 600)
plt.savefig("Kalphaundbeta2steNa.png")
```



```
[21]: #Bestimmung der Gitterkonstanten
g1 = lamgr/(2*np.sin(np.deg2rad(win_al_bet)))
g2 = lamgr2/(np.sin(np.deg2rad(win_al_bet2)))
sig_g1 = np.sqrt((sig_lamgr/(2*np.sin(np.deg2rad(win_al_bet))))**2 + (np.cos(np.
↳deg2rad(win_al_bet))*lamgr*sig_win_al_bet/(2*np.sin(np.
↳deg2rad(win_al_bet))))**2)
sig_g2 = np.sqrt((sig_lamgr2/(np.sin(np.deg2rad(win_al_bet2))))**2 + (np.cos(np.
↳deg2rad(win_al_bet2))*lamgr2*sig_win_al_bet2/(np.sin(np.
↳deg2rad(win_al_bet2))))**2)
g1 = 2*g1
g2= 2*g2
sig_g1 = 2*sig_g1
sig_g2 = 2* sig_g2
```



```

g = (g1[0]+g1[1]+g2[0]+g2[1])/4
sig_g = np.sqrt(sig_g1[0]**2 + sig_g1[1]**2 + sig_g2[0]**2 + sig_g2[1]**2)/4
print("Mittelwert: ",g,"+/-",sig_g)

```

Mittelwert: 5.673278463477405e-10 +/- 4.782063272514703e-12

```

[22]: #Sigma-Abweichung
literatur_Vergleich("Gitterkonstante",g,sig_g,564e-12,0)

```

Gitterkonstante :
 Absolute Abweichung: 3.327846347740513e-12
 Sigma: 0.6959017809044017

```

[23]: #Bestimmung der Avogadro-Konstanten
rho = 2.164
M = 58.44
N = 4*M/(rho*g**3) * 1e-6
sig_N = N*3*sig_g/g
print("Avogadro-Konstante",N,"+/-",sig_N)

```

Avogadro-Konstante 5.915761273422127e+23 +/- 1.495936338928982e+22

```

[24]: #Sigma-Abweichung
literatur_Vergleich("Avogadro",N,sig_N,6.0221e23,0)

```

Avogadro :
 Absolute Abweichung: 1.0633872657787317e+22
 Sigma: 0.7108506144987864

[]: