

Versuch 251

Statistik des radioaktiven Zerfalls

Viktor Ivanov

1. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Motivation	2
1.2	Geiger-Müller Zählrohr	2
1.2.1	Eigenschaften einer Zählrohr	2
1.2.2	Plateaubereich	2
1.2.3	Wichtige Bemerkungen über den Zählrohr	3
1.3	Erinnerung an die Grundlagen der Statistik	3
1.3.1	Binomialverteilung	3
1.3.2	Zerfallsgesetz	4
1.3.3	Poisson-Verteilung	4
1.3.4	Gauß-Verteilung	5
1.3.5	Messfehler	6
2	Messprotokoll und Durchführung des Versuchs	6
3	Auswertung	9
3.1	Untersuchung des Plateaubereichs	9
3.1.1	Anstiege bestimmen	9
3.1.2	Messzeit um Plateauanstieg auf 1% zu kennen	10
3.1.3	Prozentuale Variation der Zählrate bei Spannungserhöhung um 100 V	10
3.2	Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl	11
3.3	Auswertung der Daten mit kleiner Ereigniszahl	12
4	Zusammenfassung und Diskussion	13
5	Anhang	15
5.1	Quellen	15
5.2	Python-Code	15

1 Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch wollen wir die statistische Natur des Zerfallsgesetzes untersuchen und ein besseres Verständnis über den Geiger-Müller Zählrohr erhalten.

1.2 Geiger-Müller Zählrohr

Das Geiger-Müller Zählrohr misst α -, β -, γ - und X -Strahlen. Ein Aufbau vom Gerät kann man in Abbildung 1 finden.

Die Hauptkomponenten sind ein Metallzylinder und ein axial verlaufender Anodendraht. Das Rohr ist mit einem geeigneten Gasgemisch erfüllt. Wenn ein schnelles, elektrisch geladenes Teilchen in das Zählrohr gelangt, entstehen durch Ionisation des Gases freie Elektronen und positiv geladene Ionen. Die Elektronen gehen in die Richtung der Anoden und verursachen für eine kurze Zeit Strom. Wie in Abbildung 1 zu sehen ist, ist eine Spannung mit dem Anodendraht verbunden. Wenn der Strom den Widerstand trifft, verursacht er einen Spannungsimpuls, der dann durch einen Verstärker verstärkt wird und dann gemessen wird.

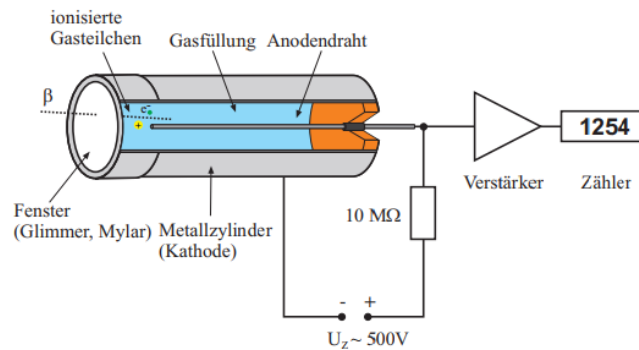


Abbildung 1: Aufbau eines Geiger-Müller Zählrohrs

1.2.1 Eigenschaften einer Zählrohr

Bei verschiedenen Anzahlen und Energien von Ladungsträgern misst das Zählrohr verschiedene Ergebnisse, deshalb soll man die Physik eines Zählrohrs beachten.

Bei kleinen Rohrspannungen erreichen nicht alle Primärelektronen den Anodendraht, einige gehen durch Rekombination verloren.

Bei höherer Spannung sinkt die Rekombinationswahrscheinlichkeit und der verursachte Strom ist proportional zur Energie der einfallenden Strahlung.

Bei noch höheren Rohrspannungen werden aus den Primärelektronen auch Sekundärelektronen erzeugt. Die Anzahl der Sekundärelektronen ist proportional zur Primärelektronenanzahl und dieser Bereich heißt "Proportionalbereich".

Wenn man die Rohrspannung noch erhöht, dass das Füllgas komplett ionisiert ist und die einfallenden Teilchen gerade auf den Anodendraht fallen. Das nennt man den Plateaubereich. In diesem Bereich erzeugt jedes einfallende Teilchen ein gleich großes Signal, unabhängig von seiner Energie.

Ein Diagramm von allen Bereichen findet man unter 2

1.2.2 Plateaubereich

Der Plateaubereich ist ziemlich wichtig bei diesem Messgerät, da es uns die Möglichkeit gibt, einzelne Teilchen, unabhängig von ihrer Energie, zu messen.

In der Praxis ist aber den Plateaubereich nicht komplett eben, sondern hat eine Steigung, wie in Abbildung 3 zu sehen ist.

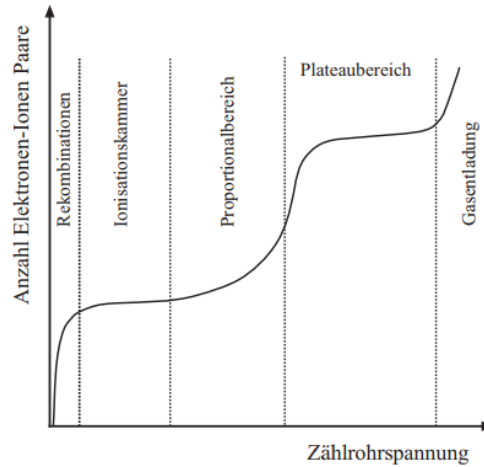


Abbildung 2: Messbereiche eines Geiger-Müller Zählrohrs

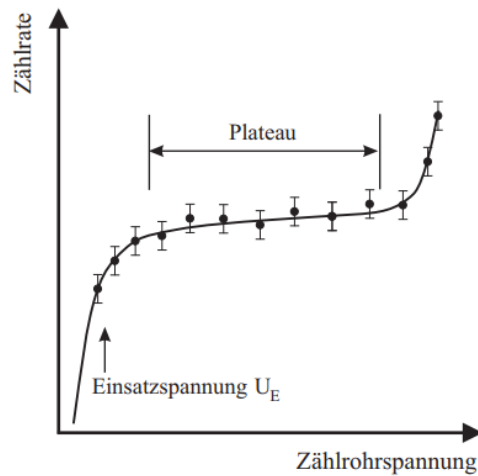


Abbildung 3: Plateaubereich eines Geiger-Müller Zählrohrs

1.2.3 Wichtige Bemerkungen über den Zählrohr

Nach einem Entladungsimpuls gibt es eine sogenannte "Totzeit" von c.a. $10^{-4}s$, bei denen das Zählrohr keine neuen Teilchen messen kann, deshalb sollen Totzeitkorrekturen vorgenommen werden.

Es gibt auch statistische Schwankungen. Der mittlere statistische Fehler einer Zählung von n Teilchen beträgt \sqrt{n} und der mittlere relative Fehler, $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Je mehr Messungen man macht, desto kleiner ist der relative Fehler.

Wegen der natürlichen Radioaktivität zählt das Zählrohr c.a. 50 Ereignisse pro Minute. Das nennt man "Nulleffekt". Alle diese Bemerkungen soll man bei der Auswertung der Resultate berücksichtigen, sonst bekommt er verfälschte Ergebnisse.

1.3 Erinnerung an die Grundlagen der Statistik

1.3.1 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A bei n voneinander unabhängigen Versuchen genau k -mal eintritt, bei einer gewissen Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Ereignisses A . Diese

Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

Die Binomial-Verteilung hat folgenden Eigenschaften: i) Eine Normierung von 1:

$$\sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad (2)$$

ii) Der Mittelwert beträgt np :

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k B(k; n, p) = np \quad (3)$$

iii) Die Varianz beträgt $np(1-p)$:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p) \quad (4)$$

iv) Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (5)$$

1.3.2 Zerfallsgesetz

Bei dem radioaktiven Zerfall haben wir eine Zerfallswahrscheinlichkeit p eines Atomkerns. Wenn wir n Atomkerne beobachten und in Zeit t untersuchen, wie viele Zerfälle k geschehen, können wir die Binomialverteilung verwenden. Die Zerfallswahrscheinlichkeit p beträgt:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (6)$$

Wobei λ eine Zerfallskonstante ist.

1.3.3 Poisson-Verteilung

Es ist viel einfacher, mit Näherungen zu arbeiten, deshalb für kleine Zerfallswahrscheinlichkeiten $p \rightarrow 0$ und eine große Anzahl von radioaktiven Atomen $n \rightarrow \infty$ können wir die Poissonverteilung verwenden, die durch den Mittelwert μ vollständig beschrieben wird. Das Ergebnis der Poisson-Verteilung beträgt:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (7)$$

Die Poisson-Verteilung hat folgenden Eigenschaften: i) Normierung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \quad (8)$$

ii) Mittelwert:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \mu) = \mu \quad (9)$$

iii) Varianz:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \quad (10)$$

iv) Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (11)$$

Bei einem $\mu < 1$ ist der wahrscheinlichste Wert Null. Bei einem $\mu > 1$ ist die Breite des Maximums größer als dieser der Binomial-Verteilung.

Für beiden Verteilungen gilt, dass sie stark asymmetrisch für kleine Mittelwerte sind und immer symmetrischer für größere Mittelwerte.

1.3.4 Gauß-Verteilung

Für einen großen Mittelwert ($\mu > 30$) kann man die Poisson-Verteilung durch eine Gauß-Verteilung approximieren:

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}} \quad (12)$$

Die allgemeine Form der Gauß-Verteilung lautet:

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

Wobei der Mittelwert μ nicht gleich die Varianz σ^2 ist.

Die Gauß-Verteilung hat folgende Eigenschaften:

i) Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \quad (14)$$

ii) Mittelwert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k G(k; \mu, \sigma) dk = \mu \quad (15)$$

iii) Varianz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2 \quad (16)$$

iv) Standardabweichung (In den Spezialfall einer Zählstatistik):

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (17)$$

Die Gauß-Verteilung ist kontinuierlich, was heißt, dass $k \in R$. Die Binomial- und Poisson-Verteilungen hatten Variablen k , die nur diskreten Werten annehmen können. Für die Gauß-Verteilung ist es wichtig zu bemerken, dass eine Abweichung von μ von mehr als $\pm\sigma$ hat die Wahrscheinlichkeit von c.a. 32%, von mehr als $2 \pm \sigma$ - c.a. 4,6% und von mehr als $3 \pm \sigma$ - c.a. 0,3%. Das kann herausfinden, wenn man die Fläche unter der Kurve durch folgenden Integral

$$P_{\sigma} = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \quad (18)$$

berechnet.

Noch etwas, was in vielen physikalischen Versuchen vorkommt, ist die volle Breite der Kurve auf halber Höhe (full width at half maximum):

$$FWHM \approx 2,4\sigma \quad (19)$$

1.3.5 Messfehler

In 1.2.3 haben wir den Fehler besprochen. Nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet der gesamte Fehler:

$$\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2} \quad (20)$$

2 Messprotokoll und Durchführung des Versuchs

Das Messprotokoll befindet sich auf der nächsten Seite.

Aufgabe 3:

Bei einer Messzeit von 1 bzw. 3 min wird die Zählrate bei U_0 und bei $U_0 + 100V$ gemessen

Tabelle 2:

$U [V \pm 0,5V]$	Zeit [min]	Zählrate
60	1	14261
60	3	42622
70	1	14441
70	3	43563

Aufgabe 4:

Die Probe wird so justiert, dass die Zählrate zwischen $(140 \pm 150) \frac{1}{s}$ liegt.

Nun wird bei einer Totzeit von 500 ms gemessen. Die Ergebnisse werden in einem Histogramm dargestellt.

→ Ergebnisse siehe Graphiken

Aufgabe 5:

Die Probe wird so justiert, dass die Zählrate zwischen $40 \pm 50 \frac{1}{s}$ liegt.

Nun wird bei einer Totzeit von 0,1 s gemessen. Die Ergebnisse werden erneut in ein Histogramm dargestellt.

→ Ergebnisse siehe Graphiken

Bender

3 Auswertung

3.1 Untersuchung des Plateaubereichs

Am Anfang des Versuchs haben wir die Spannung von $U_a = 49V$ eingestellt. Bei solcher Spannung haben wir eine Zählrate von $\# = 73 \frac{\text{Teilchen}}{s}$. Wir haben in $25V$ Schritten den Plateaubereich ausgemessen. Jede Messung wurde 30s lang ausgemessen. Mit den Daten haben wir ein Diagramm 4 erstellt. Wir haben eine Gerade gefittet und die Mitte des Plateaubereichs $U_0 = (600 \pm 5)V$ bestimmt. Die Daten sind in Tabelle 2 zu sehen.

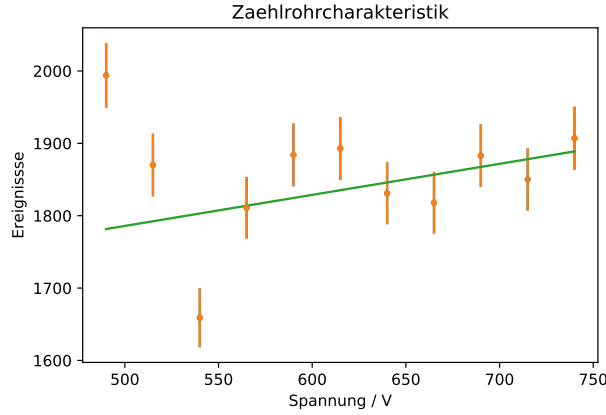


Abbildung 4: Eigenschaften(Charakteristik) von der von uns gemessenen Plateau

3.1.1 Anstiege bestimmen

Die Anstiege kann man mit folgenden Formel bestimmen:

$$\Delta U = n(U_0 + 100V) - n(U_0) \quad (21)$$

Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich für den Anstiegsfehler:

$$\Delta \Delta U = \sqrt{\Delta n(U_0 + 100V)^2 - \Delta n(U_0)^2} \quad (22)$$

Der prozeduralen Anstieg kann man durch Teilen der Anstieg durch den Anzahl der Ereignisse bei U_0 , nU_0 bestimmen:

$$\Delta U_p = \frac{\Delta U}{nU_0} \quad (23)$$

Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich für den Fehler vom prozeduralen Anstieg:

$$\Delta \Delta U_p = \Delta U_p \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta(n(U_0 + 100V) - n(U_0))}{(n(U_0 + 100V) - n(U_0))}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n(U_0)}{n(U_0)}\right)^2} \quad (24)$$

Die Anstiege kann man in Tabelle 3, Abbildung 5 finden. Nach Gleichung 20 können wir herausfinden, ob die Anstiege signifikant sind.

Die Abweichungen betragen:

$$\sigma_{\Delta,1min} = 1,1 \quad (25)$$

$$\sigma_{\Delta,3min} = 3,2 \quad (26)$$

$$(27)$$

$\sigma_{\Delta,1min}$ ist daher unsignifikant und $\sigma_{\Delta,3min}$ signifikant.

Tabelle 3: Anstiege bei verschiedenen Messzeiten

	Zeit der Messung [s]	
	60	180
Absoluter Anstieg [V]	180	941
Fehler von absoluten Anstieg [V]	169	294
Prozeduraler Anstieg [V]	0.013	0.022
Fehler von prozeduralen Anstieg [V]	0.012	0.007

Abbildung 5: Anstiege bei verschiedenen Messzeiten

3.1.2 Messzeit um Plateauanstieg auf 1% zu kennen

Wir sollen die Messzeit berechnen, damit der Fehler des Plateauanstiegs genau $\Delta\tilde{\Delta}U_p = 1\%$ beträgt. Die oben verwendete

$$n(U_0) = at \quad (28)$$

$$n(U_0 + 100V) = bt \quad (29)$$

betragen die Anzahl von Teilchen a und b mal die Zeit. Wenn wir diese Werte einsetzen und Gleichung 24 umformen, erhalten wir:

$$t = \left(\frac{a-b}{b\Delta\Delta U_p} \right)^2 \left(\frac{a+b}{(a-b)^2} + \frac{1}{b} \right) \quad (30)$$

Wobei $\Delta\Delta U_p$ die gesuchte Messfehler von $\Delta\Delta U_p = 0,01$ ist.

Wenn ich die Werte von der einminütigen Messung und die Werte von der dreiminütigen Messung eingesetzt habe, habe ich folgende Ergebnisse für die Messlänge, um den Plateauanstieg auf 1 % genau zu kennen, erhalten:

$$t_{1\%,1min} = 84,68s \quad (31)$$

$$t_{1\%,3min} = 81,77s \quad (32)$$

3.1.3 Prozentuale Variation der Zählrate bei Spannungserhöhung um 100 V

Im letzten Unterteil dieser Versuchsteil sollen wir die prozentuale Variation der Zählrate bei Spannungserhöhung um 100 V bei einem Vertrauensniveau von ca. 68% und von c.a. 95% bestimmen. Diese Vertrauensniveaus entsprechen 1σ und 2σ .

Wir können den Bereich der prozentualen Variation des Anstiegs mit folgender Formel bestimmen:

$$\Delta U_p \pm k\Delta\Delta U_p \quad (33)$$

Wobei k die Anzahl von σ -Abweichungen beträgt.

Die prozentuale Variation der Zählrate bei Spannungserhöhung um 100 V bei einem Vertrauensniveau von ca. 68% bei der einminütigen Messung liegt in dem Bereich zwischen:

$$\xi_{min,1\sigma,60sec} = 0,1\% \quad (34)$$

$$\text{und} \quad (35)$$

$$\xi_{max,1\sigma,60sec} = 2,5\% \quad (36)$$

und von c.a. 95%:

$$\xi_{min,2\sigma,60sec} = -1,1\% \quad (37)$$

$$\text{und} \quad (38)$$

$$\xi_{max,1\sigma,60sec} = 3,7\% \quad (39)$$

Und bei dreiminütigen Messung bei einem Vertrauensniveau von ca. 68%:

$$\xi_{min,1\sigma,180sec} = 1,5\% \quad (40)$$

$$\text{und} \quad (41)$$

$$\xi_{max,1\sigma,180sec} = 2,9\% \quad (42)$$

und von c.a. 95%:

$$\xi_{min,2\sigma,180sec} = 0,8\% \quad (43)$$

$$\text{und} \quad (44)$$

$$\xi_{max,1\sigma,180sec} = 3,6\% \quad (45)$$

Die Ergebnisse besprechen wir in der Diskussion.

3.2 Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl

Wir haben 2000 Messungen gemacht bei einer Torzeit von $t_{tor} = 500ms$. Die Daten haben wir in einem Python-Programm hinzugefügt und daraus ein Histogramm erstellt. Sie ist in Abbildung 6 zu finden.

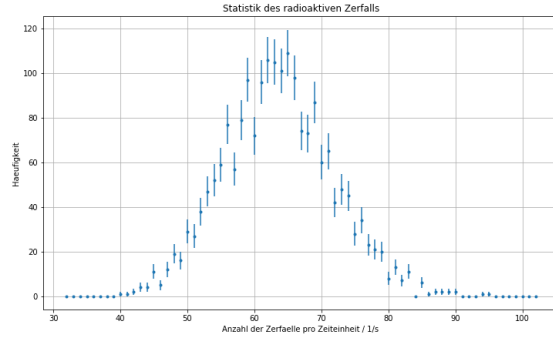


Abbildung 6: Histogramm von 2000 Messungen

Auf das Histogramm haben wir dann eine Gauß- und eine Poissonfunktion angepasst. Der χ^2 funktioniert aber nur dann, wenn die Fehler gaußverteilt sind, d.h., dass ihre Häufigkeit mindestens zehn ist. In dem Python-Programm haben wir die Werte mit einer Häufigkeit kleiner als 10 filtriert. Das Histogramm mit den angepassten Funktionen kann man in Abbildung 7 finden. Die Werte aus den Fitten kann man in Tabelle 4 finden. Wie in der Einleitung

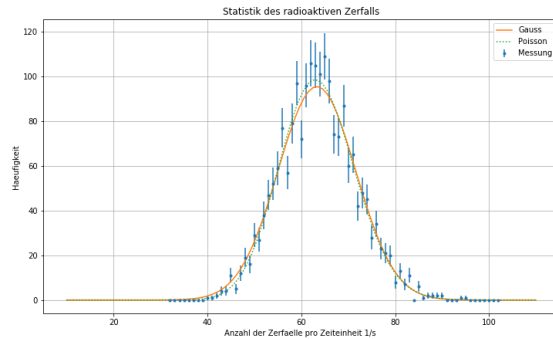


Abbildung 7: Histogramm von 2000 Messungen mit angepassten Gauß- und Poisson-Verteilungen

Tabelle 4: Fitwerten

Fit	Gauß	$\Delta Gauß$	Poisson	$\Delta Poisson$
A	1980	46	1967	45
$\mu[\#/s]$	63.31	0.21	63.48	0.21
$\sigma[\#/s]$	8.28	0.19	-	-

erklärt, die Gauß-Verteilung ist eine Näherung der Poisson-Verteilung, die nur für einen großen Mittelwert ($\mu > 30$) funktioniert. Der Mittelwert beträgt c.a. $\mu_{i,1} \approx 63 \frac{\#}{s} > 30[Maßeinheit]$, deshalb sehen wir, dass wir in diesem Fall die leichter zu berechnete, Gauß-Verteilung verwenden können.

Wir können jetzt durch die χ^2 -Abweichung die Güte des Fits quantitativ untersuchen. Die χ^1 -Summe beträgt:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{Funktionswert_i - Messwert_i}{Fehler_i} \right)^2 \quad (46)$$

Die reduzierte χ_{red}^2 -Summe berechnet man indem man die χ^2 -Summe durch die Anzahl der Freiheitsgrade teilt:

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\#Freiheitsgrade} \quad (47)$$

Für die Güte der Gauß-Verteilung haben wir folgende Werte berechnet:

$$\chi_1^2 = 38,5 \quad (48)$$

$$\chi_{red,1}^2 = 1,17 \quad (49)$$

$$Fitwahrscheinlichkeit_1 = 24,0\% \quad (50)$$

Für die Güte der Poisson-Verteilung haben wir folgende Werte berechnet:

$$\chi_1^2 = 39,1 \quad (51)$$

$$\chi_{red,1}^2 = 1,15 \quad (52)$$

$$Fitwahrscheinlichkeit_1 = 25,0\% \quad (53)$$

Die Ergebnisse besprechen wir ausführlicher in der Diskussion.

3.3 Auswertung der Daten mit kleiner Ereigniszahl

In diesem Teil haben wir mit einer Torzeit von $t_{tor,2} = 0,1s$ 5000 mal gemessen. Für die Auswertung haben wir denselben Code verwendet, aber damit wir die Unterschiede besser erkennen, haben wir eine logarithmische Skalierung bei der Fitangepassung gewählt. Das erstellte Histogramm kann man in Abbildung 8 finden. Das Histogramm mit den angepassten Funktionen kann man in Abbildung 9 finden.

Analog zu der letzten Teil berechnen wir die Werte aus den Fitten. Die kann man in Tabelle 5 finden.

Tabelle 5: Fitwerten

Fit	Gauß	$\Delta Gauß$	Poisson	$\Delta Poisson$
A	4884	70	4981	70
$\mu[\#/s]$	4,73	0.03	4,77	0.03
$\sigma[\#/s]$	2,189	0.025	-	-

Analog zu der letzten Teil berechnen wir die χ^2 -Abweichungen und die Wahrscheinlichkeiten des Fits.

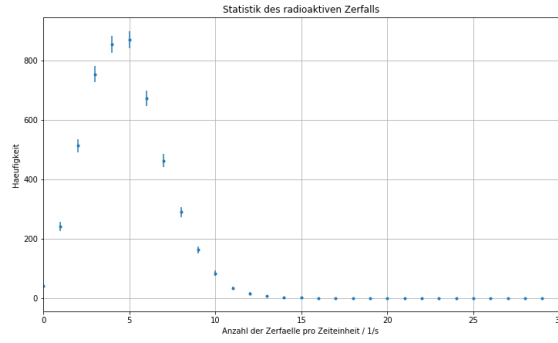


Abbildung 8: Histogramm von 5000 Messungen

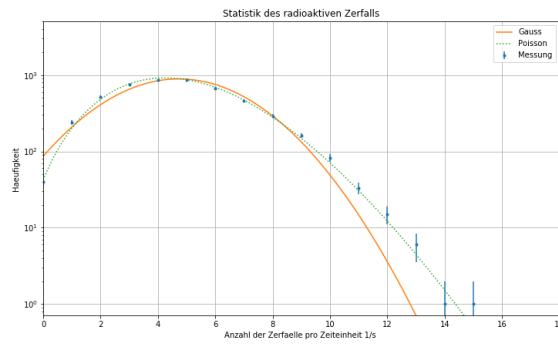


Abbildung 9: Histogramm von 5000 Messungen mit angepassten Gauß- und Poisson-Verteilungen

Für die Güte der Gauß-Verteilung haben wir folgende Werte berechnet:

$$\chi_3^2 = 152,2 \quad (54)$$

$$\chi_{red,3}^2 = 13,8 \quad (55)$$

$$Fitwahrscheinlichkeit_3 = 0,0\% \quad (56)$$

Für die Güte der Poisson-Verteilung haben wir folgende Werte berechnet:

$$\chi_4^2 = 17,2 \quad (57)$$

$$\chi_{red,4}^2 = 1,4 \quad (58)$$

$$Fitwahrscheinlichkeit_4 = 14,0\% \quad (59)$$

Hier ist der Mittelwert $\mu_{i,2} \approx 4,7 < 30$. Da er kleiner als 30 ist, kann auch die Poisson-Verteilung nicht gut mit der Gauß-Verteilung approximiert werden, wie auch die χ^2 -Werten zeigen. Die Ergebnisse besprechen wir im Detail in der Diskussion.

4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch haben wir die statistische Natur des Zerfallsgesetzes untersucht. Wir haben das radioaktive Präparat ^{60}Co untersucht, seinen Plateaubereich gemessen, seine Charakteristik untersucht und Poisson- und

Gauß-Verteilung miteinander vergleicht.

Am Anfang der Auswertung haben wir die Daten aus dem Plateaubereich in einem Python-Programm eingesetzt und eine Gerade gefittet. Die Anstiegswerte haben wir in Tabelle 3, Abbildung 5 dargestellt und ihre Abweichungen sind in 25 und 26 zu finden. Wir sehen, dass bei der einminütigen Messung die Abweichung zwischen dem Anfangswert und dem Endwert des Anstiegs $\sigma_{\Delta,1min} = 1,1$ beträgt, wobei bei der dreiminütigen Messung: $\sigma_{\Delta,3min} = 3,2$. Eine optimale Abweichung beträgt weniger als $\sigma = 1$, wobei Abweichungen von mehr als $\sigma = 3$ signifikant sind. Im Idealfall würde man erwarten, dass die Zählrate mit zunehmender Spannung im Plateaubereich überhaupt nicht steigt. Wir haben aber wegen der Inhomogenität des elektrischen Feldes eine gewisse Steigung erwartet. Die signifikante Abweichung kann sich entweder durch ein schlechtes Zählrohr, oder durch das, dass wir nicht den genauen Ort des Plateaubereichs gefunden haben, erklären. Wenn wir den Versuch noch einmal durchführen und mit einer anderen Anfangsspannung messen, statt die von uns gewählte $U_a = 49V$, können wir mit Genauigkeit sagen, was der Grund ist. Ich persönlich glaube, dass es eine Mischung zwischen beiden Gründen die größere Abweichungen verursacht.

Im nächsten Versuchsunterteil haben wir die Messzeit berechnet, damit der Fehler des Plateauanstiegs genau $\Delta\hat{U}_p = 1\%$ beträgt. Wir haben die Messzeit aus beiden Messungen berechnet, die Ergebnisse sind in 31 und 32 zu finden. Den Durchschnitt beträgt $t_{durch} = (82,5 \pm 0,7)s$. Um den Durchschnitt zu messen, habe ich einmal den einminütigen Wert und dreimal den dreiminütigen genommen. Für den Fehler habe ich die Standardabweichung genommen. Wir sehen, dass für eine sehr präzise Genauigkeit von 1% brauchen wir weniger als ein und halb Minuten zu messen, was mehr als unsere erste Messung ist, aber viel weniger als die zweite.

Im nächsten Versuchsunterteil haben wir prozentuale Variation der Zählrate bei Spannungserhöhung um 100 V bei einem Vertrauensniveau von ca. 1σ und von c.a. 2σ bestimmt. Die Resultate kann man in 34 bis 45 finden.

Im nächsten Versuchsteil haben wir die Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl ausgewertet. Um das zu machen, haben wir von unserer Messung die Daten mit einer Häufigkeit von weniger als zehn ausgefiltert. Wir haben eine Poisson- und eine Gauß-Verteilung angepasst. Noch von der Abbildung kann man sehen, dass die beiden gut zu den Daten passen, jedoch haben wir die Güte des Fits mithilfe von der χ^2 -Summe untersucht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 zu finden. Wir sehen, dass die Flächen unter beiden Funktionen eine σ -Abweichung von $\sigma_{A,1} = 0,2$ haben, wobei die Mittelwerte eine σ -Abweichung von $\sigma_{\mu,1} = 0,8$. Beide Abweichungen betragen weniger als $\sigma = 1$, dabei ist der Unterschied insignifikant und die Poisson-Verteilung kann sich gut durch die Gauß-Verteilung approximieren. Das haben wir auch erwartet, da der Mittelwert c.a. $\mu_{i,1} \approx 63 \frac{\#}{s}$ beträgt, was größer als 30 ist. Die χ^2 -Summen sollen optimal 1 betragen und die Fitwahrscheinlichkeiten : 50%. Die berechneten χ^2 -Summen betragen c.a. 1,16 und die Wahrscheinlichkeiten c.a. 25%. Die Ergebnisse könnten auch besser werden, aber im Allgemeinen beschreiben die Funktionen unsere Messwerte ziemlich genau.

Im letzten Versuchsteil haben wir dasselbe wie beim letzten Teil gemacht, aber mit den Daten mit kleiner Ereigniszahl. Die Fitwerten kann man in Tabelle 5 finden. Die σ - Abweichung zwischen den Flächen der Gauß- und Poisson-Funktionen beträgt $\sigma_{A,2} = 1,4$ und zwischen den Mittelwerten: $\sigma_{\mu,1} = 1,3$. Die Abweichung ist mehr als $\sigma = 1$, aber kleiner als $\sigma = 2$. Das ist eine große Abweichung, aber noch nicht sehr signifikant. Die χ^2 - Wert der Poisson-Verteilung beträgt $\chi_{red,4}^2 = 1,4$ und die Fitwahrscheinlichkeit 14%. Das ist kein perfektes Fit, aber passt noch zu den Werten. Das nicht perfekte Fit könnte daran liegen, dass wir das Präparat nicht gut am Anfang der Messung positioniert haben. Wegen der statistischen Natur des Exponentialgesetzes, sind die Ergebnisse bei kleiner Messanzahl nicht ziemlich genau, mit mehreren Messungen würden wir bessere Resultate erhalten. Die χ^2 - Wert der Gauß-Verteilung beträgt $\chi_{red,3}^2 = 13,8$ und die Fitwahrscheinlichkeit 0,0%. Wir sehen, dass bei einem kleinen Mittelwert die Poisson-Verteilung nicht durch die Gauß-Verteilung approximiert werden kann.

Im Allgemeinen hat dieser Versuch Spaß gemacht, da ich meine Statistik-Kenntnisse aufgefrischt habe und viel über die Geräte zur Strahlungsmessung lernen konnte. Die Ergebnisse waren einigermaßen erfolgreich, sie haben unsere Annahmen bestätigt, aber konnten auch besser werden.

5 Anhang

5.1 Quellen

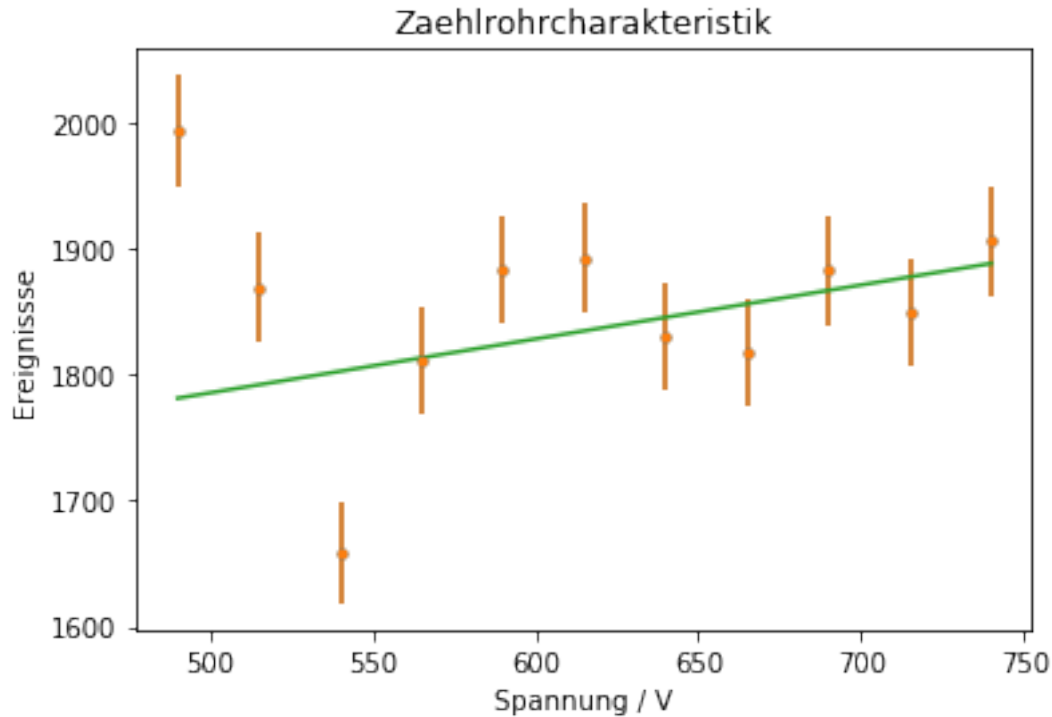
Alle Informationen, die ich im Protokoll verwendet habe, stammen aus der Praktikumsanleitung, Ausgabe 4.2023.

5.2 Python-Code

Der Python-Code befindet sich auf der nächsten Seite.

June 1, 2024

```
[1]: %matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
#Zaehlrrohrspannung:
U=np.array([490, 515, 540, 565, 590, 615, 640, 665, 690, 715, 740])
#gezaehlte Ereignisse
N=np.array([1994, 1870, 1659, 1811, 1884, 1893, 1831, 1818, 1883, 1850, 1907])
Fehler_N=np.sqrt(N)
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zaehlrrohrcharakteristik')
from scipy.optimize import curve_fit
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
popt, pcov=curve_fit(linear, U[1:], N[1:])
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zaehlrrohrcharakteristik')
plt.plot(U, linear(U,*popt))
plt.savefig('plateau.pdf', format="pdf")
```

```
[2]: #Aufgabe 2: Plateubereich des Zählrohres
#Anzahl der Ereignisse bei 1 bzw. 3 min
N_U_0 = np.array([14261,42622])
N_U_100 = np.array([14441,43563])
sig_N_U_0 = np.sqrt(N_U_0)
sig_N_U_100 = np.sqrt(N_U_100)
#Anstiege: Absolut und prozentual
anstieg_abs = N_U_100-N_U_0
anstieg_pro = (anstieg_abs)/N_U_0
#Fehler einer Differenz über Näherungsformel als Wurzel
sig_anstieg_abs = np.sqrt(sig_N_U_0**2 + sig_N_U_100**2)
sig_anstieg_pro = anstieg_pro*np.sqrt((sig_anstieg_abs/anstieg_abs)**2
↳ +(sig_N_U_0/N_U_0)**2)
print("Anstieg absolut: ",np.round(anstieg_abs,0),"+/-",np.
↳ round(sig_anstieg_abs))
print("Prozentualer Anstieg: ",np.round(anstieg_pro,3),"+/-",np.
↳ round(sig_anstieg_pro,3))
```

```
Anstieg absolut: [180 941] +/- [169. 294.]
Prozentualer Anstieg: [0.013 0.022] +/- [0.012 0.007]
```

```
[3]: #Ist der absolute Anstieg signifikant
sigma_anstieg = anstieg_abs/sig_anstieg_abs
```

```

print(np.round(sigma_anstieg,1))
for i in range(len(sigma_anstieg)):
    if sigma_anstieg[i]>3:
        print("sigma_",i, "signifikant")
    else:
        print("sigma_",i, "unsignifikant")

```

```

[1.1 3.2]
sigma_ 0 unsignifikant
sigma_ 1 signifikant

```

```

[4]: #Messzeit für 1% Genauigkeit
a = 42622/180
b = 43563/180
t = ((a-b)/(b*0.01))**2 * ((a+b)/((a-b)**2) + 1/b ) #s
print("Zeit für 1% ",np.round(t,2), "s")
c = 14261/60
d = 14441/60
t2 = ((c-d)/(c*0.01))**2 * ((c+d)/((c-d)**2) + 1/d ) #s
print("Zeit für 1% ",np.round(t2,2), "s")

```

```

Zeit für 1% 81.77 s
Zeit für 1% 84.68 s

```

```

[5]: #Variation der Zählrate
var_1_sigma = np.sqrt(N_U_0)/N_U_0
var_2_sigma = 2*var_1_sigma
print(var_1_sigma*100)
print(var_2_sigma*100)

```

```

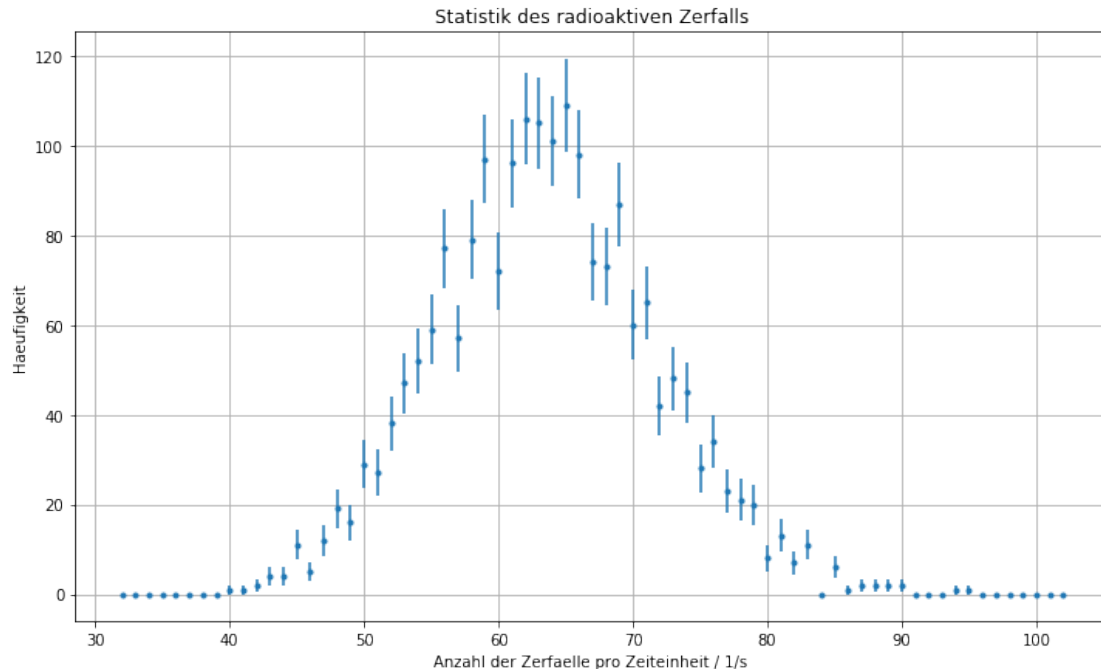
[0.83738468 0.48437653]
[1.67476936 0.96875305]

```

```

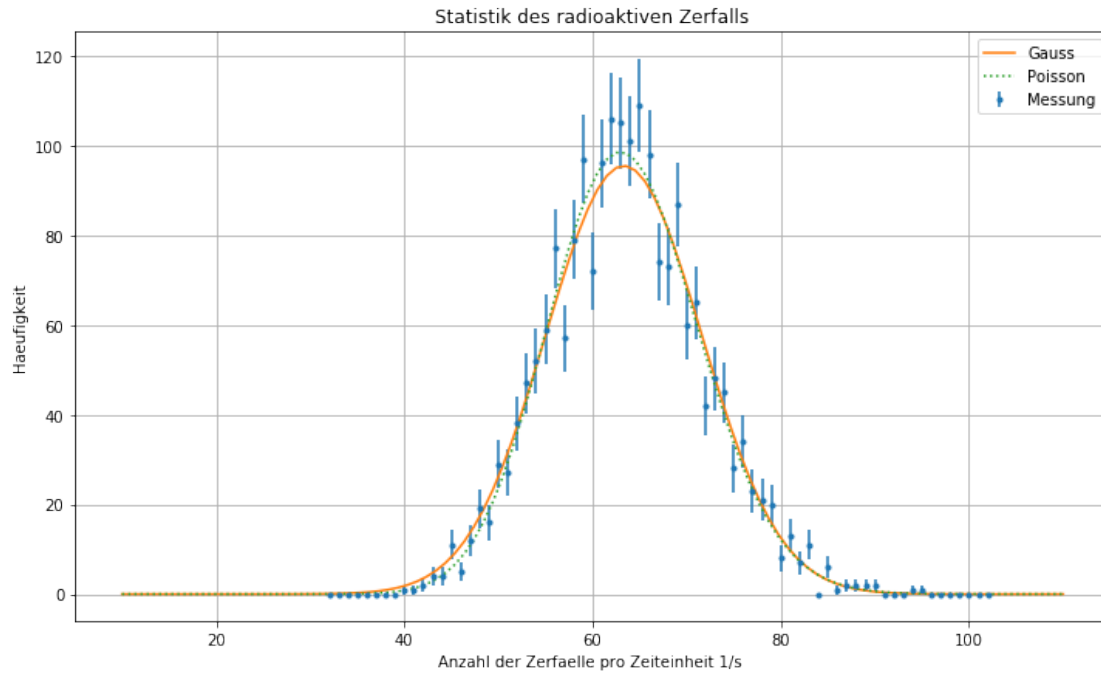
[6]: #Aufgabe 3:Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Energiezahl anzahl,
anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('DatenAufg4.txt',
    ↳unpack=True,skiprows=4,delimiter=",")
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.grid()
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
plt.savefig("Haupt10hneFit.png", format="png")

```



```
[7]: #Anfitten einer Gaussfunktion
from numpy import exp, pi, sqrt
def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
    return A/(sqrt(2*pi)*sig)*exp(-(x-mu)**2/2/sig**2)
#Fit wobei Messwerte bei sehr kleinen und sehr grossen Raten
    ↳ ausgeblendet, werden damit funktioniert
popt,
    ↳ pcov=curve_fit(gaussian, anzahl[haeufigkeit>9], haeufigkeit[haeufigkeit>9], p0=[2000, 55.
    ↳ 74, 7.43], sigma=fehler[haeufigkeit>9], absolute_sigma=True)
#Anfitten einer Poisson-Verteilung
from scipy.special import gamma
def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p*exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)
popt_p, pcov_p =
    ↳ curve_fit(poisson, anzahl[haeufigkeit>9], haeufigkeit[haeufigkeit>9],
    ↳ p0=[2000, 55.74], sigma=fehler[haeufigkeit>9], absolute_sigma=True)
#Plot der Fits
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=".", label='Messung')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.grid()
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
x=np.linspace(10,110, 100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label='Gauss')
```

```
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson',linestyle=':')
plt.legend()
plt.savefig("poisson_vs_gaussian.png", format="png")
```



```
[8]: #Ausgabe der Fitparameter
print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

Gaussfit:

A= 1980.7977204107162 , Standardfehler= 46.03547336421395

mu= 63.31312401703534 , Standardfehler= 0.20873489241410978

sig= 8.276733400448537 , Standardfehler= 0.1946926254251729

Poissonfit:

A_p= 1967.063288653169 , Standardfehler= 44.99704836190975

mu_p= 63.479042875871215 , Standardfehler= 0.20256482147814575

```
[9]: #Güte des Fits mit Chi-Quadrat-Methode
#Gauss:
```

```

chi2_g=np.
    ↳sum((gaussian(anzahl[haeufigkeit>9],*popt)-haeufigkeit[haeufigkeit>9])**2/
    ↳fehler[haeufigkeit>9]**2)
dof_g=len(anzahl[haeufigkeit>9])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.
    ↳sum((poisson(anzahl[haeufigkeit>9],*popt_p)-haeufigkeit[haeufigkeit>9])**2/
    ↳fehler[haeufigkeit>9]**2)
dof_p=len(anzahl[haeufigkeit>9])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)
#Fitwahrscheinlichkeit
from scipy.stats import chi2
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")

```

```

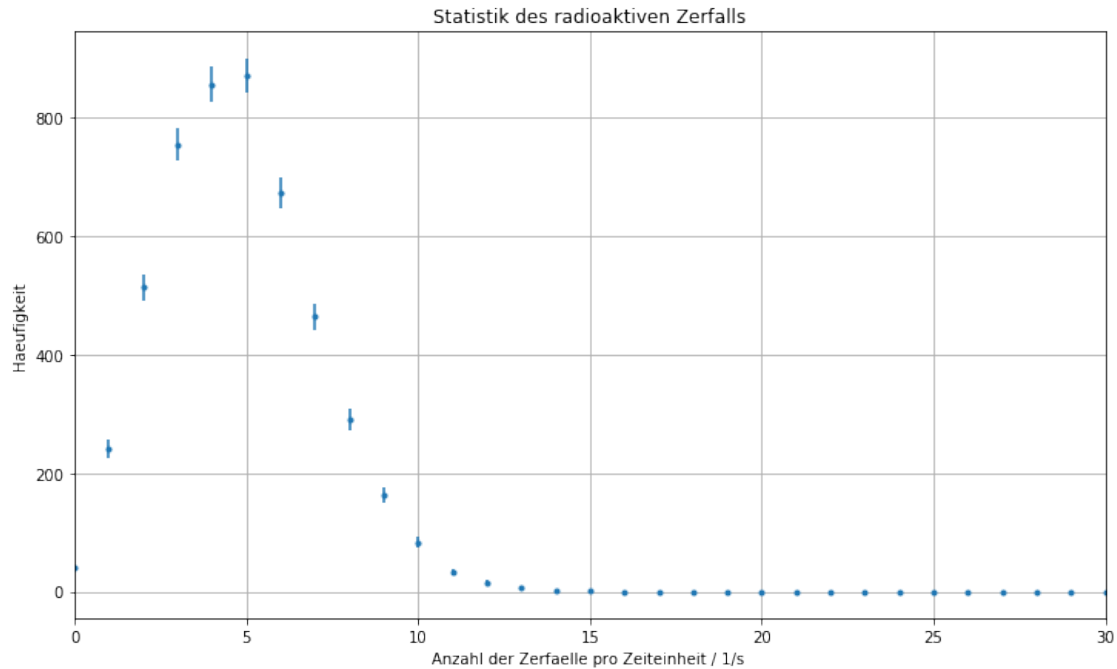
chi2_g= 38.13430027382576
chi2_red_g= 1.1555848567825988
chi2_p= 39.13128651771908
chi2_red_p= 1.1509201916976202
Wahrscheinlichkeit Gauss= 25.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 25.0 %

```

```

[10]: #Aufgabe 4: Auswertung Daten mit kleiner mittlerer Ereigniszahl
anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('A5.txt', unpack=True,skiprows=4,delimiter=",")
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
#plt.yscale('log')
plt.grid()
plt.xlim(0,30)
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
plt.savefig("Haupt20hneFit.png", format="png")

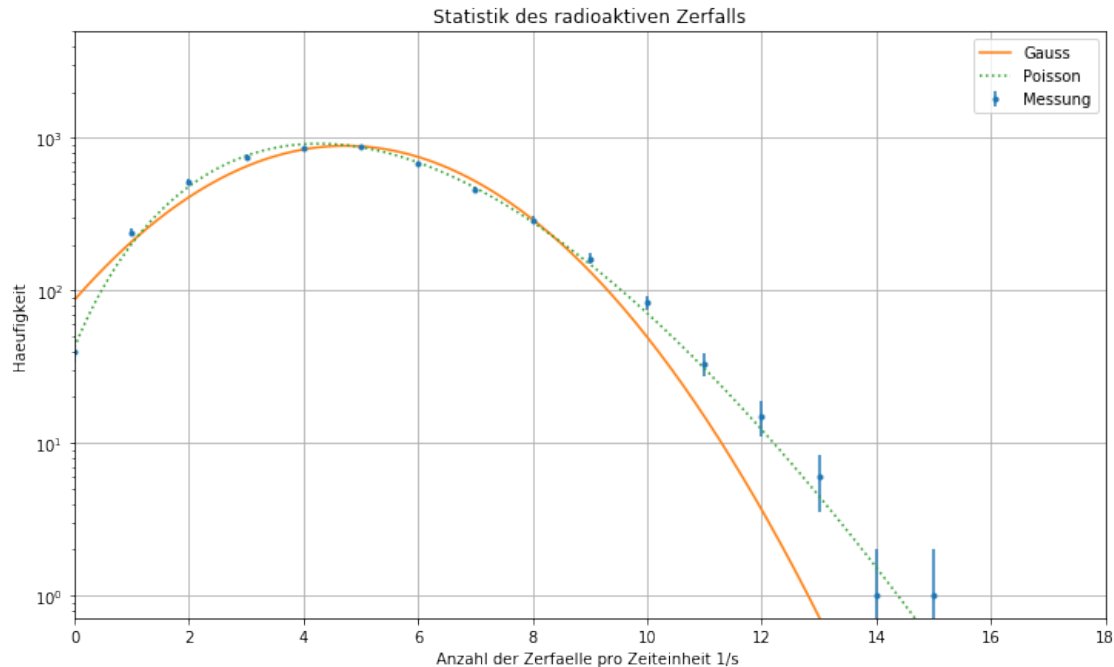
```



```
[11]: #Gauss
h=4
popt,  $\sigma$ 
     $\rightarrow$ pcov=curve_fit(gaussian,anzahl[haeufigkeit>h],haeufigkeit[haeufigkeit>h],p0=[5000,4.
     $\rightarrow$ 4,2.05],sigma=fehler[haeufigkeit>h],absolute_sigma=True)
#Anfitten einer Poisson-Verteilung
popt_p, pcov_p =  $\sigma$ 
     $\rightarrow$ curve_fit(poisson,anzahl[haeufigkeit>h],haeufigkeit[haeufigkeit>h], $\sigma$ 
     $\rightarrow$ p0=[5000,4.4],sigma=fehler[haeufigkeit>h], absolute_sigma=True)
#Plot der Fits
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl,haeufigkeit,fehler, fmt=".",label='Messung')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.yscale("log")
plt.xlim(0,18)
plt.ylim(0,5000)
plt.grid()
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
x=np.linspace(0,30,1000)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson',linestyle=':')
plt.legend()
plt.savefig("poisson_vs_gaussian2.png", format="png")
```

/usr/lib/python3/dist-packages/matplotlib/pyplot.py:1479: UserWarning: Attempted to set non-positive bottom ylim on a log-scaled axis.
Invalid limit will be ignored.

```
ret = ax.set_ylim(*args, **kwargs)
```



```
[12]: #Ausgabe der Fitparameter
print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

Gaussfit:

A= 4885.330678730933 , Standardfehler= 70.25870815350235

mu= 4.730362603787868 , Standardfehler= 0.032587805220675385

sig= 2.1927916446435503 , Standardfehler= 0.025215015241462434

Poissonfit:

A_p= 4982.97104997925 , Standardfehler= 70.60600602659837

mu_p= 4.769659505735199 , Standardfehler= 0.03202158236577962

```
[13]: #Güte des Fits mit Chi-Quadrat-Methode
#Gauss:
```

```

chi2_g=np.
    ↳sum((gaussian(anzahl[haeufigkeit>h],*popt)-haeufigkeit[haeufigkeit>h])**2/
    ↳fehler[haeufigkeit>h]**2)
dof_g=len(anzahl[haeufigkeit>h])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.
    ↳sum((poisson(anzahl[haeufigkeit>h],*popt_p)-haeufigkeit[haeufigkeit>h])**2/
    ↳fehler[haeufigkeit>h]**2)
dof_p=len(anzahl[haeufigkeit>h])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)
#Fitwahrscheinlichkeit
from scipy.stats import chi2
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")

```

```

chi2_g= 152.18980583787436
chi2_red_g= 13.835436894352215
chi2_p= 17.2443479888191
chi2_red_p= 1.4370289990682583
Wahrscheinlichkeit Gauss= 0.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 14.000000000000002 %

```

[]:

[]: