

# Versuch 243

## Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe von thermischem Rauschen

Viktor Ivanov

27. Mai 2024

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Physikalische Grundlagen . . . . .	2
1.3	Messprinzip . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Messprotokoll und Durchführung des Versuchs</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
3.1	Qualitative Beobachtungen . . . . .	9
3.2	Bestimmung der äquivalenten Rauschbandbreite . . . . .	10
3.3	Berechnung der Boltzmann-Konstante . . . . .	11
3.4	Optionale Messung . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>14</b>
5.1	Quellen . . . . .	14
5.2	Python-Code . . . . .	14

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

In diesem Versuch messen wir zuerst die Rauschspannung von sechs verschiedenen Widerständen bei Zimmertemperatur und das Eigenrauschen des Verstärkers.

Wir bestimmen den Frequenzgang der Messelektronik und berechnen mit diesen Daten die Boltzmannkonstante. Zum Schluss messen wir die Rauschspannung eines Widerstands als Funktion der Temperatur.

## 1.2 Physikalische Grundlagen

Wegen der Brownschen Bewegung tritt bei elektrischen Leitern praktisch immer thermisches Rauschen auf. Wenn man mit einem empfindlichen Oszilloskop die Spannung über einen Widerstand misst, beobachtet man einen Verlauf, der wie in Abbildung 1 aussieht. Wenn keine äußere Spannung anliegt, dann gilt für den Mittelwert der Rauschspannung:

$$\langle U_r \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r(t) dt = 0 \quad (1)$$

Da die Brownsche Bewegung ungerichtet ist, ist der Mittelwert gleich Null.

Um die Rauschspannung quantifizieren zu können, muss man den Effektivwert messen, welcher der Wurzel des quadratischen Mittelwerts entspricht:

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r^2(t) dt} \quad (2)$$

Es ist zu bemerken, dass alle Frequenzteile bis in den THz-Bereich in gleichem Maße vorhanden sind. Da im weißen Licht auch alle Frequenzanteile vorhanden sind, nennt man das thermische Rauschen auch weißes Rauschen.

Für den quadratischen Effektivwert der Rauschspannung gilt die Nyquist-Beziehung:

$$\boxed{\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f} \quad (3)$$

Wobei  $T$  die Temperatur,  $R$  den Widerstand,  $\Delta f$  die Bandbreite und  $k$  die Boltzmannkonstante entsprechen.

Die Bandbreite  $\Delta f$  hängt von der Bandbreite der Messelektronik ab. Rauschen ist frequenzunabhängig und nach 3 sehen wir, dass je größer der Frequenzbereich der Messelektronik ist, desto größer die gemessene Rauschspannung.

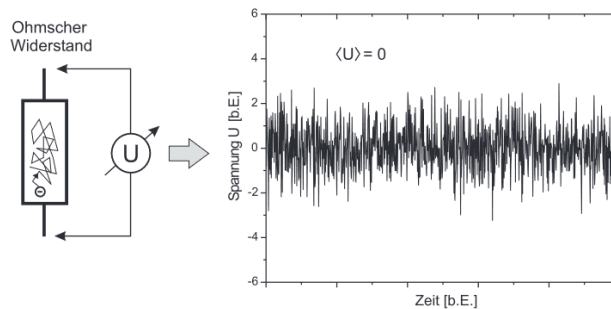


Abbildung 1: Links: Braunsche Bewegung in einem Leiter Rechts: Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand

## 1.3 Messprinzip

Um die Boltzmannkonstante zu bestimmen, können wir einfach unsere Messungen in 3 einsetzen. Wegen der ziemlich kleinen Rauschspannungen, sollen wir aber einen zusätzlichen Verstärker einfügen.

Die Rauschspannung bei  $R = 5k\omega$  und Bandbreite  $\Delta f = 50kHz$  beträgt  $\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = 2\mu V$ . Der zugefügte Verstärker

wird die Spannung um das 1000-Fache verstärken. Er hat jedoch auch einen inneren Rauschanteil  $\sqrt{\langle U_V^2 \rangle}$ . Die gesamte Rauschspannung kann man mit folgender Formel bestimmen:

$$\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} = \sqrt{\langle (U_R + U_V)^2 \rangle} = \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2\langle U_R \rangle \langle U_V \rangle} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \langle U_{R+V}^2 \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle \quad (5)$$

Wir werden noch einen zusätzlichen Tiefpassfilter verwenden, um die Störsignale zu eliminieren. Die zugelassenen Amplituden dieses Filters kann man in Abbildung 2 finden.

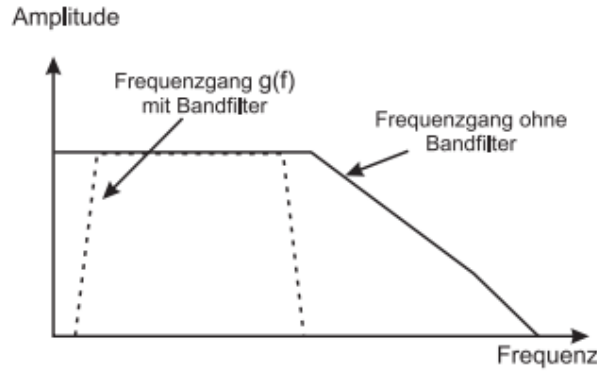


Abbildung 2: Frequenzgang der Messelektronik mit und ohne einen Tiefpassfilter

Um die Boltzmannkonstante zu bestimmen brauchen wir zuerst den Frequenzgang der Messelektronik  $g(f)$

$$g(f) = \frac{U_{aus}(f)}{U_{ein}(f)} \quad (6)$$

Wobei  $U_{aus}(f)$  und  $U_{ein}(f)$  Die Aus- und Eingangsspannungen bei der Frequenz  $f$  sind. Der quadratische Effektivwert von  $U_{aus}(f)$  beträgt aus Gleichung 3:

$$d\langle U_{aus}^2 \rangle = g(f)^2 d\langle U_r^2 \rangle = 4kTRg(f)^2 df \quad (7)$$

$$(8)$$

Nach Integration erhalten wir:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^\infty g(f)^2 df \equiv 4kTRB \quad (9)$$

Nach Gleichung 5 beträgt der gesamte Ausgangssignal mit dem zusätzlichen Rauschanteil  $\langle U_V \rangle$ :

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTRB + \langle U_V^2 \rangle \quad (10)$$

Und daher gilt für die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB} \quad (11)$$

Wobei  $B$  die äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems ist.

Der Frequenzgang beträgt analog zu 6:

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}} = \frac{1}{D} \frac{U_{aus}(f)}{U_{ein}(f)} \quad (12)$$

Wobei  $D = 10^{-3}$  die Dämpfung ist.

## **2 Messprotokol und Durchführung des Versuchs**

Das Messprotokoll befindet sich auf der nächsten Seite.

Viktor Javov  
Danae Droukas  
Tuponi:  
Johanna  
Feuerstein

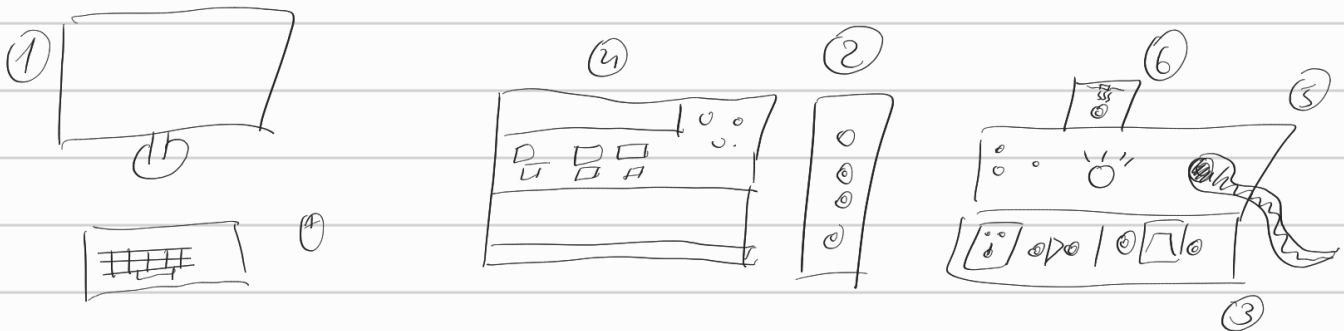
## Versuch 243 - Messprotokoll

06/05/24

14-17 Uhr

### I. Messaufbau

- Batterie netzteil
- Zimmertemperaturmeter
- Verschiedene drehbare Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert
- Rauschloser Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter (3)
- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Beheizbarer Widerstand 4k $\Omega$  bei 0°C (Pt 4000 - Widerstand) (6)
- Heizungsnetzteil mit integrierter Reglerelektronik für den beheizbaren Widerstand (5)
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator (2)
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP 34401A (4)
- PC (1)



Skizze 1: Messaufbau

## II Durchführung, Messungen, Beobachtungen

### 1. Qualitative Untersuchung eines ohmschen Widerstands

Es wird das Rauspspektrum von 6 ohmschen Widerstände aufgenommen. Dazu werden die Widerstände mit dem Verstärkereingang verbunden und das Signal mit dem Oszilloskop untersucht.

Anschließend wird das Frequenzspektrum mit dem PC analysiert. Man beobachtet ungefähr gleiche Anteile aller Frequenzen. Es wird der Frequenzbereich des Spektrumanalysators auf 3 MHz gestellt und der Bandfilter zwischen Verstärker und Oszilloskop geschaltet.

### 2. Messung der Rausspannung als Fkt von R

Es werden die Widerstände an den Verstärker und dieser an den Filter und dieser an das Voltmeter des Oszilloskops verbunden.

$R [k\Omega]$	$U_{eff} [mV]$	$\bar{U} [mV]$	$\sigma [mV]$	#Messungen
5	2,4067	2,3782	0,0145	102
10	3,1063	3,1086	0,0124	103
15	3,6868	4,5087	0,99	101
20	4,209	4,1857	0,0162	101
25	4,6911	6,6421	0,0187	101
30	3,0707	3,5095	0,567	100

Tabelle 1: Rauschspannungen verschiedener Widerstände bei Raumtemperatur

$$\Delta u_{\text{eff}} = 0,0007 \text{ mV}$$

Zimmertemperatur  $(23,2 \pm 0,1)^\circ\text{C}$

Die selbe Messanordnung nur mit kurzgeschlossenem Verstärkungseingang  
( $R = 0 \Omega$ )

$$u_{\text{eff}} = 1,329 \text{ mV} \quad \bar{u} = 1,5409 \text{ mV} \quad \sigma = 0,213 \text{ mV} \quad \begin{array}{l} \text{\# Messungen:} \\ 100 \end{array}$$

3. Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Ein Dämpfungsglied ( $-60 \text{ dB}$ ) wird an den Verstärkereingang verbunden.

Der Fkt.-generator wird verwendet um ein Sinussignal von  $100 \text{ Hz}$  und einer Amplitude von  $0,2 \text{ V}_{\text{rms}}$  zu erzeugen.

Es wird der Frequenzgang gemessen.

Folgende Einstellungen wurden verwendet

- Vertical scale  $50 \text{ dB/div}$
- V-range  $0,3 \text{ V}$
- frequency range  $1 \text{ MHz}$
- frequency start  $100 \text{ Hz}$
- frequenzschritte  $20\%$

$$\Delta p = 0,2\%$$

4. Messung der Rausspannung als Fkt. der Temperatur

$T [^{\circ}\text{C}]$	$R [\Omega]$	$U_{\text{eff}} [\text{mV}]$	$\bar{U} [\text{mV}]$	$\sigma [\text{mV}]$	Anzahl Messungen
53,217	4825,5	1,3921	1,3892	0,0059	104
100,19	5543,2	1,3794	1,39	0,00637	104
150,69	6303,5	1,3986	1,3935	0,00592	102
198,9	7018,2	1,4053	1,3963	0,00629	101
260,7	7922,3	1,3941	1,3979	0,00583	102

Tabelle 2: Rauschspannung als Fkt der Temperatur

06.04.2024 JS



## 3 Auswertung

### 3.1 Qualitative Beobachtungen

Im ersten Versuchsanteil haben wir das Rauschspektrum des ohmschen Widerstands bei verschiedenen Widerständen qualitativ untersucht. Wir haben die im Messprotokoll angegebenen Einstellungen auf dem Oszilloskop benutzt. In den Abbildungen 3, 4 und 5 sind die gemessenen Rauschspannungen als Funktion der Zeit dargestellt. Es ist leicht zu erkennen, dass je größer der Widerstand, desto größer die Rauschspannung. Bei  $15\text{ k}\Omega$  haben wir die Einstellung von  $10\text{ mV}$  auf  $30\text{ mV}$  verändert, da die Rauschspannung zu groß für die Skala wurde.

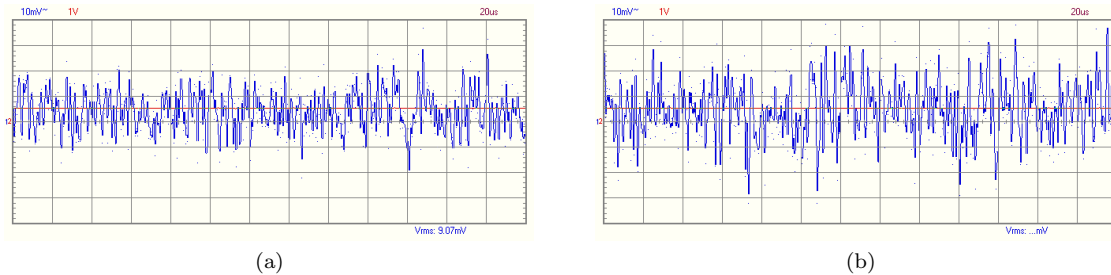


Abbildung 3: Thermisches Rauschen bei  $5\text{ k}\Omega$  links,  $10\text{ k}\Omega$  rechts

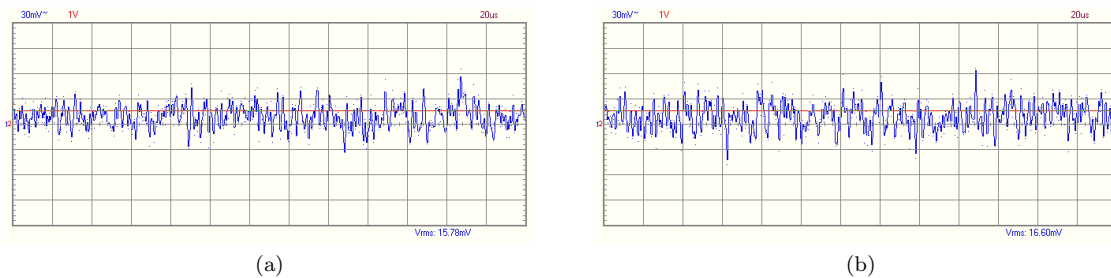


Abbildung 4: Thermisches Rauschen bei  $15\text{ k}\Omega$  links,  $20\text{ k}\Omega$  rechts

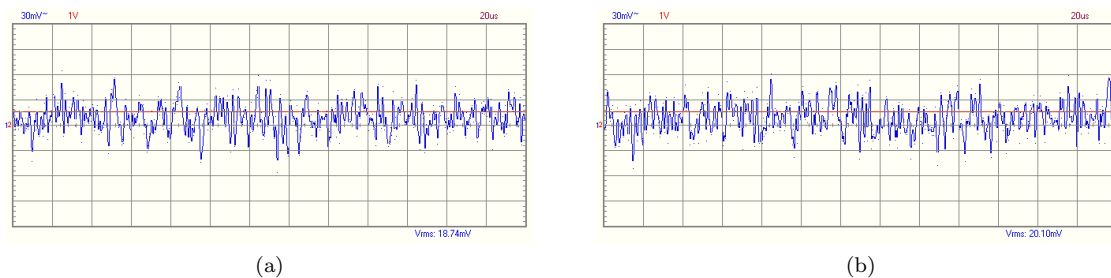


Abbildung 5: Thermisches Rauschen bei  $25\text{ k}\Omega$  links,  $30\text{ k}\Omega$  rechts

In Abbildung 6 haben wir das Spektrum bei  $3\text{ MHz}$  mit einem Bandfilter dargestellt. Wir beobachten einen Abfall der Frequenzübergang bei höheren Frequenzen. Dies geschieht aufgrund der endlichen Bandbreite des Verstärkers. Der Bandfilter filtert die hohen und tiefen Frequenzen und führt, wie erwartet, zu steileren Kanten.

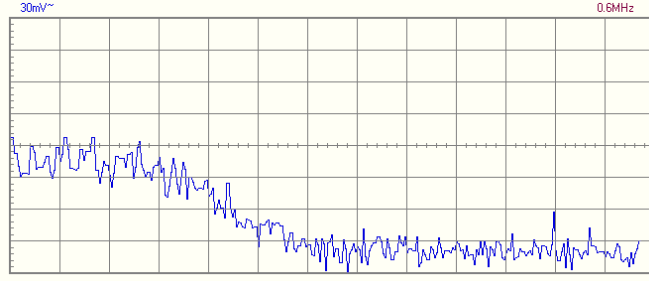


Abbildung 6: Rauschspannung bei 3Mhz mit Bandfilter

### 3.2 Bestimmung der äquivalenten Rauschbandbreite

Um die Boltzmannkonstante  $k$  zu bestimmen, müssen wir die äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems kennen. Die können wir mithilfe von Formel 12 bestimmen. Die Dämpfung beträgt  $D = 0,001 \pm 0,2\%$ . Der Funktionsgenerator generiert ein Sinussignal mit einer Frequenz von  $100\text{ Hz}$  und Amplitude von  $0,2V_{rms}$ . Der Fehler der äquivalenten Rauschbandbreite beträgt:

$$\Delta g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta U_{aus}}{U_{aus}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_{cin}}{U_{cin}}\right)^2} \quad (13)$$

Die Werte von der Messung, eingetragen auf ein doppellogarithmisches Diagramm, sind in Abbildung 7 dargestellt.

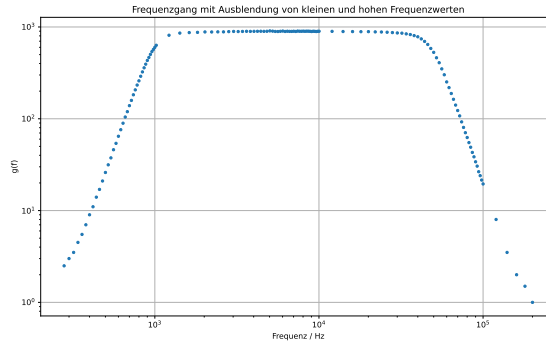


Abbildung 7: Frequenzgang

Um die Funktion  $g(f)$  zu bestimmen passen wir die Formel für einen Verstärker mit Hochpassfilter auf den gemessenen Daten an:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}} \sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}} \quad (14)$$

Wobei  $V$  die Verstärkung ist,  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  die Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpassfilters sind.  $n_1$  und  $n_2$  sind die jeweilige Ordnungen bei beider Filter. Die angepasste Funktion ist in Abbildung 8 zu finden.

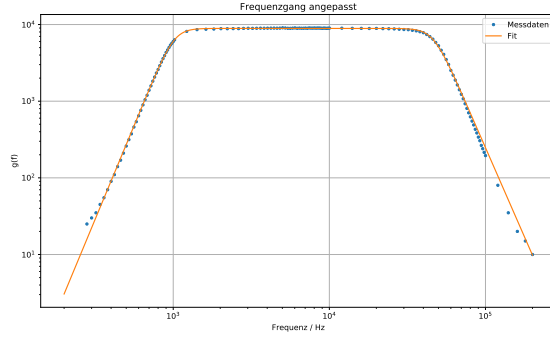


Abbildung 8: Frequenzgang mit angepassten Funktion für einen Verstärker mit Hochpassfilter

Der Integral  $B$  aus 9 berechnen wir numerisch mithilfe von `scipy.integrate` in unserem Python Programm. Das Ergebnis beträgt:

$$B = (3,67 \pm 0,07)10^{10} Hz \quad (15)$$

### 3.3 Berechnung der Boltzmann-Konstante

Im folgenden Teil des Versuchs haben wir die Rauschspannungen für die Widerstände  $5k\Omega$ ,  $10k\Omega$ ,  $15k\Omega$ ,  $20k\Omega$ ,  $25k\Omega$  und  $30k\Omega$  gemessen. Bei jeder Messung haben wir c.a. 100 Einzelmessungen durchgeführt. Die Daten sind in Tabelle 1 im Messprotokoll zu finden.

Wir können die Boltzmannkonstante mithilfe von Gleichung 11 berechnen.

Zuerst berechnen wir die Differenz:

$$D = \langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle \quad (16)$$

mit dem Fehler

$$\Delta D = \sqrt{(2U_{aus}\Delta U_{aus}^2 + (2U_v\Delta U_v)^2)} \quad (17)$$

Dann tragen wir die berechneten Differenzen gegen den Widerständen in ein Diagramm in Python ein. Danach haben wir eine Fitgerade angepasst, die bei einem Widerstand gleich Null, kein Rauschen hat und danach durch die gemessenen Punkten verläuft. Das Diagramm kann man in Abbildung 9 finden.

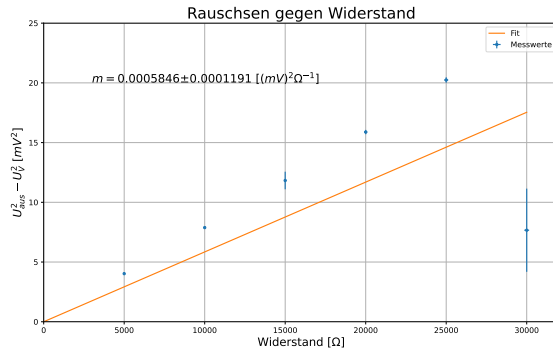


Abbildung 9: Rauschen gegen Widerstand

Es ist leicht zu erkennen, dass etwas mit der letzten Messung schief gelaufen ist, deshalb habe ich ein neues Diagramm ohne die letzte Messung erstellt. Dieses ist in Abbildung 10 zu finden.

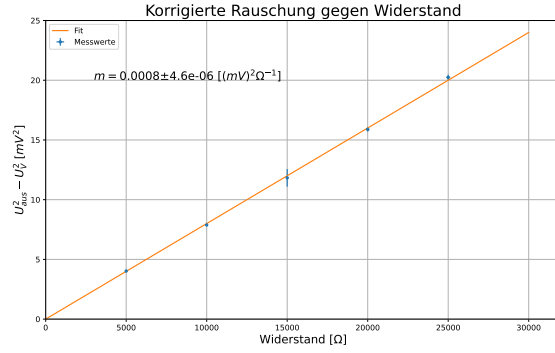


Abbildung 10: Rauschen gegen Widerstand ohne letzte Messung eingetragen

Die Steigung der Fitgerade beträgt:

$$m = (800 \pm 5) \cdot 10^{-6} \quad (18)$$

Das ist eine sehr kleine Steigung, jedoch sind die benutzte Messgeräte sehr sensitiv und wir haben für jede Messung 100 einzelne Messungen gemacht, was die Genauigkeit deutlich erhöht.

Die Güte des Fits können wir mithilfe der  $\chi^2$ -Methode bestimmen. Die Formel für die  $\chi^2$ -Summe beträgt:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left( \frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (19)$$

Die reduzierte  $\chi_{red}^2$ -Summe berechnet man indem man die  $\chi^2$ -Summe durch die Anzahl der Freiheitsgrade teilt:

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\# \text{Freiheitsgrade}} \quad (20)$$

Für die Fitgerade mit der letzten Messung haben wir folgende Werte berechnet:

$$\chi_1^2 = 1637 \quad (21)$$

$$\chi_{red,1}^2 = 327 \quad (22)$$

$$\text{Fitwahrscheinlichkeit}_1 = 0,0\% \quad (23)$$

Für die Fitgerade ohne die letzte Messung haben wir folgende Ergebnisse:

$$\chi_2^2 = 2,77 \quad (24)$$

$$\chi_{red,2}^2 = 0,55 \quad (25)$$

$$\text{Fitwahrscheinlichkeit}_2 = 74,0\% \quad (26)$$

Wir sehen, dass einer der Fits ziemlich unerwartet ist und wahrscheinlich falsch ist, während andere hat viel bessere Werte hat. Die Ergebnisse besprechen wir ausführlicher in der Diskussion.

Mit den Ergebnissen bis jetzt können wir die Boltzmannkonstante bestimmen. Der Fehler der Boltzmannkonstante aus der Formel 11 nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz beträgt:

$$\Delta k = \Delta k_{stat} \cdot \Delta k_{syst} \quad (27)$$

Wobei

$$\Delta k_{stat} = k \sqrt{\left( \frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2} \quad (28)$$

und

$$\Delta k_{syst} = 0,02k \quad (29)$$

Die Boltzmann- Konstante aus der "falschen" Diagramm beträgt

$$k_{B,1} = (1,345 \pm 0,27 \text{ stat} \pm 0,027 \text{ syst.}) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (30)$$

Mit einer  $\sigma$ -Abweichung zwischen dem Literaturwert und dem von uns gemessenen Wert von:

$$\sigma_1 = 0,13 \quad (31)$$

Die Boltzmann- Konstante aus der "richtigen" Diagramm, ohne die letzte Messung, beträgt:

$$k_{B,2} = (1,841 \pm 0,011 \text{ stat} \pm 0,037 \text{ syst.}) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (32)$$

Mit einer  $\sigma$ -Abweichung von

$$\sigma_2 = 12 \quad (33)$$

Wir sehen, dass der erste Wert sehr nahe am Literaturwert liegt, während der zweite eine signifikante Abweichung hat.

Die Ergebnisse besprechen wir ausführlicher in der Diskussion.

### 3.4 Optionale Messung

Wegen Zeitgründen habe ich die optionale Messung nicht ausgewertet. Die Messergebnisse stehen im Messprotokoll.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch haben wir anschließend das Rauschspektrum des ohmschen Widerstands bei verschiedenen Widerständen qualitativ untersucht. Dabei haben wir festgestellt, dass bei höheren Frequenzen ein Abfall im Frequenzgang zu sehen ist. Der Bandfilter führt zu steileren Kanten.

Das waren auch die erwarteten Ergebnisse

Im zweiten Teil des Versuchs haben wir die äquivalente Rauschbandbreite mithilfe von Gleichung 12 bestimmt. Wir haben zuerst alle Werte der äquivalente Bandbreite eines Sinusgenerators in dem Diagramm 7 dargestellt, wir haben eine Funktion, die in Diagramm 8 zu finden ist, angepasst. Die Funktion haben wir dann numerisch integriert und das Ergebnis findet man unter 15.

Im folgenden Abschnitt haben wir zuerst die Differenz der Spannungsquadrate  $D$  berechnet und die Ergebnisse in einem Diagramm gegen den Widerstand  $\Omega$  eingetragen. Die letzte Messung lag falsch an der Diagramm, deshalb habe ich die nächsten Schritte mit und ohne die letzte Messung durchgeführt.

Die  $\chi^2$ -Werte, die man unter 21 und 24 findet, die  $\chi_{red}^2$ -Werte in 22, 25 und die Fitwahrscheinlichkeiten in 23 und 26 zeigen, dass der Fit mit der letzten Messung ziemlich unwahrscheinlich ist. Die  $\chi_{red}^2$ -Wert einer guten Messung sollte idealerweise  $\chi_{red}^2 = 1$  betragen, bei der Fit mit der letzten Messung beträgt es  $\chi_{red,1}^2 = 327$ . Das ist ziemlich hoch, was besagt, dass es keine Zusammenhang zwischen unsere Werte gibt. Diese Aussage ist von der ziemlich kleine Fitwahrscheinlichkeit von  $Fitwahrscheinlichkeit_1 = 0\%$  unterstützt. Die Werte ohne die zweiten Messung von  $\chi_{red,2}^2 = 0,55$  und  $Fitwahrscheinlichkeit_2 = 74,0\%$  besagen, dass diese Ergebnis ziemlich Wahrscheinlich ist und es ein Zusammenhang zwischen den Werten gibt.

Die Boltzmannkonstante haben wir durch Eintragen der oben berechnete Werten in der Gleichung 11 bestimmt. Die Werte mit und ohne der letzten gemessenen Wert kann man in 30 und 32 finden. Das interessante ist, dass das Ergebnis mit dem "falschen" Wert eine sehr kleine  $\sigma$ -Abweichung von  $\sigma_1 = 0,13$  beträgt und die Ergebnis ohne dem

”falschen” Wert,  $\sigma_2 = 12$  beträgt. Eine optimale Abweichung bleibt unter  $\sigma_{optimal} = 1$ . Die relativen Fehler unseren Ergebnisse liegen c.a. 2%, was kein großer Fehler ist.

Wenn ich die Ergebnisse gesehen habe, habe ich zuerst überlegt, ob die letzte Messung wirklich falsch ist, oder nicht. Wenn die andere richtig sind, kann die letzte nicht richtig sein, da die Abhängigkeit von Rauschung und Widerstand nach der Theorie linear ist. Die  $\chi^2$ -Werte zeigen noch, dass es sicherlich falsch ist. Dann warum weicht die Ergebnis von der Boltzmann-Konstante so viel von dem Literaturwert ab?

Es könnten vielen Gründen geben. Eine davon ist ein Fehler im Software. Wenn alle Resultaten mit einem Faktor, der größer als 1 ist, multipliziert sind, steigt auch die Steigung.

Eine andere Fehlerquelle ist, dass der Verstärker mit einem anderen Koeffizient die Werte verstärkt, als was wir gerechnet haben. Das ist nach meiner Meinung wahrscheinlicher als einen Software-Fehler.

Der Verstärker hat eine endliche Bandbreite, was zu Unterschieden bei sehr hohen Frequenzen führen könnte. Das ist aber nach meiner Meinung auch nicht der Grund für die Verfälschung der letzten Messung, da die Änderung des Widerstand kein Einfluss auf die Frequenz hat.

Im Allgemeinen war dieser Versuch interessant und einigermaßen erfolgreich. Wir haben einige mögliche Fehlerquellen identifiziert, können jedoch nicht mit Sicherheit wissen was der Grund für die große Abweichung zwischen dem Literatur- und dem Messwert der Boltzmannkonstante ist, ohne die Messungen noch einmal durchzuführen. Die optionalen Versuchsteile haben wir durchgeführt, aber aufgrund von Zeitdruck nicht ausgewertet.

## 5 Anhang

### 5.1 Quellen

Alle Informationen, die ich im Protokoll verwendet habe, stammen aus der Praktikumsanleitung, Ausgabe 4.2023 und Wikipedia, <https://www.wikipedia.org/>.

### 5.2 Python-Code

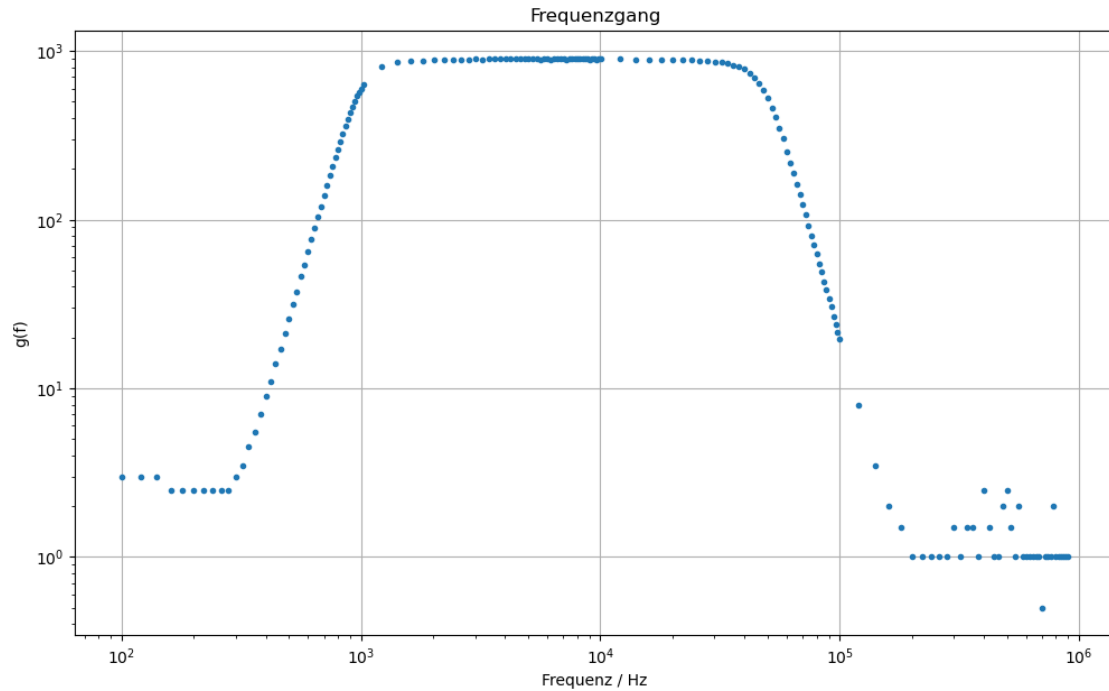
Der Python-Code befindet sich auf der nächsten Seite.

# Versuch243

May 25, 2024

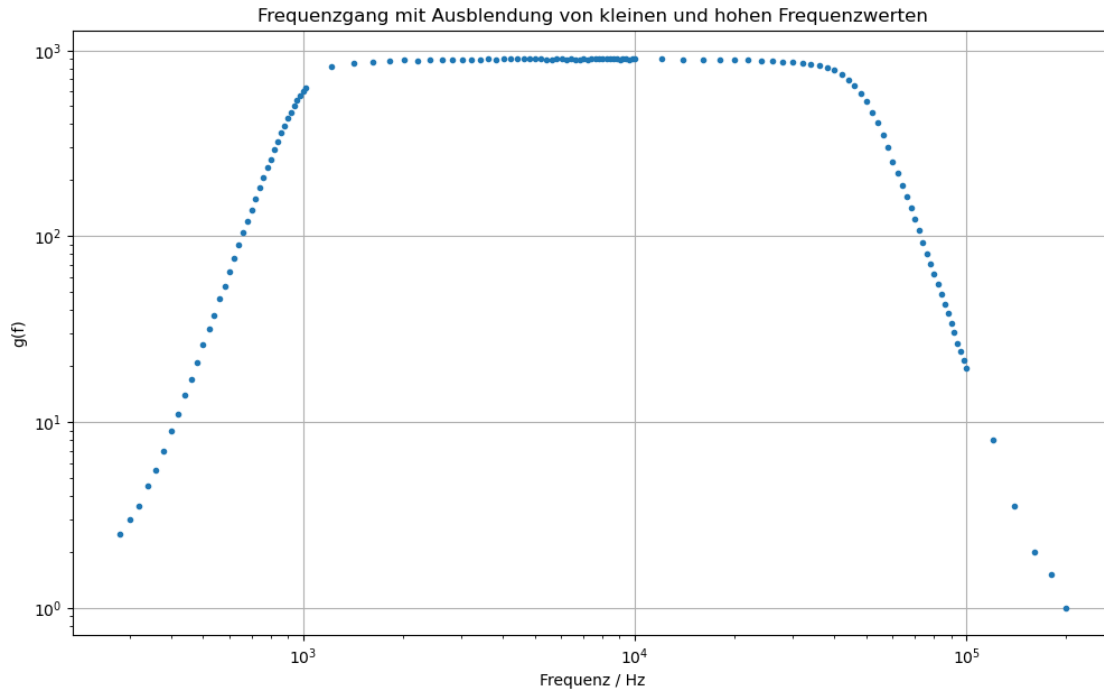
```
[1]: %matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import scipy.integrate as integrate
from scipy.stats import chi2

[2]: f, U_aus = np.loadtxt("A3.txt", skiprows=1, usecols=(0,1), unpack=True) #f in Hz,
    ↪ und U_aus in mV
sig_U_aus = 0.03*U_aus
#Berechnung des Frequenzgangs g
D=1e-2 #Abschwächung Dämpfungsglied
sig_D = 0.002*D
U_ein= 0.2 #Vrms Eingestellte Eingangsspannung
sig_U_ein = 0.03*U_ein
g=U_aus/(U_ein * D) #Berechnung Frequenzgang
sig_g = g*np.sqrt((sig_U_aus/U_aus)**2 + (sig_U_ein/U_ein)**2 + (sig_D/D)**2)
#Auftragen von g über f in ein doppellogarithmisches Diagramm
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.loglog(f,g, linestyle="None", marker=".")
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.title("Frequenzgang")
plt.grid()
```

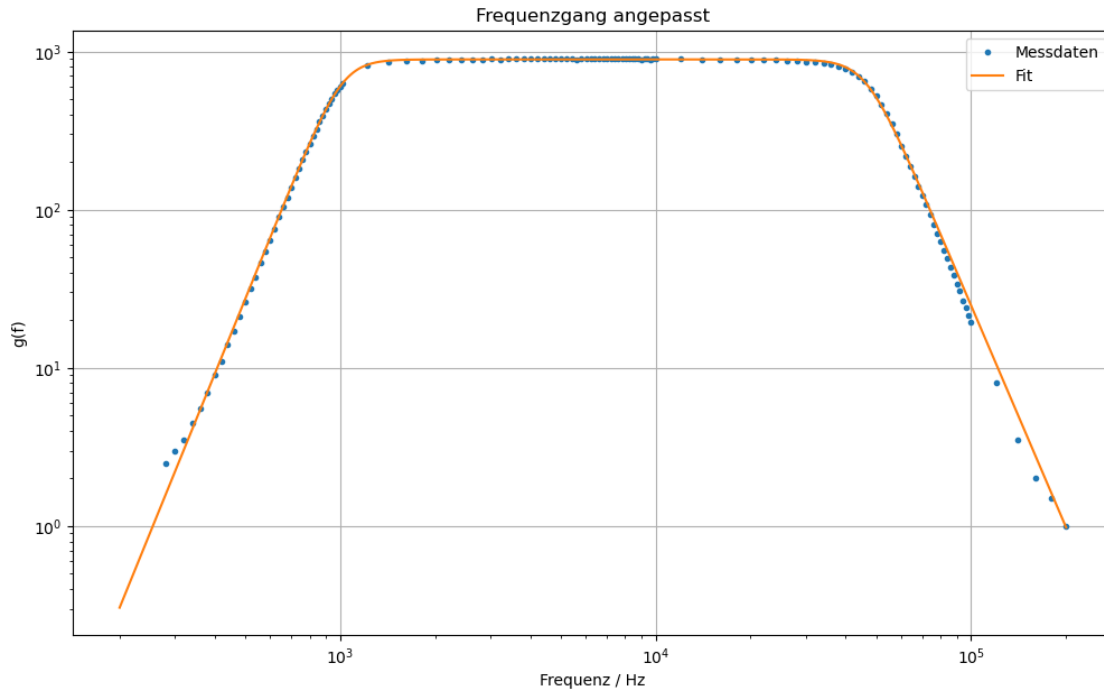


```
[3]: start = 9
end = -35
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.loglog(f[start:end],g[start:end], linestyle="None", marker=".")
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.title("Frequenzgang mit Ausblendung von kleinen und hohen Frequenzwerten")
plt.grid()
plt.savefig('Frequenzgang.pdf',format='pdf')
```





```
[4]: def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))
#Fit
p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[start:end], g[start:end] ,p0)
#Plot
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.loglog(f[start:end],g[start:end], linestyle="None", marker=".",
↵",label="Messdaten")
x = np.linspace(2e2,2e5,10000)
plt.loglog(x, fit_func(x, *popt), label="Fit")
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.title("Frequenzgang angepasst")
plt.legend(loc="best")
plt.grid()
plt.savefig('Frequenzgang_angepasst.pdf',format='pdf')
```



```
[5]: #Numerische Integration
def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2
B=integrate.quad(fit_func_square, f[start], f[end], args=tuple(popt))
print("Das Integral betraegt: {value:.4e}".format(value=B[0]))
print(B[0]*0.02/1e10)
```

Das Integral betraegt: 3.6657e+10  
0.07331420810817713

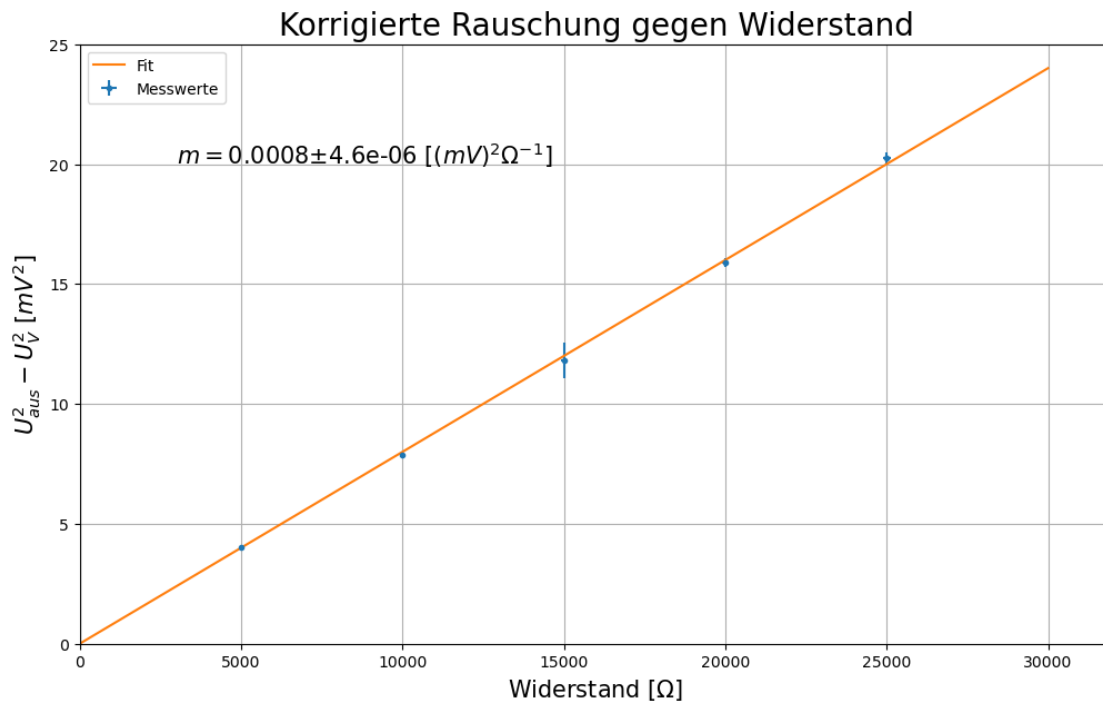
```
[6]: R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3])
fehler_R = 0.005*R #maximaler Widerstandsfehler nach Praktikumsanleitung
U_aus=np.array([2.4067,3.1063,3.6868,4.201, 4.6911])
#U_aus=np.array([2.3782,3.1063,4.5087,4.1857, 6.6421])
fehler_system_U_aus = U_aus*0.003 #Messgenauigkeit des Voltmeters von 0,3%
fehler_U_aus=np.sqrt(np.array([0.0145,0.0124,0.099,0.0162,0.0187])**2+
    ↪+fehler_system_U_aus**2)
#Messwert Eigenrauschen des Verstärkers (Abschnitt 3 Messprotokoll)
U_V = 1.329
fehler_U_V = 0.0213
D=U_aus**2-U_V**2 #mV~2
fehler_D=2*np.sqrt((U_aus*fehler_U_aus)**2 + (U_V*fehler_U_V)**2)
    ↪#GaussscheFehlerfortpflanzung
#Plot der Messwerte
plt.figure(figsize=(12,7))
```

```

plt.errorbar(R, D, xerr=fehler_R, yerr=fehler_D, fmt=".", label="Messwerte")
plt.axis([0, 32e3, 0, 25])
plt.grid()
plt.xlabel("Widerstand [ $\Omega$ ]", size=15)
plt.ylabel(" $U_{\text{aus}}^2 - U_V^2$  [mV2]", size=15)
plt.title("Korrigierte Rauschung gegen Widerstand", size=20)
#Anpassung einer linearen Funktion durch den Ursprung (da Rauschspannung bei R=0
↪ verschwindet)
def linear(x, c):
    return c*x
popt, pcov = curve_fit(linear, R, D)
x = np.linspace(0, 30000, 10000)
plt.plot(x, linear(x, *popt), label="Fit")
plt.legend(loc="best")
#Ausgabe der Steigung und des dazugehörigen Fehlers
m = popt[0] #mV2Ω-1
fehler_m = np.sqrt(pcov[0][0])
print("Steigung m: ", m, "+/-", fehler_m)
#Angabe der Steigung im Diagramm
plt.text(3000, 20, '$m = $' + str(np.round(m, 7)) + '$\pm$' + str(np.
    ↪ round(fehler_m, 7)) + ' [(mV)2 \Ω-1]', size=15)
plt.savefig('Rauschung gegen Spannung.pdf', format='pdf')

```

Steigung m: 0.0007999998983124582 +/- 4.595570687312935e-06

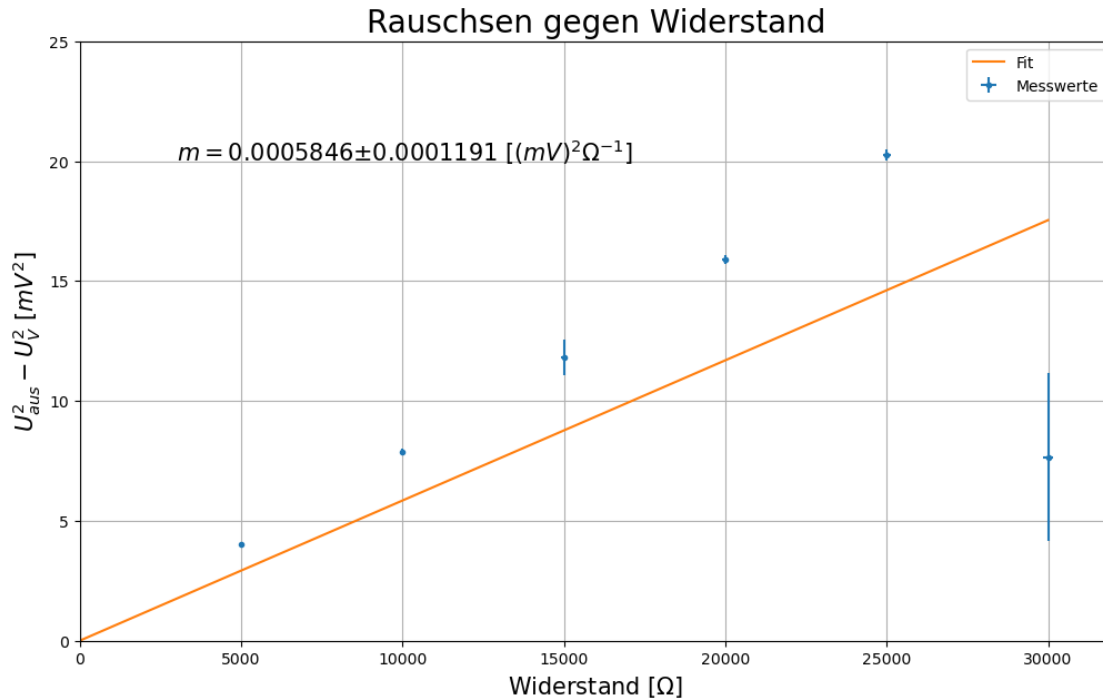


```

[7]: R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3,30e3])
fehler_R = 0.005*R #maximaler Widerstandsfehler nach Praktikumsanleitung
U_aus=np.array([2.4067,3.1063,3.6868,4.201, 4.6911,3.0707])
#U_aus=np.array([2.3782,3.1063,4.5087,4.1857, 6.6421])
fehler_system_U_aus = U_aus*0.003 #Messgenauigkeit des Voltmeters von 0,3%
fehler_U_aus=np.sqrt(np.array([0.0145,0.0124,0.099,0.0162,0.0187, 0.567])**2
    ↪+fehler_system_U_aus**2)
#Messwert Eigenrauschen des Verstärkers (Abschnitt 3 Messprotokoll)
U_V = 1.329
fehler_U_V = 0.0213
D=U_aus**2-U_V**2 #mV^2
fehler_D=2*np.sqrt((U_aus*fehler_U_aus)**2 + (U_V*fehler_U_V)**2)
    ↪#GausssscheFehlerfortpflanzung
#Plot der Messwerte
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(R, D, xerr=fehler_R,yerr=fehler_D, fmt=".",label="Messwerte")
plt.axis([0,32e3,0,25])
plt.grid()
plt.xlabel("Widerstand [ $\Omega$ ]",size=15)
plt.ylabel("$U_{aus}^2 - U_V^2$ [mV^2]",size=15)
plt.title("Rauschen gegen Widerstand",size=20)
#Anpassung einer linearen Funktion durch den Ursprung (da Rauschspannung bei R=0
    ↪verschwindet)
def linear(x,c):
    return c*x
popt, pcov = curve_fit(linear, R, D)
x= np.linspace(0,30000,10000)
plt.plot(x,linear(x,*popt),label="Fit")
plt.legend(loc="best")
#Ausgabe der Steigung und des dazugehörigen Fehlers
m = popt[0] #mV^2Ohm^-1
fehler_m = np.sqrt(pcov[0][0])
print("Steigung m: ",m,"+/-",fehler_m)
#Angabe der Steigung im Diagramm
plt.text(3000, 20, '$m = $' + str(np.round(m, 7)) + '$\pm$' + str(np.
    ↪round(fehler_m, 7)) + ' [$(mV)^2 \backslash \Omega^{-1}$]',size=15)
plt.savefig('RauschunggegenSPannungfalsch.pdf',format='pdf')

```

Steigung m: 0.0005845664087651414 +/- 0.00011912820862649983



```
[8]: #Güte des Fits mit Chi² Methode
chisquare=np.sum(((linear(R,*popt)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom, Freiheitsgrad; 6-1
chisquare_red=chisquare/dof
print("Chi-squared="+str(chisquare))
print("Reduziert Chi-squared="+str(chisquare_red))
#Berechnung der Fitwahrscheinlichkeit
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit="+str(prob)+"%")
```

```
Chi-squared=1637.2220274267838
Reduziert Chi-squared=327.44440548535675
Wahrscheinlichkeit=0.0%
```

```
[ ]: #Ermittlung der Boltzmannkonstanten: m=4kTB
T = 273.15 + 23.2
fehler_T = 0.3
m = m*1e-6 #Konversion von mV² in V²
fehler_m = fehler_m*1e-6
k = m/(4*T*B[0])
fehler_k = k*np.sqrt((fehler_m/m)**2 + (fehler_T/T)**2)
systematisch_k = k*0.02 #Systematischer Fehler B von 2%
print("Boltzmannkonstante k= ",k,"+/-",fehler_k,"stat. +/-",systematisch_k,"sys.
↪ J K⁻¹")
```

Boltzmannkonstante  $k = 1.3452740983305836 \times 10^{-23} \pm 2.7415545659666036 \times 10^{-24}$  stat.  
 $\pm 2.6905481966611675 \times 10^{-25}$  sys. J K<sup>-1</sup>

```
[ ]: #Abweichung vom Literaturwert
fehler = np.sqrt(fehler_k**2 + systematisch_k**2)
print(fehler)
sk = 1.3806e-23
klit = 1.380649e-23
print("Absolute Abweichung mit signifikanten Stellen ",np.abs(sk-klit))
print("Absolute Abweichung unter Berücksichtigung aller Stellen ",np.
      ↪abs(k-klit))
print("Sigma mit signifikanten Stellen ",np.abs(sk-klit)/fehler)
print("Sigma unter Berücksichtigung aller signifikanter Stellen ",np.
      ↪abs(k-klit)/fehler)
```

```
[ ]:
```

```
[ ]:
```

```
[ ]:
```

```
[ ]:
```