Victor Hugo Picerni 187930

teste 3

1a)

$$x(t)= \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) + \delta(t-nT-T/2)$$

$X(jw) = ?$

temos um sinal periódico que é a soma de dois trens de impulsos, além de um deslocamento no tempo.

Dividindo o sinal em duas partes, temos que:

$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$, mas

sabemos que o resultado dessa transformada é

$$X(jw) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_0)$$

(os coeficientes c_k calculados sendo $C_k = \frac{1}{T}$).

Sabendo da propriedade da transformada de Fourier, em que:

$$X_1(t) = X_1(jw) \qquad (1)$$

$$X_1(t-T) = X_1(jw)e^{-jwT} \quad (2)$$

temos:

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT-T/2)$$

Com isso, podemos substituir por (1) e (2) tendo:

$$X_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1(t-T/2)$$

$$X_2(t) = X_1(jw)e^{-jwT/2}$$

logo, a transformada será a soma das transformadas:

$$X(jw) = X_1(jw) + X_1(jw)e^{-jwT/2}$$

Com $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ temos:

$$\boxed{X(jw) = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_0) \cdot (1 + e^{-jwT/2})}$$

b) Considerando:

w_0 variando de $\frac{-22\pi}{T}$ a $\frac{22\pi}{T}$,

temos uma saída igual a entrada para o intervalo $\frac{-22\pi}{T} < W < \frac{22\pi}{T}$

assim:

$$y_1(jw) = \pi\left(\delta\left(w - \frac{22\pi}{T}\right) + \delta\left(w + \frac{22\pi}{T}\right)\right)$$

e

$$y_2(jw) = (1 + e^{-jwT/2})$$

de forma que:

$$y(jw) = X(jw) = \frac{2}{T}\left(Y_1(jw) \cdot y_2(jw)\right)$$

Assim, Aplicando a antitransformada:

$$y_1(jw) = \cos\left(\frac{22\pi}{T}\right) \quad e$$

$$y_2(jw) = \delta(t) + \delta(t - T/2)$$

Com isso, pela propriedade da Convolução

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{T}\left(y_1(t) * y_2(t)\right)}$$

Com isso, o parâmetro $\frac{2}{T}$ irá garantir a passagem de faixa de $\frac{2\pi}{T}$ entre $\frac{-22\pi}{T}$ e $\frac{22\pi}{T}$.

② a)

temos:

$$x(t) = t\cos(2\pi 100 t)\left(\frac{\sin(2\pi 10t)}{\pi t}\right)^2$$

a) $X(jw) = ?$

Pela propriedade de multiplicação no tempo, temos:

$$x_1(t) = \cos(200\pi t) \quad e$$

$$x_2(t) = t\left(\frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}\right)^2$$

Com isso,

$$X(jw) = \frac{1}{2\pi} X_1(jw) * X_2(jw)$$

Com $x_1(t)$, temos que:

$$X_1(jw) = \mathcal{F}\{\cos(w_0 t)\} = \pi(\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)), \text{ com } w_0 = 200\pi$$

agora para x_2 temos que:

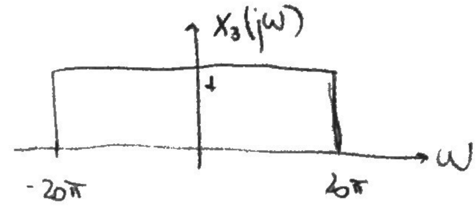
$$t\left(\frac{\sin(w_0 t)}{\pi t}\right)^2 = j\frac{d}{dw}\mathcal{F}\left\{\left(\frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}\right)^2\right\}$$

Com $\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(Wt)}{\pi t}\right\} = X_3(jw) = \begin{cases} 1, & |w| < W \\ 0, & |w| > W \end{cases}$

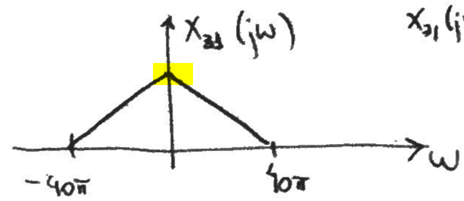
temos ainda, pela propriedade da multiplicação no tempo, que:

$$\mathcal{F}\left\{\left(\frac{\sin(wt)}{\pi t}\right)^2\right\} = X_3(jw) * X_3(jw)$$

Chamando a ultima equação temos o gráfico



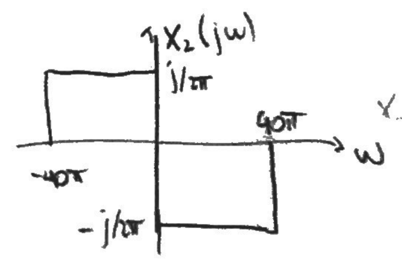
Aplicando a convolução, temos:



$$X_{31}(jw) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}w + 20, & -40\pi < w < 0 \\ \frac{-1}{2\pi}w + 20, & 0 < w < 40\pi \end{cases}$$

Com isso, temos $X_2(jw) = j\frac{dX_{31}(jw)}{dw}$

obtemos então o gráfico:



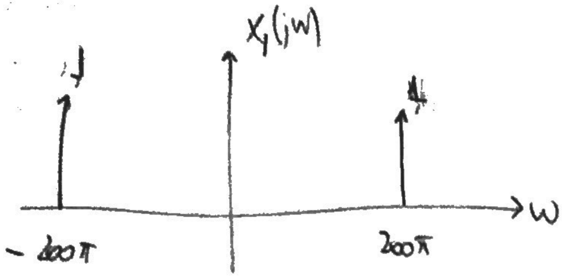
$$X_2(jw) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}j, & -40\pi < w < 0 \\ \frac{-1}{2\pi}j, & 0 < w < 40\pi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com isso,

$$X(jw) = (X_1(jw) * X_2(jw)) \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$X(jw) = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\pi(\delta(w - 200\pi) + \delta(w + 200\pi))}_{X_1'(jw)} * X_2(jw)\right)$$

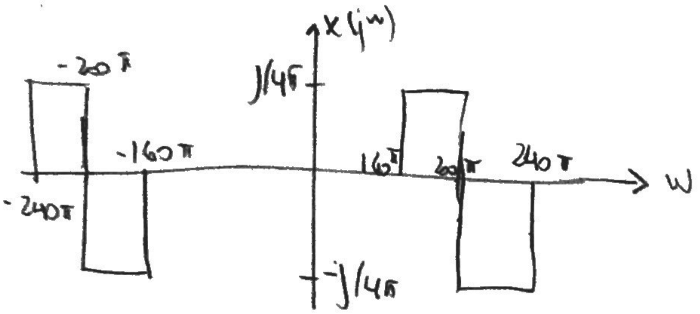
A convolução dos impulsos irá gerar dois retângulos deslocados, já que o gráfico de $X_1(jw)$ será:



Com isso:

$$X(jw) = \begin{cases} j/4\pi, & -240\pi < w < -200\pi \text{ ou } 160\pi < w < 200\pi \\ -j/4\pi, & -200\pi < w < -160\pi \text{ ou } 200\pi < w < 240\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

teremos assim:



b) Graficamente podemos ver que há simetria em relação ao eixo w, de forma que podemos dizer que o resultado da integral será zero. para confirmar, sabendo que para $w=0$ temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = X(j0) = \text{área total}$$

com $X(j0) = X(jw)\big|_{w=0}$

Somando todos os valores temos que

$X(j0) = 0$

assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$$

3) temos a partir do gráfico:

$$x(t) \begin{cases} 2, & -2 < t < -1 \\ -t+1, & -1 < t < 0 \\ \delta(t), & t = 0 \\ t+1, & 0 < t < 1 \\ 2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

temos então $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} jwX_1(jw)$

$$y(t) = \begin{cases} -1 & -1 < t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

jw

Obtemos então um sinal $y(t)$ a partir de $x(t)$

é necessário então calcularmos a transformada de Fourier para $-1 < t < 0$ e $0 < t < 1$, além da transformada do impulso em $t=0$

temos a partir disso que:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d\overset{\to y(t)}{x(t)}}{dt}\right\} = y(jw)$$

$$= \int_{-1}^{0} -e^{-jwt}\,dt + \int_{0}^{1} e^{-jwt}\,dt$$

$$= \frac{e^{-jwt}}{jw}\Big|_{-1}^{0} - \frac{e^{-jwt}}{jw}\Big|_{0}^{1}$$

$$y_1(jw) = \frac{2 - (e^{jw} + e^{-jw})}{jw}$$

$$y_1(jw) = \frac{2 - 2\cos(w)}{jw}$$

Como $y_1 = \frac{dx(t)}{dt} = jw\,X(jw)$

$$\boxed{X_1(jw) = \frac{2 - 2\cos(w)}{j^2w^2}}$$

Para o impulso temos:

$$X_2(jw) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-jw0}\,dt = \frac{1}{2}$$

Assim, ficamos com:

$$\boxed{X(jw) = \frac{2 - 2\cos w}{j^2w^2} + \frac{1}{2}}$$