Victor Hugo Picerni 187930

teste 4 - Amostragem

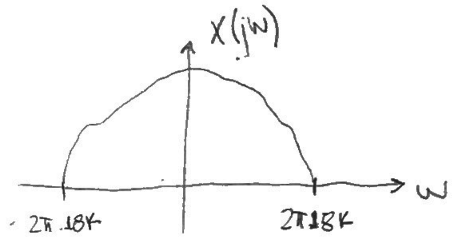
① $x(t)$ limitado em banda $f_m = 18\,KHz$ encontrar a taxa de Nyquist.

a) $y(t) = x^3(t)$

Sabemos que a taxa de Nyquist deve ser: $W_s > 2W_m$, mas $W_m = 2\pi f_m$. temos então que:

$$f_s > 2f_m.$$

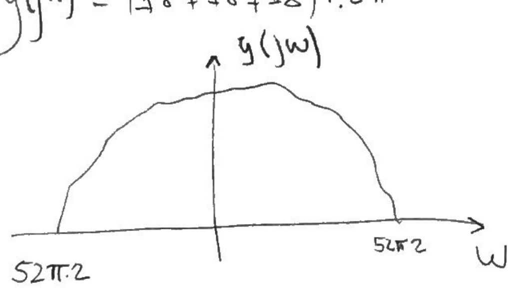
Com $x(t)$ limitado em banda temos



Escrevendo $y(t) = x(t).x(t).x(t)$

Das propriedades da transformada de Fourier, sabemos que a multiplicação no tempo equivale a convolução na frequência, logo, temos:

$$y(jw) = (18+18+18)k.2\pi = 54k\pi.2$$



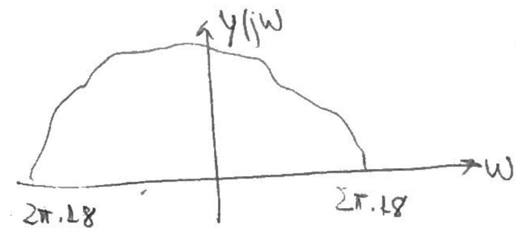
Com isso, $f_m = 52\,KHz$

Com isso, $f_s > 2f_m \Rightarrow \underline{f_s > 104\,KHz}$

ⓑ $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_m t)$

Assim como no item anterior, veremos $Y(jw)$ como a convolução de sinais limitados em $w = 2\pi.18KHz$.

Com isso:



Sabemos que:

$$Y(jw) = \frac{1}{2}\left(X(j(w-w_0)) + X(j(w+w_0))\right)$$

Sabemos que w máximo será 18KHz. além disso w_0 também será 18KHz.

Com isso, a frequência será $f_m = 36KHz$,

$f_s > 2f_m \Rightarrow \underline{f_s > 72\,KHz}$

② Filtro de média móvel com $n = 2$.

a) Magnitude da resposta em Frequência.

$y[n]$ é a média entre $x[n]$ e $x[n-1]$.

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

Aplicando a transformada de Fourier

$$Y(e^{jw}) = \frac{1}{2}\cdot\left(x(e^{jw}) + e^{-jw}X(e^{jw})\right)$$

$$Y(e^{jw}) = \frac{1+e^{-jw}}{2}\left(X(e^{jw})\right)$$

Como a resposta em frequência é dada por: $H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}$

$$H(e^{jw}) = \frac{1+e^{-jw}}{2}$$

Podemos reescrever como:

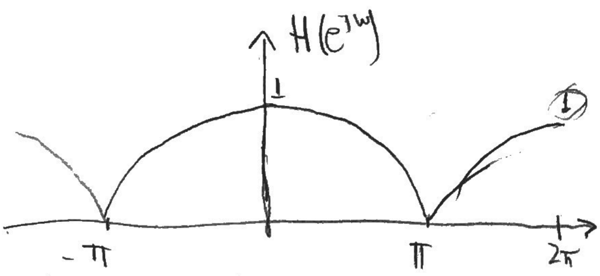
$$H(e^{jw}) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos w - j\sin w\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \cos w - j\cdot\frac{1}{2}\sin w$$

Calculando o modulo temos:

$$|H(e^{jw})| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2(1+\cos w)^2 - j^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin w^2}$$

$$|H(e^{jw})| = \sqrt{1/2 + 1/2\cos w}$$



b) Podemos considerar, observando o gráfico anterior, que o filtro se assemelha a um filtro ideal, uma vez que para $w=0$ a resposta será 1 e permite a passagem de sinal entre $-\pi$ e π.

O filtro em questão é um passa baixas.

3) Filtragem passa faixa

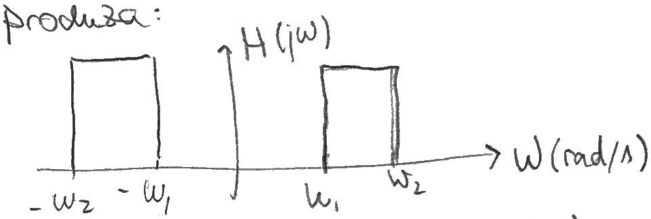
Sobre $x(t)$ limitado em banda em $W = 2\pi \cdot 25000$ rad/s.

Com $w_1 < |w| < w_2$, com $w_2 < W$

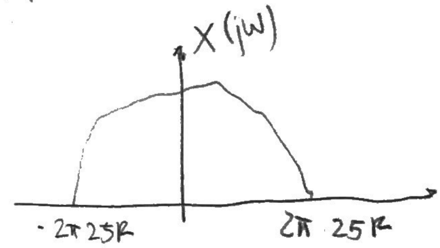
$w_1 = 2\pi\cdot 4500$ $\quad w_2 = 2\pi \cdot 6500$

Determinar a menor taxa de amostragem:

Queremos um filtro discreto que produza:



Além disso:



Como a frequência que queremos se limita entre w_1 e w_2, fora dessa faixa podemos permitir aliasing. Dessa forma, a frequência de amostragem deve ser maior que w_2 (maior frequência).

Com isso:

$$W_s - W > w_2$$

$$W_s > 2\pi\cdot 6500 + 2\pi \cdot 25k$$

$$W_s > 2\pi \cdot 31{,}5k$$

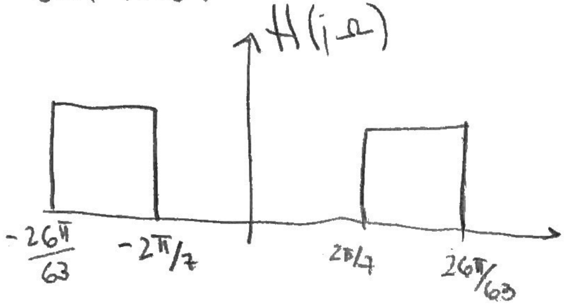
$$f_s > 31{,}5k$$

Com isso o filtro deve ter frequências discretas correspondentes a faixa entre ω_1 e ω_2.

$$\Omega = \frac{\omega}{f_s} \Rightarrow \Omega_1 = \frac{2\pi \cdot 4500}{31500} = \frac{2\pi}{7}$$

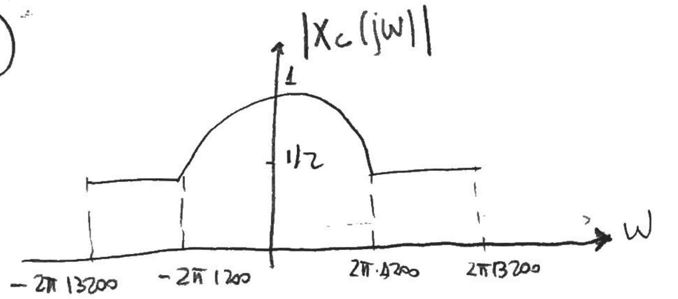
$$\Omega_2 = \frac{2\pi\ 6500}{31500} = \frac{26\pi}{63}$$

Com isso:



temos a resposta com $f_s = 31{,}5KHz$.

(4)



$f_s = 14{,}4KHz$

Representado na frequência dos sinais 1 a 5.

em 1

temos que: $x_a(t) = \sum_n x(nT)\,\delta(t-nT)$

Aplicando a transformada de fourier:

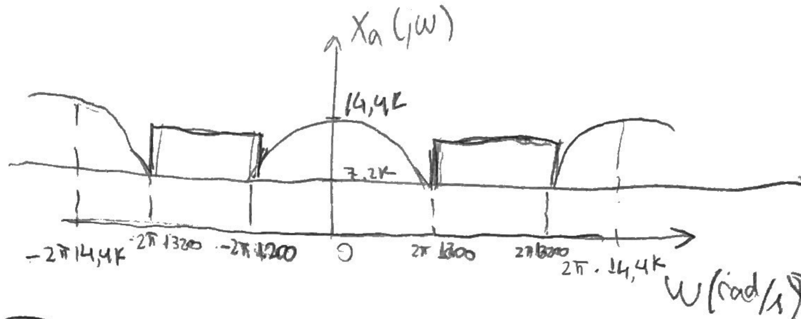
$$x_a(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_k X\left(j\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

logo X_a é constituído de réplicas de x_c.

A periodicidade do sinal se da por:

$$\omega_s = 2\pi \cdot f_s = 2\pi \cdot 14{,}4KHz$$

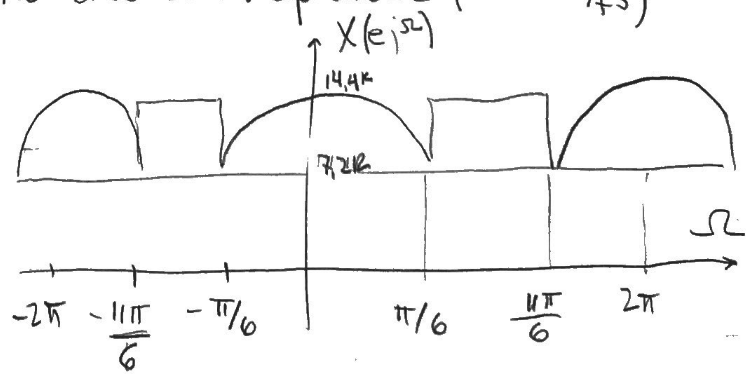
Sabendo disso, temos que o sinal será:



Podemos observar a ocorrência de Aliasing na secção reta, em que as réplicas se sobrepõe, entre $2\pi \cdot 13200$ e $2\pi \cdot 1200$.

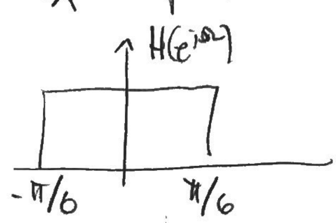
$\boxed{\text{em (2)}}$

$x[n] = X_c(nT)$, assim $X(e^{j\Omega})$ difere de $x_a(j\omega)$ apenas pela normalização no eixo da frequência ($\Omega = \omega/f_s$)



$\boxed{\text{em 3}}$

A resposta em frequência é:



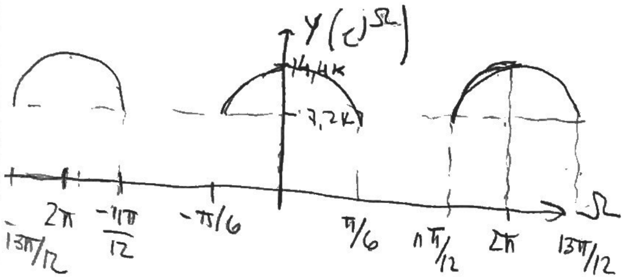
Então

$$y[n] = h[n]\,x[n] \Rightarrow$$

Aplicando a transformada:

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})\,X(e^{j\Omega})$$

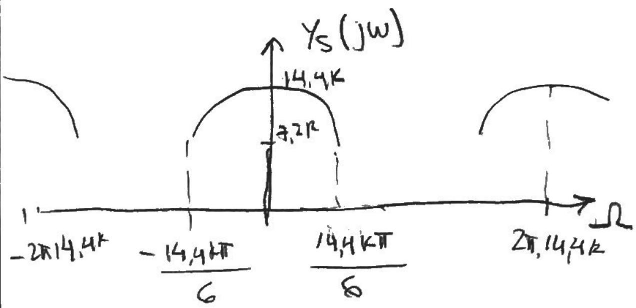
temos então:



em 4

$$y_s(t) = \sum_n y[n]\,\delta(t - nT)$$

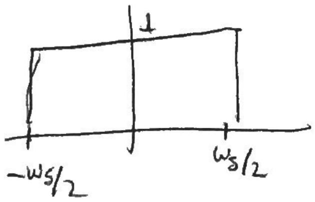
$$\Rightarrow \frac{1}{T} \sum_n Y\left(j\left(\omega - k \cdot 2\pi/T\right)\right)$$



em 5

Por fim, o filtro de reconstrução

temos:



$$w_s = 2\pi \cdot f_s = 28{,}8K\pi$$

$$\frac{w_s}{2} = 14{,}4K\pi$$

Com isso: