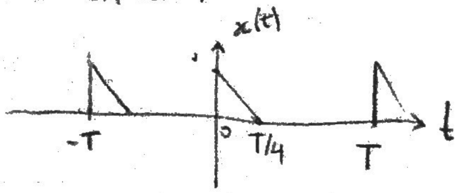
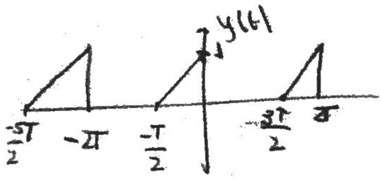
Victor Hugo Picerni 187930

teste 2

1) seja $x(t)$ periódico, período fundamental T



temos agora $y(t)$:



a) represente matematicamente $y(t)$ em função de $x(t)$.

Podemos ver que $y(t)$ é uma versão de $x(t)$ invertida no tempo e ampliada.

com isso:

$$y(t) = x(-\alpha t)$$

Para descobrir α temos que:

$$x(T/4) = 0 \Rightarrow y\left(-\frac{\alpha T}{4}\right) = 0$$

vemos que $y(-T/2) = 0$, assim:

$$-\frac{\alpha T}{4} = -\frac{T}{2} \Rightarrow \alpha = 2$$

Dessa forma $\boxed{y(t) = x(-2t)}$

b) mostre que os coef da série podem ser obtidos a partir de c_k. Qual o valor de w associado a a_k?

Pelas propriedades da série de Fourier, temos:

Sabendo que os coef. de $x(t)$ são denotados por c_k, temos que:

$$x(t) \Rightarrow c_k$$

Propriedade de reversão no tempo:

$$x(-t) \Rightarrow c_{-k}$$

Escala no tempo:

$x(\alpha t)$ tem os mesmos coef, mas a frequência fundamental será αw_0.

temos então

$$a_k \cdot e^{jkw_0' t} = c_{-k} e^{-jk\alpha w_0 t}$$

com $w_0' = \alpha w_0$ e $a_k = c_{-k}$.

2) Sinal $x(t)$ periódico

$$x(t)\begin{cases} -\frac{8}{T}t^2 - 5t + \frac{T}{2} & -\frac{T}{2} \le t < -\frac{t}{4} \\ t, & -\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4} \\ -\frac{8}{T}t^2 + 5t - \frac{T}{2} & \frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Obter os coef da série de Fourier.

temos:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-t/2}^{-t/4} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt +$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{T/4}^{t/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

temos que para $\frac{-T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ a função se trata de uma onda triangular, logo:

$$c_k = \frac{1}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos(k\pi)\right)$$

com $c_0 = \frac{1}{2}$.

Para $x = c_k$, fazemos $\frac{dx}{dt} = jk\omega_0 c_k$

$$= jk\frac{2\pi}{T}\, c_k$$

fazendo $y = \frac{dx}{dt}$ e $z = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{16t}{T} + 5, & -T/2 \le t \le T/4 \\ 1, & -T/4 \le t \le t/4 \\ \frac{-16t}{T} + 5, & T/4 \le t \le T/2 \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} 16/T & -T/2 \le t \le -T/4 \\ 0 & -T/4 \le t \le T/4 \\ -16/T & T/4 \le t \le T/2 \end{cases}$$

Assumindo os coeficientes:

$x(t) \Leftrightarrow c_k$

$y(t) \Leftrightarrow b_k$

$z(t) \Leftrightarrow a_k$

temos:

$$a_k = jk\frac{2\pi}{T}\, b_k = \frac{-4k^2\pi^2}{T^2}\, c_k$$

Calculando a_k como:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad, \text{com } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{-T/4} \frac{16}{T} e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \int_{-T/4}^{T/4} 0 \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$+ \int_{T/4}^{T/2} \frac{-16}{T} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\left(\underbrace{\left[\frac{+16\, e^{-jk\omega_0 t}}{T\, jk\omega_0}\right]_{-T/2}^{-T/4}}_{A} + C + \underbrace{\left[\frac{-16\, e^{-jk\omega_0 t}}{T\, jk\omega_0}\right]_{T/4}^{T/2}}_{B}\right)$$

Para A:

$$\left.\frac{16\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{T\, jk\frac{2\pi}{T}}\right|_{-T/2}^{-T/4} = \frac{16\, e^{+jk\frac{\pi}{2}}}{2\pi jk} - \frac{16\, e^{jk\pi}}{2\pi jk}$$

Para B teremos

$$\left.\frac{-16\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{T\, jk\frac{2\pi}{T}}\right|_{T/4}^{T/2} = \frac{-16\, e^{-jk\pi}}{2\pi jk} + \frac{16\, e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2k\pi}$$

Logo

$$a_k = \frac{1}{T}\left(\frac{+16}{jk\pi}\,\frac{\left(e^{jk\pi} + e^{-jk\pi}\right)}{2} - \frac{16}{jk\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{jk\frac{\pi}{2}}\right)\right)$$

Com isso:

$$a_k = \frac{16}{jk\pi T}\left(\frac{e^{jk\pi}+e^{-jk\pi}}{2}\right) - \cancel{\left(\frac{e^{jk\pi/2}+e^{-jk\pi/2}}{2}\right)} \rightarrow 0$$

$$\boxed{a_k = \frac{16}{jk\pi T}\cdot(-1)^k}$$

Substituindo em c_k, temos

$$c_k \cdot \frac{-4\pi^2 k^2}{T^2} = \frac{16}{jk\pi T}(-1)^k$$

$$\boxed{c_k = \frac{4jT}{(k\pi)^3}\cdot(-1)^k}$$

Para $k=0$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

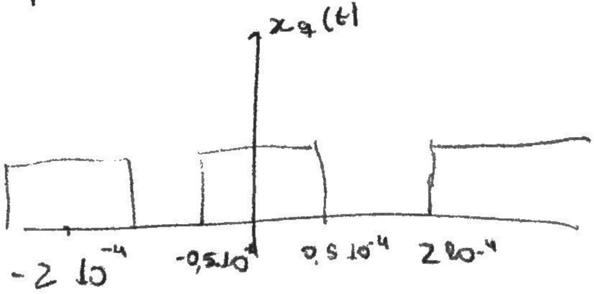
$$c_0 = \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{1}{96}\cdot\pi\cdot 24\,\cancel{T}$$

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{4}}$$

Questão 3

Sinal $x_q(t)$ em um FPB

freq corte $2\pi(3,75\cdot 10^3)$ rad/s



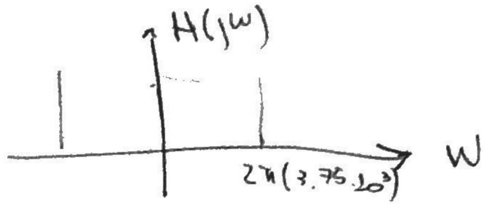
Dado $x_q(t)$ um sinal periódico, temos que

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}, \text{ com } T = 2\cdot 10^{-4}$$

$$w_0 = \pi\cdot 10^4$$

Dessa forma, a frequência fundamental é superior a frequência de corte do filtro.

Como temos um filtro ideal,



$|H(jw)| = 1$ para freq abaixo da frequência de corte.

$|H(jw)| = 0$ para freq acima da frequência de corte.

Assim, a saída $y(t)$ será zero para $k \neq 0$;

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jw) e^{jkw_0 t} \Rightarrow a_0 = 1$$

temos que:

$$a_0 = \lim_{k\to 0} \frac{2\sin k\pi\,\tau/T}{k\pi} = \frac{2\tau}{T} = 1$$

logo:

$$y(t) = 1\cdot 1 \Rightarrow \boxed{y(t) = 1}$$