UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

EFC 5 - Transformada Discreta de Fourier

Prof. Levy Bocatto

Victor Hugo Picerni Pinto Ferreira RA: 187930

CAMPINAS
24 de dezembro de 2020

Sumário

1 Respostas das Atividades

1.1 Item (a)

Gere a sequência x[n] tomando N = 64 amostras de x(t) no intervalo de 0 a 1 segundo (ou seja, a frequência de amostragem é igual a f_s = 64 Hz). Logo, $x[n] = sen(2f_0f_s$ n), onde n = 0, ... , N - 1. Mostre a sequência obtida, utilizando o comando stem().

Para uma frequência fundamental de 6Hz, retirando 64 amostras, temos o seguinte gráfico:

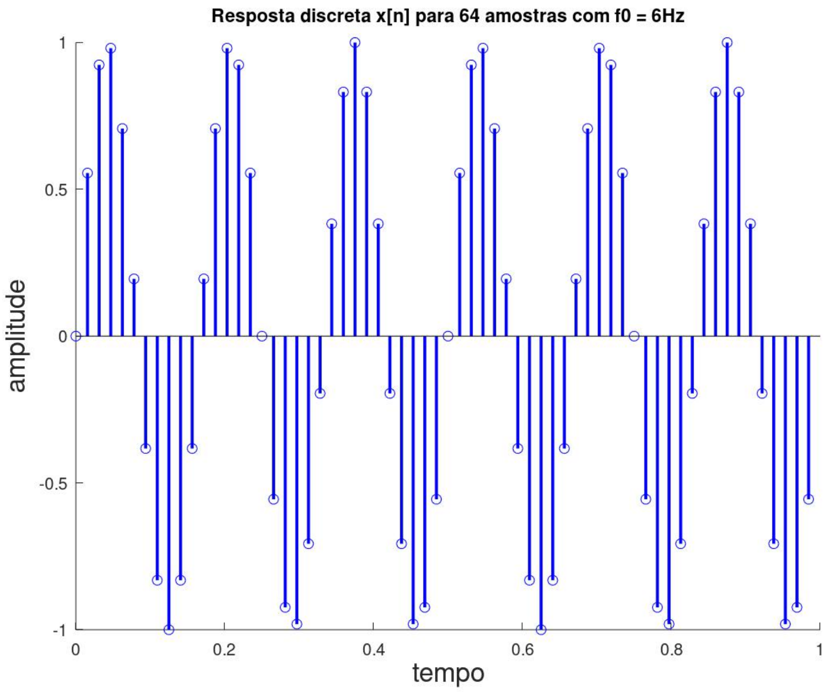

Figura 1: Gráfico da amostragem do sinal senoidal

1.2 Item (b)

Calcule a transformada de Fourier X($e^{J\Omega}$) associada a sequência x[n]. Mostre todos os passos da derivação $e^{J\Omega}$.

Temos:

$$x[n] = sen(2\pi \frac{f_0}{f_s} n) w_N[n];$$

Com $w_0 = 2\pi f_0$, fazendo as substituições, podemos reescrever a expressão como:

$$x_1[n] = sen(\frac{w_0}{f_0}n) = \frac{e^{j\frac{w_0}{f_s}n} - e^{j\frac{w_0}{f_s}n}}{2}$$

$$x_2[n] = W_N[n] = u[n] - u[n-N]$$

Mas sabemos que a Transformada de Fourier para o Seno e para a janela dada são, respsctivamente:

$$X_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2j}[F(e^{j\frac{w_0}{f_s}n}) - F(e^{-j\frac{w_0}{f_s}n})] = \frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - \frac{\omega_0}{f_s}) - \delta(\Omega + \frac{\omega_0}{f_s})]$$

$$X_2(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega(N-1)} - e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

A multiplicação no tempo entre x[n] e wN[n] será uma convolução no domínio da frequência:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}(X_1(e^{j\Omega}) * X_2(e^{j\Omega})$$

$$\mathrm{X(e^{j\Omega})} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{j}{\pi}\big(e^{-j(\Omega-\frac{w_0}{f_s})(\frac{N-1}{2})}\frac{sin(\Omega - w_0/f_0)N/2)}{sin(\Omega - w_0/f_0)} - e^{j(\Omega+\frac{w_0}{f_s})(\frac{N-1}{2})}\frac{sin(\Omega + w_0/f_0)N/2)}{sin(\Omega + w_0/f_0)}\big)\right]$$

$$\mathrm{X(e^{j\Omega})} = \frac{j}{2}\left[e^{j(\Omega+\frac{w_0}{f_s})(\frac{N-1}{2})}\frac{sin((\Omega + w_0/f_0)N/2)}{sin(\Omega + w_0/f_0)} - e^{-j(\Omega-\frac{w_0}{f_s})(\frac{N-1}{2})}\frac{sin((\Omega - w_0/f_0)N/2)}{sin(\Omega - w_0/f_0)}\right]$$

1.3 item (c)

Compute a DFT da sequência x[n] com N pontos. Apresente, então, o gráfico de X(k) em função da frequência Ω. Na mesma figura, plote $X(e^{j\Omega})$. Tendo em vista as propriedades da DFT, analise o espectro obtido, relacionando-o com X($e^{j\Omega}$) e com $X(j\omega)$ (i.e., com o espectro da senoide analógica).

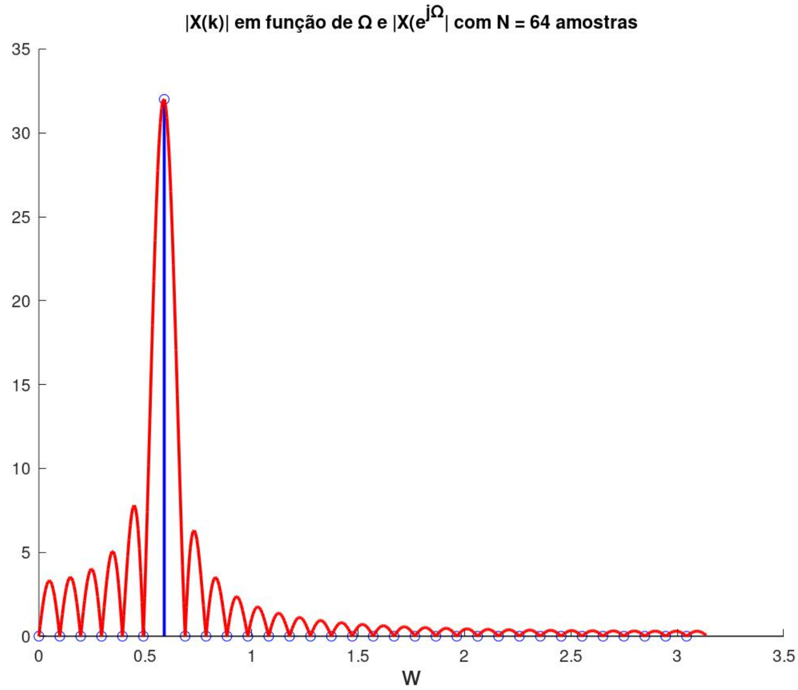

Figura 2: Gráfico do módulo da DFT e trasformada de Fourier para N pontos

Podemos observar em vermelho o espectro em frequência da Transformada de Fourier, onde percebemos que tal espectro é formado por senóides de diferentes amplitudes. Além disso, em azul podemos ver os valores da Transformada Discreta de Fourier (DFT).

O comportamento da DFT pode ser explicado devido a representação de uma senóide pura, tendo em vista que sua DFT será diferente de zero apenas para a frequência fundamental, no caso 6Hz. .

1.4 item (d)

Repita o item (c), mas agora calcule a DFT utilizando 2N pontos. O espectro obtido continua sendo uma representac ao compatível com o esperado para uma senoide pura? Explique o que ocorreu.

Utilizando a DFT com 2N pontos, dobramos a frequência de amostragem, podendo

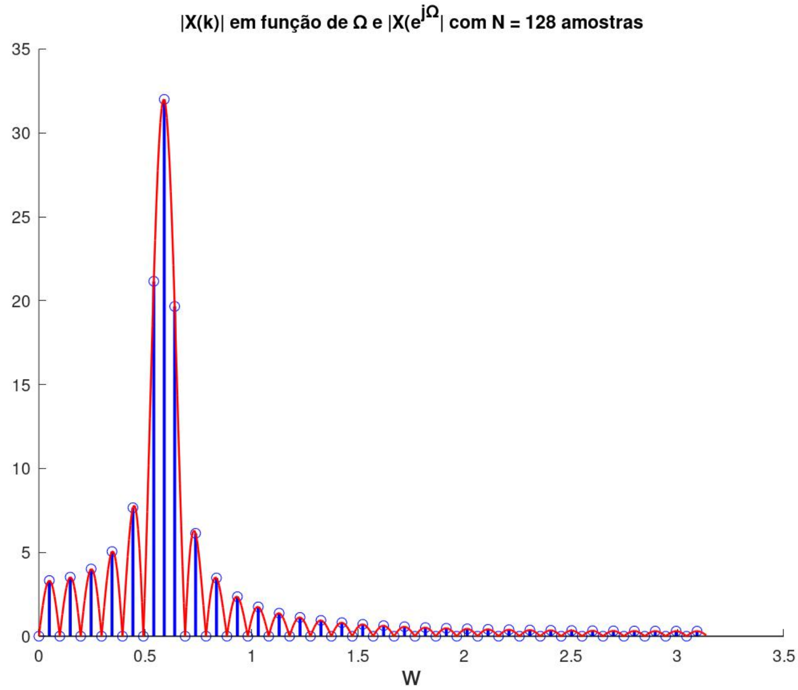

Figura 3: Gráfico do módulo da DFT e trasformada de Fourier para 2N pontos

ver que os pontos estão mais próximos. Além disso há mais pontos diferentes de zero na região amostrada.

Com isso podemos destacar que o espectro deixa de ter uma representação de uma senóide pura, tendo em vista que há outras frequências que tem seu espectro diferente da frequência fundamental. Podemos ver ainda o zero-padding, que consiste em uma adição de zeros para que a DFT possa ser calculada para um numero de amostras 2N ´ ¿ N.

1.5 item (e)

Repita os itens (a) e (c) considerando que a frequência fundamental da senoide analógica é $f_0 = 6,5Hz$. O espectro obtido continua sendo uma representação compatível com o esperado para uma senoide pura? Comente.

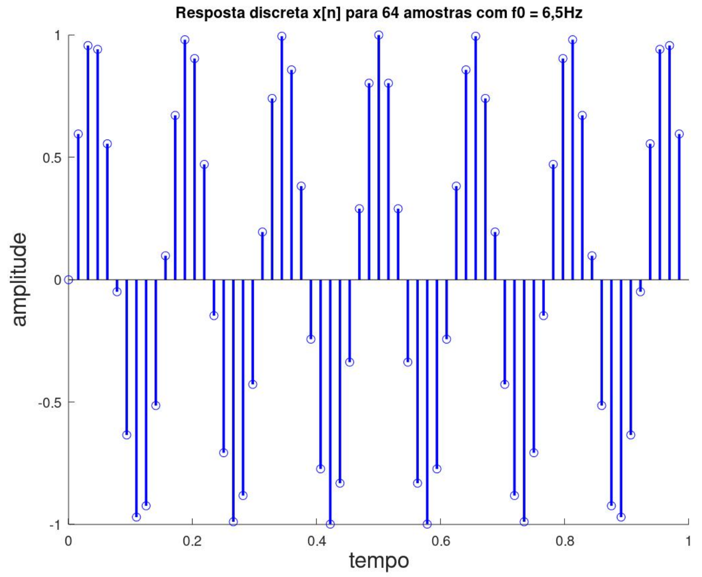

Figura 4: Gráfico da amostragem do sinal senoidal para f0 = 6,5Hz

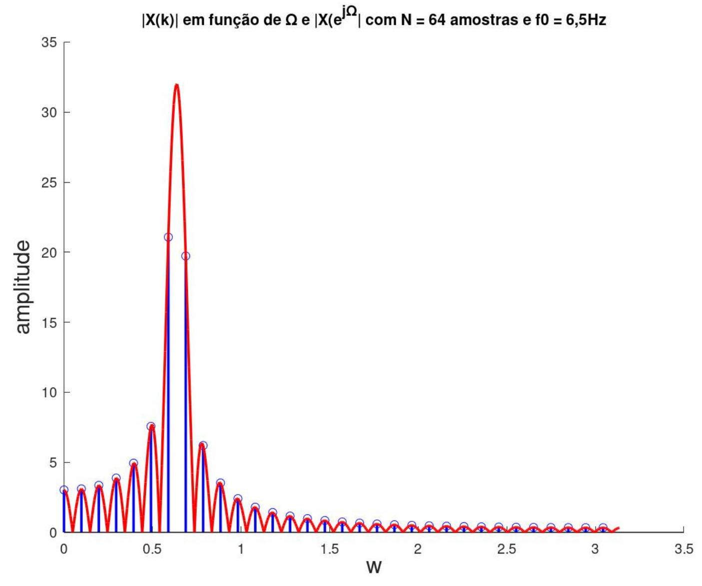

Figura 5: Gráfico do módulo da DFT e trasformada de Fourier para N pontos e f0 = 6,5Hz

O primeiro fato a ser observado foi que agora não há mais nenhum ponto da DFT com valor zero, pois não há senos multiplos de π entre a frequência f_0 e f_s, que fazia com que os valores da DFT fossem zerados. Alem disso não há nenhum ponto no pico da maior senóide, tendo em vista que não há nenhum valor de k para que seja tomada a amostra na frequência fundamental. Podemos ver que há o chamado vazamento de frequências.

Conclui-se que nesse caso, $|X(k)|$ se aproxima mais de $|X(\mathrm{ej}\Omega)|$, transformada da sequência discreta do que de $X(j\omega)$, transformada da senoide analógica, não retratando assim uma senóide pura.