EA614 - Análise de Sinais

Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 2 – Série de Fourier

Turma A – 2º semestre de 2020

Prof: Levy Boccato Email: `lboccato@dca.fee.unicamp.br`

PED-C: Renan Del Buono Brotto Email: `rbrotto@decom.fee.unicamp.br`

Introdução

A série de Fourier permite caracterizar sinais periódicos através de uma combinação linear de exponenciais complexas, conforme a equação de síntese:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}\,, \tag{1}$$

onde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ denota a frequência fundamental, T denota o período fundamental do sinal $x(t)$ e os valores a_k são os coeficientes da série. Tais coeficientes são dados pela equação de análise:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt} \tag{2}$$

O objetivo deste exercício computacional é estudar a série de Fourier para a onda "dente de serra"através de simulações computacionais. A seguir, é apresentado o roteiro do experimento.

Parte Computacional

Considere a onda "dente de serra", de amplitude unitária, com período $T = 4\ s$, definida em um período por:

$$x(t) = -\frac{2}{T}t, \quad \text{para} \quad \frac{-T}{2} < t \leq \frac{T}{2} \tag{3}$$

A Figura 1 apresenta 3 períodos do sinal em questão:

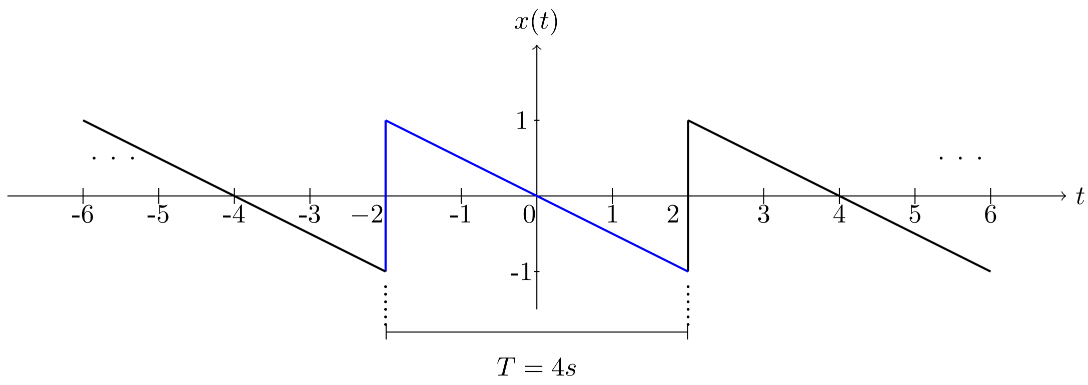

Figura 1: Onda "dente de serra" (ilustração de 3 períodos).

(a) Obtenha os coeficientes a_k da série de Fourier da onda "dente de serra" com período T. **Dica:** calcule o coeficiente a_0 separadamente, lembrado que ele corresponde ao nível DC do sinal.

(b) Com os coeficientes obtidos anteriormente, implemente um programa que aproxime a onda "dente de serra" pela sua série de Fourier com N harmônicas:

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{4}$$

(c) Exiba, em gráficos diferentes, a onda "dente de serra" dada por (3) junto com sua aproximação dada pela série de Fourier com os valores $N = 1, 10, 20, 50$, para um período do sinal. Procure usar cores distintas para cada uma das séries obtidas, bem como para a onda "dente de serra". Neste item, portanto, devem ser gerados quatro gráficos, sendo que cada gráfico mostrará duas curvas: a onda "dente de serra" e a aproximação em série de Fourier para o valor adotado de N.

(d) Para cada um dos valores de N do item anterior, calcule a energia do erro E_N:

$$E_N = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Big(x(t) - \tilde{x}_N(t)\Big)^2 dt \tag{5}$$

No caso desta simulação, a integral da energia do erro pode ser substituída pela média de $\Big(x(t) - \tilde{x}_N(t)\Big)^2$, uma vez que estamos lidando com sinais discretos.

(e) Para $N = 50$, plote o módulo dos coeficientes da série $|a_k|$ em função de ω e discuta a simetria observada. Como queremos plotar uma sequência de valores discretos, utilize o comando `stem()` no Matlab.

(f) Considere o circuito analógico mostrado na Figura 2, que corresponde a um sistema LIT cuja resposta em frequência é dada por $H(j\omega) = \frac{1}{1-j\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}$, onde $\omega_c = \frac{1}{RC}$ é a frequência de corte do filtro (em rad/s). Plote o módulo e a fase da resposta em frequência e discuta a ação deste sistema como um filtro. (Dica: utilize os comandos $abs()$ e $angle()$ do Matlab).

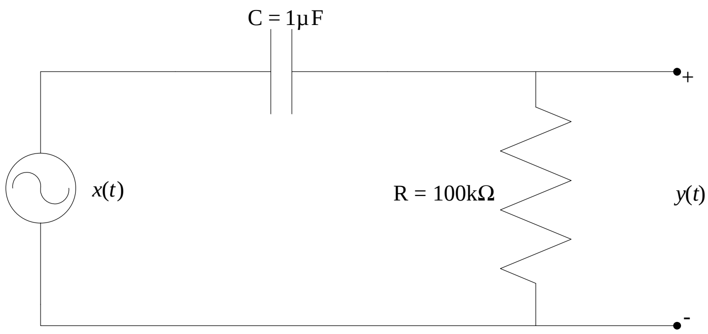

Figura 2: Circuito RC que implementa um filtro analógico.

(g) Tendo como base os conceitos de autofunção e autovalor, mostre a forma de onda $y(t)$ observada na saída do sistema LIT do item (f) quando a entrada é a onda "dente de serra" aproximada com $N = 50$. Comente a forma de onda obtida.

(h) A Figura 3 mostra a resposta do sistema LIT do item (f) à onda dente de serra da Figura 1. Explique as diferenças entre o gráfico da Figura 3 e a resposta do sistema observada no item (g).

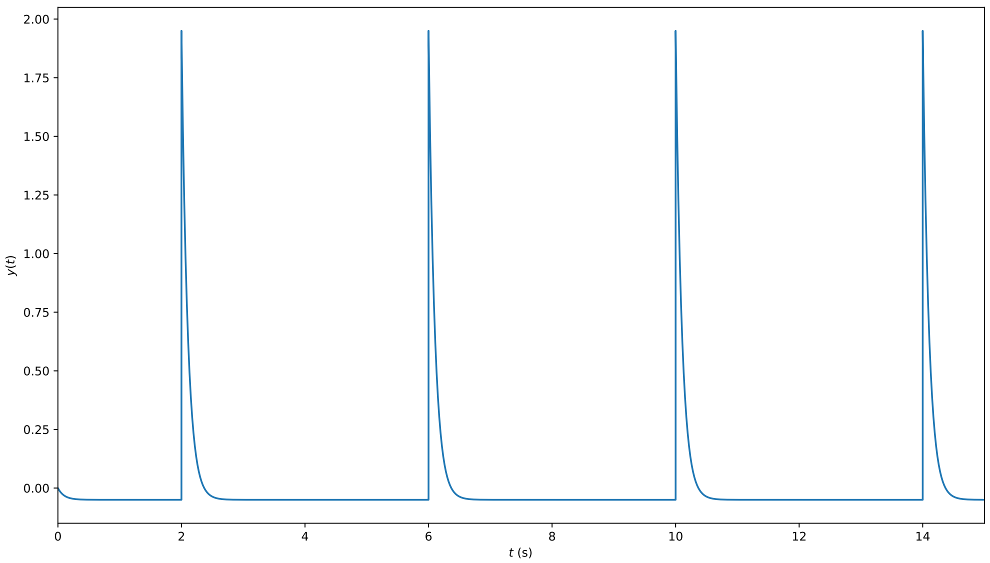

Figura 3: Resposta do circuito da Figura 2 ao sinal dente de serra da Figura 1.