

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO



EFC 2 - Série de Fourier

Prof. Levy Bocatto

Victor Hugo Picerni Pinto Ferreira RA: 187930

CAMPINAS

5 de novembro de 2020

Sumário

1	Introdução	2
2	Respostas - Parte Computacional	3
2.1	Item (a)	3
2.2	Item (b)	6
2.3	item (c)	7
2.4	item (d)	9
2.5	item (e)	10
2.6	item (f)	11
2.7	item (g)	13
2.8	item (h)	14

1 Introdução

A série de Fourier é útil para representar sinais periódicos através da combinação linear de funções exponenciais complexas, de forma que tal soma possa representar o sinal de forma satisfatória.

Os coeficientes da série, que também são o peso de cada função exponencial, podem ser obtidos através de:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1)$$

Sendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Com isso, vamos estudar a Série de Fourier aplicada a uma onda "Dente de Serra"

$x(t) = -\frac{2}{T}t$, para $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ como mostrada na Figura 1, lembrando que T corresponde ao período fundamental do sinal.

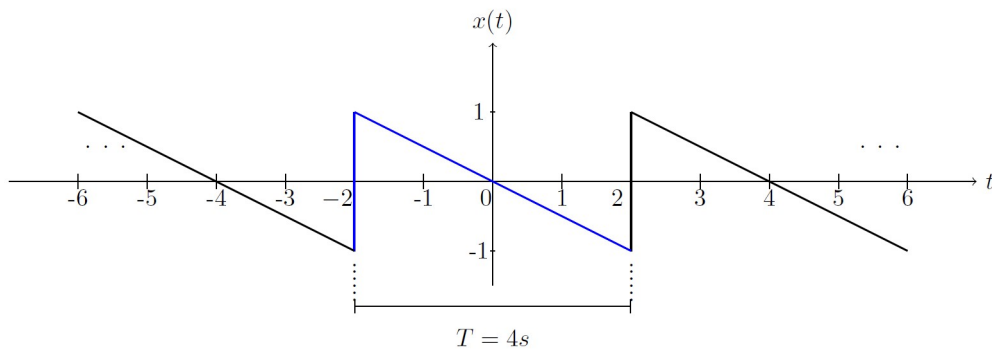


Figura 1: Gráfico da função dente de serra apresentado no exercício

2 Respostas - Parte Computacional

2.1 Item (a)

Obtenha os coeficientes a_k da Série de Fourier da onda "dente de serra" com período T .
Dica: calcule o coeficiente a_0 separadamente, lembrado que ele corresponde ao nível DC do sinal.

Temos que

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Sabendo que $x(t) = -\frac{2}{T}t$, vamos substituir na Equação 1,

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} -\frac{2}{T} t e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \longrightarrow \quad a_k = \frac{-2}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Resolvendo a integral pelo método da integração por partes, temos:

$$\int_{-T/2}^{T/2} u dv = uv - \int_{-T/2}^{T/2} v du$$

com $u = t$ e $dv = e^{-jk\omega_0 t} dt$, teremos $du = 1dt$ e $v = \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}$

Assim

$$\int_{-T/2}^{T/2} t e^{-jk\omega_0 t} dt = t \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} dt$$

temos assim

$$a_k = \frac{-2}{T^2} \left[-t \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{j^2 k^2 \omega_0^2} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right]$$

Com $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{-2}{T^2} \left[-t \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{T} t}}{jk \frac{2\pi}{T}} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{T} t}}{j^2 k^2 (\frac{2\pi}{T})^2} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right]$$

Substituindo, temos

$$a_k = \frac{-2}{T^2} \left[\left(-\frac{T}{2} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}}}{jk \frac{2\pi}{T}} - \left(\frac{T}{2} \right) \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{T} (\frac{-T}{2})}}{jk \frac{2\pi}{T}} \right) - \left(\frac{e^{-jk \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}}}{j^2 k^2 (\frac{2\pi}{T})^2} - \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{T} (\frac{-T}{2})}}{j^2 k^2 (\frac{2\pi}{T})^2} \right) \right]$$

$$a_k = - \left[- \left(\frac{e^{-jk\pi}}{2jk\pi} + \frac{e^{jk\pi}}{2jk\pi} \right) + \left(\frac{e^{-jk\pi}}{2k^2\pi^2} - \frac{e^{jk\pi}}{2k^2\pi^2} \right) \right]$$

Mas, temos que

$$\cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

Ficamos com

$$a_k = \frac{\cos(k\pi)}{jk\pi} + \frac{j\sin(k\pi)}{k^2\pi^2}$$

Com k inteiro, $\sin(k\pi) = 0$, assim:

$$a_k = \frac{\cos(k\pi)}{jk\pi}$$

Para k par, temos $\cos(k\pi) = 1$ e para k ímpar, temos $\cos(k\pi) = -1$ De forma a obtermos:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{jk\pi}$$

Por fim, vamos calcular o termo a_0 . Para isso vamos recorrer a integral da Equação (2).

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j0\omega_0 t} dt$$

Reduzindo a equação apenas em

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad \longrightarrow \quad a_0 = \frac{-2}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t dt$$

$$a_0 = \frac{-2}{T^2} \frac{t^2}{2} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{-2}{2T^2} \frac{T^2}{4} - \frac{-2}{2T^2} \frac{T^2}{4} = 0$$

Com isso temos que os coeficientes da Série de Fourier para a função são:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{Se } k \text{ é zero} \\ \frac{(-1)^k}{jk\pi}, & \text{Se } k \text{ é diferente de zero} \end{cases}$$

2.2 Item (b)

Com os coeficientes obtidos anteriormente, implemente um programa que aproxime a onda "dente de serra" pela sua série de Fourier com N harmônicas:

Segue abaixo a função para calculo dos coeficientes da série.

```
5 T = 4;
6 t = -2:0.01:2;
7 function[fourier] = seriefourier(N)
8 %definindo variáveis
9 T = 4; %o periodo será sempre constante e igual a 4
10 w0 = 2*pi/T; % o valor da frequencia tambpem será
11 t = -2:0.01:2; %o valor de t variando entre -2 e 2 com passo de 0.01
12 aux = 1; %variavel auxiliar para contagem
13
14 for x = t %loop para cada valor de t
15     soma = 0; %zera o valor da soma a cada loop
16     for k = -N:N %para cada k entre o -N e N ocorre o loop
17         if (k!=0) %Condição para a0
18             soma += ((-1)^k/(j*k*pi))*exp(j*k*w0*x); %Soma dos coeficientes para cada valor de tempo
19         endif
20     endfor
21     fourier(aux,1) = soma; %vetor dos valores da função em cada ponto
22     aux +=1; %incrementa a variável
23 endfor
24 endfunction
25 funcao_original = (-2/T)*t; %definindo a funcao original
```

Figura 2: Função para obtenção dos coeficientes da série de Fourier para onda dente de serra. feito em Matlab

2.3 item (c)

Exiba, em gráficos diferentes, a onda "dente de serra" dada por (3) junto com sua aproximação dada pela série de Fourier com os valores $N = 1; 10; 20; 50$, para um período do sinal.

Através da função obtida no item (b), foram feitos os seguintes gráficos para representar a onda dente de serra e sua série de fourier correspondente para $N = 1, 10, 20$ e 50 .

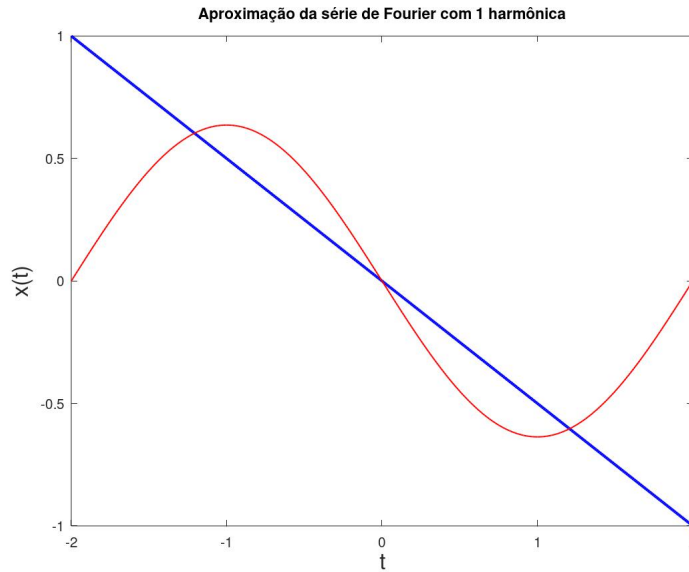


Figura 3: Onda dente de serra e sua representação em série de Fourier para $N = 1$

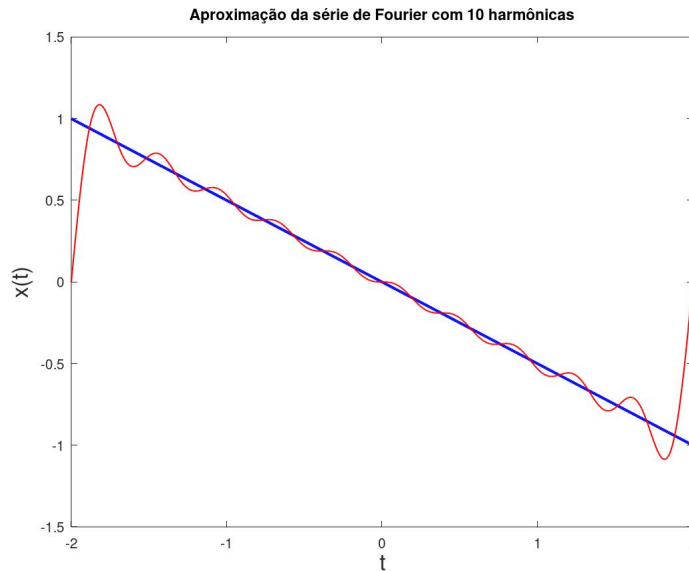


Figura 4: Onda dente de serra e sua representação em série de Fourier para $N = 10$.

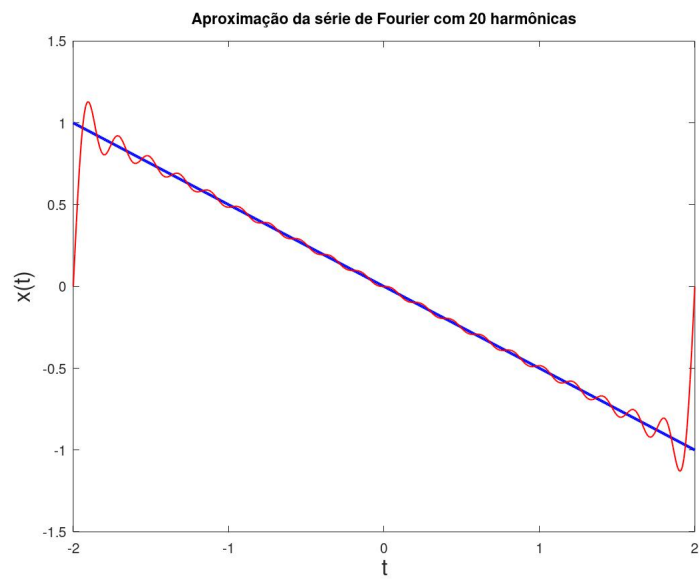


Figura 5: Onda dente de serra e sua representação em série de Fourier para $N = 20$

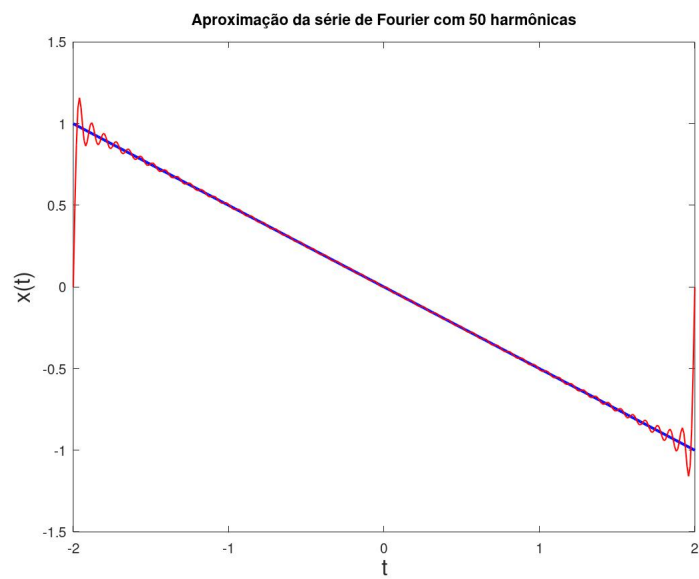


Figura 6: Onda dente de serra e sua representação em série de Fourier para $N = 50$.

Por fim, podemos ver nos extremos dos gráficos o fenômeno de Gibbs

2.4 item (d)

Para cada um dos valores de N do item anterior, calcule a energia do erro

Para calcular a energia do erro, vamos utilizar a fórmula

$$E_N = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - x_N(t))^2 dt$$

Considerando sinais discretos para $x(t)$, uma vez que usamos amostras discretas para construir o gráfico do item (c), essa integral será substituída pela média de $(x(t) - x_N(t))$.

Dessa forma, temos então

```
27 function energia = Erro_energia(original, fourier)
28     T = 4;
29     aux = 1;
30     dif = 0;
31     t = -2:0.01:2;
32     for x = t
33         dif += (real(original(aux)) - fourier(aux))^2
34         aux += 1;
35     endfor
36     energia = dif/(T*400);
37 end
```

Figura 7: Função para encontrar o erro. Feito em Matlab

Com isso, obtemos um erro de:

Para $N = 1 \rightarrow 0.033301$

Para $N = 10 \rightarrow 0.0054681$

Para $N = 20 \rightarrow 0.0031385$

Para $N = 50 \rightarrow 0.0017337$

2.5 item (e)

Para $N = 50$, plote o módulo dos coeficientes da série a_k em função de w e discuta a simetria observada.

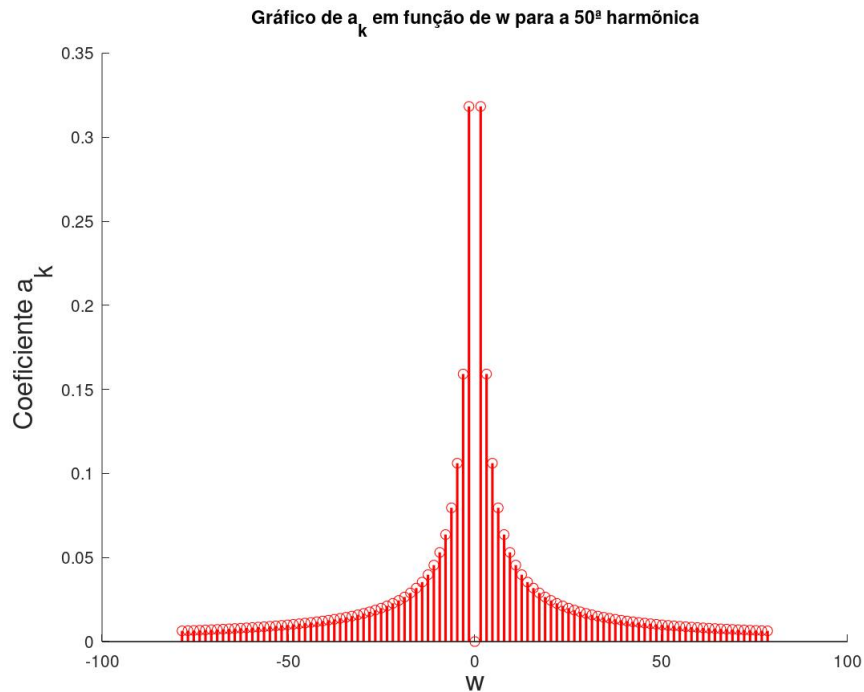


Figura 8: Gráfico do módulo de a_k em função de w para a 50ª harmônica. Feito em Matlab

Vemos no gráfico sua simetria par em relação a $w = 0$. Vemos ainda que os coeficientes a_k e a_{-k} são iguais em módulo.

2.6 item (f)

Plote o módulo e a fase da resposta em frequência e discuta a ação deste sistema como um filtro.

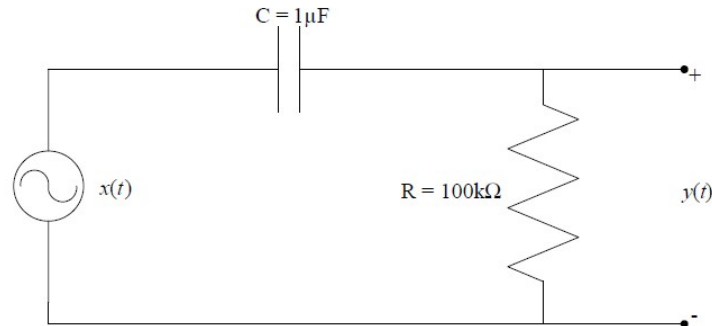


Figura 9: Circuito RC que implementa um filtro analógico

Dada a frequência de entrada $w_c = \frac{1}{RC}$ temos:

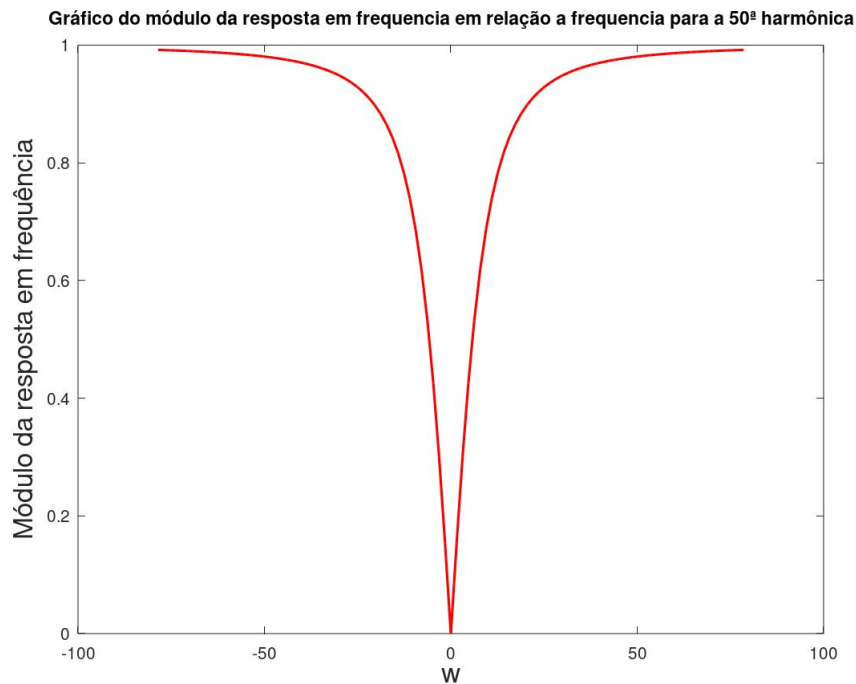


Figura 10: Módulo da resposta em frequência em relação a w

Observando o gráfico do módulo da resposta em frequência, podemos observar que para altas frequências, seu módulo tenda a 1, mas para baixas frequências seu módulo se atenua. Essa resposta corresponde a um filtro passa altas, uma vez que para altas

frequências o sinal tende a ter seu módulo integralmente lido na saída, uma vez que para a resposta em frequência o módulo é 1 graças a função impulso para analisar a resposta. Para frequências baixas, o sinal é atenuado de forma que não passa pelo filtro.

abaixo segue o gráfico da fase do sinal

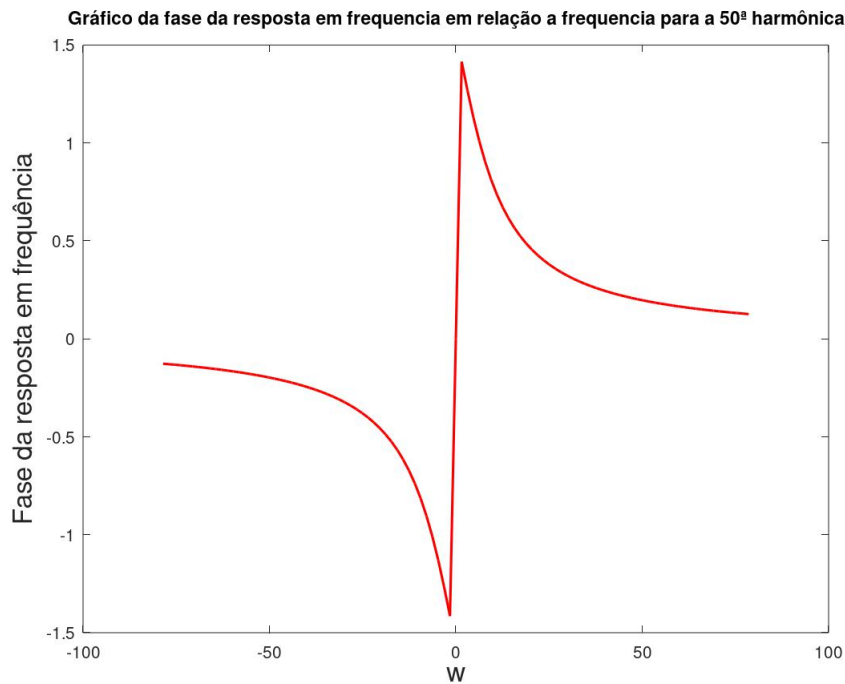


Figura 11: Fase da resposta em frequência em relação a w

Observando agora o gráfico da fase do sinal, podemos perceber que a fase é atenuada para frequências altas, de forma a mostrar a atenuação do efeito capacitivo do circuito, já para frequências baixas vemos uma fase de aproximadamente 1.5 radianos, sendo grande o efeito capacitivo, e mostrando o funcionamento do capacitor em relação a fase.

2.7 item (g)

Tendo como base os conceitos de autofunção e autovalor, mostre a forma de onda $y(t)$ observada na saída do sistema LIT do item (f) quando a entrada é a onda "dente de serra" aproximada com $N = 50$. Comente a forma de onda obtida.

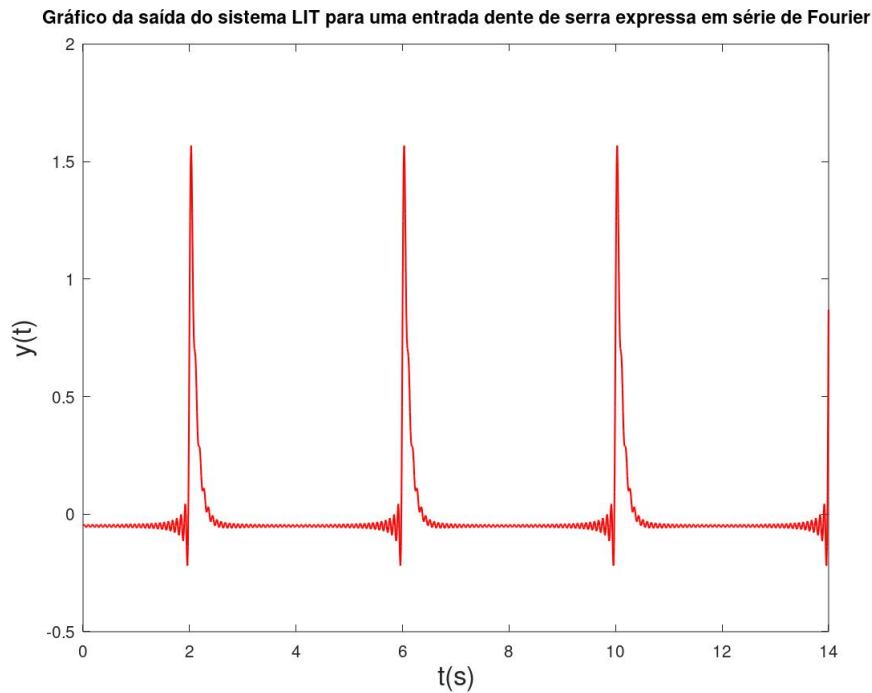


Figura 12: Resposta do circuito da Figura 9 ao sinal dente de serra obtido por série de Fourier

Podemos ver que o sinal permanece em zero quando não está próximo ao transitório (a descontinuidade). Isso ocorre graças a frequência em que as ondas ocorrem. Como vimos anteriormente, apenas para altas frequências o sinal passaria pelo filtro. Por fim as descontinuidades podem ser percebidas pela instabilidade do gráfico ao chegar próximo aos extremos de um período.

2.8 item (h)

A Figura 3 mostra a resposta do sistema LIT do item (f) à onda dente de serra da Figura 1. Explique as diferenças entre o gráfico da Figura 3 e a resposta do sistema observada no item (g).

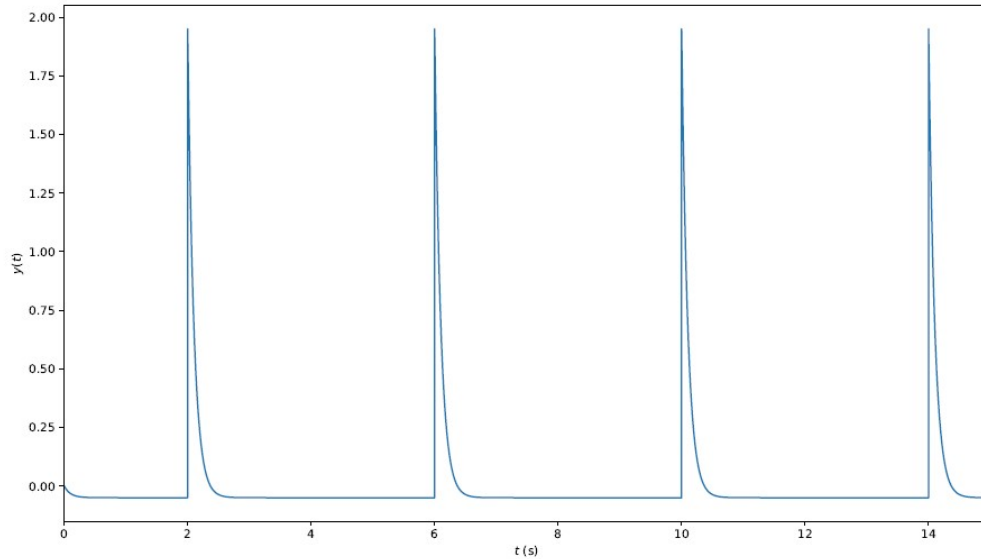


Figura 13: Resposta do circuito da Figura 9 ao sinal dente de serra

Podemos perceber que no gráfico da Figura 13 não há qualquer instabilidade no sinal, como ocorre no gráfico da Figura 12. Isso se deve ao fato de que o erro nas bordas é maior devido ao fenômeno de Gibbs. Observa-se também uma amplitude um pouco menor em relação ao sinal original devido ao mesmo fenômeno.