ООО Ритм. Тестовое задание

Виктор Пичугов, victorpichugov@yandex.ru

14 сентября 2023 г.

1 Постановка задачи

Написать программу численного решения задачи Коши для уравнения:

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 15\frac{d^4y}{dx^4} + 90\frac{d^3y}{dx^3} + 270\frac{d^2y}{dx^2} + 405\frac{dy}{dx} + 243y = 0, \quad x \in [0, 5]$$

Начальные условия: $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dx}(0) = 3$, $\frac{d^2y}{dx^2}(0) = -9$, $\frac{d^3y}{dx^3}(0) = -8$, $\frac{d^4y}{dx^4}(0) = 0$.

2 Аналитическое решение

Замена $e^{\lambda x} = y(x)$ дает многочлен:

$$\lambda^5 + 15\lambda^4 + 90\lambda^3 + 270\lambda^2 + 405\lambda + 243 = (\lambda + 3)^5 = 0,$$

Получили корень кратности 5. Общее решение будет следующим:

$$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + C_3x^2e^{-3x} + C_4x^3e^{-3x} + C_5x^4e^{-3x}$$

С учетом начальных условий:

$$y(x) = -\frac{1}{12}e^{-3x}x\left(-36 - 54x + 16x^2 + 129x^3\right), \quad x \in [0, 5]$$

Ответ: $\boxed{y(x) = -\frac{1}{12}e^{-3x}x\left(-36 - 54x + 16x^2 + 129x^3\right)}$

3 Метод Эйлера

Решим задачу в общем случае и численно. Для этого сделаем последовательно n-замен и перейдем системе ОДУ.

$$a_1\frac{d^nz_1}{dx^n} + a_2\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n+1}z_1 = 0,$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 = f_1(z_2), \\ z_2' = z_3 = f_2(z_3), \\ \dots, \\ z_n' = -\frac{1}{a_1}\left(\vec{a}, Reversed(\vec{z_i})\right) \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{a} = (a_2, a_3, \dots, a_{n+1})$, $\quad Reversed(\vec{z_i} = (z_n, z_{n-1}, \dots, z_1)$

Перейдем к численной схеме

$$\begin{cases} z_{1,i+1} = z_{1,i} + hf_1(z_2) = z_{1,i} + hz_{2,i}, \\ z_{2,i+1} = z_{2,i} + hf_2(z_3) = z_{2,i} + hz_{3,i}, \\ \dots, \\ z_{n,i+1} = z_{n,i} + hf_n(z_1, \dots, z_n) \end{cases} \tag{2}$$

Цель задачи - заполнить матрицу $n \cdot m$ и вывести первую строку, n - порядок уравнения, m - количество точек. Будем идти по каждому столбцу сверху-вниз, начиная со второго, и вычислять $z_{i,j}$.

$z_{1,0}$	$z_{1,1}$	$\dots$	$z_{1,m}$
$z_{2,0}$	$z_{2,1}$	$\dots$	$z_{2,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$z_{n,0}$	$z_{2,1}$	$\dots$	$z_{n,m}$

Временная сложность алгоритма: $O(nm)$
Локальная ошибка аппроксимации: $O(h^2)$
Суммарная ошибка аппроксимации на всем промежутке: $O(h)$.

4 Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка

Аналогично методу Эйлера, сделаем n-замен в ОДУ:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 = f_1(z_2), \\ z_2' = z_3 = f_2(z_3), \\ \dots, \\ z_n' = f_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ z_1(0) = z_{10}, \\ z_2(0) = z_{20}, \\ \dots, \\ z_n(0) = z_{n0} \end{cases} \tag{3}$$

Теперь перейдем к численной схеме алгоритма:

$$\begin{cases} z_{1,i+1} = z_{1,i} + \Delta z_{1,i}, \\ z_{2,i+1} = z_{2,i} + \Delta z_{2,i}, \\ \dots, \\ z_{n,i+1} = z_{n,i} + \Delta z_{n,i}, \\ \Delta z_{1,i} = \frac{1}{6}\left[K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i\right], \\ \Delta z_{2,i} = \frac{1}{6}\left[L_1^i + 2L_2^i + 2L_3^i + L_4^i\right], \\ \dots, \\ \Delta z_{n,i} = \frac{1}{6}\left[P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i + P_4^i\right] \end{cases} \tag{4}$$

$$K_1^i = hf_1(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{n,i}), L_1^i = hf_2(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{n,i}), \dots$$

$$K_2^i = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, z_{1,i} + \frac{K_1^i}{2}, z_{2,i} + \frac{L_1^i}{2}, \dots, z_{n,i} + \frac{P_1^i}{2}\right),$$

$$L_2^i = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, z_{1,i} + \frac{K_1^i}{2}, z_{2,i} + \frac{L_1^i}{2}, \dots, z_{n,i} + \frac{P_1^i}{2}\right), \dots$$

$$K_3^i = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, z_{1,i} + \frac{K_2^i}{2}, z_{2,i} + \frac{L_2^i}{2}, \dots, z_{n,i} + \frac{P_2^i}{2}\right),$$

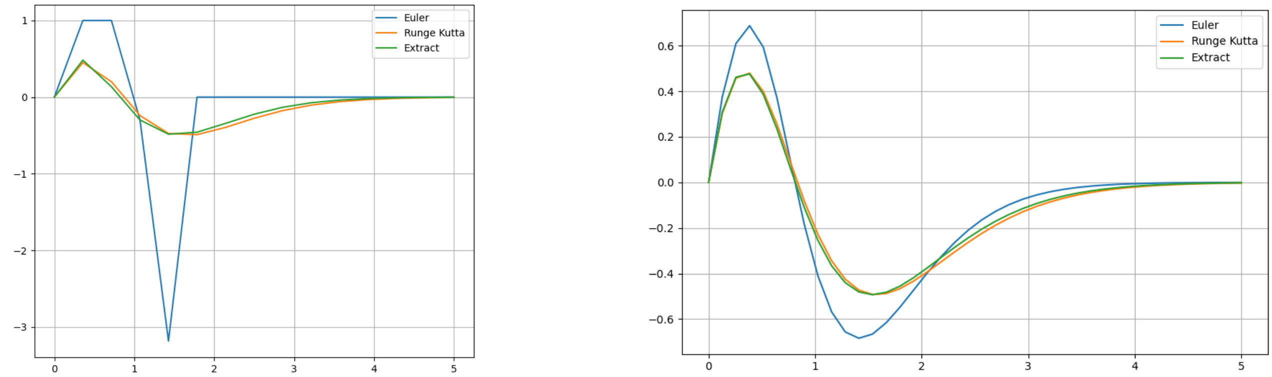
$$K_4^i = hf_1\left(x_{i+1}, z_{1,i} + K_3^i, z_{2,i} + L_3^i, \dots, z_{n,i} + P_3^i\right),$$

$$L_4^i = hf_2\left(x_{i+1}, z_{1,i} + K_3^i, z_{2,i} + L_3^i, \dots, z_{n,i} + P_3^i\right), \dots$$

Таким образом, для каждого положения $i \in [0, m]$ вычислим матрицу коэффициентов и найдем $\Delta z_{i,j}$.

K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i
L_1^i	L_2^i	L_3^i	L_4^i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_1^i	P_2^i	P_3^i	P_4^i

Цель задачи - вычислив значения матрицы коэффициентов, найти значения на текущем временном слое $z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{n,i}$ и перейдем на следующий.
Временная сложность алгоритма: $O(4nm)$
Локальная ошибка аппроксимации: $O(h^5)$.
Суммарная ошибка аппроксимации на всем промежутке: $O(h^4)$.



N=15 N=40

Рис. 1: Графики функции.

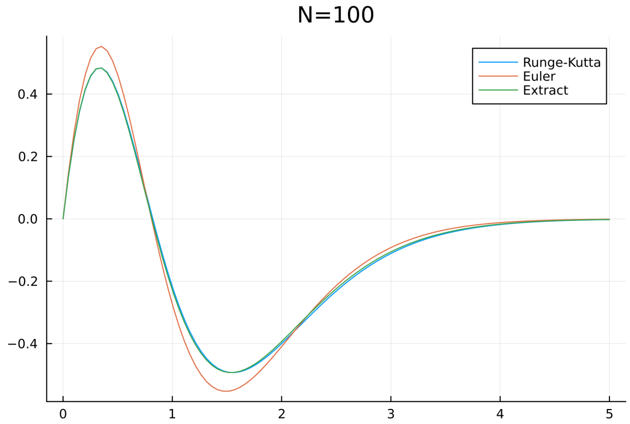


Рис. 2: Графики функции.

5 Сравнение методов

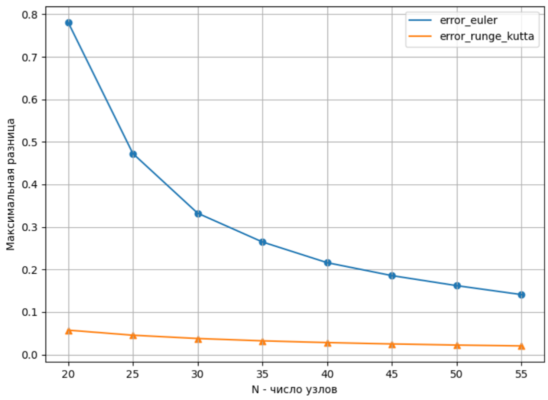


Рис. 3: Зависимость максимальной разницы от числа узлов.