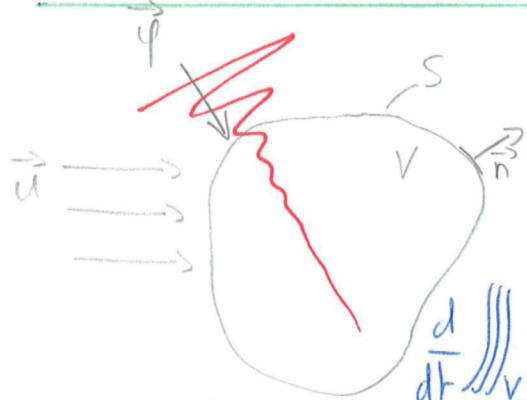


Formation OpenFOAM (11)

I. Les équations de conservation

Avant de résoudre une équation par une méthode (VF, FEN, éléments finis), il faut la poser proprement.

A. Bilan sur un volume de contrôle



Bilan énergétique sur une grandeur : Θ

Accumulation = Flux entrant - Flux sortant + Source (au sein du volume)

$$\iiint_V \frac{d\Theta}{dt} dV = - \iint_S \vec{\Psi} \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \dot{\Theta} dV$$

Avec $\vec{\Psi}$ somme des flux, $\dot{\Theta}$ terme source (ou puit)

V ne dépend pas du temps, on pourra donc faire rentrer l'intégrale et $\frac{d}{dt}$

$\vec{\Psi} = ?$ Il existe différents flux: - la vitesse \vec{u} - la diffusion \vec{Q}

Δ d'autres flux sont possibles: ex. champs électriques qui transportent en scalaire

\vec{u} , c'est aussi faute. Pour la diffusion, on a des loi: Newton, Fick et Fourier
d'où $\vec{Q} = -D \nabla \Theta$ avec D le coefficient de diffusion en m²/s.

On obtient alors :

$$\iiint_V \frac{d\Theta}{dt} dV = - \iint_S (\vec{u} \Theta, \vec{\Psi}) \vec{n} dS + \iiint_V \dot{\Theta} dV \quad ①$$

B. Transformation en PDE

On utilise Green - Ostrogradski : $\oint \int \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

Δ Physique = divergence sur volume \Rightarrow intégrale des flux à la frontière.

$$\text{On obtient alors: } \iiint_V \frac{d\Theta}{dt} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\vec{u}\Theta + \vec{P}) dV + \iiint_V \dot{\Theta} dV$$

$$\text{Valable pour tout volume } V \text{ fixe d'où: } \frac{d\Theta}{dt} + \nabla \cdot (\vec{u}\Theta) = - \nabla \cdot \vec{P} + \dot{\Theta}$$

On peut appliquer ce schéma à de nombreuses grandeurs physiques.

⚠ La difficulté réside dans l'inventaire des flux et la forme du terme source.

Exemple: - Chaleur au sein d'un fluide incompressible et incompressible avec réaction chimique

$$\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \rho C_p T) = - \nabla \cdot (-\lambda \nabla T) + \Delta H \cdot r(T) \leftarrow \text{valeur de réaction}$$

- Quantité de mouvement pour un fluide Newtonien: $\vec{\tau} = \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^\top)$

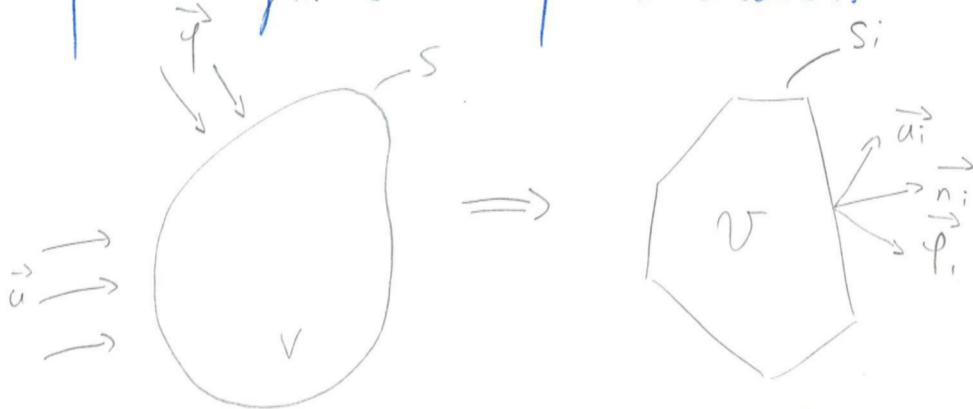
$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = - \nabla p + \mu \Delta \vec{u} + \rho f \leftarrow \text{fou de volume}$$

II. Résolution numérique

Une solution analytique n'est le plus souvent pas possible. Par exemple à cause de la complexité de la géométrie.

A. Méthode des volumes Finis (FVN)

L'idée est très physique. Il s'agit de diviser de nombreux petits volumes de contrôle qui échangent de la "quantité" à contrôler.



- La cellule est :
- un volume de contrôle
 - homogène (pas valeur différente : 1 cell → 1 valeur)
 - faces homogènes

Formation OpenFOAM (2 /)

La géométrie est divisée en nombreuses cellules.

⚠ Mais il n'est pas forcément utile de faire tendre $V \rightarrow 0$

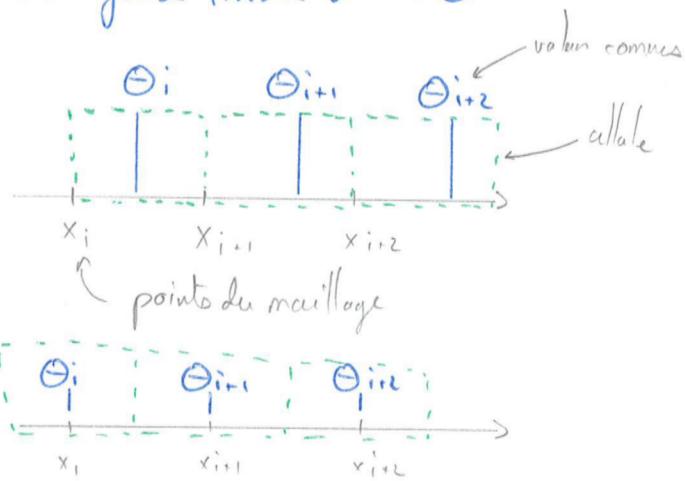
2 grands types de découpages

Celui ci-dessous, comme openfoam:

- les valeurs sont communes aux centres des cellules.

Vertex centered

- les valeurs sont communes aux points.



Résolution d'une équation

On se rappelle de ①, on va faire pareil:

$$\iiint_V \frac{d\theta}{dt} dV \Rightarrow V \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\iint_S (\vec{u} \cdot \vec{\theta} + \vec{f}) \vec{n} \cdot dS \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\vec{u}_i \cdot \vec{\theta} + \vec{f}_i) \cdot \vec{n}_i A_i$$

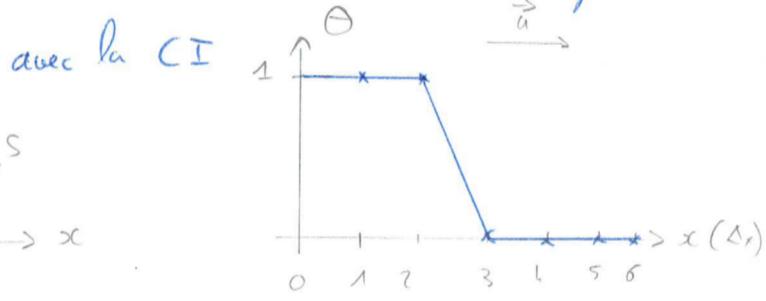
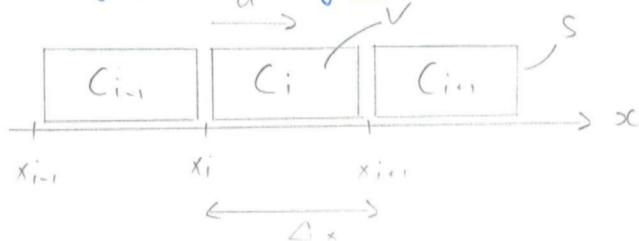
$$\iiint_V \dot{\theta} dV \Rightarrow V \cdot \dot{\theta}$$

B. Exemples de résolution (advection pure) (1D)

1. Schéma explicite centré

Il faut un schéma que l'on puise donner à la machine. Pour un exemple on considère:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$



On pose Θ_i^n , valeur dans la cellule C_i et Θ_{xi}^n , valeur au point x_i .
 n et $n+1$ sont des indices de temps.

On reprend l'EDP sous forme intégrale: $\iiint_V \frac{d\Theta}{dt} dV - \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{\Theta}) \cdot \vec{n} dS = 0$

$$\text{On discritise: } V \cdot \frac{\Theta_i^{n+1} - \Theta_i^n}{\Delta t} + [S \cdot \Theta_{xi}^n u + S \Theta_{xi+1}^n u] = 0$$

Mais on ne connaît pas Θ_{xi}^n et Θ_{xi+1}^n , on va faire une interpolation.

$$\text{Interpolation linéaire des flux: } \Theta_{xi}^n = \Theta_{i-1}^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\Theta_i^n - \Theta_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{\Theta_{i-1}^n + \Theta_i^n}{2}$$

$$\text{et } \Theta_{xi+1}^n = \Theta_i^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\Theta_{i+1}^n - \Theta_i^n}{\Delta x} = \frac{\Theta_i^n + \Theta_{i+1}^n}{2}$$

$$\text{On peut alors écrire: } \Theta_i^{n+1} = \Theta_i^n + \left(\frac{S u \Delta t}{V} \underbrace{[\Theta_{xi}^n - \Theta_{xi+1}^n]}_{\Theta_{i-1}^n - \Theta_{i+1}^n} \right) \frac{\Theta_{xi+1}^n - \Theta_{i-1}^n}{2 \Delta x}$$

Il n'y a plus qu'à calculer.

Avec $A = 0.5$, puis 1, puis 0.1. cf beamor.

Schéma instable

2. Upwind avec 1 explicite

On va dicter le calcul du flux selon l'orientation du vecteur \vec{u} .

L'idée est de privilégier le sens d'où provient l'information.

Le flux entrant vaut: $\Theta_{i-1}^n u$

Le flux sortant vaut: $\Theta_i^n u$

$$\text{On peut alors écrire: } V \cdot \frac{\Theta_i^{n+1} - \Theta_i^n}{\Delta t} + [-S \Theta_{i-1}^n u + S \Theta_i^n u] = 0$$

$$\text{soit } \Theta_i^{n+1} = \Theta_i^n + \left(\frac{S u \Delta t}{V} \right) [\Theta_{i-1}^n - \Theta_i^n]$$

$\frac{u \Delta t}{\Delta x} = \text{CFL}$
 Schéma instable

Formation OpenFOAM (3 /)

Illustration beamer.

Le schéma arrive à transporter l'information de façon stable.

Mais les résultats dépendent de la valeur du CFL

Ici, le schéma est d'ordre 1, l'erreur de troncature sur le schéma spatial
est de la diffusion numérique.

⚠ Il y a tout une littérature sur les schémas

3. Schéma numériques

Compromis "précision / temps CPU"

Ordre 1: diffusifs → lisent les chocs

Ordre 2: dispersifs → font apparaître des ondes

Schéma NVD / TVD, dicte le calcul des flux lorsque l'on détecte
une discontinuité: ex Van Leer.

III. La turbulence

A. Introduction

Images: cf. beamer

Observations:

- chaotique
- dynamique rotationnelle
- grande gamme d'échelles spatiales en interaction (échange énergie)
- intermittente (dépend de Re , à minima)

On devine: un mouvement moyen

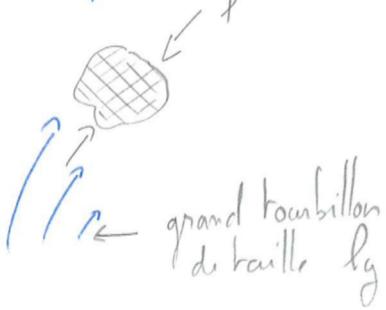
On propose: dire la turbulence comme: \bar{u} et u' + fluctuations.

B. Diffusion turbulente / transport turbulent

C'est une conséquence de la turbulence. C'est pour cela qu'il faut la prendre en compte

- On considère un volume de taille " ℓ " qui nous intéresse, par exemple un polluant

Les grandes structures sont de taille $l_g \gg \ell$



gouttes de pluie

Il y a transport par les structures de grande taille

Il y a aussi modification de la forme

- Les petites structures sont de taille $l_p \ll \ell$



Il y a "étalement", comme pour suivre un "gradient" on parle de "diffusion turbulente".

On peut introduire le concept de diffusion turbulente.

Les petites structures ont une vitesse u' , une taille $l_p \Rightarrow \nu_T = u' \cdot l_p$
en m^2/s

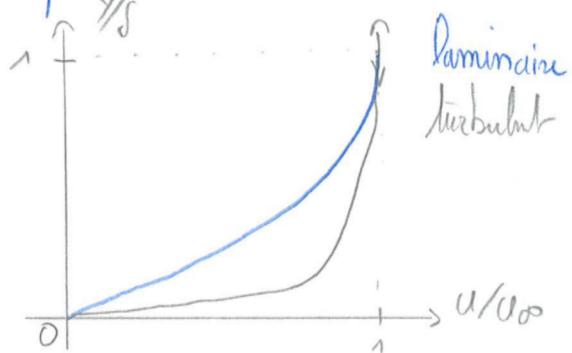
quelques ordres de grandeurs: si le problème a pour taille caractéristique l_m ,

$$l_p \approx 10^{-3} \text{ m et } l_m \approx 10^{-8} \text{ m}$$

$$\nu_T = \frac{u' l_p}{\gamma} = \frac{\nu_T}{\gamma} \approx 10^2 \dots 10^7 \Rightarrow \nu_T \gg \nu_m \Rightarrow \text{Phénomène important!}$$

Formation OpenFOAM (4/)

Un autre exemple, le profil de vitesse sur paroi: la turbulence ramène de la gdm en paroi



Vrai aussi pour le transfert de chaleur et de matière: intensification des transferts sur paroi.

C. Prédiction de la turbulence

On adopte le point de vue: $u = \bar{u} + u'$. Mais LES ou DNS possible.

On veut le mouvement moyen, mais aussi les fluctuations, car elles ont un fort impact sur le transport des espèces (gdm incluse).

On va prendre la moyenne des équations de continuité et gdm du NS.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{moyenne dyadique} \Rightarrow \vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}^T = \begin{bmatrix} 0 & uu & uv & uw \\ v u & 0 & vr & vw \\ w u & r v & 0 & wr \\ w v & r w & v w & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \vec{f} = \nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \vec{f} \quad \text{avec } \tilde{\sigma} = -p \mathbb{I} + \tilde{\sigma} \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e + p) \vec{u}] = \nabla \cdot (\tilde{\sigma} \cdot \vec{u}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot \vec{q} + r \end{array} \right.$$

Avec $\tilde{\sigma} = \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$ pour un fluide Newtonien.

Règles de la prise de moyenne:

Ergodicité: "La moyenne dans le temps en 1 point" est équivalente à "la moyenne de N réalisations au même point"

Exemple:
 Pour les accélérations
 temps long / pas instantané

ventilation
 grille
 (On demande de notabiliser, on attend que le régime soit stable)
 On mesure
 x N fois

\Leftrightarrow On allume, on attend que l'égime soit stable et on fait N mesures.

On décompose : $(u = \bar{u} + u')$ $f = \bar{f} + f'$ et $g = \bar{g} + g'$

1. $\bar{f}' = 0$
2. $\bar{f} = \bar{f}$
3. $\bar{g} \bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{f}$
4. $\bar{f} + \bar{g} = \bar{f} + \bar{g}$
5. $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$
6. $\bar{c}\bar{f} = c\bar{f}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

On notera $u_i = \sum_{i=1}^N u_i$ et $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ (Notation d'Einstein)

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad) \text{ moyenne}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \text{ et } \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow 2 \text{ information, une sur } \bar{u}_i \text{ et une sur } u'_i.$$

Équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \cancel{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{f}_{ij} + f'_{ij}) + \bar{f}_i + f'_i$$

MOYENNE $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} =$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f'_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i + f'_i$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \quad \text{par continuité}$$

Astuce $\frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j u'_i) = (u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j})$

Formation OpenFOAM (5 /)

On obtient alors les équations RANS, dont la gdm est ^{matière} \bar{u}_i laminaire.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\bar{\rho} \bar{f}'_{ij} + \bar{G}'_{ij} - \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) + \bar{f}_i$$

$-\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j$ appelle "tensions de Reynolds". Il s'agit de la contribution de la turbulence à l'accélération moyen.

On a ~~7~~ 5 inc : \bar{u}_i , $\bar{\rho}$ et \bar{u}_i' et 5 eq : $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_i} = 0$ et gdm

Pour résoudre le système, il faut modéliser $\bar{u}_i \bar{u}_j'$.

Transport d'un scalaire (petit détour)

De la même façon on peut écrire :

$$\frac{\partial \bar{\theta} + \theta'}{\partial t} + (\bar{u}_k + u_k') \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\theta} + \theta') = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\bar{\theta} + \theta')$$

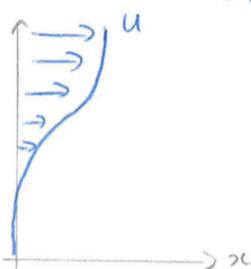
$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\bar{u}_k' \theta' + \alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k})$$

Champ déjà modifié
par la turbulence.

Contribution de la turbulence

Hypothèse de Boussinesq

Cas du cisaillement ~~pas~~ pur unidirectionnel (longueur de mélange)



On peut écrire :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}' \right)$$

$$\text{d'où: } \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}' \right)$$

↳ contrainte de cisaillement.

Par analogie la contrainte turbulente est approximée de la même forme:

$$\tau_{\text{turb}} \approx \tau_{\text{tr}} = -\rho \bar{u}' \bar{v}' = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Il faut maintenant trouver μ_T .

$$\mu_T \in [100, 10^7] \text{ donc } \mu_T \gg \mu. \quad \text{et } P_r^{\text{Turb}} = \frac{\alpha^{\text{Turb}}}{\alpha^{\text{visc}}} = 1$$

Analogie pour le transport:

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\vec{q}_T = -\bar{u} \bar{k} \bar{T}' = -d_{\text{Turb}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$$

⚠ Il est possible d'utiliser une autre approche et poser des équations de convection sur chacun des termes du Reynolds.

$$\mu_T = \rho \nu_T = \rho u' l_p$$

- On peut fixer μ_T (capacité de radiation discontinue)
- on peut moyenne la calandre $\rightarrow k-E$

D. Modèle K-E

On pose une équation sur la TKE : $k = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$ et la dissipation de cette énergie : ϵ

Pourquoi ces grandeurs:

$$\text{On a besoin de } u' \text{ et } l_p. \quad k = \frac{1}{2} u'^2 \Rightarrow u' = \sqrt{k}$$

$$at = C_u$$

Pour l_p : on considère qu'un petit tourbillon perd son énergie en 1 km.

$$\text{Énergie} = \frac{1}{2} u'^2, \text{ longeur } l_p, \text{ vitesse } u', \text{ temps coûteux: } t = \frac{l_p}{u'}$$

$$\text{Dissipation: } \dot{\epsilon} = \frac{\text{Énergie}}{\text{Temps}} = \frac{\frac{1}{2} u'^2}{l_p} \approx \frac{u'^3}{l_p} \Rightarrow l_p = \frac{u'}{\dot{\epsilon}^{1/3}}$$

$$\text{d'où } \nu_T = u' l_p = C_u \times \sqrt{k} \times C_p \times \frac{k^{3/2}}{\dot{\epsilon}} = C_u \frac{k^2}{\dot{\epsilon}}$$

$$at = C_p$$

Formation OpenFOAM (6 /)

Les équations cf beamer

Conditions initiales et aux limites

* Pour k , on utilise l'intensité de la turbulence $I = \frac{\bar{u}'}{\bar{u}}$

[avec $\bar{k} = \frac{3}{2}(I\bar{u})^2$, mais que vaut I .

Turbulence forte : 5 - 20 %, forte vitesse en géométrie complexe
(turbo machine, échangeurs de chaleur)

Turbulence moyenne : 1 - 5 %, vitesse moyenne dans des géométries simples
(tube, ventilateur, ...)

Turbulence faible : < 1 %, fluide initialement immobile, couche limite
(écoulement extérieur sur une voiture)

[Au niveau des murs, on utilise "zero gradient" à fort Re , sinon on peut prendre en compte la voiescouche visqueuse, ... mais c'est un autre pb.
↳ faible Re

* Pour E , on utilise $E = C_\mu \frac{k^{3/2}}{l}$, mais faut l .

[Estimer l est complexe. En général, 5 % de la hauteur caractéristique du pb.

[Pour la condition aux limites, plus compliquée... Out of the scope. ↑
d pour un tube
f pour une couche limite

Maillage

Il existe deux approches :

* si on est intéressé par ce qui se passe au parois (calcul de traînée visqueuse, transfert thermique, ...):

Il faut mailler finement et utiliser un modèle adapté.

Les modèles sont dit Loc Reynolds.

La hauteur de la première maille à la paroi est donnée par

$$y^+ = 1 \quad , \quad y^+ = \frac{v^* \cdot y}{\nu} \quad \begin{matrix} \text{hauteur de la} \\ \text{maille} \end{matrix}$$

avec $v^* = \sqrt{\frac{6u}{\rho}}$ vitesse passée sur le frottement parabolique. Ce fut donné par une corrélation, par exemple la plaque plane.

- * si on est intéressé par ce qui se passe dans le volume (mélange, ...)
On ne prend pas un modèle Loc Re et on donne une première maille à $y^+ \geq 11$ (typiquement, $30 < y^+ < 100$)
Par contre, il faut utiliser une "wall function" pour les conditions aux limites: il s'agit d'un modèle de sous-maille basé sur la "loi log" et la théorie de la "souscouche visqueuse".