Модификация алгоритма декодирования сверточных кодов для канала с замираниями

Пятаков В. С.
Санкт-Петербургский Государственный Университет Аэрокосмического Приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

Модель канала

Сигналы частотной модуляции имеют вид

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{2E/T}\cos 2\pi f_i t, & 0 < t < T, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

где *E* – энергия сигнала, *T* – период следования сигналов, f_i – центральная частота *i*-го сигнала, $i = 0,1$.

Сигнал на выходе канала с замираниями имеют вид

$$r(t) = \begin{cases} \mu\sqrt{2E/T}\cos(2\pi f_i - \theta) + n(t), & 0 < t < T, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

где θ – случайный фазовый сдвиг, *n*(*t*) – аддитивный белый гауссовский шум с спектральной плотностью шума $N_0/2$, μ – случайный коэффициент передачи канала.

Канал с памятью

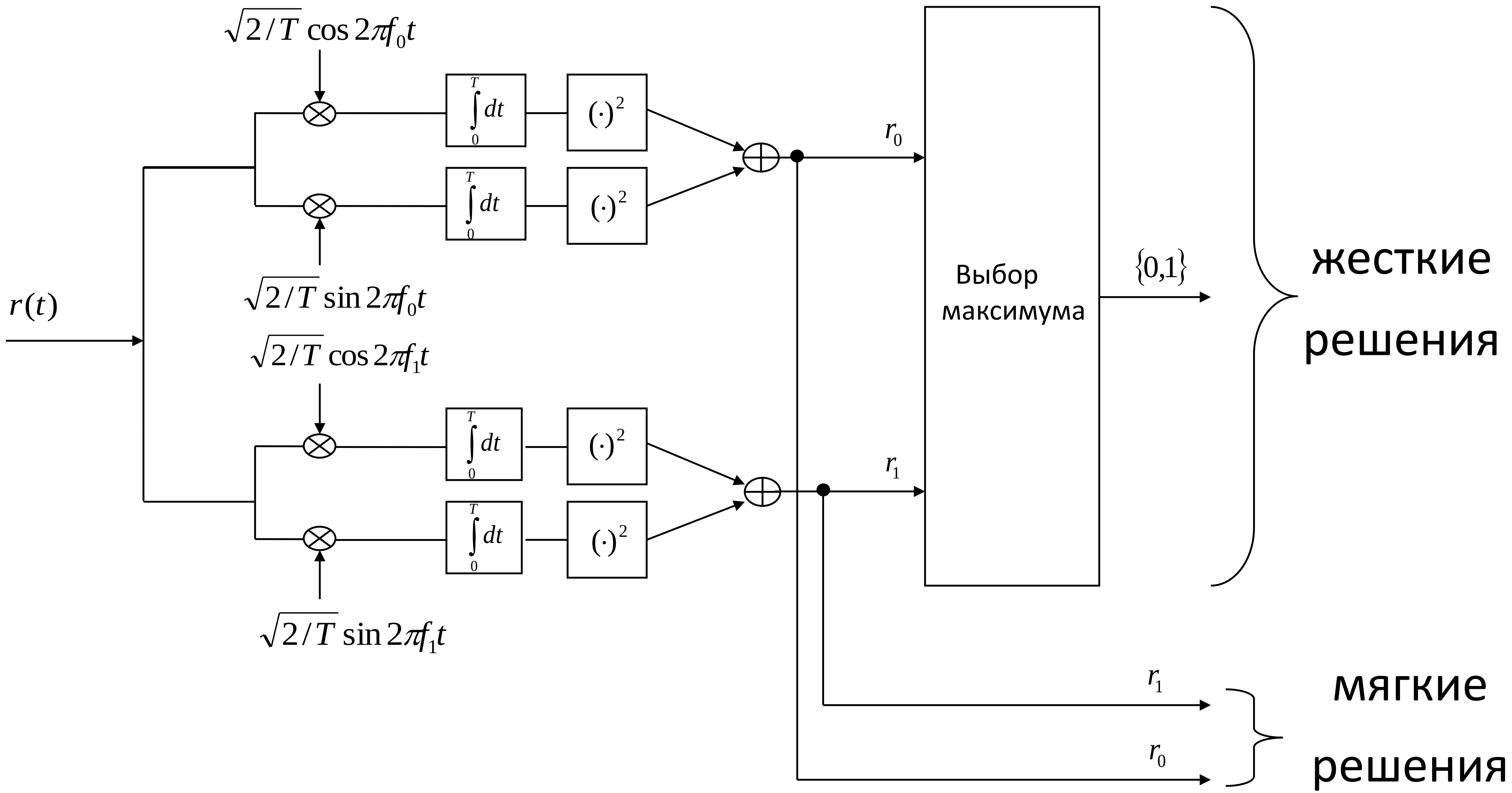
$$\mu_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

где

$$x_n = \rho x_{n-1} + \sqrt{1-\rho^2}\,\xi_x,$$
$$y_n = \rho y_{n-1} + \sqrt{1-\rho^2}\,\xi_y,$$

где p – коэффициент корреляции, ξ_x, ξ_y - гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

Оптимальный демодулятор



Аппроксимация потока ошибок с использованием марковского приближения

$$p(\mathbf{e}) = p(e^{(1)})\,p(e^{(2)} \mid e^{(1)})\,p(e^{(3)} \mid e^{(2)}e^{(1)}) \ldots p(e^{(L-2)} \mid e^{(L-3)}e^{(L-4)} \ldots e^{(1)}) \prod_{n=L-1}^{N} p(e^{(n)} \mid e^{(n-1)}e^{(n-2)} \ldots e^{(n-L)}),$$

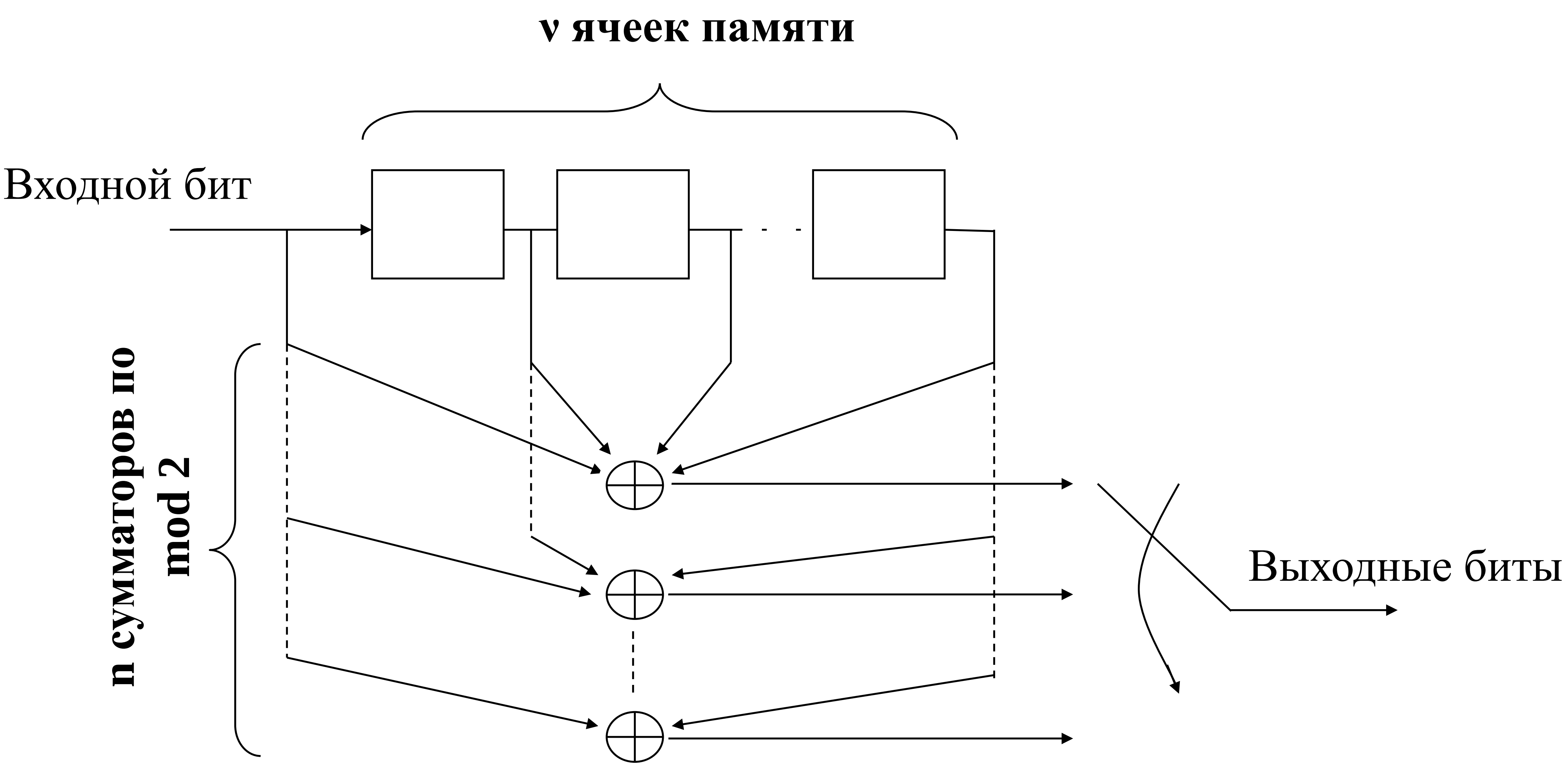
где L - связность марковской цепи.

Расстояние Бхаттачария между двумя распределениями имеет вид

$$d_{bhat}(p, \tilde{p}) = -\log \sum_{\bar{e}} \sqrt{p(\mathbf{e})\,\tilde{p}(\mathbf{e})},$$

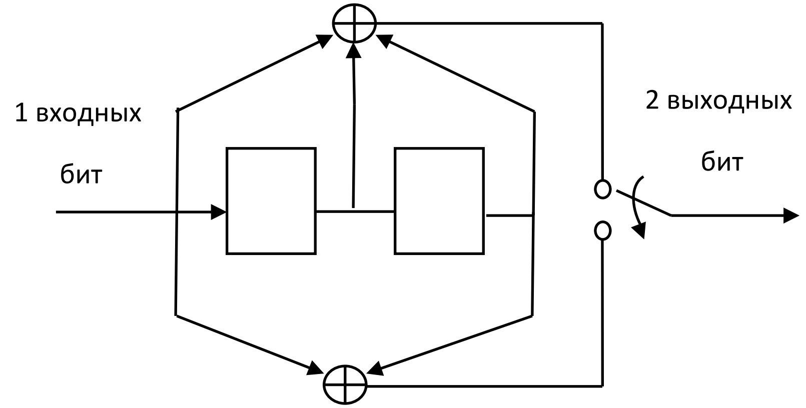
где p(**e**) - истинное распределение, $\tilde{p}(\mathbf{e})$ - оценка с использованием марковского приближения.

Сверточный кодер с R=1/n

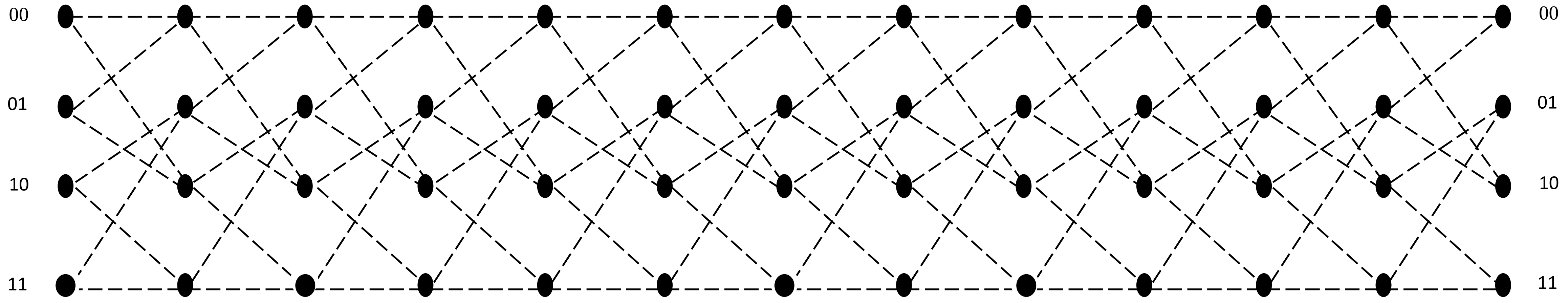


Решетчатая диаграмма

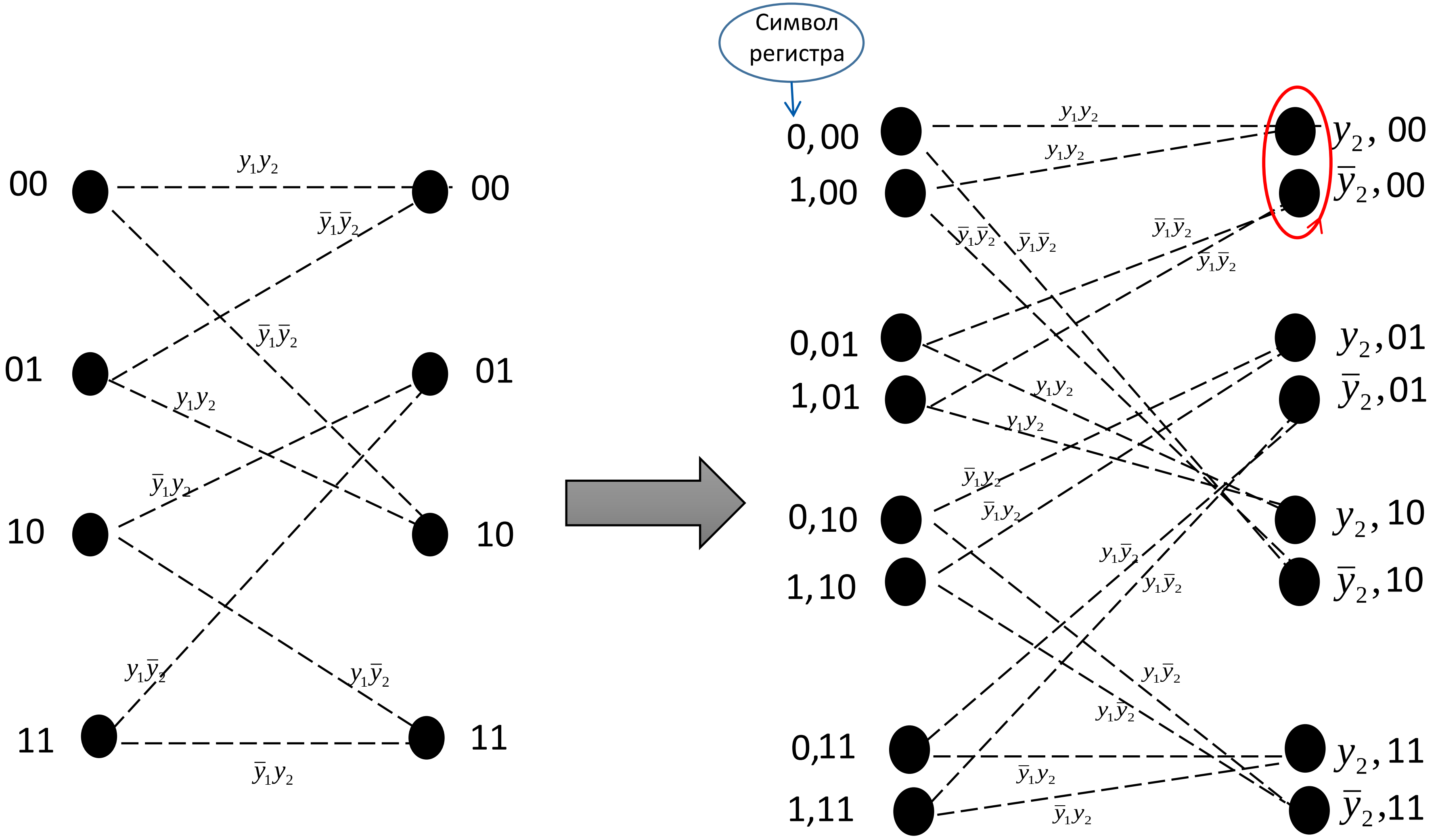
Сверточный кодер с g = (7,5) и кодовым ограничением v = 2



Структура кодовой решетки

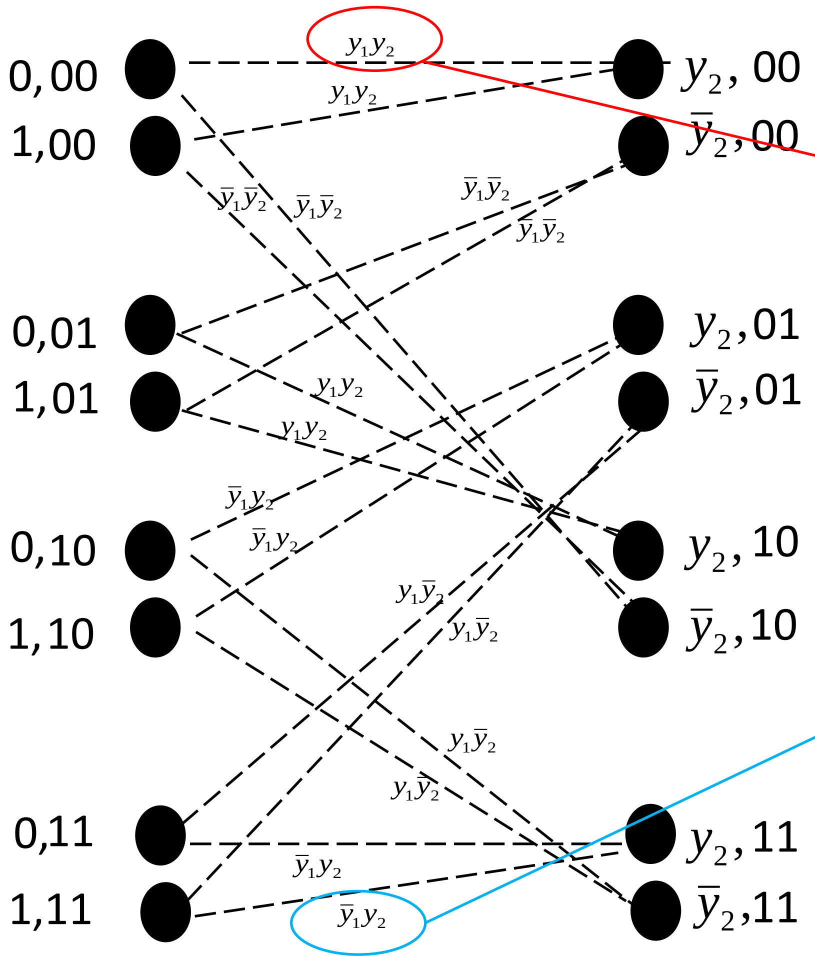


Модифицированная кодовая решетка с учетом памяти канала для жестких решений демодулятора



где $y_1 y_2$ – суммы принятого сегмента и меток ребер.

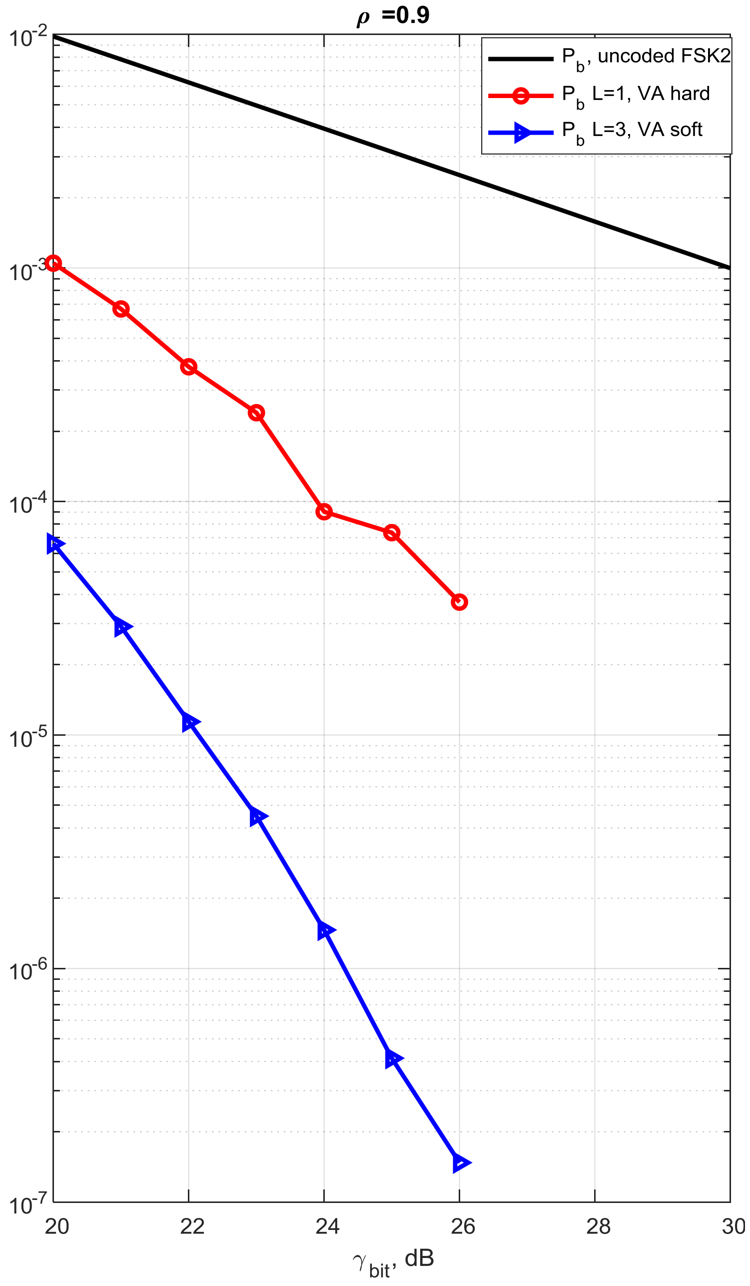
Вычисление метрики ребра в модифицированной решетке



$$\log p(y_1 \mid 0) + \log p(y_2 \mid y_1)$$

$$\log p(y_1 \mid 1) + \log p(y_2 \mid y_1)$$

Вероятность ошибки на бит



Передача последовательности сигналов

Последовательность переданных сигнальных точек:

$$\mathbf{s} = \left(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \ldots, \mathbf{s}^{(N)}\right), \mathbf{s}^{(l)} \in \left\{\mathbf{s}_i\right\}_{i=0}^{q-1},$$

Последовательности на приемной стороне

$$\mathbf{R}_c = \left(\mathbf{r}_c^{(1)}, \mathbf{r}_c^{(2)}, \ldots, \mathbf{r}_c^{(N)}\right)$$

$$\mathbf{R}_s = \left(\mathbf{r}_s^{(1)}, \mathbf{r}_s^{(2)}, \ldots, \mathbf{r}_s^{(N)}\right)$$

где

$$\mathbf{r}_c = x\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_c$$

$$\mathbf{r}_s = y\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_s$$

Корреляционная матрица

Внутри последовательности $\mathbf{R}_c$ «содержится» вектор $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(N)})$

,а внутри последовательности $\mathbf{R}_s$ «содержится» вектор $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(N)})$.

Векторы ***x*** и ***y*** – независимые друг от друга случайные гауссовские векторы с нулевыми средними. Внутри вектора ***x*** и внутри вектора ***y*** имеется зависимость, которая задается корреляционной матрицей **Λ**, которая имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{mk}] = \left[\overline{x^{(k)} x^{(m)}}\right] = \left[\overline{y^{(k)} y^{(m)}}\right], \; m, k = 1, 2, ..., N.$$

В данной работе параметр λ_{mk} равен $(1/2)\rho^{|k-m|}$, $\rho \in [0;1]$

Оптимальный прием последовательности

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\max_{\mathbf{s}} w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s \mid \mathbf{s})$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\max_{\mathbf{s}} (\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s})\mathbf{C}\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s})^T + \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s})\mathbf{C}\boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s})^T),$$

здесь ***C*** - квадратная матрица вида

$$\mathbf{C} = 2\gamma\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{I} + 2\gamma\boldsymbol{\Lambda})^{-1},$$

где

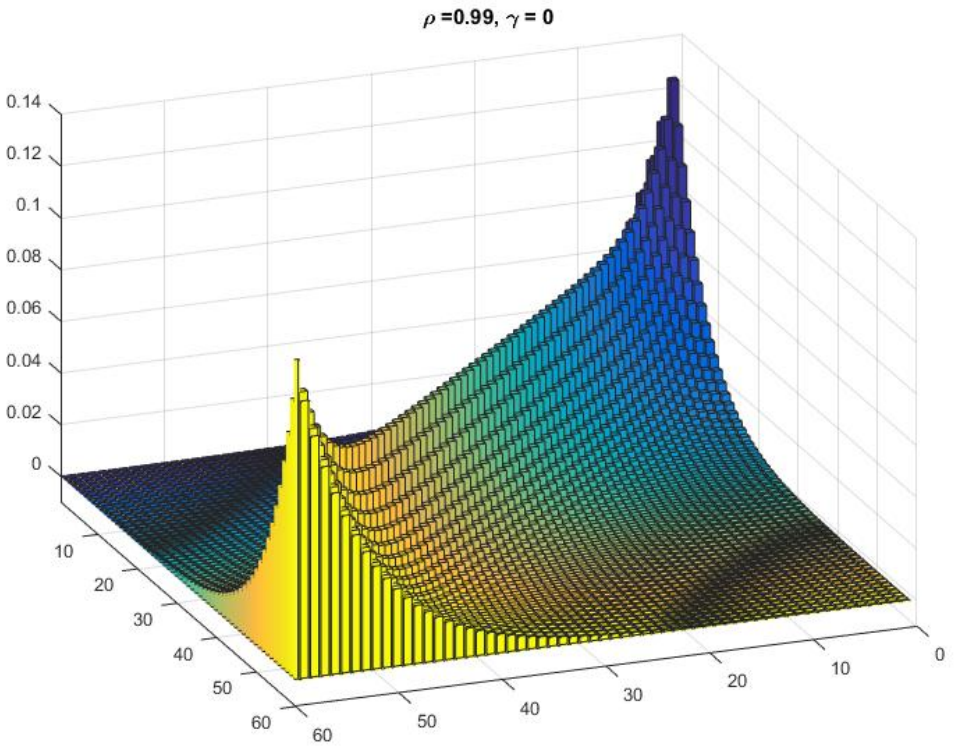
$$\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s}) = (\rho_c(\mathbf{s}^{(1)}), \rho_c(\mathbf{s}^{(2)}), \ldots, \rho_c(\mathbf{s}^{(N)})),$$

$$\boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s}) = (\rho_s(\mathbf{s}^{(1)}), \rho_s(\mathbf{s}^{(2)}), \ldots, \rho_s(\mathbf{s}^{(N)})),$$

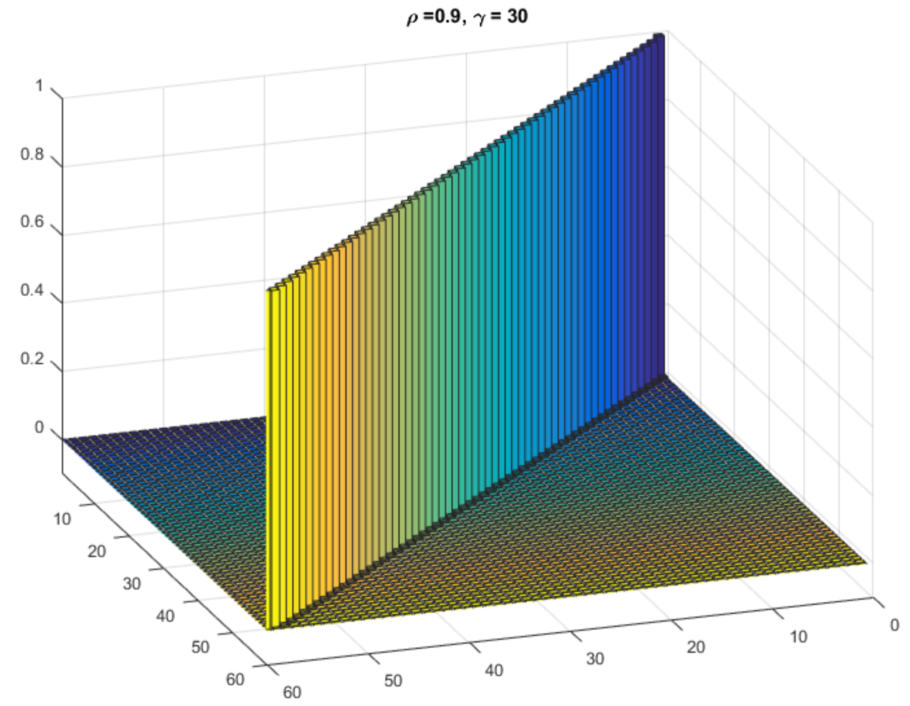
где

$$\rho_c(\mathbf{s}^{(l)}) = (\mathbf{r}_c^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)}),\ \rho_s(\mathbf{s}^{(l)}) = (\mathbf{r}_s^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)}),\ l = 1,2,\ldots,N.$$

Матрица C



ρ =0.99, γ = 0
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
10
20
30
40
50
60
60
50
40
30
20
10
0



ρ =0.9, γ = 30
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
60
60
50
40
30
20
10
0

Структура матрицы C

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & c_{L-1} & c_{L-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{L-2} & c_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & c_{L-1} & c_{L-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{L-2} & c_{L-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_{L-1} & c_{L-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{L-2} & c_{L-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{L-1} & c_{L-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{L-2} & c_{L-1} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Где ***L* –** величина определяющая ширину ненулевой полосы матрицы ***C***

$$\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s})\mathbf{C}\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s})^T = \sum_k \left(c_0 \left(\rho_c^{(k)}\right)^2 + 2\rho_c^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} c_i \rho_c^{(k-i)} \right)$$

$$\boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s})\mathbf{C}\boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s})^T = \sum_k \left(c_0 \left(\rho_s^{(k)}\right)^2 + 2\rho_s^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} c_i \rho_s^{(k-i)} \right)$$

Пример вычисления квадратичной формы для R=1/2

$$b^{(1)} \to x^{(1)}, x^{(2)} \to (\rho_c^{(1)}, \rho_s^{(1)}), (\rho_c^{(2)}, \rho_s^{(2)})$$

$$b^{(2)} \to x^{(3)}, x^{(4)} \to (\rho_c^{(3)}, \rho_s^{(3)}), (\rho_c^{(4)}, \rho_s^{(4)})$$

$$\ldots$$

$$b^{(l)} \to x^{(2l-1)}, x^{(2l)} \to (\rho_c^{(2l-1)}, \rho_s^{(2l-1)}), (\rho_c^{(2l)}, \rho_s^{(2l)})$$

$$\ldots$$

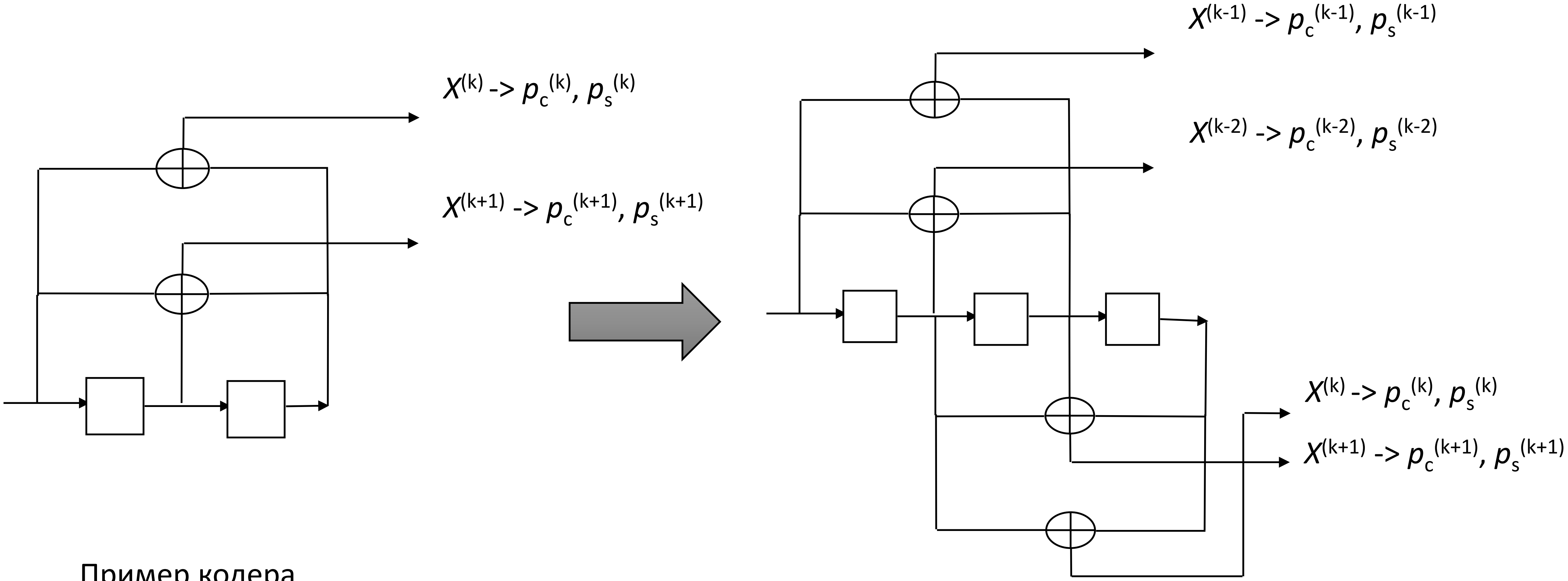
для значения кодового ограничения v=2 :

$$\begin{array}{llllll}
\ldots\ \rho_c^{(3)}\rho_c^{(4)} & \vdots\ \rho_c^{(5)}\rho_c^{(6)} & \vdots\ \rho_c^{(7)}\rho_c^{(8)} & \vdots\ \rho_c^{(9)}\rho_c^{(10)} & \vdots\ \rho_c^{(11)}\rho_c^{(12)} & \vdots\ldots \\
\ldots\ x^{(3)}\ x^{(4)} & \vdots\ x^{(5)}\ x^{(6)} & \vdots\ x^{(7)}\ x^{(8)} & \vdots\ x^{(9)}\ x^{(10)} & \vdots\ x^{(11)}\ x^{(12)} & \vdots\ldots \\
b^{(2)}\ b^{(1)}\, b^{(0)} & \vdots\ b^{(3)}\ b^{(2)} b^{(1)} & \vdots\ b^{(4)}\ b^{(3)}\ b^{(2)} & \vdots\ b^{(5)}\ b^{(4)} b^{(3)} & \vdots\ b^{(6)}\ b^{(5)} b^{(4)} & \vdots
\end{array}$$

для $\boldsymbol{L}$ = 3 :

$$c_0\left(\rho_c^{(7)}\right)^2 + 2\rho_c^{(7)}\left(c_1\rho_c^{(6)} + c_2\rho_c^{(5)}\right) + c_0\left(\rho_c^{(8)}\right)^2 + 2\rho_c^{(8)}\left(c_1\rho_c^{(7)} + c_2\rho_c^{(6)}\right)$$

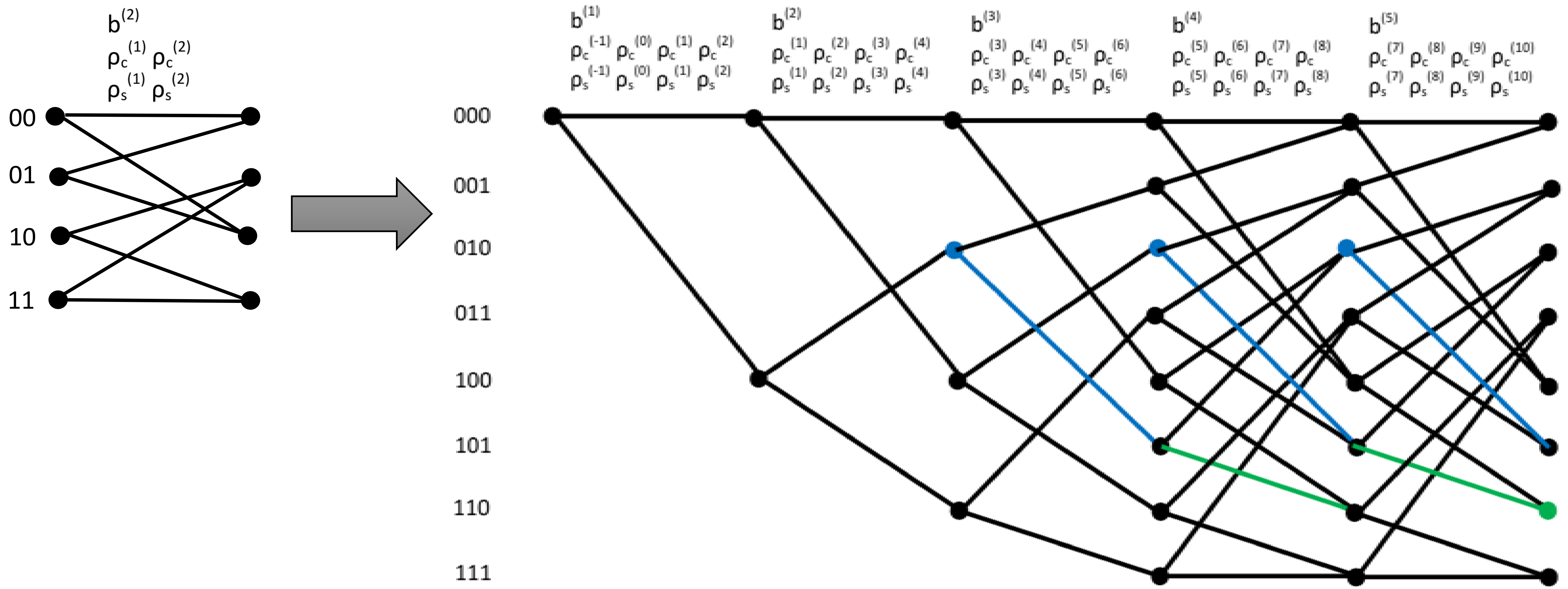
Построение измененной решетки (кодер и псевдокодер)



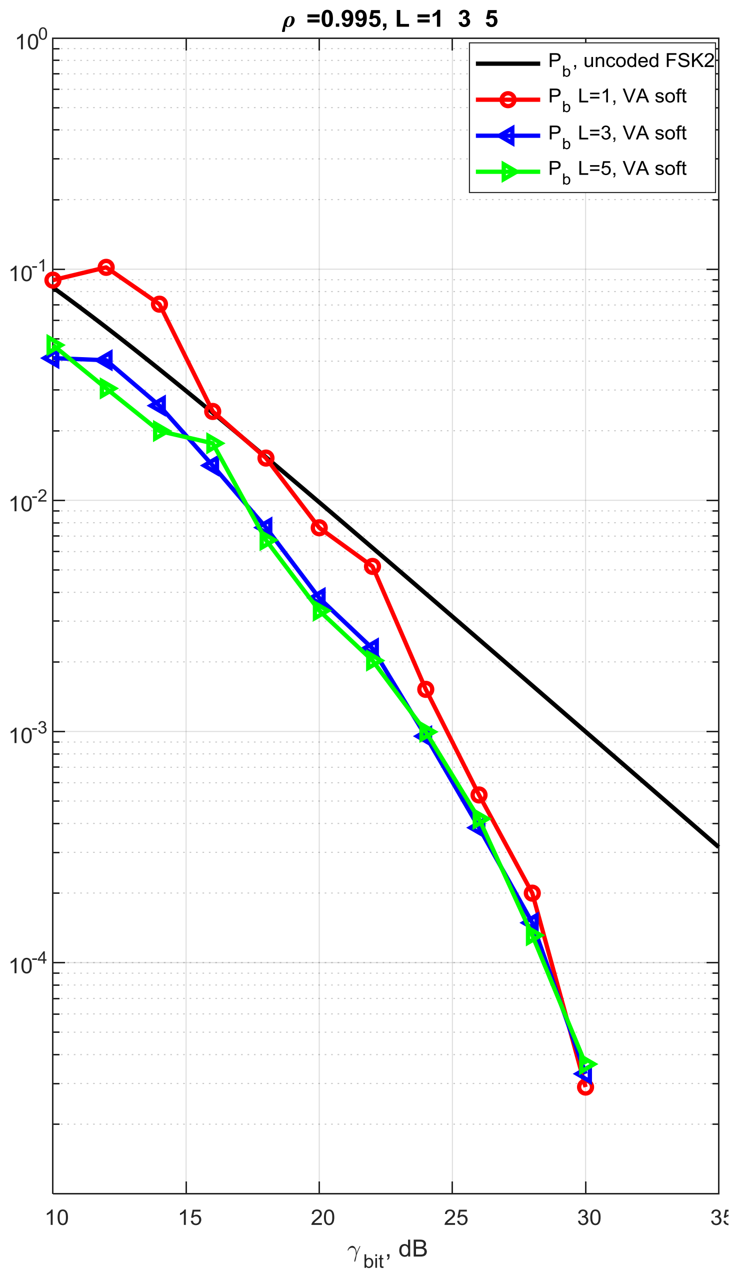
Пример кодера

Пример псевдокодера

Модифицированная кодовая решетка с учетом памяти канала для мягких решений демодулятора

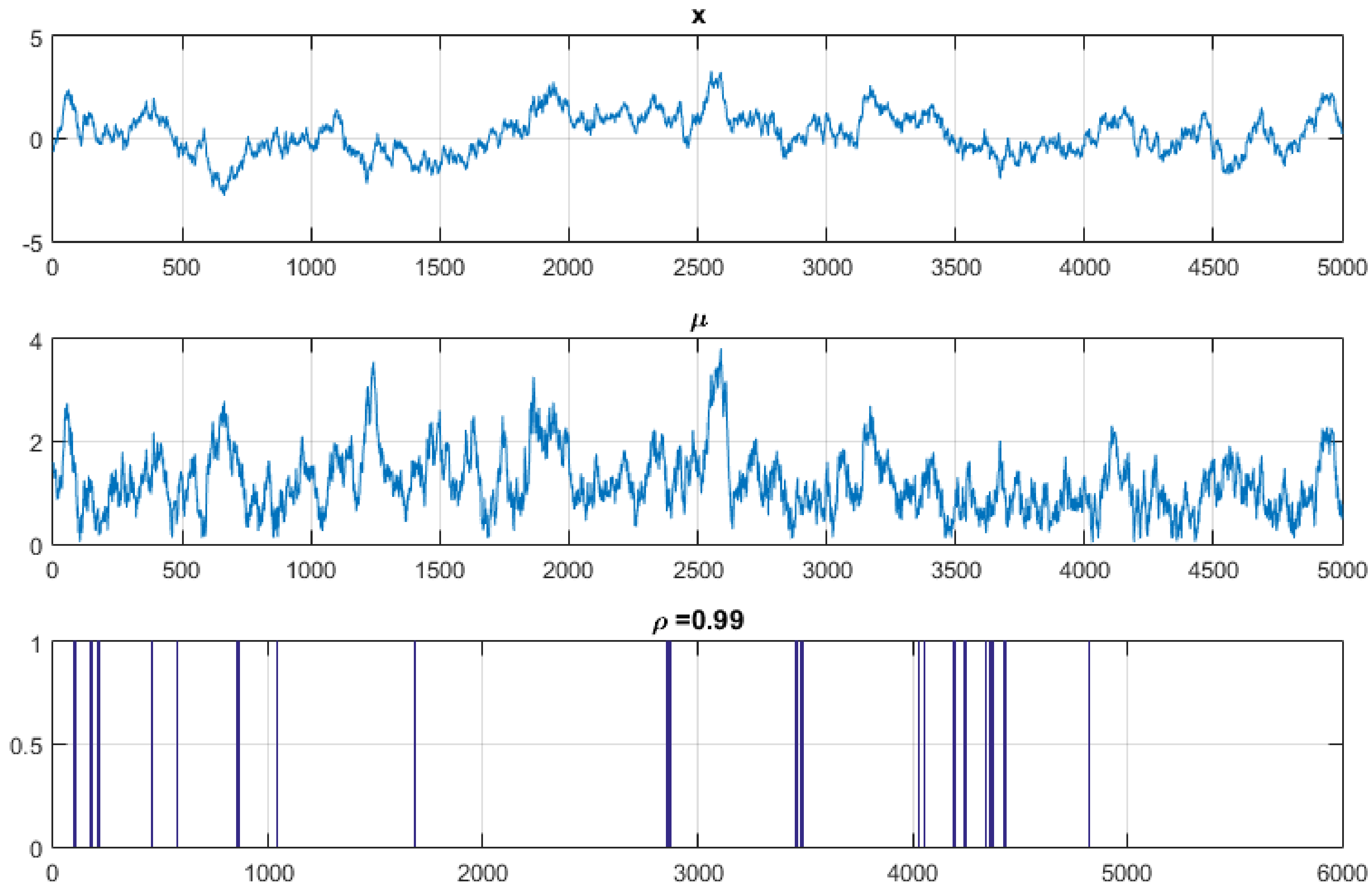


Вероятность ошибки на бит

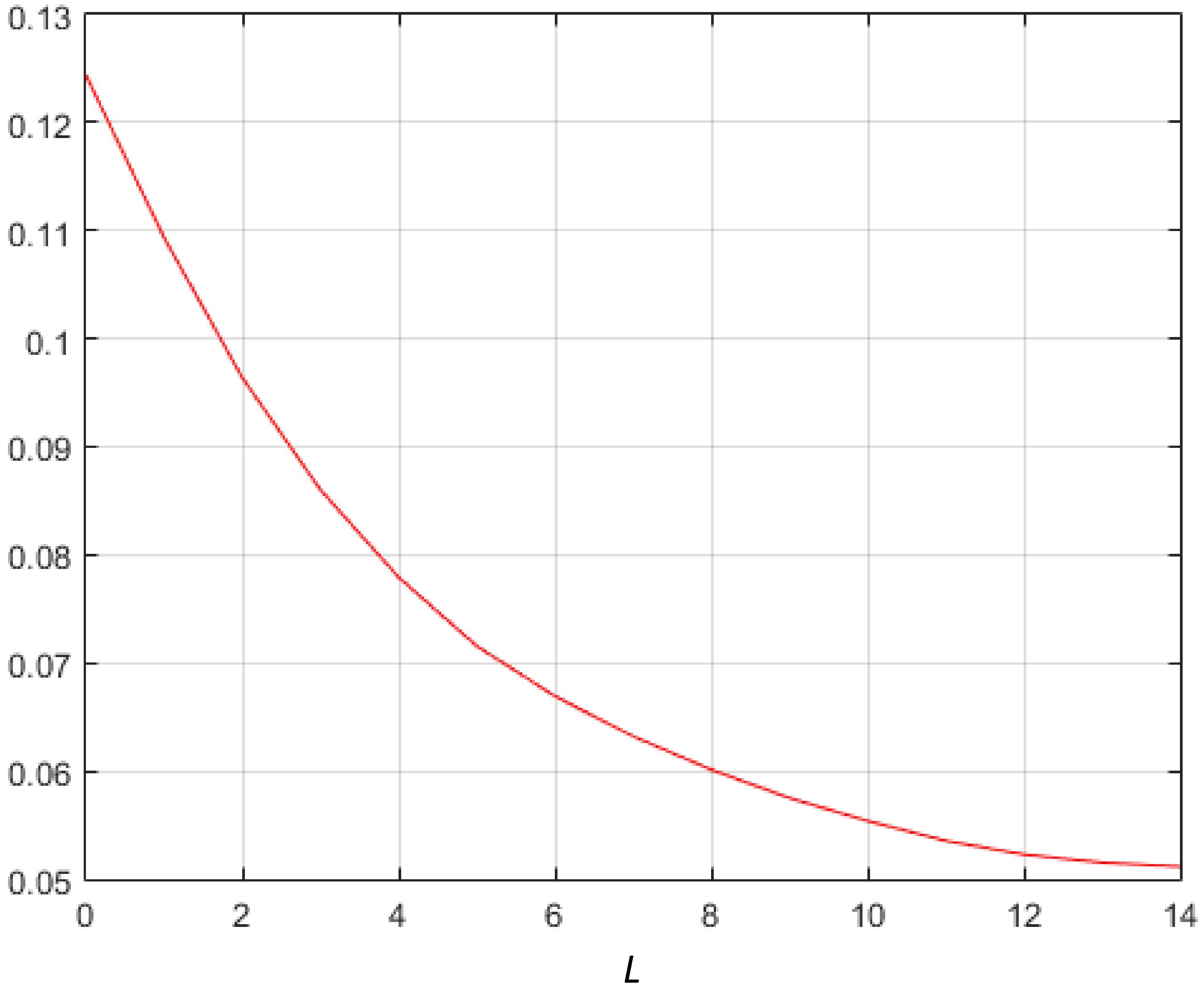


СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Поток ошибок в зависимости от р



Расстояние Бхаттачария между распределениями p(e) и $\widetilde{p}$(e)



Подробное описание оптимального правила приема

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\max_{s} (\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s})\mathbf{C}\boldsymbol{\rho}_c(\mathbf{s})^T + \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s})\mathbf{C}\boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{s})^T) =$$

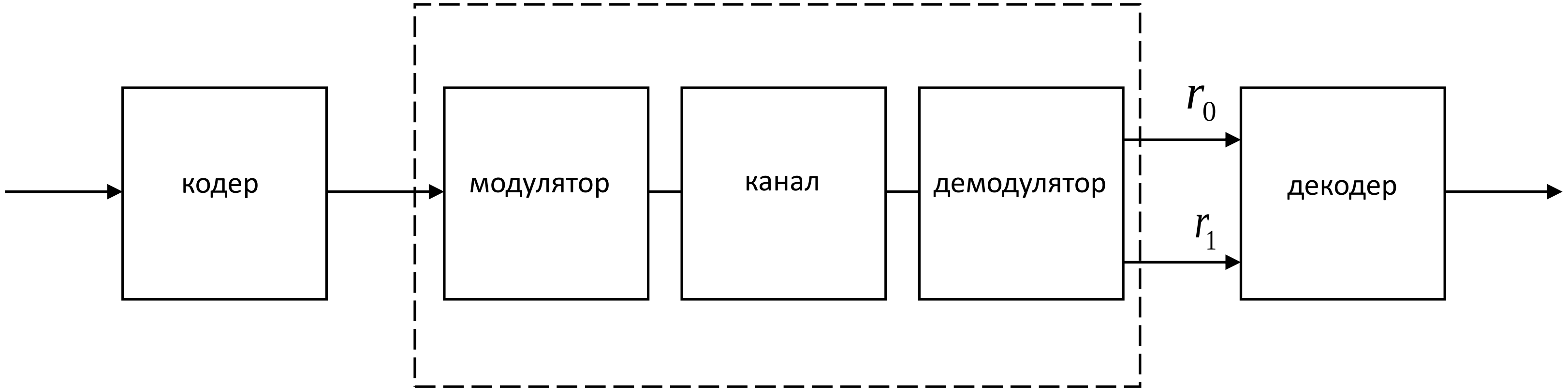
$$= \arg\max_{s} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \rho_c(s^{(k)})^2 C_0 + 2\sum_{k=0}^{N-1} \rho_c(s^{(k)}) \sum_{i=1}^{k} C_i \rho_c(s^{(k-i)}) + \sum_{k=0}^{N-1} \rho_s(s^{(k)})^2 C_0 + 2\sum_{k=0}^{N-1} \rho_s(s^{(k)}) \sum_{i=1}^{k} C_i \rho_s(s^{(k-i)}) \right) =$$

$$= \arg\max_{s} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\rho_c(s^{(k)})^2 C_0 + 2\rho_c(s^{(k)}) \sum_{i=1}^{k} C_i \rho_c(s^{(k-i)}) + \rho_s(s^{(k)})^2 C_0 + 2\rho_s(s^{(k)}) \sum_{i=1}^{k} C_i \rho_s(s^{(k-i)}) \right) =$$

$$= \left| \text{т.к } C_i = 0, \text{при } i \geq L \right| =$$

$$= \arg\max_{s} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\rho_c(s^{(k)})^2 C_0 + 2\rho_c(s^{(k)}) \sum_{i=1}^{L} C_i \rho_c(s^{(k-i)}) + \rho_s(s^{(k)})^2 C_0 + 2\rho_s(s^{(k)}) \sum_{i=1}^{L} C_i \rho_s(s^{(k-i)}) \right)$$

Эквивалентная модель канала



<u>при передаче 0</u>

$$r_0 = \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} x + n_{c0}^{норм} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} y + n_{s0}^{норм} \right)^2,$$

$$r_1 = (n_{c1}^{норм})^2 + (n_{s1}^{норм})^2,$$

<u>при передаче 1</u>

$$r_0 = (n_{c0}^{норм})^2 + (n_{s0}^{норм})^2,$$

$$r_1 = \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} x + n_{c1}^{норм} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} y + n_{s1}^{норм} \right)^2,$$

где $n_{c0}^{норм}, n_{s0}^{норм}, n_{c1}^{норм}, n_{s1}^{норм}$ – гауссовские случайные величины с 0 средним и 1 дисперсией, x=μcosθ, y=μsinθ.