

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой № 51

К.Т.Н., доц.

должность, уч. степень, звание

подпись, дата

А. А. Овчинников

инициалы, фамилия

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему Исследование и разработка алгоритма декодирования сверточных кодов
в канале с замираниями.

выполнена Пятаковым Виктором Сергеевичем

фамилия, имя, отчество студента в творительном падеже

по направлению подготовки 11.04.02

код

наименование направления

Инфокоммуникационные технологии и системы связи

наименование направления

направленности

01

код

наименование направленности

Защищенные инфокоммуникационные системы

наименование направленности

Студент группы № 5711М

подпись, дата

В. С. Пятаков

инициалы, фамилия

Руководитель

доц, к.т.н., доц.

должность, уч. степень, звание

подпись, дата

А. Н. Трофимов

инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой № 51

К.Т.Н., доц.

должность, уч. степень, звание

А. А. Овчинников

подпись, дата

инициалы, фамилия

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

студенту группы №

5711М

Пятакову Виктору Сергеевичу

(фамилия, имя, отчество)

на тему

Исследование и разработка алгоритма декодирования сверточных кодов

в канале с замираниями.

утвержденную приказом ГУАП от

02.04.2019

№

07-285/19

Цель исследования: Построение модели передачи данных по каналу с зависимыми замираниями с использованием сверточного кодирования, разработка и модификация алгоритмов декодирования и исследование их характеристик.

Задачи исследования: Описать модель канала с зависимыми замираниями; разработать алгоритмы декодирования, учитывающие память в канале с замираниями; реализовать моделирующую программу для жестких и мягких решений демодулятора.

Содержание диссертации (основные разделы): Описание системы передачи; разработка математической модели канала и системы кодирования; разработка и/или модификация алгоритмов декодирования, ориентированных на использование жесткого и мягкого выходов демодулятора; разработка программы моделирования; заключение и обсуждение результатов

Срок сдачи диссертации « 04 » июня 2019

Руководитель

доц, к.т.н., доц.

должность, уч. степень, звание

А.Н. Трофимов

инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению

студент группы №

5711М

В.С. Пятаков

подпись, дата

инициалы, фамилия

Оглавление

Введение	3
Глава 1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ	5
1.1. Схема системы передачи данных.....	5
1.2. Кодер.....	7
1.3. Модулятор	8
1.4. Канал передачи данных	9
1.5. Демодулятор.....	11
1.6. Декодер	13
1.7. Эквивалентная модель канала	16
Глава 2. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДЕКОДИРОВАНИЯ	19
2.1. Модификация алгоритма декодирования при использовании жестких решений демодулятора	19
2.2. Модификация алгоритма декодирования при использовании мягких решений демодулятора	22
Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ	33
3.1. Моделирование передачи данных в канале с зависимыми замираниями для жестких решений демодулятора	33
3.2. Моделирование передачи данных в канале с зависимыми замираниями для мягких решений демодулятора для различных значений параметра L	35
3.3. Моделирование передачи данных в канале с зависимыми замираниями для мягких решений демодулятора для различных значений параметра ν	37
3.4. Результаты моделирования передачи данных в канале с зависимыми замираниями для жестких и мягких решений демодулятора	39
Заключение	41
Библиографический список	43
ПРИЛОЖЕНИЕ	44

Введение

Актуальность выбранной темы. Основной задачей цифровой системы передачи данных, является надежная доставка информации по каналу связи. Канал может быть проводным или беспроводным, но независимо от его вида, он будет подвержен разного рода помехам, которые приводят к ошибкам на приемной стороне. Тогда можно разработать такую систему передачи данных, в которой будет использоваться канальное кодирование, например сверточное, для уменьшения вероятности ошибки при передаче. Сверточное кодирование широко используется в наше время для обнаружения и исправления ошибок в режиме реального времени. Его применяют в современных цифровых системах связи, таких как: спутниковые системы связи [4], мобильной связи [5] и др.

Цель данной работы состоит в построении модели передачи данных по каналу с зависимыми замираниями с использованием сверточного кодирования, разработке и модификации алгоритмов декодирования и исследовании их характеристик.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Описать модель канала с зависимыми замираниями.
2. Разработать алгоритмы декодирования, учитывающие память в канале с замираниями
3. Реализовать моделирующую программу для жестких и мягких решений демодулятора.

Объектом исследования является система передачи информации с использованием сверточного кодирования в канале с зависимыми замираниями.

Предметом исследования является модификация алгоритма Витерби для декодирования сверточных кодов в канале с зависимыми замираниями.

Методы исследования: аналитический, практический.

Структура работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и приложений. В первой главе приводится теоретический обзор системы передачи информации в целом. Во второй главе проведен анализ подходов к модификации алгоритма декодирования для сверточных кодов в канале с зависимыми замираниями для жестких и мягких решений демодулятора. В третьей главе приведены результаты моделирования. В заключении сформулированы выводы по работе. Список использованных источников содержит список литературных и других источников, материалы из которых были использованы при написании работы. В приложении приведен код моделирующей программы, реализованной в среде matlab.

Глава 1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

1.1. Схема системы передачи данных

Цель системы передачи состоит в том, чтобы передать сообщение m от источника к получателю. Рассмотрим основные элементы системы передачи информации, следуя [1].

Источник решает задачу генерирования сообщений. Если множество всех возможных сообщений конечно, то такой источник называется дискретным, иначе аналоговым или непрерывным.

Модулятор формирует сигнал по входному сообщению. В процессе модуляции параметры сигнала изменяются в соответствии с передаваемым сообщением. Если множество всех возможных сигналов, сформированных в процессе модуляции, оказывается конечным, то такой вид модуляции называется дискретным или цифровым, иначе аналоговым или непрерывным.

Кодек канала в схеме на рисунке 1.1. выполняет функцию помехоустойчивого кодирования-декодирования и используется для обеспечения более надежной передачи сообщений. Скорость передачи при использовании помехоустойчивого кодирования уменьшается, так как при передаче создаются избыточные символы, позволяющие исправлять ошибки, возникающие в канале.

Основными параметрами, которыми можно охарактеризовать систему передачи являются скорость передачи, ширина полосы частот и отношение сигнал/шум. Обычно ставится задача обеспечения требуемого качества передачи при заданных значениях этих параметров.

Различают информационную и модуляционную скорость передачи информации. Модуляционная скорость определяется как $V_{\text{mod}} = T^{-1}$, где T – период следования дискретных сигналов. Охарактеризовать модуляционную скорость можно как число изменений параметров дискретного сигнала в единицу времени. Единицей измерения модуляционной скорости является Бод, $1 \text{ Бод} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Информационная скорость при отсутствии помехоустойчивого кодирования и с использованием равновероятных дискретных сигналов определяется как $V = \log_2 q / T$, где T – период следования дискретных сигналов, q – количество дискретных сигналов. Охарактеризовать информационную скорость можно, как количество информации, передаваемое в единицу времени. Единицей измерения информационной скорости является бит/с.

В канале возникают помехи естественного происхождения и искусственного происхождения. По своему воздействию на передаваемый сигнал помехи могут быть аддитивными и мультипликативными.

Качество системы передачи дискретных сообщений можно описать, используя такую характеристику, как вероятность ошибки, которая определяется как $P_e = \Pr[\hat{m} \neq m]$, где m – переданное сообщение, \hat{m} – принятое сообщение.

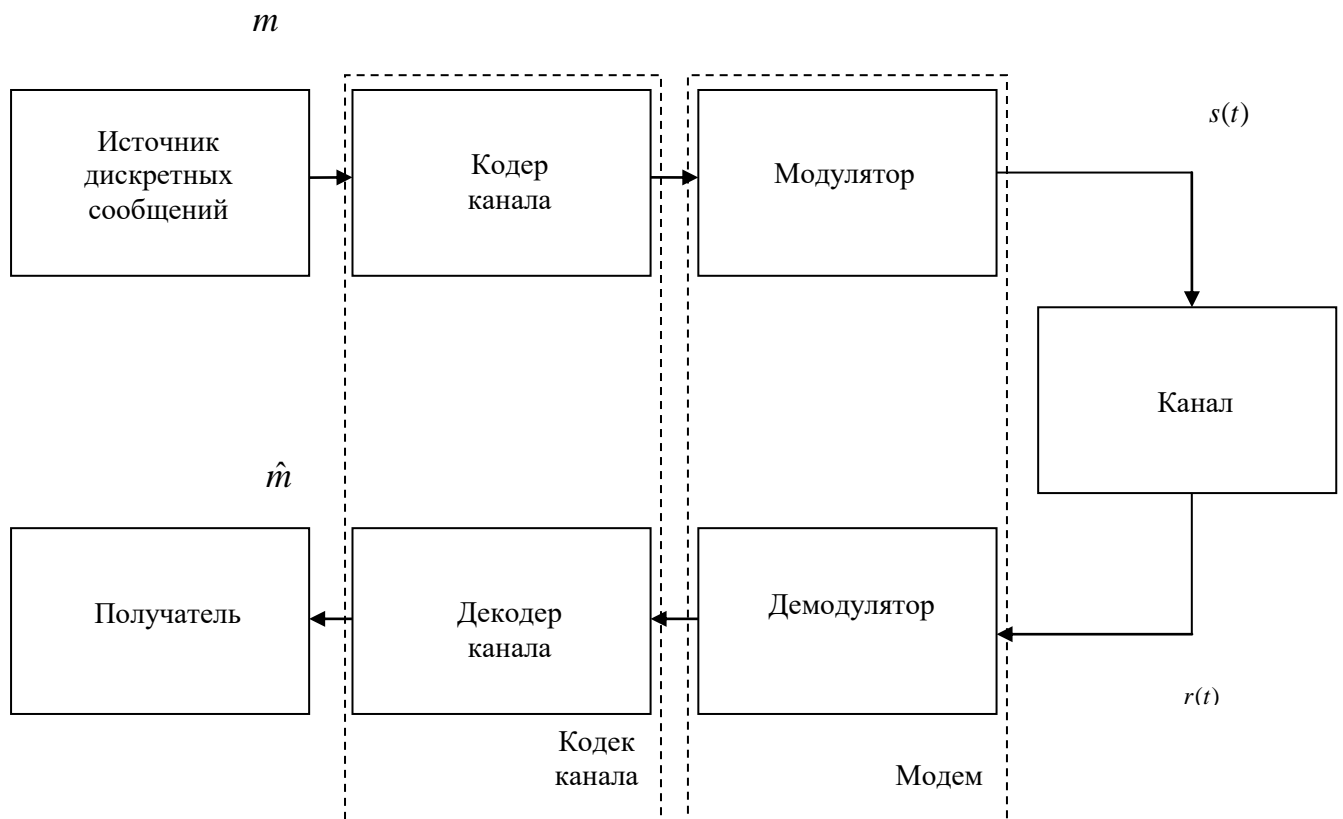


Рис. 1.1 – Схема системы передачи дискретных сообщений

1.2. Кодер

В качестве помехоустойчивого кодера используется сверточный кодер со скоростью кода $1/n$, изображенный на рисунке 1.2.

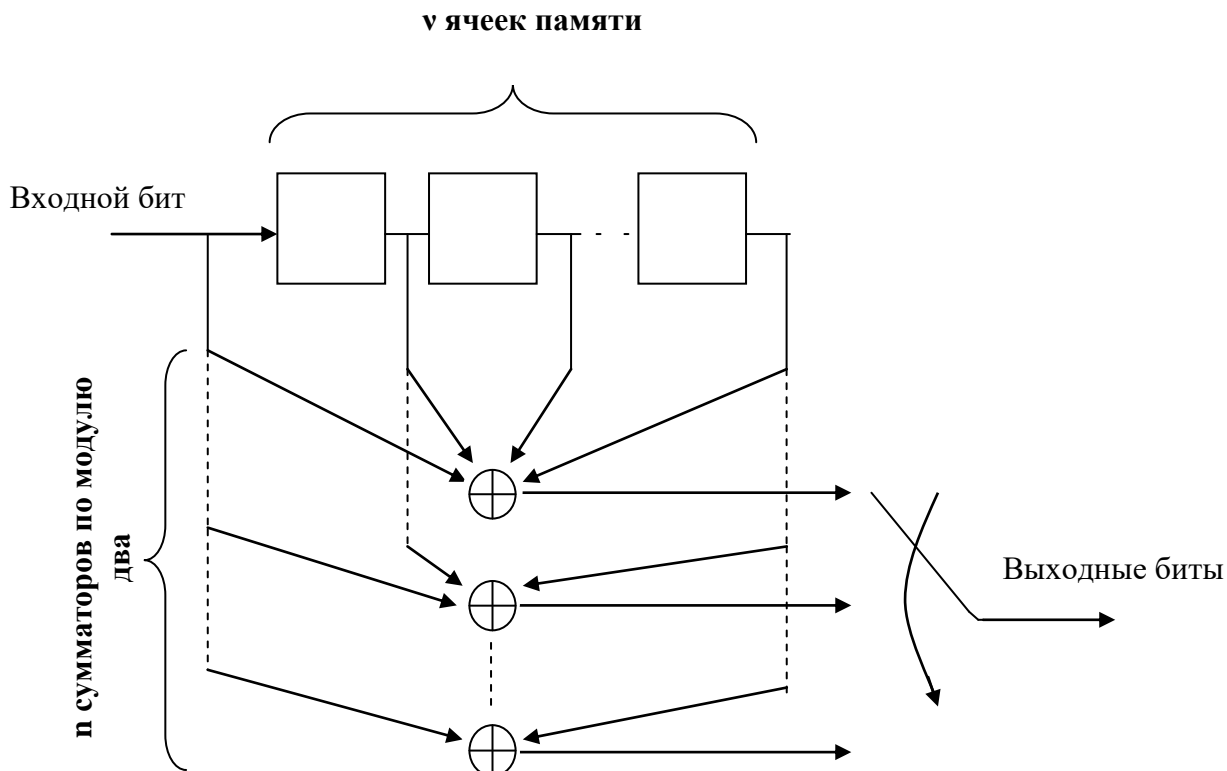


Рис. 1.2 – Схема двоичного сверточного кодера со скоростью кода $1/n$

Основными параметрами, которые определяют двоичный сверточный кодер, являются регистр сдвига, сумматоры по mod 2 и мультиплексор.

Регистр сдвига представляет собой динамическое запоминающее устройство, которое в своих ячейках памяти хранит 1 бит информации. Количество v ячеек в регистре сдвига определяют память кодера, и носит название кодового ограничения. При поступлении нового информационного символа на вход регистра сдвига символ, который хранится в крайнем правом разряде, выбрасывается. Оставшиеся в ячейках биты сдвигаются на разряд вправо, тем самым освобождая крайний левый разряд.

Сумматоры по mod 2 используются для сложения поступающих на их входы битов из соответствующих ячеек регистра сдвига. Правило, по которым выполняется сложение, выглядит следующим образом: $1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$.

Мультиплексор выполняет функцию последовательного считывания поступающих символов и определяет очередность вывода выходных символов в канал передачи данных.

Скорость помехоустойчивого кода определяется как $R = 1/n$, где n – число передаваемых в канал передачи данных символов за один такт работы регистра сдвига.

Правило, по которому сумматоры по mod 2 выбирают какие ячейки памяти регистра складывать, называется генератором сверточного кода.

1.3. Модулятор

Для передачи дискретных сигналов используется частотная модуляция. Сигналы частотной модуляции имеют вид

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.1)$$

где E – энергия сигнала, T – период следования сигналов, f_i – центральная частота i -го сигнала, $f_i = l_i/T$, l_i – целое, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Величины l_i должны быть разными при различных i . При данном выборе центральных частот сигналы частотной модуляции будут ортогональны.

В канале передачи данных со случайной фазой и замираниями частоты сигналов f_i выбираются так, чтобы сигналы были ортогональны в усиленном смысле. Ортогональность в усиленном смысле означает соблюдение следующих условий

$$\int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_k t dt = \int_0^T \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_k t dt = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

и

$$\int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_k t dt = 0.$$

Этого условия можно достичь, если $f_i = f_0 + i\Delta_f$, где $f_0 = l_0/T$, l_0 – целое и $\Delta_f = l/T$, l – целое. Наименьший шаг по частоте, при котором можно достичь ортогональности в усиленном смысле, равен $1/T$.

В зависимости от значения бита пришедшего на вход модулятора, на его выходе имеем

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow s_0(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi f_0 t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \\ 1 \rightarrow s_1(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi f_1 t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.4. Канал передачи данных

В канале со случайными параметрами сигнал на выходе канала имеет вид $r(t) = s(t, \mathbf{a}) + n(t)$, где \mathbf{a} – вектор параметров сигнала, изменяющихся случайно при передаче, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L)$, L – число случайных параметров, $n(t)$ – белый гауссовский шум. На практике значение вектора случайных параметров не известно в точке приема, поэтому и следует строить приемник, учитывающий данное обстоятельство.

В данной работе канал передачи данных имеет набор таких случайных параметров, влияющих на показатели качества передачи, такие как, случайный фазовый сдвиг сигнала и замирания. В общем виде модель изображена на рисунке 1.3.

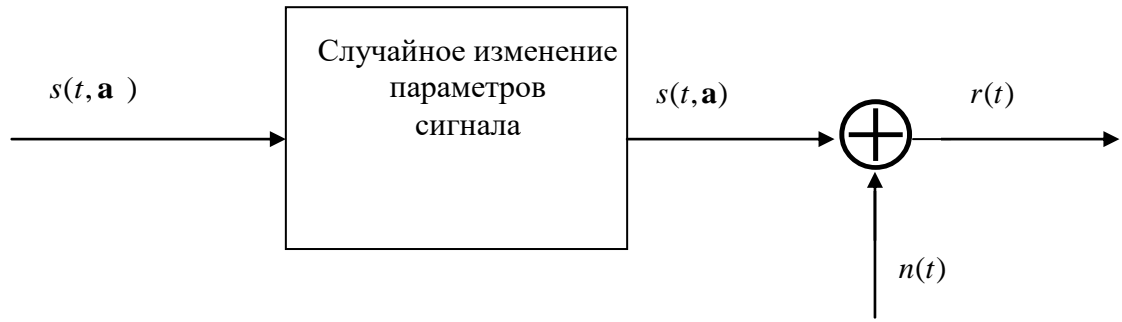


Рис. 1.3 – Модель канала со случайными параметрами

Белый гауссовский шум определяется как гауссовский случайный процесс $n(t)$ с нулевым средним, $\overline{n(t)} = 0$ и спектральной плотностью мощности $S_n(f) = N_0 / 2$.

Сигнал на выходе канала со случайной фазой, замираниями и аддитивным белым гауссовским шумом имеет вид

$$r(t) = \begin{cases} \mu \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i - \theta) + n(t), & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.3)$$

где θ – случайный фазовый сдвиг, $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$, μ – случайный коэффициент передачи канала.

Распределение фазового сдвига задано равномерным, т.е. функция плотности вероятности величины θ имеет вид

$$w(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$ и $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)})$ – независимые друг от друга случайные гауссовские векторы с нулевыми средними. Внутри вектора \mathbf{x} и внутри вектора \mathbf{y} имеется зависимость, которая задается корреляционной матрицей $\mathbf{\Lambda}$, которая имеет следующий вид:

$$\Lambda = [\lambda_{mk}] = [x^{(k)} x^{(m)}] = [y^{(k)} y^{(m)}], \quad m, k = 1, 2, \dots, N.$$

В данной работе λ_{mk} равно $(1/2)\rho^{|k-m|}$.

Влияние на отдельные элементы последовательности, при передаче по каналу с замираниями, чаще всего является зависимым, из этого следует, что мы рассматриваем канал с памятью, где случайный коэффициент передачи канала μ имеет вид

$$\mu^{(n)} = \sqrt{(x^{(n)})^2 + (y^{(n)})^2},$$

где

$$x^{(n)} = \rho x^{(n-1)} + \sqrt{1-\rho^2} \xi_x,$$

$$y^{(n)} = \rho y^{(n-1)} + \sqrt{1-\rho^2} \xi_y,$$

где ρ – коэффициент корреляции, ξ_x, ξ_y – гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

Это не единственно возможное задание этих параметров, но в данной работе используются именно такие. Для гауссовских случайных величин можно задать авторегрессионный процесс большей связности, но в данной работе это не рассматривается.

1.5. Демодулятор

Оптимальный демодулятор для данной модели построен по схеме, которая описывается в [1]. Данная схема изображена на рисунке 1.4.

Опишем алгоритм приема сигнала демодулятором. С выхода канала поступает сигнал со случайным фазовым сдвигом и аддитивным белым гауссовским шумом. Сигнал умножается на ортонормированные функции вида:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i t), & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_i t), & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где T – период следования сигналов, f_i – центральная частота i -го сигнала, $f_i = l_i / T$, l_i – целое, $i = 0, 1, \dots, q-1$.

Полученные в результате умножения выражения интегрируются и возводятся в квадрат, после чего складываются.

Обозначим выходы демодулятора, как r_i , где $i = 0, 1, \dots, q-1$. Дальнейшее использование полученных величин зависит от того, какое решение будет принято.

Когда демодулятор принимает жесткие решения, выходные величины квантуются на два уровня, и из них выбирается максимум. Выходом такого демодулятора является величина i , где $i = 0, 1$.

Мягкие решения демодулятора оставляют выходные величины без изменений, организуя тем самым непрерывный выход, который может быть использован при декодировании.

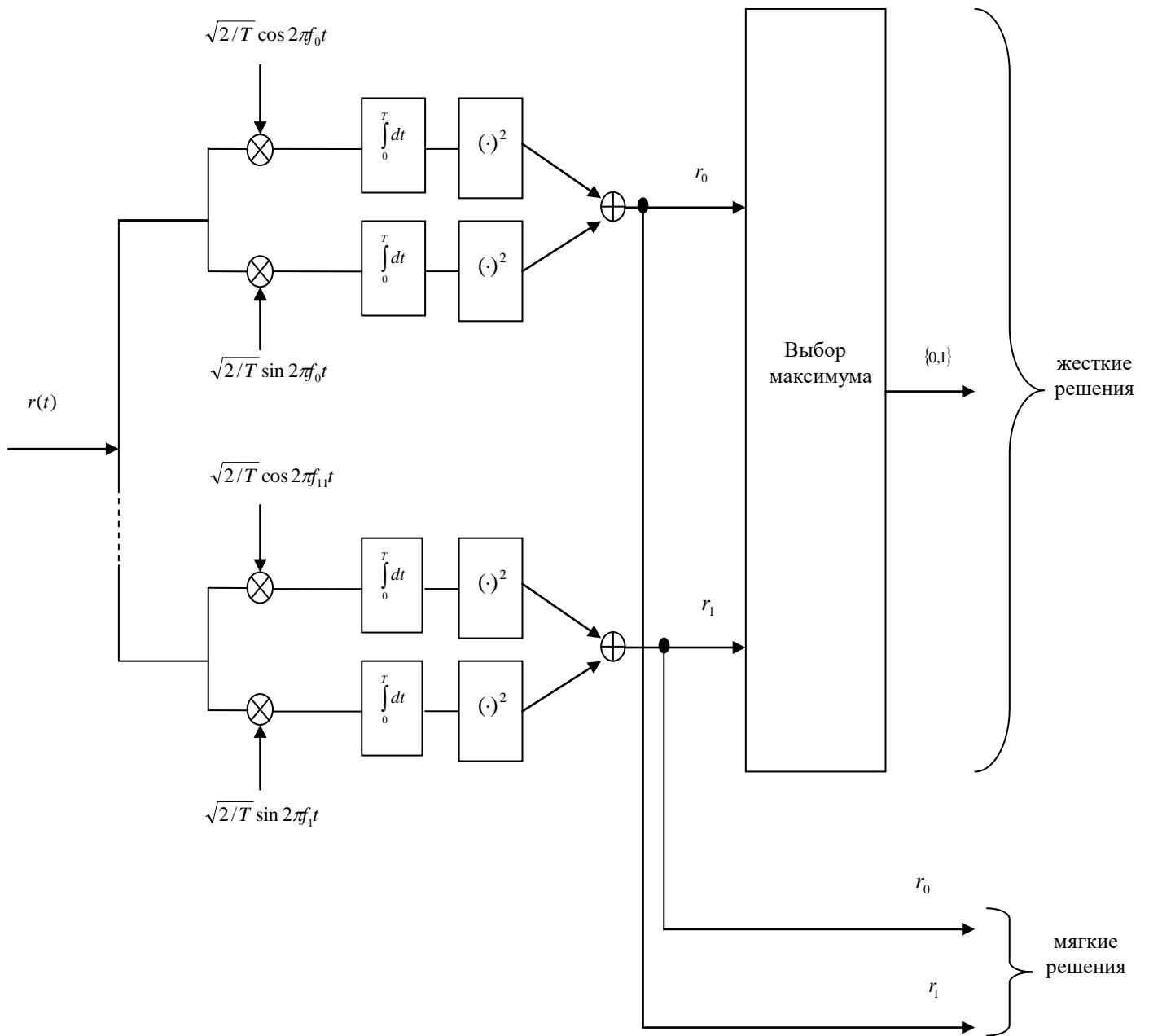


Рис. 1.4 – Схема демодулятора ЧМ сигналов в канале со случайной фазой с мягкими и жесткими решениями

1.6. Декодер

В данной работе исследуется декодирование по алгоритму Витерби, которое подробно описано в [2].

Сверточный код удобно представлять в виде кодовой решетки или решетчатой структуры. С учетом этого, алгоритм Витерби можно описать как поиск оптимального пути в решетке [6].

Кодовое ограничение сверточного кодера - характеристика, показывающая число ячеек памяти в регистре сдвига. Количество возможных состояний кодовой решетки равно 2^v , где v – кодовое ограничение.

Из каждого узла выходят два пути, соответствующие входному 0 и 1 и носят название переходных ребер кодовой решетки. Каждому ребру соответствует метка, которая определяется выходными символами сверточного кодера. При декодировании для каждого узла в кодовой решетке вычисляется накопленная метрика и наиболее вероятный путь до данного узла.

На каждом такте работы декодера вычисляются накопленные метрики, путем суммирования накопленной метрики из предыдущего узла и метки на ребре. Сравниваются два пути, входящие в каждый узел и сохраняется лишь тот из них, метрика которого больше. Другой путь исключается из рассмотрения, так как при любых принятых в будущем данных, правдоподобие данного пути не сможет стать лучше, чем правдоподобие оставшегося пути. Такие пути называются выжившими.

Через определенное количество тактов, равное глубине просмотра решетки $M = (5...7...10)v$, где v – кодовое ограничение сверточного кодера, остаются пути с одним началом в соответствии с рисунком 1.5. Путь с наибольшей накопленной метрикой, выбирается, как наиболее похожий на исходную последовательность и получателю отдается бит, стоящий в крайнем левом разряде.

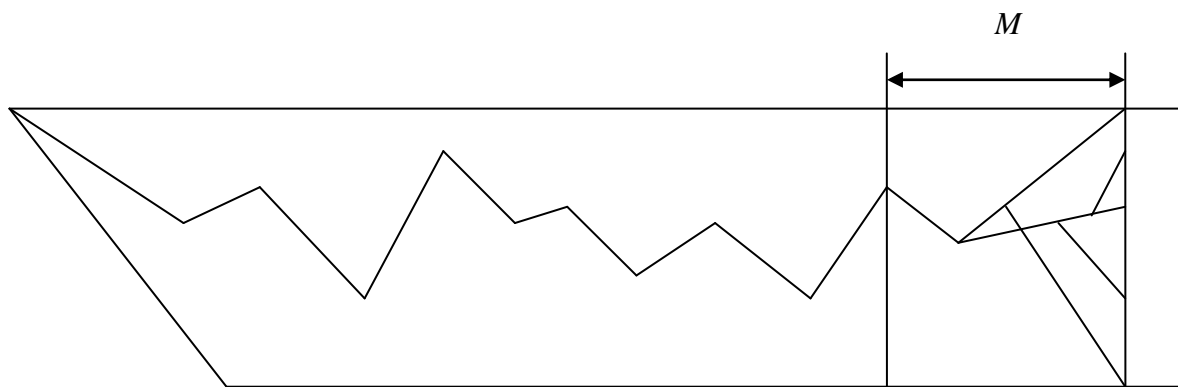


Рис. 1.5 – Типичная конфигурация путей при декодировании по алгоритму Витерби

Переходы в решетки и метки ребер задаются сверточным кодером. На рисунке 1.6 приведен пример сверточного кодера с генератором (7,5) и кодовым ограничением $v = 2$.

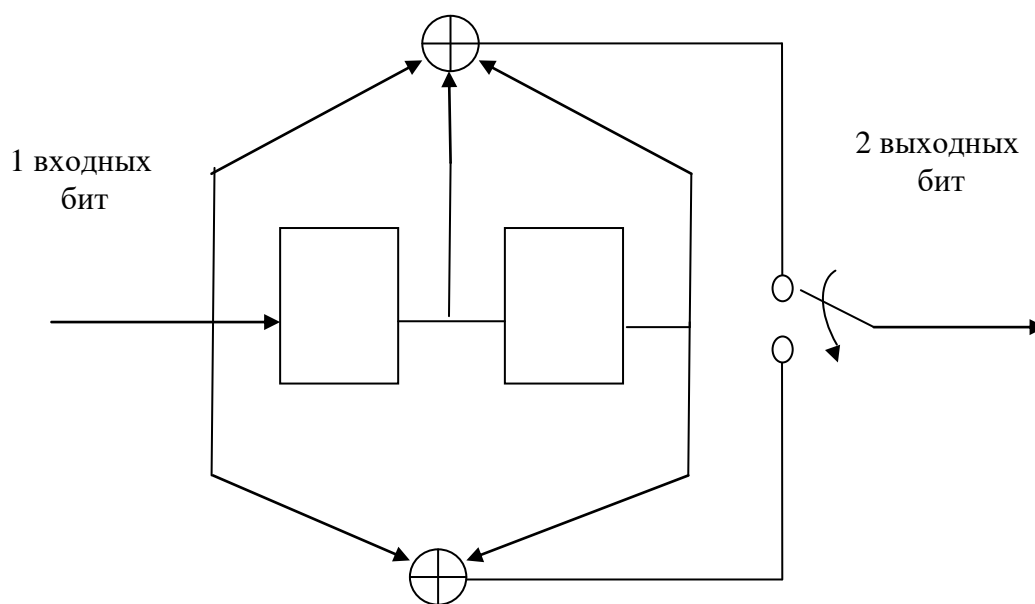


Рис. 1.6 – Схема сверточного кодера с $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$

Используя кодер с такими параметрами, покажем на рисунке 1.7. переходы между узлами на одном такте работы декодера и изобразим на рисунке 1.8. кодовую решетку.

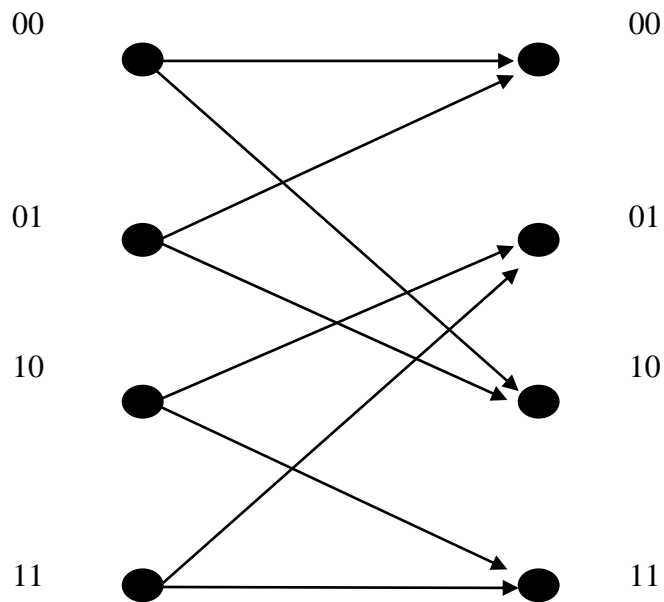


Рис. 1.7 – Узлы и переходы между ними на одном такте работы декодера Витерби

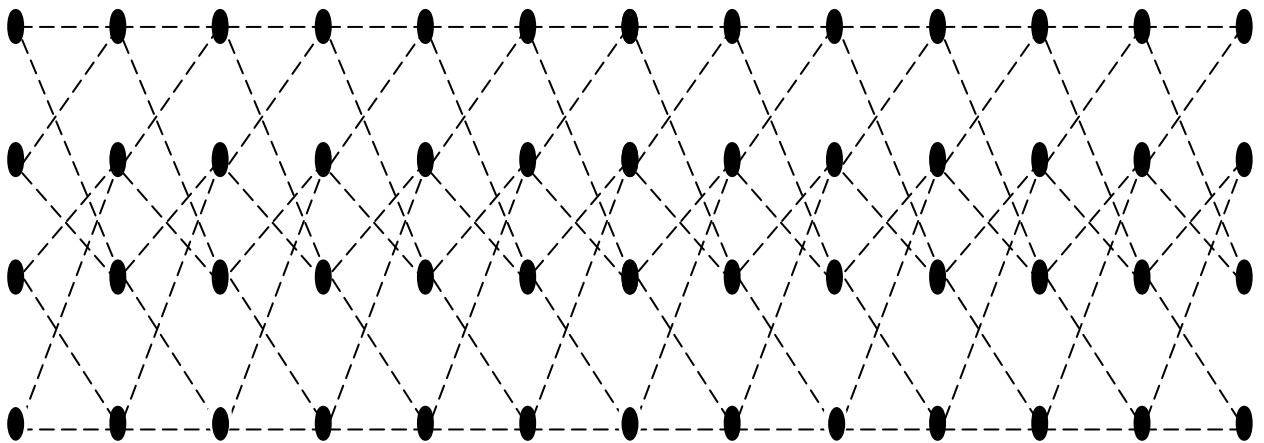


Рис. 1.8 – Структура кодовой решетки для сверточного кодера с

1.7. Эквивалентная модель канала

Для упрощения моделирования используется эквивалентная модель канала передачи данных. Идея состоит в том, чтобы объединить блоки модулятор, канал и демодулятор в один блок. Тогда схематично систему передачи данных можно представить в соответствии с рисунком 1.9.

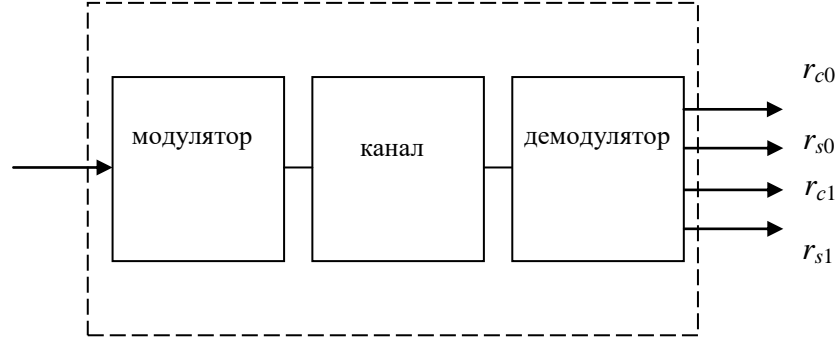


Рис. 1.9 – Эквивалентная схема канала передачи данных

С выхода эквивалентной модели канала в зависимости от бита на входе, будут поступать на каждом такте следующие величины:

при передаче 0

$$r_0 = (\mu\sqrt{E} \cos \theta + n_{c0})^2 + (\mu\sqrt{E} \sin \theta + n_{s0})^2,$$

$$r_1 = n_{c1}^2 + n_{s1}^2,$$

при передаче 1

$$r_0 = n_{c0}^2 + n_{s0}^2,$$

$$r_1 = (\mu\sqrt{E} \cos \theta + n_{c1})^2 + (\mu\sqrt{E} \sin \theta + n_{s1})^2,$$

где $n_{c0}, n_{s0}, n_{c1}, n_{s1}$ – гауссовские случайные величины с 0 средним и дисперсией $N_0/2$, θ – равномерно распределенная случайная величина от 0 до 2π , μ – случайный коэффициент передачи канала.

Нормируем наши получившиеся выражения, разделив их на $N_0/2$, тогда при передаче 0 получаем

$$r_0 = \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} x + n_{c0}^{норм} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} y + n_{s0}^{норм} \right)^2,$$

$$r_1 = (n_{c1}^{норм})^2 + (n_{s1}^{норм})^2,$$

при передаче 1

$$r_0 = (n_{c0}^{норм})^2 + (n_{s0}^{норм})^2,$$

$$r_1 = \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} x + n_{c1}^{норм} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} y + n_{s1}^{норм} \right)^2,$$

где $n_{c0}^{норм}, n_{s0}^{норм}, n_{c1}^{норм}, n_{s1}^{норм}$ – гауссовские случайные величины с 0 средним и 1 дисперсией, $x = \mu \cos \theta$, $y = \mu \sin \theta$.

Глава 2. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДЕКОДИРОВАНИЯ

2.1. Модификация алгоритма декодирования при использовании жестких решений демодулятора

В данной работе введено предположение о том, что поток ошибок в канале зависимый. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что поток ошибок можно описать с использованием марковской цепи.

Поток ошибок будем описывать с помощью марковского приближения, который имеет вид

$$p(\mathbf{e}) = p(e^{(1)})p(e^{(2)} | e^{(1)})p(e^{(3)} | e^{(2)}e^{(1)})...p(e^{(K-2)} | e^{(K-3)}e^{(K-4)}...e^{(1)}) \prod_{n=K-1}^N p(e^{(n)} | e^{(n-1)}e^{(n-2)}...e^{(n-K)}),$$

где K – связность марковской цепи.

Рассмотрим алгоритм декодирования, когда демодулятор принимает жесткие решения, и на вход декодера будут приходить 0 и 1. Тогда, если ошибки независимые, мы можем принимать решения по максимуму правдоподобия, находя путь с наименьшей накопленной метрикой, считая на каждом ребре кодовой решетки расстояние Хэмминга, между принятым сегментом и меткой на ребре.

Так как в данной системе имеется память, мы можем добавить в решение декодера информацию об предыдущих ошибочных битах. Для этого необходимо модифицировать нашу кодовую решетку и алгоритм подсчета метрик.

Покажем на примере модификацию кодовой решетки для случая, когда используется информация об одном предыдущем ошибочном символе, когда $K = 1$, скорость кода $R = 1/2$ и длина кодового ограничения $\nu = 2$. Для начала изобразим на рисунке 2.1 исходную структуру кодовой решетки и обозначим через $y_1 y_2$ – суммы принятого сегмента и меток ребер.

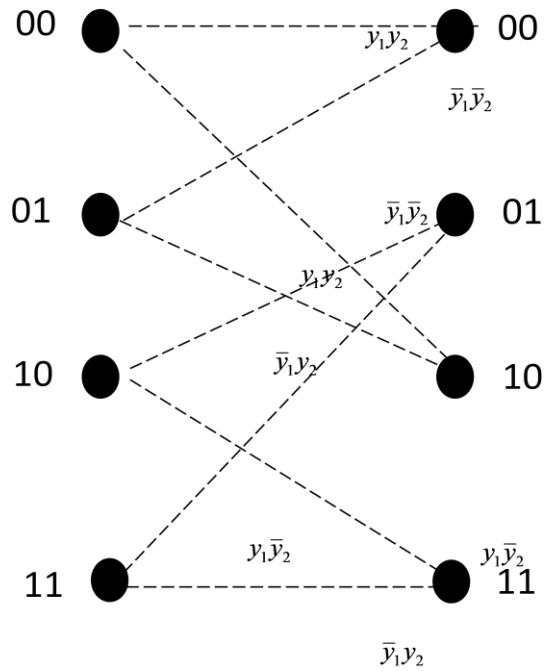


Рис. 2.1 – Структура кодовой решетки для сверточного кодера с
 $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1$

Модификация решетки будет состоять в следующем: теперь под узлом кодовой решетки будет пониматься не только состояние регистра сдвига сверточного кодера, но и последний ошибочный символ на ребре. Изобразим структуру модифицированной кодовой решетки на рисунке 2.2.

На ребрах решетки лежат суммы принятого сегмента и меток на ребре, что в свою очередь будет соответствовать ошибочным символам, так как

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{y},$$

где $\mathbf{e} = (e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(N)})$ - вектор ошибочных символов, $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$ - метки на ребре, $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)})$ - принятые из канала символы.

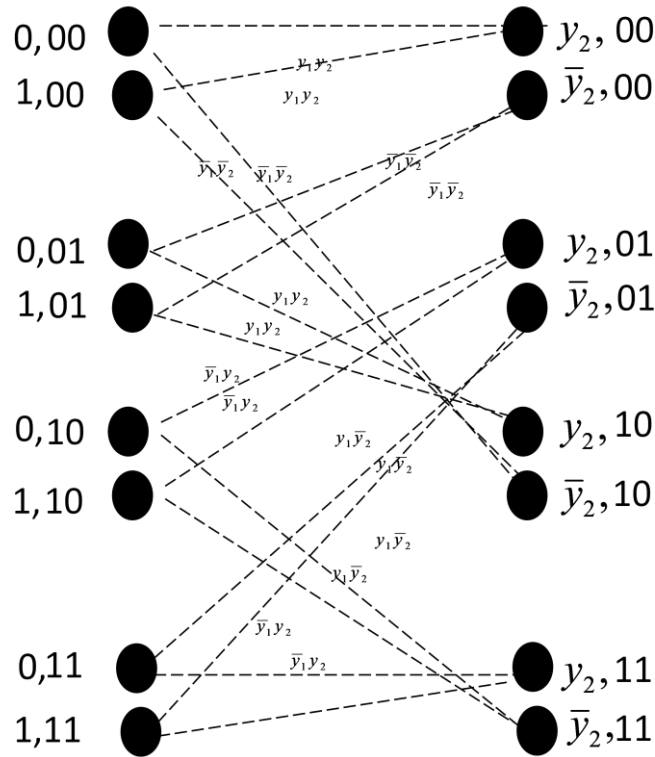


Рис. 2.2 – Структура модифицированной кодовой решетки для сверточного кодера с $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1$

Если ошибки в канале независимы, то вместо расстояния Хэмминга, можно использовать безусловные вероятности появления символов ошибок $p(y)$. С учетом этого, метрику ребра можно оценить, как сумму логарифмов этих вероятностей:

$$\log p(y_1 y_2) = \log p(y_1) p(y_2) = \log p(y_1) + \log p(y_2).$$

Так как канал имеет память, то мы можем оценивать метрику на ребре как сумму логарифмов условных вероятностей.

В данной работе проделана модификация решетки только для случая, когда $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1$ и $K=1$. Это обусловлено тем, что решетка имеет не постоянную структуру, и в зависимости от последнего символа на ребре y_2 , будет менять свою конфигурацию, переставляя переходы из состояния в состояние.

Принимая во внимание данное обстоятельство, рассмотрение более сложных параметров кода или изменение связности марковской цепи K , привело бы к увеличению сложности проектирования, не давая при этом существенный выигрыш.

2.2. Модификация алгоритма декодирования при использовании мягких решений демодулятора

Рассмотрим алгоритм декодирования, когда демодулятор принимает мягкие решения, и на вход декодера, будут приходить непрерывные величины.

Разложим полученные на выходе демодулятора величины на \sin и \cos составляющие:

$$r_{ck} = \begin{cases} x\sqrt{2\gamma} + n_{ck}, k = i, \\ n_{ck}, k \neq i, \end{cases} \quad r_{sk} = \begin{cases} y\sqrt{2\gamma} + n_{sk}, k = i, \\ n_{sk}, k \neq i, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\gamma = E / N_0$, x, y – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $1/2$, n_{ck}, n_{sk} – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $k = 0, 1$.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= (\sqrt{2\gamma}, 0), \\ \mathbf{s}_1 &= (0, \sqrt{2\gamma}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где \mathbf{s}_i – это представление сигнала.

Тогда можем записать выход канала в векторном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= x\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_c, \\ \mathbf{r}_s &= y\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_s, \end{aligned}$$

где \mathbf{s}_i – это представление сигнала, x, y – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $1/2$, n_c, n_s –

независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $i = 0,1$.

Так как, алгоритм сверточного кодирования и алгоритм декодирования Витерби выполняется последовательно во времени, нужно рассмотреть передачу последовательности сигналов. Имеем последовательность переданных сигнальных точек:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \dots, \mathbf{s}^{(N)}), \mathbf{s}^{(l)} \in \{\mathbf{s}_i\}_{i=0,1},$$

и на приемной стороне возникают последовательности

$$\mathbf{R}_c = (\mathbf{r}_c^{(1)}, \mathbf{r}_c^{(2)}, \dots, \mathbf{r}_c^{(N)}),$$

$$\mathbf{R}_s = (\mathbf{r}_s^{(1)}, \mathbf{r}_s^{(2)}, \dots, \mathbf{r}_s^{(N)}).$$

Правило оптимального приема последовательности имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}) \quad (2.3)$$

Требуется определить вид функции плотности вероятности $w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s})$. Для этой функции плотности вероятности справедливо равенство

$$w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}) = \overline{w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y})} = \overline{w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, \mathbf{x})} \overline{w(\mathbf{R}_s | \mathbf{s}, \mathbf{y})} \quad (2.4)$$

где черта сверху обозначает усреднение по векторам \mathbf{x} и \mathbf{y} , которые были определены в 1.4. Далее для $w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, \mathbf{x})$ и $w(\mathbf{R}_s | \mathbf{s}, \mathbf{y})$ можно записать, что

$$w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, \mathbf{x}) = \prod_{l=1}^N w(\mathbf{r}_c^{(l)} | \mathbf{s}^{(l)}, x^{(l)}), \quad w(\mathbf{R}_s | \mathbf{s}, \mathbf{y}) = \prod_{l=1}^N w(\mathbf{r}_s^{(l)} | \mathbf{s}^{(l)}, y^{(l)}),$$

и

$$w(\mathbf{r}_c | \mathbf{s}, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^q \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_c - x\mathbf{s}\|^2}{2} \right), \quad w(\mathbf{r}_s | \mathbf{s}, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^q \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_s - y\mathbf{s}\|^2}{2} \right).$$

Значит

$$w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{qN} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{r}_c^{(l)} - x^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 \right),$$

$$w(\mathbf{R}_s | \mathbf{s}, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{qN} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{r}_s^{(l)} - y^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 \right).$$

Надо найти $\overline{w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, x)}$ и $\overline{w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, y)}$. Эти средние вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned}\overline{w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, x)} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{qN} \overline{\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{r}_c^{(l)} - x^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 \right)}, \\ \overline{w(\mathbf{R}_s | \mathbf{s}, y)} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{qN} \overline{\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{r}_s^{(l)} - y^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 \right)}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Начнем с $\overline{w(\mathbf{R}_c | \mathbf{s}, x)}$. В показателе экспоненты имеется выражение

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_c^{(l)} - x^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 &= \|\mathbf{r}_c^{(l)}\|^2 - 2(\mathbf{r}_c^{(l)}, x^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}) + \|x^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 = \|\mathbf{r}_c^{(l)}\|^2 - 2x^{(l)}(\mathbf{r}_c^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)}) + (x^{(l)})^2 \|\mathbf{s}^{(l)}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{r}_c^{(l)}\|^2 - 2x^{(l)}(\mathbf{r}_c^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)}) + (x^{(l)})^2 2\gamma,\end{aligned}$$

т.к. из (2.2) следует, что $\|\mathbf{s}^{(l)}\|^2 = 2\gamma$. Обозначим $\rho_c(\mathbf{s}^{(l)}) = (\mathbf{r}_c^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)})$. Тогда можно записать, что

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_c^{(l)} - x^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 &= \|\mathbf{r}_c^{(l)}\|^2 - 2x^{(l)} \rho_c(\mathbf{s}^{(l)}) + (x^{(l)})^2 2\gamma = \\ &= \|\mathbf{r}_c^{(l)}\|^2 + 2\gamma \left((x^{(l)})^2 - \frac{2x^{(l)} \rho_c(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} + \underbrace{\frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})^2}{4\gamma^2} - \frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})^2}{4\gamma^2}}_{=0} \right) = \\ &= \|\mathbf{r}_c^{(l)}\|^2 + 2\gamma \left(x^{(l)} - \frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} \right)^2 - \frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})^2}{2\gamma},\end{aligned}\quad (2.6)$$

Аналогично получаем, что

$$\|\mathbf{r}_s^{(l)} - y^{(l)} \mathbf{s}^{(l)}\|^2 = \|\mathbf{r}_s^{(l)}\|^2 + 2\gamma \left(y^{(l)} - \frac{\rho_s(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} \right)^2 - \frac{\rho_s(\mathbf{s}^{(l)})^2}{2\gamma}, \quad (2.7)$$

где $\rho_s(\mathbf{s}^{(l)}) = (\mathbf{r}_s^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)})$. Собирая вместе (2.4), (2.5), (2.6) и (2.7), и отбрасывая множители, не зависящие от \mathbf{s} , получаем, что

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}) &\sim \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left(2\gamma \left(x^{(l)} - \frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} \right)^2 - \frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})^2}{2\gamma} \right) \right) \times \\
&\quad \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left(2\gamma \left(y^{(l)} - \frac{\rho_s(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} \right)^2 - \frac{\rho_s(\mathbf{s}^{(l)})^2}{2\gamma} \right) \right) = \\
&\quad \exp \left(-\gamma \sum_{l=1}^N \left(2\gamma \left(x^{(l)} - \frac{\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} \right)^2 \right) \right) \exp \left(-\gamma \sum_{l=1}^N \left(2\gamma \left(y^{(l)} - \frac{\rho_s(\mathbf{s}^{(l)})}{2\gamma} \right)^2 \right) \right) \\
&\quad \exp \left(\frac{1}{4\gamma} \sum_{l=1}^N (\rho_c(\mathbf{s}^{(l)})^2 + \rho_s(\mathbf{s}^{(l)})^2) \right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Если обозначить

$$\mathbf{p}_c(\mathbf{s}) = (\rho_c(\mathbf{s}^{(1)}), \rho_c(\mathbf{s}^{(2)}), \dots, \rho_c(\mathbf{s}^{(N)})), \quad \mathbf{p}_s(\mathbf{s}) = (\rho_s(\mathbf{s}^{(1)}), \rho_s(\mathbf{s}^{(2)}), \dots, \rho_s(\mathbf{s}^{(N)})),$$

$$\mathbf{m}_c = \frac{1}{2\gamma} \mathbf{p}_c(\mathbf{s}), \quad \mathbf{m}_s = \frac{1}{2\gamma} \mathbf{p}_s(\mathbf{s}),$$

то выражение (2.8) можно записать как

$$w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}) \sim \exp(-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{m}_c\|^2) \exp(-\gamma \|\mathbf{y} - \mathbf{m}_s\|^2) \exp\left(\frac{\|\mathbf{p}_c(\mathbf{s})\|^2 + \|\mathbf{p}_s(\mathbf{s})\|^2}{4\gamma}\right). \tag{2.9}$$

Для вычисления средних $\overline{\exp(-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{m}_c\|^2)}$ и $\overline{\exp(-\gamma \|\mathbf{y} - \mathbf{m}_s\|^2)}$ потребуется следующая лемма. Доказательство леммы приведено в Приложении.

Лемма. Пусть \mathbf{z} – N -мерный гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием \mathbf{m} и корреляционной матрицей \mathbf{K} . Пусть α – постоянная, $\alpha < 1/(2K_{\min})$, где K_{\min} – наименьшее собственное значение матрицы \mathbf{K} .

Тогда

$$\overline{\exp(\alpha \|\mathbf{z}\|^2)} = \frac{\exp(\alpha \mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha \mathbf{K})^{-1} \mathbf{m}^T)}{\sqrt{\det(\mathbf{I} - 2\alpha \mathbf{K})}}, \tag{2.10}$$

где \mathbf{I} – единичная $N \times N$ матрица.

Применим утверждение леммы к вычислению средних в (2.9) со значениями $\alpha = -\gamma$, $\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_c = \mathbf{p}_c(\mathbf{s}^{(l)})/(2\gamma)$ для первого среднего и $\mathbf{m} = \mathbf{m}_s = \mathbf{p}_s(\mathbf{s}^{(l)})/(2\gamma)$ – второго. В итоге получим, что

$$\overline{\exp(-\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{m}_c)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_c)^T)} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T\right)$$

$$\overline{\exp(-\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{m}_s)(\mathbf{y} - \mathbf{m}_s)^T)} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T\right).$$

Подстановка этих выражений в формулу (2.9) дает

$$w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}) \sim \frac{\exp\left(-\frac{1}{4\gamma} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T\right) \exp\left(-\frac{1}{4\gamma} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T\right)}{\det(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})} \times \exp\left(\frac{\|\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s})\|^2 + \|\mathbf{\rho}_s(\mathbf{s})\|^2}{4\gamma}\right).$$

Если собрать показатели экспонент вместе, то получим выражение

$$\begin{aligned} & - \frac{\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T + \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T - \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T - \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})\mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T}{4\gamma} = \\ & = \frac{\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} - \mathbf{I} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T + \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T}{4\gamma} = \\ & = \frac{\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})2\gamma\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T + \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})2\gamma\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T}{4\gamma}, \end{aligned}$$

где в последнем переходе использовано тождество

$(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1} - \mathbf{I} = -2\gamma\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1}$. В итоге имеем, что

$$w(\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_s | \mathbf{s}) \sim \exp\left(\frac{\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})\mathbf{C}\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}^{(l)})^T + \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})\mathbf{C}\mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}^{(l)})^T}{4\gamma}\right),$$

где \mathbf{C} – квадратная матрица вида

$$\mathbf{C} = 2\gamma\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{\Lambda})^{-1}. \quad (2.11)$$

Решающее правило (2.3) может быть записано в эквивалентной форме

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} (\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s})\mathbf{C}\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s})^T + \mathbf{\rho}_s(\mathbf{s})\mathbf{C}\mathbf{\rho}_s(\mathbf{s})^T), \quad (2.12)$$

где \mathbf{I} – единичная $N \times N$ матрица, а векторы $\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s})$ и $\mathbf{\rho}_s(\mathbf{s})$ определяются как

$$\mathbf{\rho}_c(\mathbf{s}) = (\rho_c(\mathbf{s}^{(1)}), \rho_c(\mathbf{s}^{(2)}), \dots, \rho_c(\mathbf{s}^{(N)})),$$

$$\mathbf{\rho}_s(\mathbf{s}) = (\rho_s(\mathbf{s}^{(1)}), \rho_s(\mathbf{s}^{(2)}), \dots, \rho_s(\mathbf{s}^{(N)})),$$

и их компоненты вычисляются, как скалярные произведения q – мерных векторов вида $\rho_c(\mathbf{s}^{(l)}) = (\mathbf{r}_c^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)})$, $\rho_s(\mathbf{s}^{(l)}) = (\mathbf{r}_s^{(l)}, \mathbf{s}^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, N$.

Опишем, как будет пошагово вычисляться решающая функция. Решение принимается в соответствии с выражением (2.12), в котором требуется вычислять значения квадратичных форм $\rho_c(\mathbf{s})\mathbf{C}\rho_c(\mathbf{s})^T$ и $\rho_s(\mathbf{s})\mathbf{C}\rho_s(\mathbf{s})^T$.

Рассмотрим как это можно сделать, используя структуру матрицы \mathbf{C} , которая представлена на рисунках 2.3 и 2.4. По построению \mathbf{C} имеет следующую структуру: каждая строка состоит из одинаковых элементов, они симметричны относительно главной диагонали и по мере отдаления от нее, стремятся к нулю. Такой вид матрицы следует из (2.11) и корреляционной матрицы $\mathbf{\Lambda}$, определенной в разделе 1.4. Если в (2.11) $\gamma \gg 1$, то $\mathbf{C} \approx \mathbf{I}$.

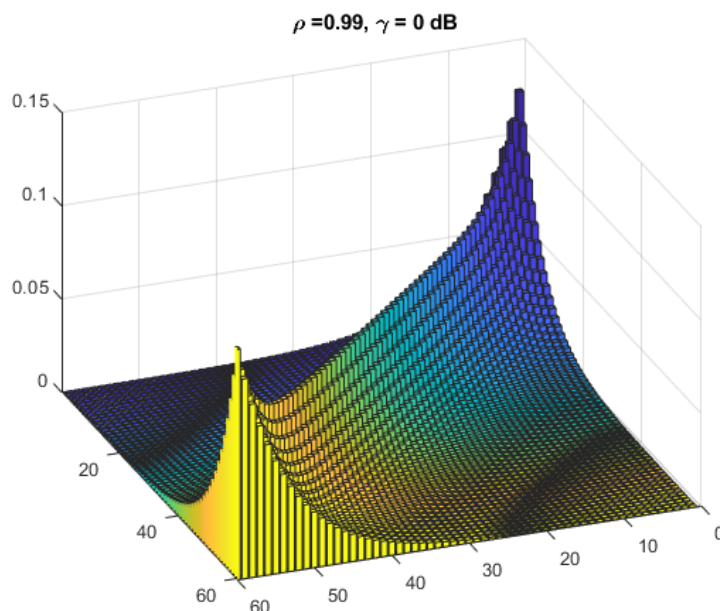


Рис. 2.3 – Структура матрицы \mathbf{C} при низком значении отношения сигнал/шум

С учетом этого для величин $\mathbf{p}_c(\mathbf{s})\mathbf{Cp}_c(\mathbf{s})^T$ и $\mathbf{p}_s(\mathbf{s})\mathbf{Cp}_s(\mathbf{s})^T$, используемых в решающем правиле (2.12), можно записать, что

$$\mathbf{p}_c(\mathbf{s})\mathbf{Cp}_c(\mathbf{s})^T = \sum_{\kappa} \left(c_0(\rho_c^{(k)})^2 + 2\rho_c^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} c_i \rho_c^{(k-i)} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{p}_s(\mathbf{s})\mathbf{Cp}_s(\mathbf{s})^T = \sum_{\kappa} \left(c_0(\rho_s^{(k)})^2 + 2\rho_s^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} c_i \rho_s^{(k-i)} \right), \quad (2.15)$$

где использованы обозначения $\rho_c^{(k)} = \rho_c(\mathbf{s}^{(k)}) = (\mathbf{r}_c^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})$ и $\rho_s^{(k)} = \rho_s(\mathbf{s}^{(k)}) = (\mathbf{r}_s^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})$.

Рассмотрим далее идею вычисления квадратичной формы (2.14). Очевидно, что значение квадратичной формы (2.15) будет вычисляться аналогично. Для иллюстрации принципа вычисления рассмотрим частный пример, в котором используется двоичный сверточный код со скоростью $R = 1/2$ и двоичная частотная модуляция. В этом случае кодер при поступлении очередного входного бита $b^{(l)}$ порождает два выходных бита $x^{(2l-1)}x^{(2l)}$, которые далее отображаются в величины $(\rho_c^{(2l-1)}, \rho_s^{(2l-1)}), (\rho_c^{(2l)}, \rho_s^{(2l)})$, то есть, имеется соответствие

$$\begin{aligned} b^{(1)} &\rightarrow x^{(1)}, x^{(2)} \rightarrow (\rho_c^{(1)}, \rho_s^{(1)}), (\rho_c^{(2)}, \rho_s^{(2)}) \\ b^{(2)} &\rightarrow x^{(3)}, x^{(4)} \rightarrow (\rho_c^{(3)}, \rho_s^{(3)}), (\rho_c^{(4)}, \rho_s^{(4)}) \\ &\dots \\ b^{(l)} &\rightarrow x^{(2l-1)}, x^{(2l)} \rightarrow (\rho_c^{(2l-1)}, \rho_s^{(2l-1)}), (\rho_c^{(2l)}, \rho_s^{(2l)}) \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность величин $\rho_c^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, используемых при декодировании

$$\dots \rho_c^{(k-6)} \rho_c^{(k-5)} \rho_c^{(k-4)} \rho_c^{(k-3)} \rho_c^{(k-2)} \rho_c^{(k-1)} \rho_c^{(k)} \rho_c^{(k+1)} \rho_c^{(k+2)} \rho_c^{(k+3)} \rho_c^{(k+4)} \dots$$

и установим соответствие между индексами битов на входе кодера $b^{(l)}$ и индексами величин на входе декодера $\rho_c^{(k)}$. Очевидно, что $l = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$. Тогда можно указать соответствие между последовательностью величин $\rho_c^{(k)}$ и последовательностью входных битов кодера, от которых зависят пары последовательных значений $\rho_c^{(k)}, \rho_c^{(k+1)}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rho_c^{(k-4)} \rho_c^{(k-3)} & \vdots & \rho_c^{(k-2)} \rho_c^{(k-1)} & \vdots & \rho_c^{(k)} \rho_c^{(k+1)} & \vdots & \rho_c^{(k+2)} \rho_c^{(k+3)} & \vdots & \rho_c^{(k+4)} \rho_c^{(k+5)} \\
x^{(k-4)} x^{(k-3)} & \vdots & x^{(k-2)} x^{(k-1)} & \vdots & x^{(k)} x^{(k+1)} & \vdots & x^{(k+2)} x^{(k+1)} & \vdots & x^{(k+4)} x^{(k+5)} \\
l = \lfloor (k-3)/2 \rfloor & \vdots & l = \lfloor (k-1)/2 \rfloor & \vdots & l = \lfloor (k+1)/2 \rfloor & \vdots & l = \lfloor (k+3)/2 \rfloor & \vdots & l = \lfloor (k+5)/2 \rfloor \\
b^{(l)} b^{(l-2)} \dots b^{(l-\nu)} & \vdots & b^{(l)} b^{(l-2)} \dots b^{(l-\nu)} & \vdots & b^{(l)} b^{(l-2)} \dots b^{(l-\nu)} & \vdots & b^{(l)} b^{(l-2)} \dots b^{(l-\nu)} & \vdots & b^{(l)} b^{(l-2)} \dots b^{(l-\nu)}
\end{array}$$

Например, для значения кодового ограничения $\nu = 2$ имеется следующее соответствие

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rho_c^{(3)} \rho_c^{(4)} & \vdots & \rho_c^{(5)} \rho_c^{(6)} & \vdots & \rho_c^{(7)} \rho_c^{(8)} & \vdots & \rho_c^{(9)} \rho_c^{(10)} & \vdots & \rho_c^{(11)} \rho_c^{(12)} \\
x^{(3)} x^{(4)} & \vdots & x^{(5)} x^{(6)} & \vdots & x^{(7)} x^{(8)} & \vdots & x^{(9)} x^{(10)} & \vdots & x^{(11)} x^{(12)} \\
b^{(2)} b^{(1)} b^{(0)} & \vdots & b^{(3)} b^{(2)} b^{(1)} & \vdots & b^{(4)} b^{(3)} b^{(2)} & \vdots & b^{(5)} b^{(4)} b^{(3)} & \vdots & b^{(6)} b^{(5)} b^{(4)}
\end{array} \quad (2.16)$$

Предположим для примера, что $L = 3$. Тогда, например, сумма седьмого и восьмого слагаемых в выражении (2.14) имеет вид

$$c_0(\rho_c^{(7)})^2 + 2\rho_c^{(7)}(c_1\rho_c^{(6)} + c_2\rho_c^{(5)}) + c_0(\rho_c^{(8)})^2 + 2\rho_c^{(8)}(c_1\rho_c^{(7)} + c_2\rho_c^{(6)}). \quad (2.17)$$

Из соотношения (2.16) следует, что выражение (2.17) вычисляется с использованием кодированных символов $x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(8)}$ и зависит от входных символов кодера $b^{(4)}, b^{(3)}, b^{(2)}, b^{(1)}$, определяющих переход $b^{(3)}b^{(2)}b^{(1)} \rightarrow b^{(4)}b^{(3)}b^{(2)}$. Отметим, что этот переход происходит не в диаграмме состояний кодера показанной на рисунке 2.5, а в другой диаграмме с большим числом состояний. Иллюстрация показана на рисунке 2.6.

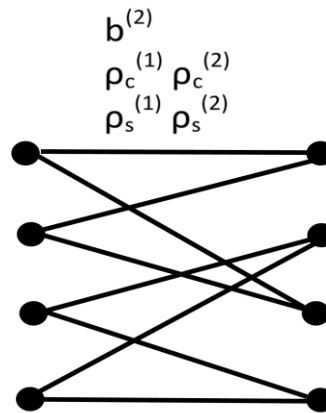


Рис. 2.5 – Исходная структура кодовой решетки

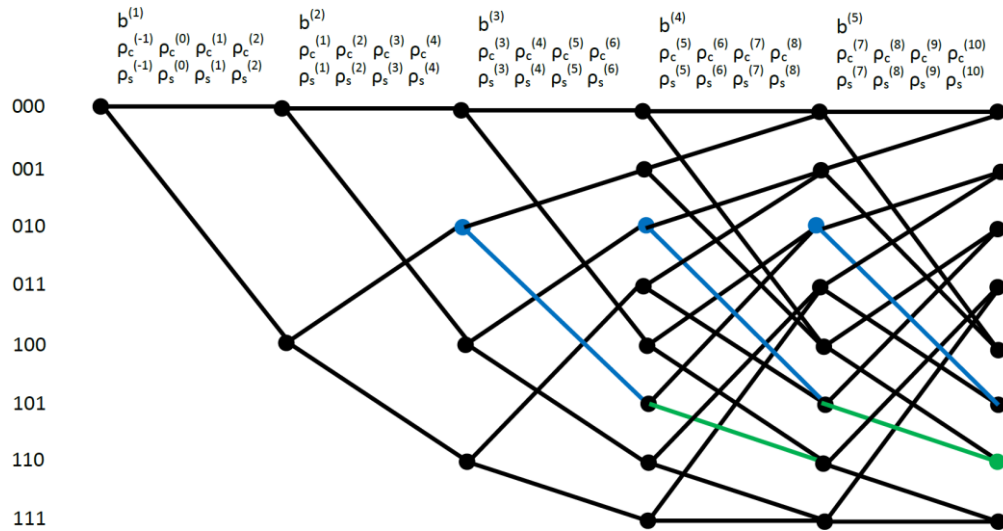


Рис. 2.6 – Измененная структура кодовой решетки

Над переходами в диаграмме, показанной на рисунке 2.6, указаны информационный бит $b^{(l)}$ и величины $(\rho_c^{(2l-3)}, \rho_c^{(2l-2)}), (\rho_c^{(2l-1)}, \rho_c^{(2l)})$ и $(\rho_s^{(2l-3)}, \rho_s^{(2l-2)}), (\rho_s^{(2l-1)}, \rho_s^{(2l)})$ используемые при подсчете метрики ребер для этого перехода. Любое ребро диаграммы, показанной на рисунке 2.6, взаимно-однозначно связано с переходом $b^{(l-1)}b^{(l-2)}b^{(l-3)} \rightarrow b^{(l)}b^{(l-1)}b^{(l-2)}$ и соответствует двум следующим переходам сверточного кодера: $b^{(l-2)}b^{(l-3)} \rightarrow b^{(l-1)}b^{(l-2)} \rightarrow b^{(l)}b^{(l-1)}$. При этом кодер вычисляет символы кодовой последовательности.

Для модификации структуры кодовой решетки, изменим сверточный кодер, изображенный на рисунке 2.7.

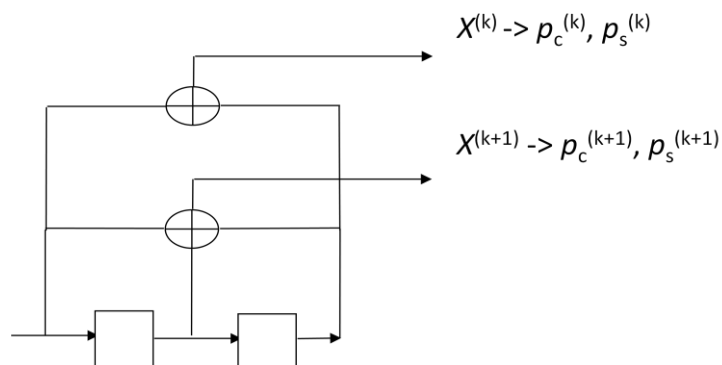


Рис. 2.7 – Исходный сверточный кодер

Выходами этого кодера, будут величины $x^{(k)}x^{(k+1)}$, которые далее отображаются в величины $(\rho_c^{(k)}, \rho_s^{(k+1)}), (\rho_c^{(k+1)}, \rho_s^{(k+2)})$. Как описывалось ранее, имеется зависимость, между этими величинами, и, используя эту информацию, можно модифицировать данный сверточный кодер, преобразовав его в псевдокодер, показанный на рисунке 2.8.

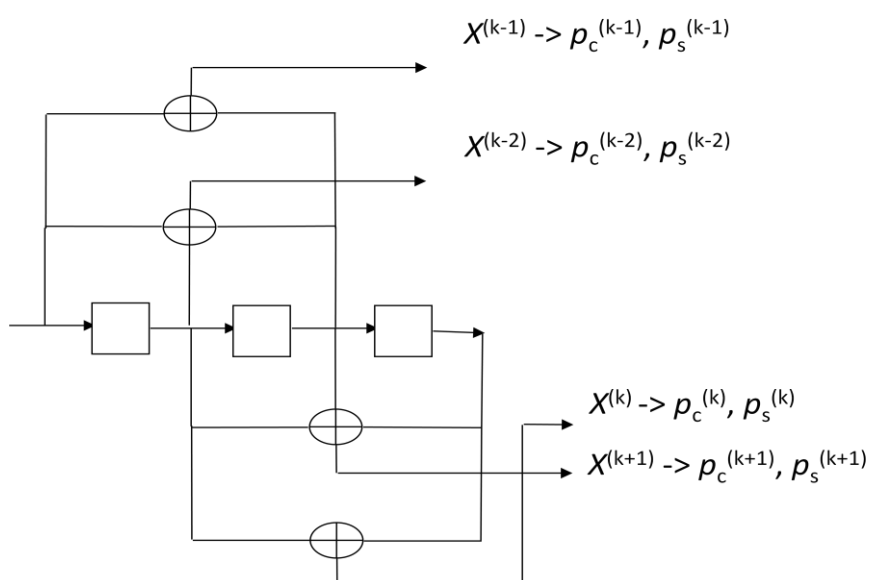


Рис. 2.8 – Модифицированный сверточный псевдокодер

Выходом этого псевдокодера будут величины $x^{(k)}x^{(k+1)}$, а также предыдущие значения $x^{(k-1)}x^{(k-2)}$. Тем самым на ребрах модифицированной кодовой решетки, будут находиться необходимые величины, для декодирования. Структура кодовой решетки, которую порождает псевдокодер, представлена на рисунке 2.6.

Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

3.1. Моделирование передачи данных в канале с зависимыми замираниями для жестких решений демодулятора

Проведено моделирование передачи данных с использованием сверточного кодирования по каналу с замираниями с использованием жестких решений демодулятора, в котором канал имеет память. Рассмотрен случай, когда связность марковской цепи равна 1, и кодер имеет параметры $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$. В результате моделирования был построен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум изображенный на рисунке 3.1.

На нем приведены результаты для случая, когда параметр $p = 0,9$ и $p = 0,99$. Также построена линия без кодирования. Для сравнения работы модифицированной схемы, построены линии для случая, когда канал память имеет, но декодируем, предполагая, что памяти в канале нет. Для этого метрику на ребре считаем с использованием безусловных вероятностей появления ошибочного символа.

По построенным зависимостям, можно сделать вывод о том, что производя декодирование с учетом памяти канала, можно получить выигрыш порядка 0.5 Дб. Так как поток ошибок зависимый, можно предположить, что с увеличением большего числа символов, можно увеличивать выигрыш от декодирования до тех пор, пока наша марковская модель не приблизится к истинному распределению потока ошибок.

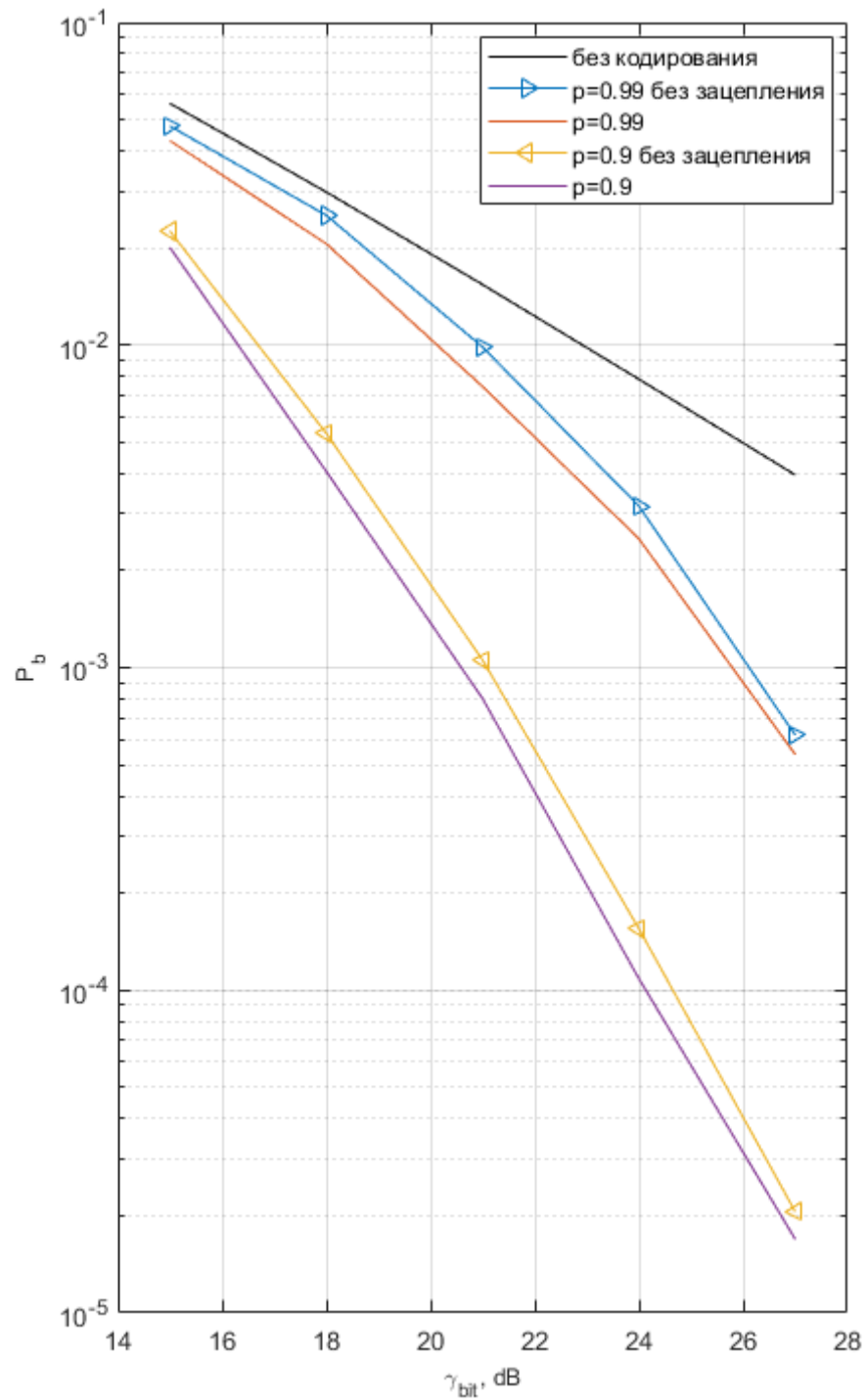


Рис. 3.1 – График зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$ и связностью марковской цепи $K=1$ для жестких решений демодулятора

3.2. Моделирование передачи данных в канале с зависимыми замираниями для мягких решений демодулятора для различных значений параметра L

Проведено моделирование передачи данных с использованием сверточного кодирования по каналу с замираниями с использованием мягких решений демодулятора, в котором канал имеет память. Рассмотрен случай, когда параметр L матрицы C принимает значения 1, 3, 5 и ρ равным 0.995, для кодера имеющего параметры $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7, 5)$. В результате моделирования был построен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум изображенный на рисунке 3.2.

По полученным зависимостям можно сделать вывод о том, что использование памяти канала при декодировании позволяет снизить значение вероятности ошибки на бит при меньших значениях отношения сигнал/шум.

При $L = 1$, алгоритм декодирования не учитывает память канала, а при $L = 3, 5$ учитывает. При заданном значении параметра ρ , увеличение используемой памяти, то есть, увеличение параметра L не дало результатов. Это может быть вызвано тем, что значения главной диагонали матрицы C , удаленные дальше, чем на 3 элемента, имеют слишком маленький вес, который не будет оказывать влияния, при декодировании.

Исходя из структуры матрицы C , можно увидеть, что при увеличении значения отношения сигнал/шум, матрица стремится к единичной. На графике это также можно проследить, где при увеличении значения отношения сигнал/шум, линии сводятся в одну. Это можно объяснить тем, что при высоком значении отношения сигнал/шум, элементы матрицы C , стоящие не на главной диагонали, будут иметь слишком маленькие значения, которые никак не будут оказывать влияния, на процесс декодирования.

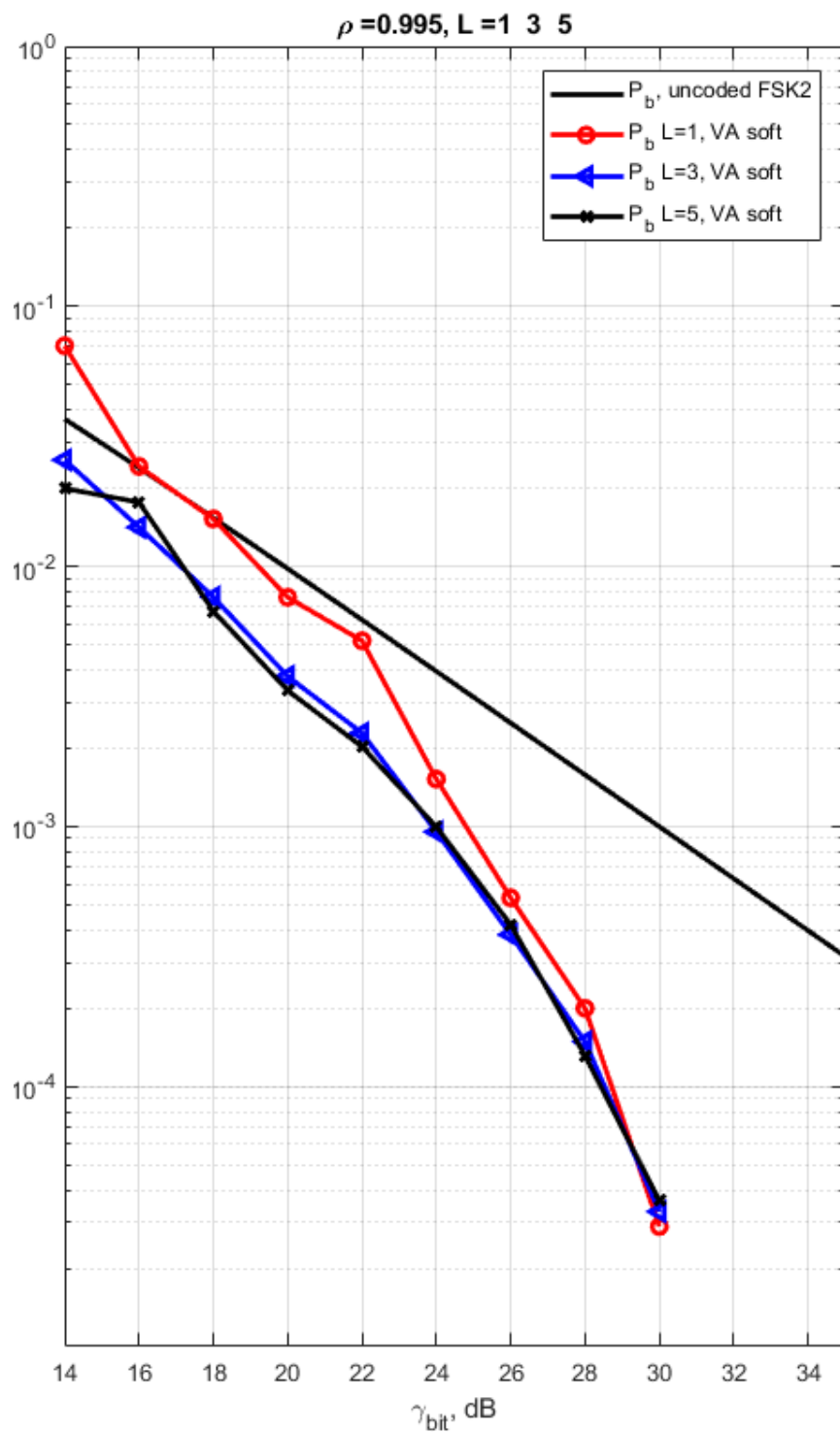


Рис. 3.2 – График зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$ и параметром L матрицы \mathbf{C} равным 1, 3, 5 для мягких решений демодулятора

3.3. Моделирование передачи данных в канале с зависимыми замираниями для мягких решений демодулятора для различных значений параметра ν

Проведено моделирование передачи данных с использованием сверточного кодирования по каналу с замираниями с использованием мягких решений демодулятора, в котором канал имеет память. Рассмотрен случай, когда параметр L матрицы C принимает значения 3 и ρ равным 0.95, для различных значений кодового ограничения кодера $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ [3]. В результате моделирования был построен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум изображенный на рисунке 3.3.

По полученным зависимостям можно сделать вывод о том, что увеличение параметра ν , при заданном значении ρ и L , дает улучшение в отношении вероятности ошибки на бит, но при этом сильно возрастает сложность системы, так как увеличивается число состояний в кодовой решетке.

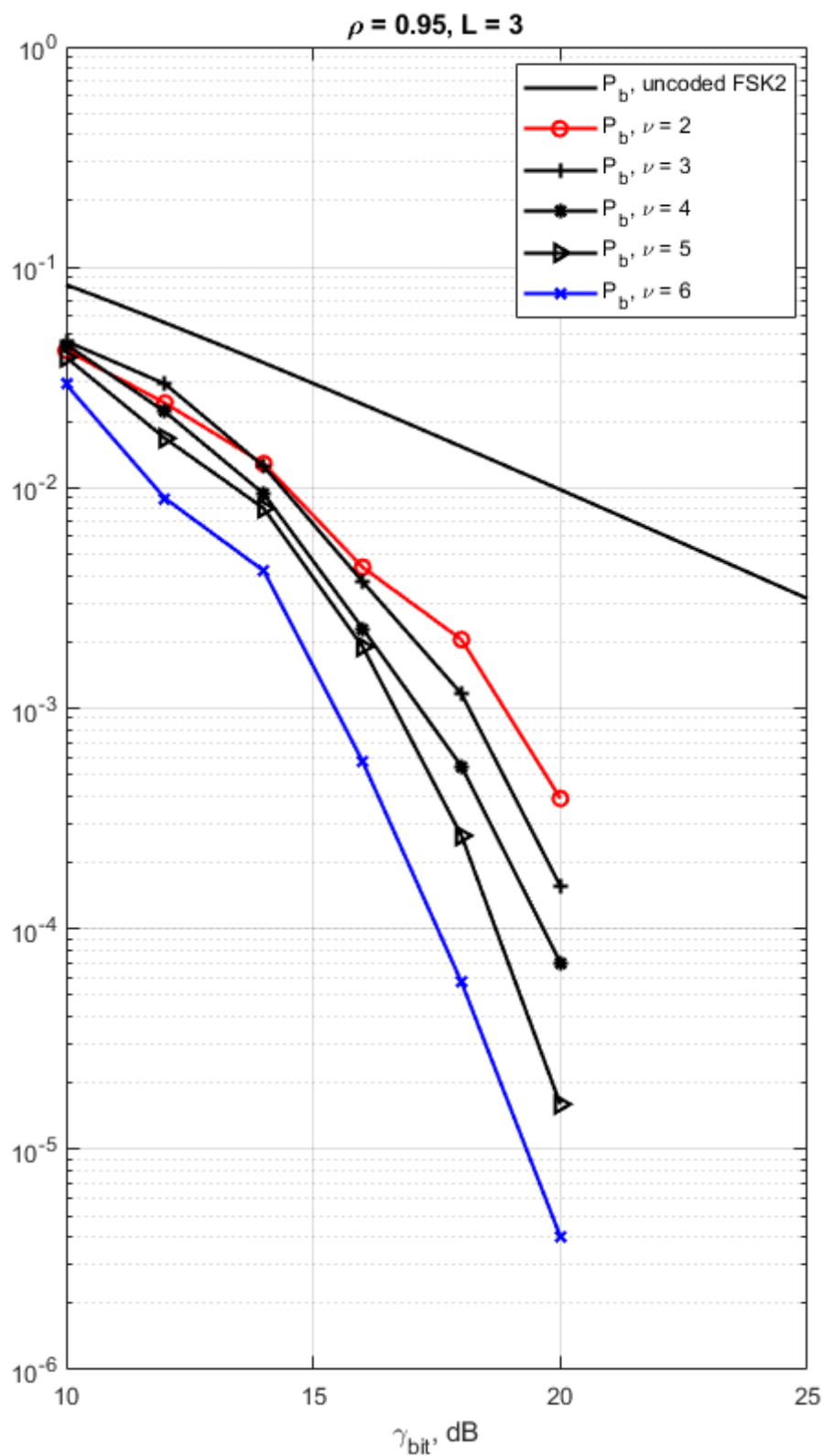


Рис. 3.3 – График зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ и параметром L матрицы S равным 3 для мягких решений демодулятора

3.4. Результаты моделирования передачи данных в канале с зависимыми замираниями для жестких и мягких решений демодулятора

Так как исследование проводилось для канала с памятью и были рассмотрены варианты жесткого и мягкого выхода демодулятора для сверточного кодирования, можно изобразить на графике полученные результаты обоих случаев. На рисунке 3.4 изображен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для сверточного кодера с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$ для жесткого и мягкого выхода демодулятора.

По построенным зависимостям можно сделать вывод о том, что использование мягкого выхода демодулятора, когда на вход декодера Витерби поступают непрерывные величины, дает сильный энергетический выигрыш, по сравнению с жестким выходом демодулятора. Такую разницу можно объяснить тем, что при квантовании на 2 уровня, когда на выходе демодулятора 0 и 1, теряется значительная часть информации, которую можно использовать при декодировании.

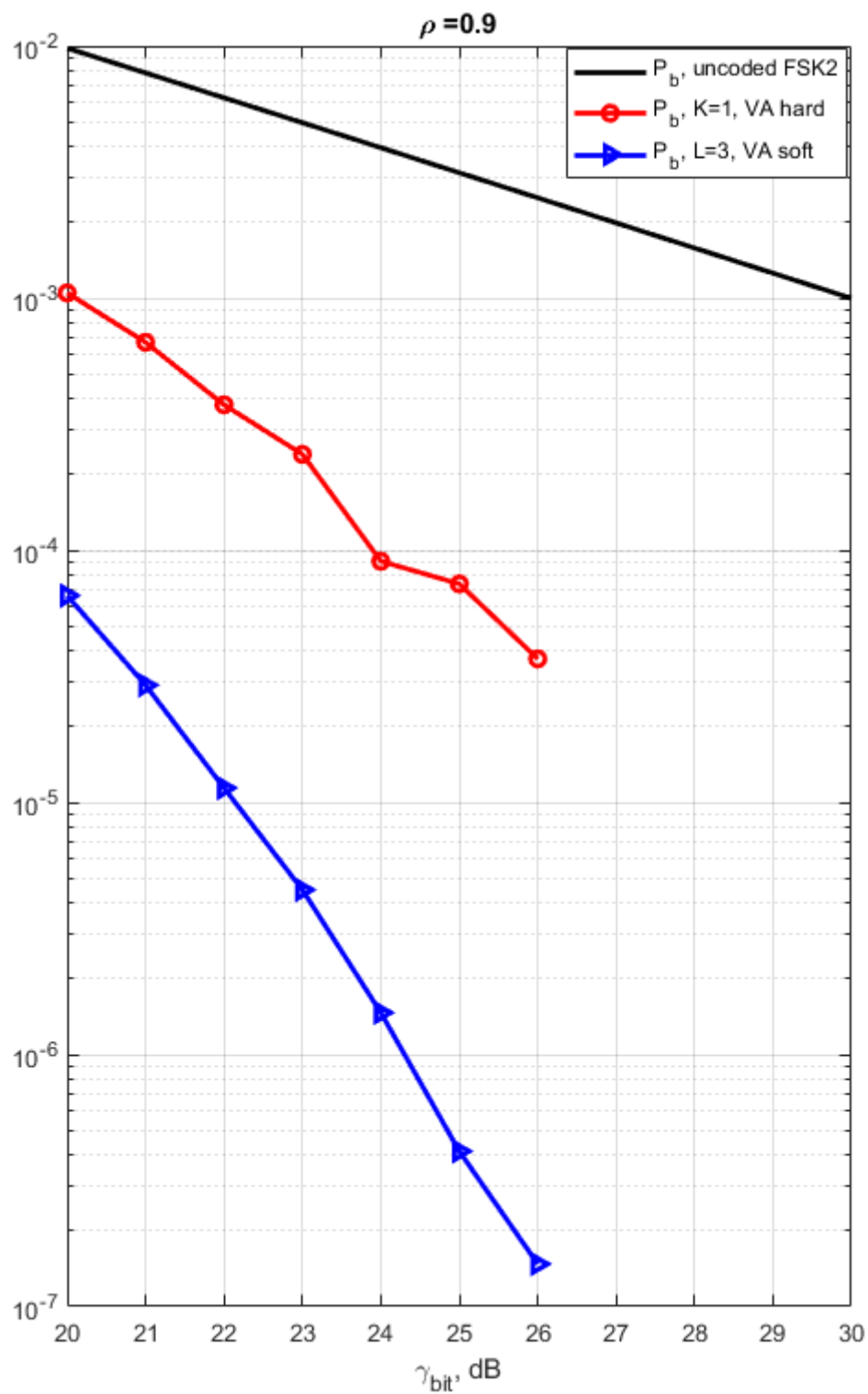


Рис. 3.4 – График зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$ для мягких и жестких решений демодулятора

Заключение

В результате проделанной работы было сделано следующее:

1. Описана модель канала с зависимыми замираниями;
2. Разработана модификация алгоритма декодирования сверточных кодов в канале с зависимыми замираниями для случая, когда демодулятор принимает жесткие решения;
3. Разработана модификация алгоритма декодирования сверточных кодов в канале с зависимыми замираниями для случая, когда демодулятор принимает мягкие решения;
4. Реализована программа моделирующая процесс передачи данных с использованием сверточного кодирования в канале с зависимыми замираниями;
5. Произведено моделирование алгоритма декодирования сверточных кодов в канале с зависимыми замираниями для случая, когда демодулятор принимает жесткие решения;
6. Произведено моделирование алгоритма декодирования сверточных кодов в канале с зависимыми замираниями для случая, когда демодулятор принимает мягкие решения;
7. Найдена величина связности марковского приближения для аппроксимации распределения вектора ошибок в нашей системе;
8. Построен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с зависимыми замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$ для жестких решений демодулятора и связностью марковской цепи $K=1$;
9. Построен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с зависимыми замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, g = (7,5)$ для мягких решений демодулятора и параметром L матрицы C равным 1, 3, 5 и $\rho = 0.995$;

10. Построен график зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для канала с зависимыми замираниями с использованием сверточного кодирования для мягких решений демодулятора, когда параметр L матрицы \mathbf{C} равен 3, $\rho=0.95$ при значениях кодового ограничения $v = 2, 3, 4, 5, 6$;
11. Построен график зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум для канала с зависимыми замираниями с использованием сверточного кодирования с параметрами $R = 1/2, v = 2, n = 2, k = 1, \mathbf{g} = (7, 5)$ для жестких и мягких решений демодулятора.

Библиографический список

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. / Б. Скляр. М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. 29-83 с.
2. Витерби А. Д. Принципы цифровой связи и кодирования. / А. Д. Витерби, Дж. К. Омура, пер. с англ. К. Ш. Зигангирова. М.: Радио и связь, 1982. 227 с.
3. Кларк Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. / Дж. Кларк, Дж. Кейн, пер. с англ. С. И. Гельфенда. М.: Радио и связь, 1987. 372 с.
4. Банкет В. Л. Цифровые методы в спутниковой связи. / В. Л Банкет, В. М Дорофеев. М.: Радио и связь, 1988. 126 с.
5. Громаков Ю. А. Стандарты и системы подвижной радиосвязи / Ю. А. Громаков. М.: Эко-Трендз, 1998. 120 с.
6. Viterbi, A. J. Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm / A. J. Viterbi. IEEE Trans. Inform. Theor. 1967. 260-269 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы.

$$\overline{\exp(\alpha\|\mathbf{z}\|^2)} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\alpha\|\mathbf{z}\|^2) \nu(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\alpha\mathbf{z}\mathbf{z}^T) \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{K}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{m})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m})^T\right) d\mathbf{z}. \quad (1)$$

Показатель экспоненты равен

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{m})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m})^T + \alpha\mathbf{z}\mathbf{z}^T &= -\frac{1}{2}(\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T + \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T) + \alpha\mathbf{z}\mathbf{z}^T = \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T + \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T - 2\alpha\mathbf{z}\mathbf{z}^T) = \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{z}(\underbrace{\mathbf{K}^{-1} - 2\alpha\mathbf{I}}_{=\mathbf{A}})\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T + \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T) = \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{z}\mathbf{A}\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T + \underbrace{x - x}_{=0} + \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T). \end{aligned} \quad (2)$$

Дополним выражение (2) до полного квадрата, для этого представим часть выражения в виде

$$\mathbf{z}\mathbf{A}\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T + x = (\mathbf{z} - \mathbf{m}\mathbf{B})\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{m}\mathbf{B})^T \quad (3)$$

и найдем значения \mathbf{B} и x . Раскроем правую часть выражения (ссылка)

$$\mathbf{z}\mathbf{A}\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T + x = \mathbf{z}\mathbf{A}\mathbf{z}^T - 2\mathbf{z}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{m}^T + \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{m}^T.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{K}^{-1}$, и $x = \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{m}^T$. Следовательно,

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}^{-1} - 2\alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}(\mathbf{K}^{-1} - 2\alpha\mathbf{I}))^{-1} = (\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1},$$

и в силу симметрии правой части этого равенства получаем, что

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}. \quad (4)$$

Теперь получим значение x

$$\begin{aligned} x = \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{m}^T &= \mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{K}^{-1} - 2\alpha\mathbf{I})(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})\mathbf{m}^T = \\ &= \mathbf{m}(\underbrace{(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})}_{=\mathbf{I}})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})\mathbf{m}^T = \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})\mathbf{m}^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда показатель экспоненты под интегралом в (1) с учетом (3), (4) (5) равен

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}((\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)^T - \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T - \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}^T) = \\ -\frac{1}{2}((\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)^T - \mathbf{m}\mathbf{K}^{-1}((\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{m}^T), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}\mathbf{B} = \mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}$. Рассмотрим выражение $(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1} - \mathbf{I}$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1} - \mathbf{I} &= \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (2\alpha\mathbf{K})^l}_{=(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}} - \mathbf{I} = \sum_{l=1}^{\infty} (2\alpha\mathbf{K})^l = 2\alpha\mathbf{K} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2\alpha\mathbf{K})^{l-1} \right) = \\
&= 2\alpha\mathbf{K} \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (2\alpha\mathbf{K})^l}_{=(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}} = 2\alpha\mathbf{K}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из этого следует, что $\mathbf{K}^{-1}((\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1} - \mathbf{I}) = 2\alpha(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})$. Следовательно, выражение (6) принимает вид

$$-\frac{1}{2}((\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)^T - 2\alpha\mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T),$$

и, значит

$$\begin{aligned}
\overline{\exp(\alpha\|\mathbf{z}\|^2)} &= \frac{\exp(\alpha\mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T)}{\sqrt{\det \mathbf{K}}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)^T\right) d\mathbf{z}}_{=\sqrt{\det \mathbf{A}^{-1}}} = \\
&= \frac{\exp(\alpha\mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T)}{\sqrt{\det \mathbf{K}}} \sqrt{\det \mathbf{A}^{-1}} = \frac{\exp(\alpha\mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T)}{\sqrt{\det \mathbf{K} \det \mathbf{A}}} = \frac{\exp(\alpha\mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T)}{\sqrt{\det \mathbf{KA}}}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{KA} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{-1} - 2\alpha\mathbf{I}) = \mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K}$, то окончательно получаем, что

$$\overline{\exp(\alpha\|\mathbf{z}\|^2)} = \frac{\exp(\alpha\mathbf{m}(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})^{-1}\mathbf{m}^T)}{\sqrt{\det(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{K})}}. \quad \square$$