МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Виртуальная лабораторная работа по теме «Сфера Пуанкаре».

Санкт-Петербург

2018

Теоретические сведения

Главным действующим лицом квантовых вычислений является квантовый бит – ***кубит.***

Кубит это любая квантовая система, которая может находиться в двух состояниях.Понятие состояние в квантовой физике – очень емкое и всякий раз требует конкретизации для его корректного определения. Например, кубитом можно назвать электрон, если мы описываем его состояние с позиции его собственного момента количества движения – спина. Как известно, спин электрона (как и ряда других частиц Ферми например протонов и нейтронов, ряда атомов и пр.) и любая его проекция на некоторое направление в пространстве могут быть точно измерены и окажутся равными $s \cdot \hbar,$ где $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ $Дж/c$ - постоянная Планка, s=+1/2,-1/2 - спиновое квантовое число (и в этом смысле об электроне говорят как о частице со спином ½).В дальнейшем изложении для обозначения ψ -волновой функции квантовой частицы будем пользоваться символикой Дирака: волновой функции ψ соответствует вектор состояния $|\psi\rangle$ в конечномерном векторном пространстве - гильбертовом пространстве. Обозначим состояние электрона со спиномs= ½. символом $|0\rangle$, а состояние с s= -1/2 символом $|1\rangle$. Будем рассматривать эти состояния, как векторы в 2-х мерном Гильбертовом пространствеH2. Запишем первое из них - $|0\rangle$ в виде вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а второе - $|1\rangle$ в виде вектора. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Нетрудно видеть, что при такой форме записи эти векторы удовлетворяют условию ортогональности: $\langle 0|1\rangle = 0.$ Общее спиновое состояние электрона, вследствие принципа суперпозиции, должно описываться выражением (вектором состояния):

$$|\psi_S\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle . \qquad (1\text{-}1)$$

что эквивалентно выражению:

$$|\psi_S\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \qquad (1\text{-}2)$$

В рассматриваем примере с электроном коэффициенты α, β подчиняются условию нормировки :

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1 \quad (1\text{-}3)$$

Геометрически это означает, что спиновое состояние электрона описывается единичным вектором в двумерном гильбертовом пространстве.

Введенные нами векторы состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ имеют смысл базисных векторов и в литературе, посвященной квантовым вычислениям, носят название –вычислительного базиса.

Коэффициенты α, β в разложении (1-1) носят название амплитуд вероятности. Указанные амплитуды – комплексные числа, а это значит, что они могут быть записаны в виде произведения модуля на фазовый множитель. Например

$$\alpha = e^{i\theta}|\alpha|$$

где θ-фаза, а множитель $e^{i\theta}$ - носит название фазового множителя.

Важно отметить, что выражение (1-1) описывает когерентную суперпозицию, а не некогерентную смесь состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$.Аналогом этих состояний в классической физике являются состояния поляризации световых пучков состоящих из поляризованных и неполяризованных электромагнитных волн соответственно.

Суперпозиционные состояния, описываемые (1-1) в квантовой физике называют чистыми состояниями (при этом максимальное число членов суперпозиции равняется размерности рассматриваемого гильбертова пространства).

Различие между чистыми и смешанными состояниями заключается в том, что в первом случае- чистых состояний всегда может быть найден базис, в котором состояние кубита строго определено, в то время, как для некогерентной смеси – т.е. смешанных состояний, такого базиса нет и она в любом базисе остается смесью. Сказанное справедливо не только для частиц со спином, но и для любой квантовой системы.

Так, например, в случае состояния:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

можно найти другой, нежели $\left(|0\rangle, |1\rangle\right)$ базис, в котором состояние кубита будет строго определенным. Для этого, достаточно исходный базис $\left(|0\rangle|1\rangle\right)$ повернуть на 450. О том, как это делается см. ниже. Сказанное означает, что в рассмотренном примере мы имеем дело с когерентной суперпозицией состояний, а не их статистической смесью.

Другой пример кубита – это фотон, который может быть приготовлен в двух ортогональных состояниях поляризации.

Еще один пример – это так называемый двухуровневый атом, т.е. атом, энергия которого в данных экспериментальных обстоятельствах может принимать лишь два значения.

Или более экзотический пример: любая квантовая частица которая в данный момент времени может находиться (состояние $|0\rangle$) или не находиться (состояние $|1\rangle$ в данной точке пространства. Примеров такого рода – великое множество. Нетрудно видеть, что различие кубитов определяется тем, какие физические степени свободы мы выделяем в данном объекте для характеристики его состояния.

Отметим теперь важное математическое свойство кубитов, как векторов состояния: состояние, описываемое вектором $e^{i\theta}|\psi\rangle$ эквивалентно состоянию, описываемому вектором $|\psi\rangle$, причем $e^{i\theta}$ может быть выражено любым комплексным число с нормой 1.

Но состояние, описываемое вектором $|0\rangle+|1\rangle$, отличается от состояния $e^{i\theta}|0\rangle+|1\rangle$. Это означает, что относительная фаза состояний, входящих в суперпозицию важна и имеет большой физический смысл.

С учетом сказанного выше, состояние кубита может быть записано в следующем виде:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \qquad (1\text{-}4)$$

Нетрудно убедиться, что эта запись не противоречит условию нормировки (1-3) и позволяет, что весьма важно, дать геометрическую интерпретацию кубита.

Состояние квантового бита с учетом выражения (1-4) можно представить в виде точки на поверхности сферы Пуанкаре (по имени знаменитого исследователя середины 20 века, Феликса Пуанкаре, внесшего большой вклад в развитие физики твердого тела). Сфера Пуанкаре имеет радиус равный единице, что соответствует требованию, накладываемому на векторы состояния условием нормировки. Положение точки на сфере задается двумя углами $\theta,\varphi.$ Указанные углы связаны с координатами точки x,y и z:

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\ y=\sin\theta\sin\varphi,\ z=\cos\theta\,. \qquad (1\text{-}5)$$

Из (1-4) можно увидеть, что вектор состояния $|0\rangle$ изображается точкой, лежащей на верхнем полюсе сферы Пуанкаре , а вектор $|1\rangle$ - точкой на нижнем полюсе.

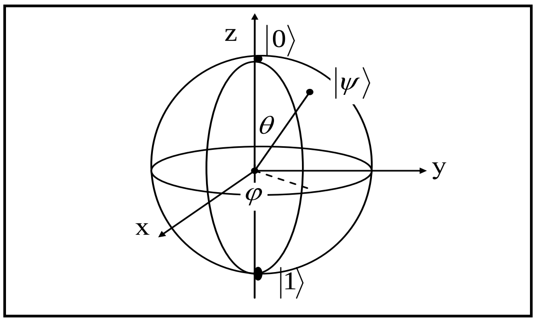


Рис 1. Сфера Пуанкаре. Состоянию $|\psi\rangle$ кубита, представленному вектором на сфере, соответствует точка с координатами θ, φ .

Для произвольного состояния $|\psi\rangle$ из формул: 1-4 и 1-5 в результате элементарных преобразований получаем:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1+z}{2}}|0\rangle + \frac{x+iy}{\sqrt{2(1+z)}}|1\rangle, \text{ причем } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{(1-5a)}$$

Динамика кубита

Кубит представляет собой физическую систему, которая в общем случае изменяется со временем. Одним из постулатов квантовой механики является постулат об эволюции квантовой системы, который утверждает, что за время t эволюция кубита, взаимодействие которого описывается гамильтонианом H, осуществляется унитарным оператором:

$$U = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) \qquad \text{(1-7)}$$

И тогда, эволюция кубита из начального состояния $|\psi_1\rangle$ в конечное состояние $|\psi_2\rangle$, описывается выражением:

$$|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle \qquad \text{(1-8)}$$

Что касается важных свойств унитарного оператора U, то этот оператор:

а) линеен и

б) он сохраняет норму (длину) векторов состояния.(см. часть 1 , гл.2)

В качестве примера унитарного оператора (глава 3) приведем квантовый логический элемент NOT (отрицание). Этому элементу соответствует унитарный оператор, который может быть представлен в виде матрицы 2x2. Как известно, линейный оператор определяется его действием на векторы базиса. В рассматриваемом примере он переводит $|0\rangle$ в $|1\rangle$ и обратно. Поскольку это линейный оператор, то он будет переводить линейную комбинацию входных данных в соответствующую линейную комбинацию выходных:

$$\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \mapsto \alpha_0|1\rangle + \alpha_1|0\rangle$$

Поскольку базисные векторы могут быть представлены матрицей-столбцом, то в матричном виде последняя формула может быть переписана в виде:

$$\alpha_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \alpha_0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

а это значит, что элемент NOT действует на базисные векторы следующим образом:

$$NOT:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Отсюда можно увидеть , что матрица элемента NOT имеет(в вычислительном базисе) следующий вид:

$$NOT \equiv \begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}. \qquad (1\text{-}9)$$

Убедимся в «правильности» действия NOT на состояние кубита $|0\rangle$:

$$NOT * |0\rangle \equiv \begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Другой вариант представления оператора NOT- в операторном представлении,с использованием Дираковских обозначений. :

$$NOT=|0><1|+|1><0| \qquad (1\text{-}10)$$

Элемент NOT является одним из четырех элементов Паули, играющих важную роль в квантовых вычислениях..

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}; \quad NOT \equiv \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix};\\
&\sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y \equiv \begin{pmatrix}0-i\\i \quad 0\end{pmatrix}; \quad \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z \equiv \begin{pmatrix}1 \quad 0\\0-1\end{pmatrix}.
\end{aligned} \qquad (1\text{-}10)$$

Это связано с тем, что любой однокубитовый унитарный оператор может быть выражен в виде линейной комбинации элементов Паули.

Рассмотрим действие элемента Паули Z на состояния вычислительного базиса:

$$Z|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; Z|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Т.е. он не меняет кубит $|0\rangle$ и меняет знак у $|1\rangle$, переводя его в $-|1\rangle$. Для произвольного кубита действиеZ состоит в зеркальном отражении вектора Пуанкаре от плоскости xoy. В операторном представлении действие Z описывается выражением: $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

Рассмотрим элемент Паули Y:его действие на состояния вычислительного базиса , приводит к следующим результатам:

$$|0\rangle \to i \cdot |1\rangle, \; |1\rangle \to -i \cdot |0\rangle$$

Отсюда , Y действует на произвольный кубит $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ по правилу:

$$.\, Y|\phi\rangle = -i \cdot \beta \cdot |0\rangle + i\alpha|1\rangle.$$

В Дираковских обозначениях действие Y описывается выражением:

$$Y = |1\rangle\langle 0| - i \cdot |0\rangle\langle 1|$$

Наряду с рассмотренными элементами Паули важную роль в квантовых вычислениях играют три других квантовых элемента: оператор Адамара – «H»,оператор сдвига фазы –«S» и элемент $\pi/8$ - «T»:

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\pi/4\right) \end{bmatrix}.$$

Из рассмотренных выше операторов можно «сконструировать» более сложные унитарные операторы, так называемые операторы поворота. С их помощью можно реализовать (теоретически) повороты вектора Пуанкаре вокруг x,y и z осей сферы Пуанкаре. Они представляют собой степени операторов Паули и в вычислительном базисе имеют следующий вид :

$$R_x(\theta) \equiv \exp\left(-i\theta X \big/ 2\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} I\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2} X\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix},$$

(2-1)

$$R_Y(\theta) \equiv \exp\left(-i\theta Y \big/ 2\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} I\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2} Y\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix},$$

$$R_Z(\theta) \equiv \exp\left(-i\theta Z \big/ 2\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} I\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2} Z\right) = \begin{bmatrix} \exp\left(-i\theta \big/ 2\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\theta \big/ 2\right) \end{bmatrix},$$

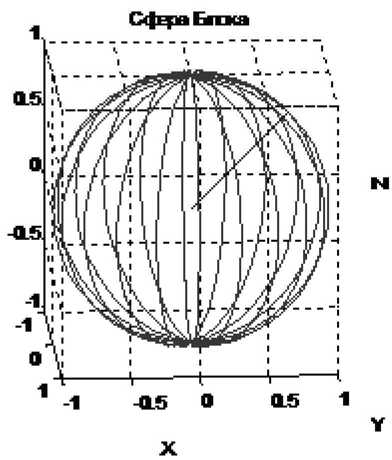
В заключение отметим, что представление с помощью сферы Пуанкаре удобно ввиду его наглядности.

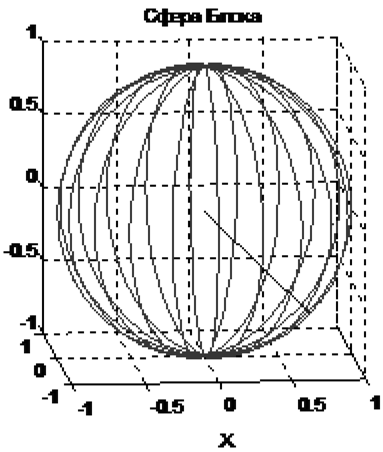
Лабораторная работа №1: Элементарные квантовые логические элементы

Цель работы: Изучение основных однокубитовых квантовых логических элементов.
***Объект исследования*:** Виртуальная лабораторная работа.
Задачи, решаемые в работе:
1. Изучение работы квантовых логических элементов *X,Y, Z* , *H* и *I*.
2. Прогнозирование результатов виртуального эксперимента и сравнение результатов теоретических и экспериментальных расчетов.

Описание работы.. Работа состоит из двух частей. В первой части с клавиатуры приготавливается кубит, т.е. задаются углы, характеризующие его положение на сфере Пуанкаре и строится соответствующая картинка. Во второй части предлагается подействовать на кубит одним из рассмотренных выше однокубитовых операторов; получившийся кубит изображается на сфере Пуанкаре. Задача состоит в том чтобы рассчитать координаты : сферические . декартовы и амплитуды полученного кубита и сравнить с результатом компьютерного эксперимента.

Описание работы.. Работа состоит из двух частей. В первой части с клавиатуры приготавливается кубит $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, Параметры кубита – его положение на сфере Пуанкаре, задаются через углы θ и φ сферической системы координат. Программа вычисляет соответствующие декартовы координаты, а также амплитуды α *и* β . Затем строится изображение сферы Пуанкаре с вектором Пуанкаре ***r*** и предлагается подействовать на кубит одним из операторов Паули. В результате действия оператора получается новый кубит и строится его изображение на сфере Пуанкаре. Предлагается связать полученный машинный результат с аналитическим прогнозом.





На рис.2 приведен результат для следующей ситуации. Приготовлен кубит – на рис. – слева . Вводились параметры θ = pi/4 рад. и φ= 0. Подсчитаны декартовы координаты x=0.7071 ,y=0 ,z=0.7071. Амплитуды α и β кубита: $|\psi>$ равняются: α =0.9239 и β=0.3827. Вектор-столбец приготовленного кубита имеет вид $|\psi_{in}\rangle = \begin{pmatrix} 0.9239 \\ 0.3827 \end{pmatrix}$

Справа – результат действия на кубит оператора Паули X (отрицание NOT) . В матричном представлении оператор X имеет вид (в вычислительном базисе): $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.Полученный кубит –на рис. справа. имеет следующие характеристики: θ_{out} =2.3562 рад. Фаза $\varphi_{out} = 0$. Координаты вектора Пуанкаре x= 0.7071, y=0.7071 и z=0. $|\psi_{out}\rangle = \begin{pmatrix} 0.3827 \\ 0.9239 \end{pmatrix}$ т.е. $|\psi>_{out}$ =0.3827|0>+0.9239|1>.

Виртуальная лаборатория

Виртуальная лабораторная по теме сфера Пуанкаре представлена на рисунке 3.

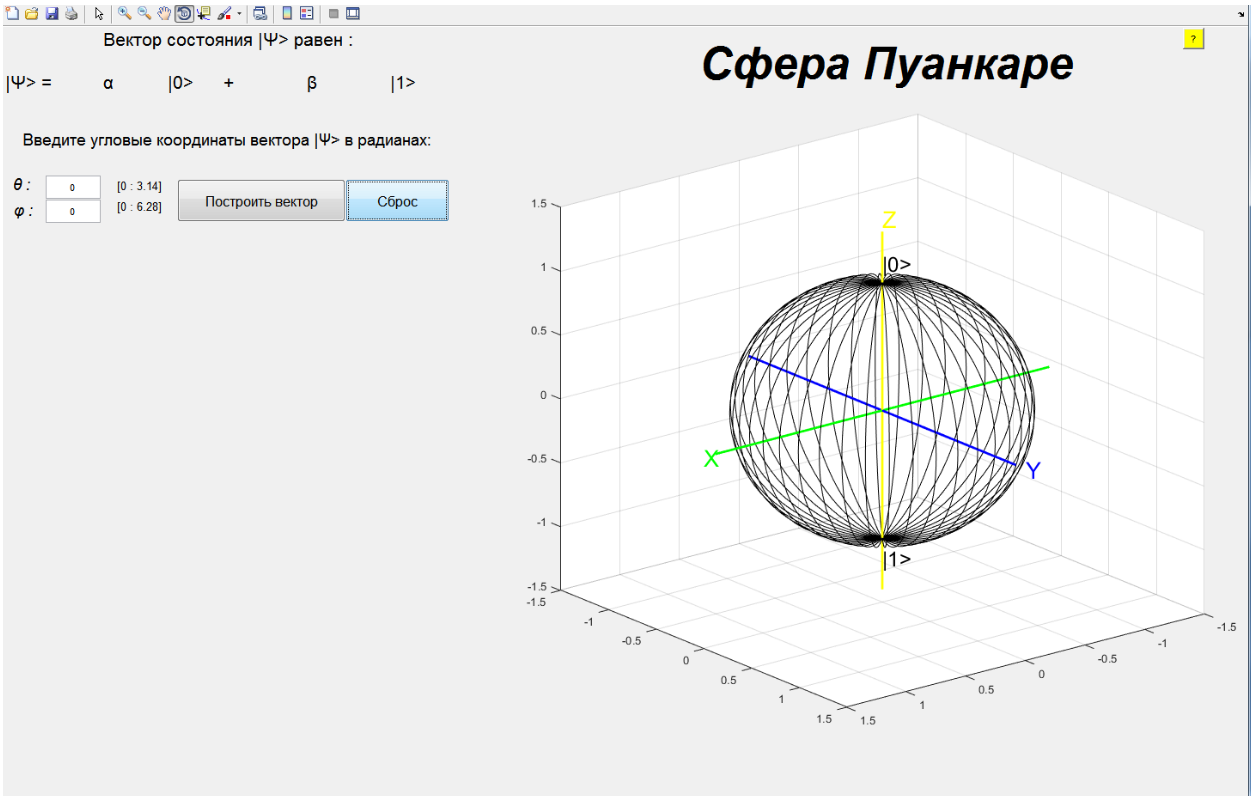


Рис 3 - Интерфейс виртуальной лабораторной работы

Для начала выполнения работы необходимо ввести координаты углов θ и φ вектора |ψ> и нажать построить вектор. Результат после нажатия кнопки представлен на рисунке 4.

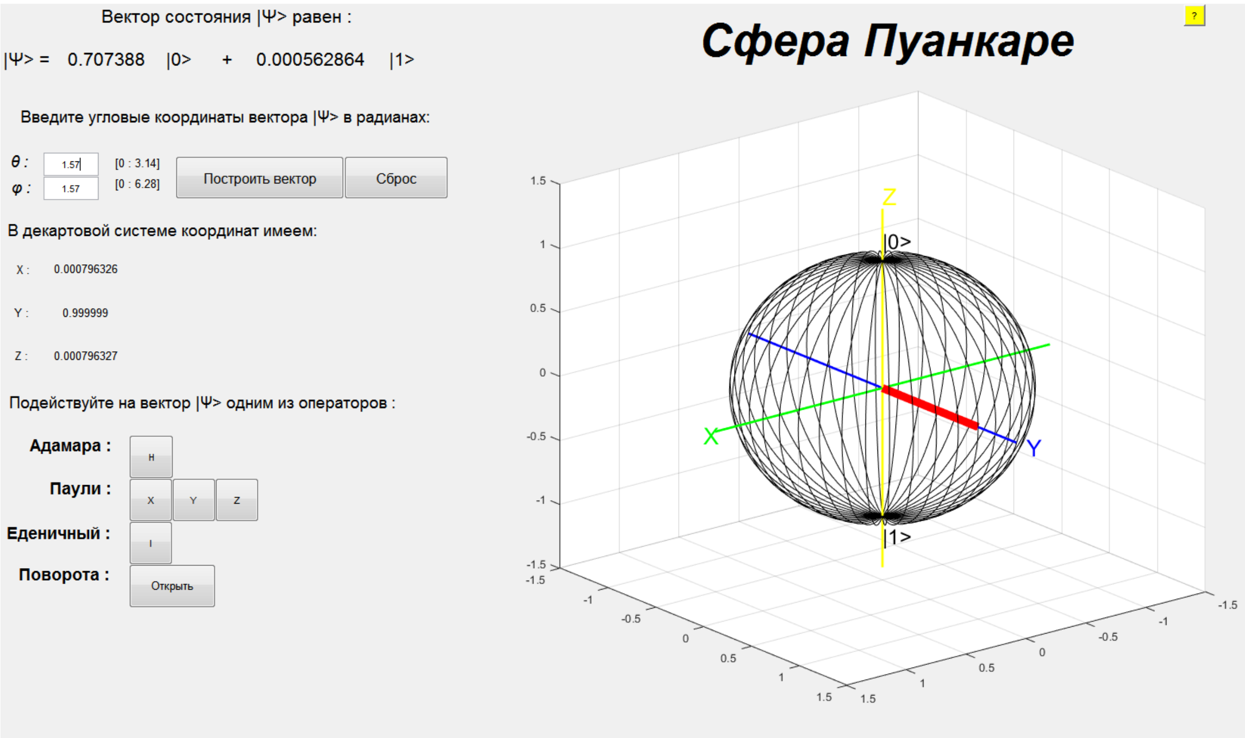


Рис 4 - Интерфейс виртуальной лабораторной работы

После нажатия по кнопке построить вектор открывается доступ к квантовым операторам, с помощью которых можно воздействовать на вектор |ψ> для наглядного изучения динамики кубита.

Так же выводится информация по значением координат x, y, и z в декартовой системе.

По нажатию на кнопку оператора, вектор переместится. Динамику перемещения вектора |ψ> в сфере Пуанкаре можно наблюдать в процессе его движения.

Так же можно открыть подменю нажатием кнопки открыть, для отображения возможности воздействия на вектор |ψ> операторами поворота.

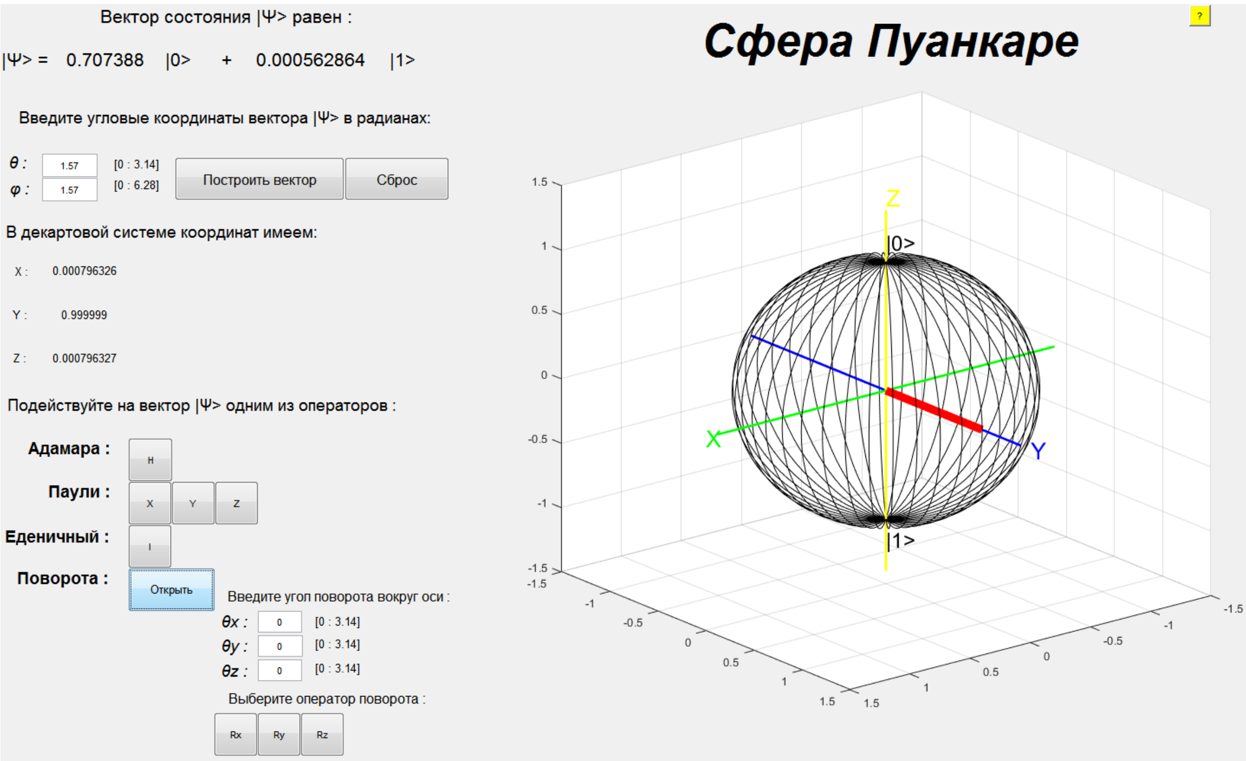


Рис 5 - Интерфейс виртуальной лабораторной работы

Задавая различные значения углов поворота, мы можем наблюдать за динамикой кубита под воздействием операторов поворота.

Данная виртуальная лабораторная работа наглядно демонстрирует динамику перемещения кубита , а использованная анимация движения вектора $|\psi>$ помогает лучше понять материал данной темы.